

# Solução numérica para a equação do transporte radiativo

Guilherme Lorenzatto Volkmer, Orientador: Esequia Sauter  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul



## Introdução

A descrição matemática do transporte de partículas como nêutrons, fótons, elétrons e moléculas através da matéria é geralmente chamada de Teoria de Transporte. Problemas em transporte foram intensamente investigados no último século, sobretudo no período entre 1939 e 1964, devido em parte a motivação que advinha da pressão para construir reatores nucleares. Atualmente, a teoria continua incompleta dos pontos de vista analítico e numérico. A complexidade das equações envolvidas motivou o estudo de casos onde a geometria do problema oferece alguma simetria. O presente trabalho aborda o caso estacionário onde a geometria é uma faixa tridimensional contida entre dois planos,  $y=0$  e  $y=L$ , e o núcleo de espalhamento é isotrópico. Nesse contexto, equação do transporte assume uma versão unidimensional e é dada por:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I = \frac{\sigma'}{2} \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu + Q(y, \mu) \quad (1)$$
$$I(\mu, 0) = B_0 \quad \mu > 0$$
$$I(\mu, L) = B_L \quad \mu < 0$$

Onde  $0 \leq y \leq L$  é a variável espacial,  $\mu$  é o cosseno do ângulo formado entre a direção de propagação e o eixo  $y$  e  $Q(y)$  é o termo fonte. O coeficiente de extinção total e o coeficiente de espalhamento são denotados, respectivamente, por  $\lambda$  e  $\sigma$ .

## Aplicações

O transporte radiativo desempenha um papel proeminente em diversas aplicações em física e engenharia. São especialmente importantes quando altas temperaturas estão envolvidas. Isso decorre do fato que condução e convecção são geralmente bem descritas com uma dependência linear da temperatura, enquanto a radiação é proporcional a quarta (ou maior) potência da temperatura. Algumas aplicações são listadas abaixo.

- ▶ Atmosferas estelares
- ▶ Reentrada de veículos espaciais
- ▶ Combustão em turbinas de gás
- ▶ Radioterapia com feixes de fótons.

