

Dispersão e confinamento de uma distribuição de massa com autointeração gravitacional

Marion Silvestrini

Orientadora: Carolina Brito

Co-orientador: Leonardo Brunnet

IF-UFRGS

marion93@gmail.com



Introdução

Atualmente, não há uma teoria que consiga unificar a gravitação e a mecânica quântica, e dada a diferença das escalas de energia, medidas diretas de gravitação quântica não são possíveis, pelo menos para um futuro próximo. Assim sendo, é útil tentar usar algum tipo de aproximação semi-clássica para entender como a gravidade interage com a matéria. Nesta aproximação, descrevemos um campo gravitacional newtoniano clássico mas impomos que a matéria tenha um comportamento quântico.

Considerando uma distribuição de massa com uma autointeração gravitacional, denotando a massa por m e a densidade de massa por ρ , o potencial gravitacional Φ satisfaz a equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (1)$$

onde G é a constante de Newton. Como estamos impondo que a matéria seja descrita pela dinâmica quântica, então a densidade de matéria é dada por $\rho = |\Psi|^2$, onde Ψ é a função de onda que satisfaz a equação de Schrödinger.

Combinando esses fatores, temos a equação de Schrödinger-Newton (SN):

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + m\Phi\right)\Psi(\mathbf{r},t) \quad (2)$$

Metodologia

Considerando simetria esférica, conseguimos diminuir os graus de liberdade para apenas a coordenada de posição r . Inicializamos a distribuição de massa como um pacote de onda gaussiana com largura inicial σ .

É conveniente reescrever as unidades em função de G , \hbar e σ :

- A distância será dada por unidades de σ
- $t_r = (\sigma^5/G\hbar)^{1/3}$ será a unidade de tempo
- $m_r = (\hbar^2/G\sigma)^{1/3}$ a unidade de massa.

Usamos o método de Crank-Nicholson [1] para discretizar a eq. (2) e fizemos simulações numéricas para estudar a equação de Schrödinger-Newton.

Revisão

Se a massa for pequena, o pacote de onda tende a se dispersar como uma onda plana, assintoticamente. Caso a massa seja suficientemente grande, então a interação da gravidade pode provocar uma inibição na dispersão e assim o pacote irá se confinar. Logo, definimos uma massa crítica m_c como o valor de massa onde o termo potencial e cinético se equivalem.

Em [2], [3], [4], os autores encontram m_c igualando a aceleração do pico do pacote de onda à aceleração gravitacional e obtêm

$$m_c = \left(\frac{\hbar^2}{G\sigma}\right)^{1/3} \quad (3)$$

Os estudos computacionais feitos por [2] e [4] concordam com esta previsão.

A figura 1 foi realizada a partir de várias simulações numéricas. Vemos que, se $m > m_c$, então o pacote tem uma oscilação, como mostrada na figura 1 (inferior direita), ou seja, o pacote fica oscilando ao redor de um ponto de equilíbrio. A figura 1 (superior direita) mostra um pacote de onda dispersando, de onde se conclui que $m < m_c$.

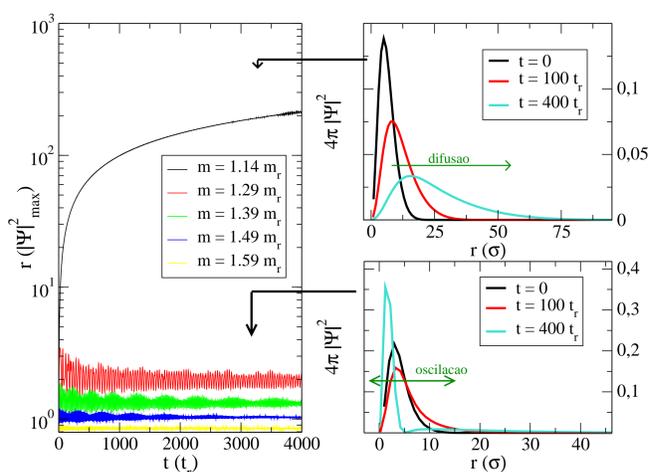


Figura 1: À esquerda: valor da posição do pico do pacote de onda quando a probabilidade radial ($4\pi|\Psi|^2$) é máxima, em função do tempo. À direita: probabilidade radial em função da posição.

