

Simulações Numéricas para Problemas Conductivos-Radiativos

Roberto Isoppo Rodrigues, Esequia Sauter

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Instituto de Matemática

roberto.ir@hotmail.com, esequia.sauter@ufrgs.br

Introdução

Este trabalho visa aprofundar os conhecimentos e metodologias de soluções da equação do calor com contribuição da intensidade radiativa. Esse modelo tem vasta aplicação em problemas de física e engenharia em fenômeno com transporte de calor por condução e radiação. Observa-se que é necessário um tratamento numérico para a solução da equação, considerando que a mesma tem solução analítica possível somente para casos particulares. Sendo assim, procuramos boas formas de tratamento numérico do problema para solucionar a equação. Iniciando o tratamento do problema de condução de calor linear com alguns conjuntos de parâmetros. Posteriormente, trabalhamos com a equação do calor não linear, incluindo termo fonte proporcional a temperatura na quarta potência, e apresentamos os resultados na forma gráfica. A temperatura T de um fluido sujeito a transferência de calor por condução, convecção e radiação em um região convexa $D \in \mathcal{R}^3$ pode ser modelada pela equação:

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k_0 \nabla T) + c_v \mathbf{v} \cdot \nabla T = - \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \kappa' (B(\nu, T) - I) d\Omega d\nu, \quad x \in D, t > 0, \quad (1)$$

onde \mathbf{v} é o campo de velocidades, que assumimos conhecido, S^2 é a esfera unitária em \mathbb{R}^3 , c_v é a capacidade calorífica volumétrica, definida como $c_v = c_m \rho_m$, com c_m o calor específico e ρ_m a densidade de massa. Na equação (1), k_0 é a condutividade térmica e I a intensidade radiativa. Temos a seguinte condição de contorno.

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial \eta} = h(T_b - T) + \alpha \pi \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, \quad x \in \partial D, t > 0,$$

Onde h e α são constantes positivas, η_2 é o índice de refração externo ao meio.

Simplificações

- Considerando um problema unidimensional:

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k_0 \nabla T) = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{x^2}$$

Para fins de resolução, as constantes foram aglutinadas e consideradas igual a 1, posteriormente elas serão readicionadas ao problema

- A advecção foi desconsiderada ($\mathbf{v} = 0$), já que não é objetivo deste trabalho.
- O problema foi desacoplado do problema de transporte radiativo considerando o lado direito da (1) um termo fonte.
- Na fronteira, a temperatura é conhecida e não há dependência da reflexão ($\alpha = 0$) e foi adotada a Condição de Contorno de Dirichlet ($T = T_b$), não havendo variação de temperatura quanto ao sentido ou a direção

Metodologia

Para alcançar estes resultados foi utilizado o Método de Crank-Nicolson no tempo e o Método das Diferenças Finitas no espaço. Para o problema não-linear, onde o termo fonte igual a temperatura na quarta potência, foi utilizado o Método de Newton-Raphson para a resolução. Estes métodos foram todos implementados no software Scilab. Também foi aplicado o método TDMA (Algoritmo Matricial Tri-Diagonal de Thomas) para aprimorar a qualidade do tratamento numérico do problema.

Problema Inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(y, t) - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(y, t) &= 1 & y \in (0, 1), t > 0 \\ T(0, t) &= 100, & t > 0 \\ T(1, t) &= 30, & t > 0 \\ T(y, 0) &= 150, & y \in (0, 1) \end{aligned}$$

Usando a seguinte discretização:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} \\ T_{xx} &= \frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1} + T_{j-1}^k - 2T_j^k + T_{j+1}^k}{2\Delta x^2} \end{aligned}$$

