

Uma Introdução aos Problemas Inversos



UFRGS
PROPESQ

XXVI SIC

Salão Iniciação Científica

CET - Ciências Exatas e da Terra

Aluno: Oliver Hung Buo Tso ¹

Orientadora: Liliane Basso Barichello ²

1. Bacharelado em Matemática Aplicada Computacional, UFRGS

2. Instituto de Matemática, UFRGS

INTRODUÇÃO

■ O conhecimento de medidas de grandezas que representam uma relação entre a luz incidente e refletida em uma rocha contribui na determinação de um parâmetro importante, conhecido como **coeficiente de absorção de radiação**, associado a descrição dos diferentes minérios que compõem a rocha.

■ O estudo da determinação de parâmetros a partir de medidas conhecidas se insere em uma classe de problemas chamados de **problemas inversos**.

■ Segundo Hadamard, para que um problema seja bem-posto, é necessário satisfazer todas as seguintes condições:

- ter solução;
- a solução ser única;
- a solução depender suavemente dos dados.

E em geral, problemas inversos são **problemas mal-postos**.

OBJETIVO

■ Introduzir os estudos de **problemas inversos** a partir de casos modelados por sistemas lineares, descritos por uma equação matricial $Ax = b$, onde A é uma matriz de coeficientes, x é um vetor de estímulos (entradas) e b um vetor de reações (saídas). Algumas dificuldades e questões abordadas dizem respeito a:

- conhecimento de grande número de medidas (vetor b) com relação ao número de parâmetros a serem determinados (A);
- erros de medições nos dados (vetor b) que podem causar grandes variações nos resultados (vetor x).

METODOLOGIA

■ Como o estudo envolve sistemas lineares ($Ax = b$), foram estudados alguns métodos iterativos para solução de sistemas como método de Jacobi e método de Gauss-Seidel. Técnica com mínimos quadrados foi usada devido a situação de dados em demasia.

■ Foram utilizadas linguagem de programação **Fortran 95** e o software **Matlab** para implementar programas que pudessem, por exemplo, analisar o **condicionamento** (uma medida do malcondicionamento no caso de sistemas lineares) de uma matriz A , por exemplo: uma **pequena variação** no vetor b pode causar uma **diferença significativa** no vetor x se a matriz for malcondicionada.

ALGUNS RESULTADOS

■ A **matriz de Hilbert** é um exemplo clássico de matrizes **malcondicionadas**.

■ A tabela abaixo apresenta alguns valores de condicionamento da matriz de Hilbert retirados da referência [2]; e obtidos pelos programas que implementamos em Fortran 95 e Matlab.

n	Referência [2]	Programa Fortran 95	Matlab
1	1.00000×10^0	1.00000×10^0	1.0000×10^0
3	7.48000×10^2	7.40667×10^2	7.4800×10^2
5	9.43656×10^5	9.43528×10^5	9.4366×10^5
7	9.85195×10^8	9.85185×10^8	9.8519×10^8
9	1.09965×10^{12}	1.09965×10^{12}	1.0997×10^{12}

■ Abaixo mostramos dois cálculos de sistemas lineares envolvendo uma matriz de Hilbert de ordem 4. O vetor x é a solução exata de $Ax = b$; porém, uma variação de **0,01** no terceiro elemento do vetor b altera **significativamente** o resultado.

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1666 & 0.1428 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2.0833 \\ 1.2833 \\ \mathbf{0.9500} \\ 0.7595 \end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 \\ 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 & 0.1667 \\ 0.2500 & 0.2000 & 0.1666 & 0.1428 \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} 2.0833 \\ 1.2833 \\ \mathbf{0.9600} \\ 0.7595 \end{bmatrix} \rightarrow x' = \begin{bmatrix} 3.4000 \\ -26.0000 \\ 65.8000 \\ -41.0000 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

■ No presente trabalho um estudo preliminar foi feito sobre alguns aspectos envolvidos em Problemas Inversos, como o caso de sistemas malcondicionados, cujas soluções não trazem informações esperadas ou relevantes ao problema.

■ Como continuidade, técnicas de tratamento de tais aspectos bem como aplicação em problemas de estimativa de coeficientes de absorção em problemas de radiação, serão investigados.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. Antônio José da Silva Neto e Francisco Duarte Moura Neto, *Problema Inverso: Conceitos Fundamentais e Aplicações*, ed. Rio de Janeiro: EdUERJ - Editora da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2005. v. 1. 82p.
- [2]. Frederico Ferreira Campos, *Algoritmos Numéricos*, 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2007. v. 1. 444p.