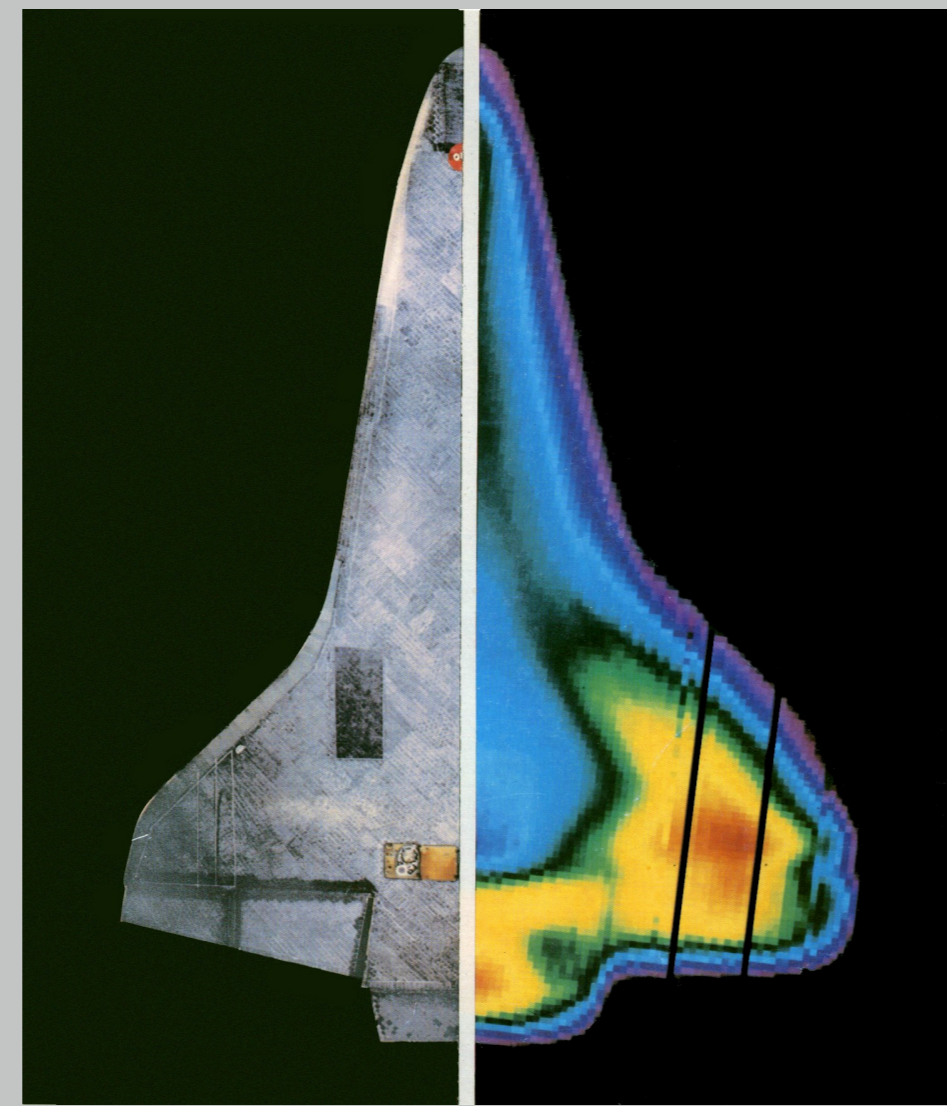


Figure 1: Análise térmica do Ônibus Espacial Columbia

## Método

O método das ordenadas discretas foi escolhido para resolver a equação (1). Nesse método escolhe-se um certo conjunto de direções e substitui-se a integração angular por uma quadratura numérica. A quadratura adotada foi Gauss-Legendre.

$$\int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu = \sum_{j=-M}^M \omega_j I_j(y) \quad (2)$$

Usando essa discretização a equação (1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mu_i \frac{\partial I_i}{\partial y} + \lambda' I_i = \frac{\sigma'}{2} \sum_{l=-M}^M \omega_l I_l(y) + Q_i(y), \quad i = -M, \dots, M \quad (3)$$
$$I_i(0) = B_0 \quad \mu_i > 0$$
$$I_i(L) = B_L \quad \mu_i < 0$$

Onde  $\mu_i$  e  $\omega_l$  são as ordenadas e pesos da quadratura de Gauss-Legendre. O ambiente escolhido para desenvolver o processo iterativo foi o *software Scilab*. O código foi sendo aprimorado com um número maior de ordenadas e pesos. Sua versão final que é usada na comparação na tabela 1 utiliza 512 ordenadas e pesos e possui uma discretização espacial com 200 intervalos.

## Resultados

Os resultados obtidos foram comparados com os presentes em [3] e estão agrupados na tabela abaixo. Para seguir a análise presente no artigo os coeficientes de extinção total e espalhamento são igualados a 1. As soluções obtiveram 5 algarismos significativos de precisão.

Método	$I(0)$	$I(0.2)$	$I(0.4)$	$I(0.6)$	$I(0.8)$	$I(1)$
Ordenadas.D	3.5147	4.1934	4.3069	4.1662	3.8209	3.1963
LTS <sub>300</sub>	3.514736	4.193457	4.306992	4.162764	3.820951	3.196350
GFD <sub>400</sub>	3.514725	4.193456	4.306991	4.162763	3.820951	3.196338
GFD <sub>800</sub>	3.514742	4.193467	4.307001	4.162773	3.820960	3.196349

Table 1: Resultados

## Linearmente Anisotrópico e Trabalhos futuros

A ideia é evoluir generalizando o problema. O caso linearmente anisotrópico já foi tratado em processo semelhante ao isotrópico. Esse problema é regido pela seguinte equação:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\sigma_1 + \sigma_2 \mu \mu') I(y, \mu') d\mu' + Q(y, \mu) \quad (4)$$
$$I(\mu, 0) = B_0 \quad \mu > 0$$
$$I(\mu, L) = B_L \quad \mu < 0$$

O problema linearmente anisotrópico sob as mesmas condições da tabela 1 gera os seguintes resultados:

Método	$I(0)$	$I(0.2)$	$I(0.4)$	$I(0.6)$	$I(0.8)$	$I(1)$
Ordenadas.D	5.5909	7.1464	7.6323	7.4629	6.7092	5.1909

Table 2: Resultados caso linear

Para comparar os resultados obtidos no caso linearmente anisotrópico com os presentes na literatura ainda são necessários certos refinamentos advindos principalmente do uso de parâmetros diferentes. No futuro a proposta é acoplar os problemas de transporte aos de difusão.

## Referências

- [1] M. F. Modest. *Radiative Heat Transfer*. Acad. Press, San Diego, second edition, 2003.
- [2] K.M.Case;P.F.Zweifel. *Linear transport theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1967.
- [3] E. Sauter, F. S. Azevedo, M. Thompson, and M. T. Vilhena. Solution of the one-dimensional transport equation by the vector green function method: Error bounds and simulation. *Applied Mathematics and Computation*, 219(24):11291–11301, 2013.
- [4] J. J. Duderstadt; W.R.Martin. *Transport Theory*. John Wiley and Sons, New York, first edition, 1978.
- [5] C.Constanda;B.E.J.Bodmann;H.F.C.Velho. *Integral Methods in Science and Engineering: Progress in Numerical and Analytic Techniques*. Springer, New York, first edition, 2013.

## Agradecimentos

- ▶ O autor gostaria de agradecer ao Professor Esequia Sauter pela oportunidade, paciência e contribuição direta no desenvolvimento acadêmico do aluno e também ao Professor Fábio Souto de Azevedo pelos valiosos conhecimentos transmitidos.

## Contato

- ▶ Email: volkmer.guilherme@gmail.com