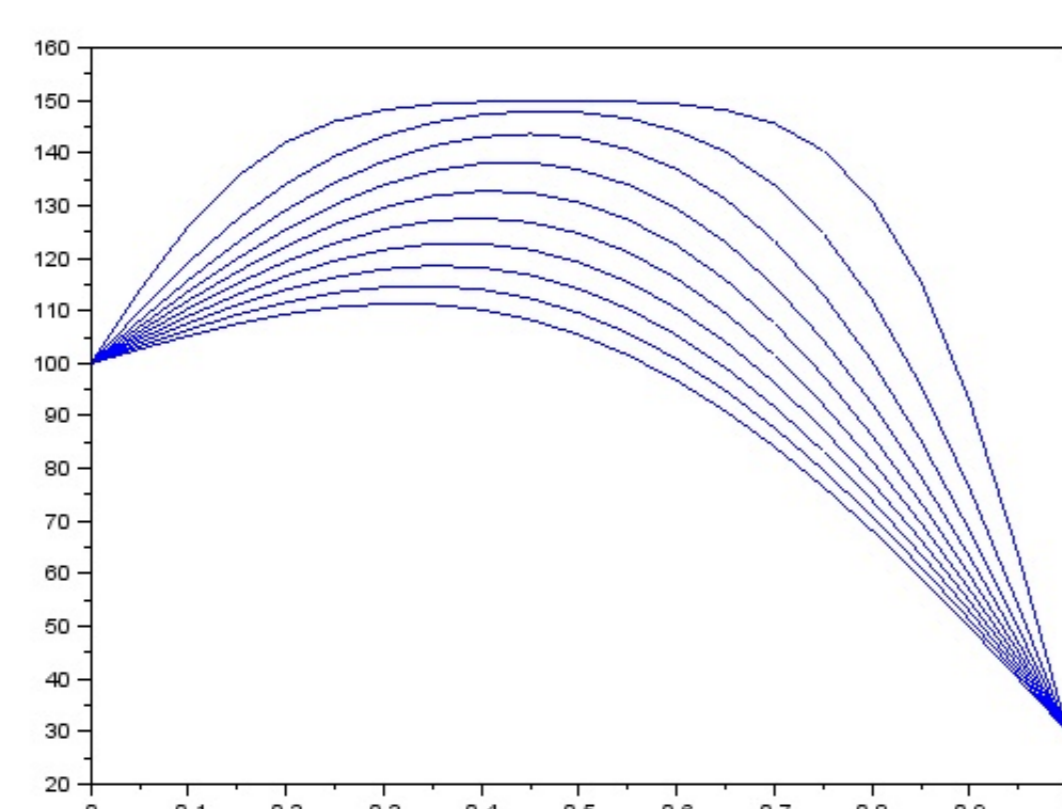


Figura 1: Resolução do Problema Inicial

Segundo Problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(y, t) - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(y, t) &= T & y \in (0, 1), t > 0 \\ T(0, t) &= 100, & t > 0 \\ T(1, t) &= 30, & t > 0 \\ T(y, 0) &= 150, & y \in (0, 1) \end{aligned}$$

Usando a seguinte discretização:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} \\ T_{xx} &= \frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1} + T_{j-1}^k - 2T_j^k + T_{j+1}^k}{2\Delta x^2} \\ T &= \frac{T_j^k + T_j^{k+1}}{2} \end{aligned}$$

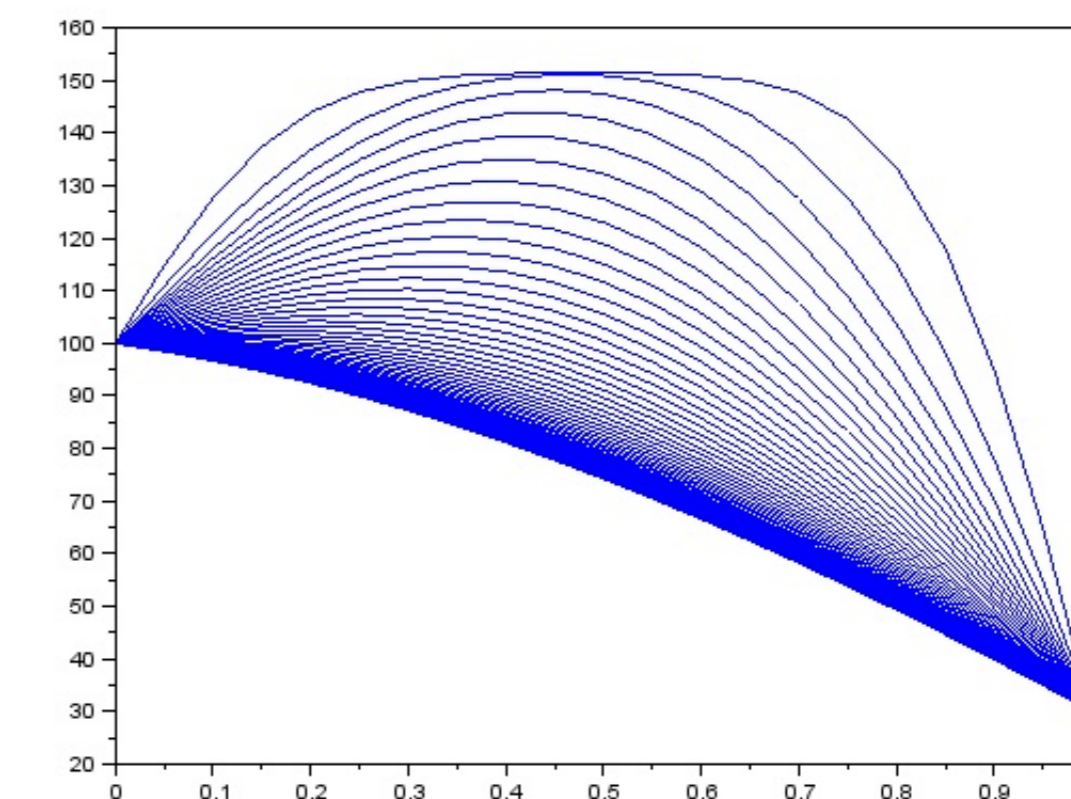


Figura 2: Resolução do Segundo Problema

Problema Não-Linear

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(y, t) - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(y, t) &= T^4 & y \in (0, 1), t > 0 \\ T(0, t) &= 100, & t > 0 \\ T(1, t) &= 30, & t > 0 \\ T(y, 0) &= 150, & y \in (0, 1) \end{aligned}$$

Usando a seguinte discretização:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{T_j^{k+1} - T_j^k}{\Delta t} \\ T_{xx} &= \frac{T_{j-1}^{k+1} - 2T_j^{k+1} + T_{j+1}^{k+1} + T_{j-1}^k - 2T_j^k + T_{j+1}^k}{2\Delta x^2} \\ T^4 &= \frac{(T_j^k + T_j^{k+1})^4}{10000000} \end{aligned}$$

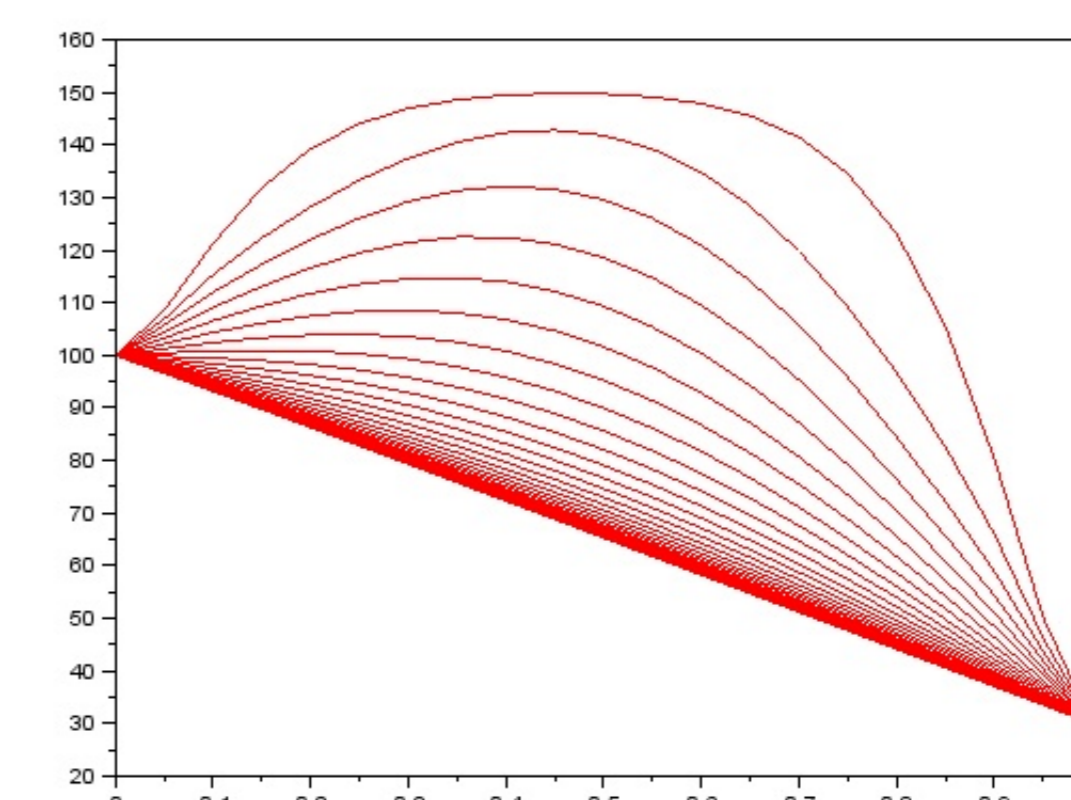


Figura 3: Resolução do Problema Não-Linear

Implementação do TDMA

Considerando que o problema em questão é tri-diagonal, foi implementado a solução utilizando o Algoritmo de Thomas, ou TDMA (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm* ou Algoritmo Matricial Tri-Diagonal). Este consiste em não salvar os zeros da matriz, mas somente os valores das três diagonais que serão usados na resolução do sistema. O resultado obtido é o mesmo, entretanto requer menor esforço computacional.

Aprimoramentos e Prosseguimento do Trabalho

- Será mudada a plataforma do Scilab para a linguagem C
- Mudanças nas condições de contorno para aproximar o problema trabalhado do problema principal
- Acoplamento com problema de transporte

Referências

- [1] Frank, M., Seaïd, M., Klar, A., Rinnam, R., Thömmes, G., 2004. A comparison of approximate models for radiation in gas turbines. Prog. Comput. Fluid Dynam. 4, 191–197.
- [2] Gunther, R.B., Lee, J.W., 1996. Partial Differential Equation of Mathematical Physics and Integral Equations, second ed. Dover Publications, New York.
- [3] Larsen, E.W., Thömmes, G., Klar, A., Seaïd, M., Götz, T., 2002. Simplified PN approximations to the equations of radiative heat transfer and applications. J. Comput. Phys. 183, 652–675.
- [4] Modest, M.F., 2003. Radiative Heat Transfer, second ed. Academic Press, San Diego.
- [5] Thompson, M., Vilhena, M.B.B., 2008. Existence theory for radiative flows. Transp. Theory Stat. Phys. 37, 307–326.