Se $\sigma = 5 \times 10^{-7}m$ então temos $m_c \sim 10^9$ unidades de massa atômica (u.m.a.). Porém, esse valor é de, aproximadamente, 5 ordens de magnitude maior que as possibilidades experimentais atuais.

Resultados

Se iniciamos o sistema com duas gaussianas, uma centrada em $R_1 = 0$ e outra em $R_2 = 10\sigma$, as simulações mostram o resultado apresentado na figura 2. Se considerarmos a massa crítica como sendo a massa para a qual o pacote de onda começa a se confinar, vemos que $m_c \approx 1.29 m_r$.

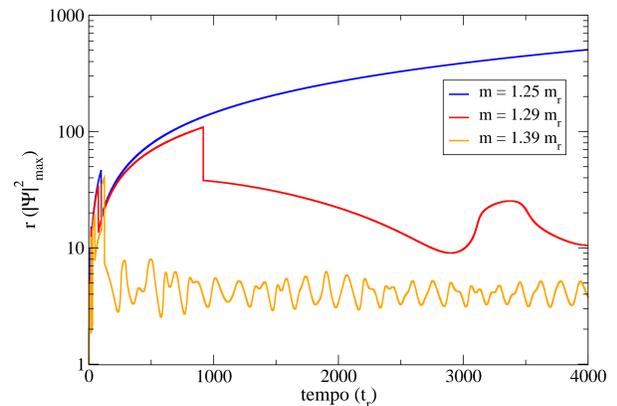


Figura 2: Posição do pico do pacote de onda quando a probabilidade radial é máxima para três massas diferentes.

Se refizermos a figura 1 para tentar encontrar um valor aproximado de massa crítica, vemos que $m_c \approx 1.18 m_r$. Ou seja, a massa crítica nestes dois casos é diferente. Visto isso, nossa proposta é iniciar o sistema com dois pacotes de onda gaussianas, um centrado em $R_1 = 0$ e outro em R_2 variando entre $(0, \infty)$ (a função de onda completa é normalizada), e ver se existe algum valor de massa inferior a $m_c \approx 1.29 m_r$ para algum determinado R_2 .

Para obter os resultados analíticos, fazemos uma aproximação no qual é usada a distribuição de massa no tempo zero. As simulações são feitas para o sistema completo. Assim, encontramos os seguintes gráficos.

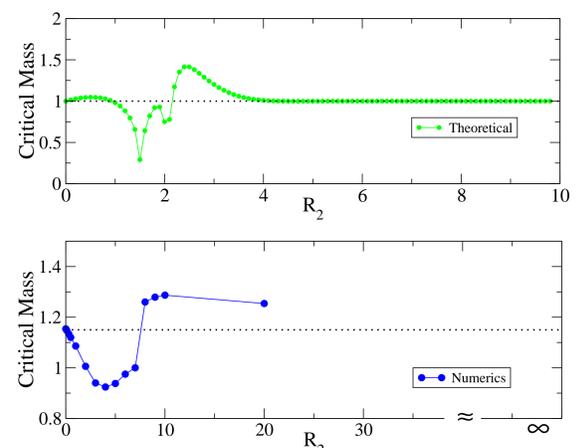


Figura 3: Cálculo analítico e numérico de m_c em função de R_2 .

A figura 3 mostra que existe uma concordância qualitativa entre a curva teórica e a numérica, pois ambos mostram que a dependência de m_c com R_2 não é monotônica e que, em particular, m_c apresenta um valor mínimo global em ambos casos. O desacordo entre as curvas ocorre porque estas duas abordagens são calculadas em $t = 0$ e porque muitas aproximações são utilizadas nos cálculos.

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi estimar um valor mínimo da massa crítica quando se tem um sistema inicial com duas gaussianas descrevendo uma distribuição de massa. Foi resolvida numericamente a equação de Schrödinger-Newton usando uma aproximação semi-clássica. Os resultados mostraram que:

- A massa crítica depende das condições iniciais.
- É possível ter uma condição inicial cuja massa crítica seja menor que a massa crítica obtida com apenas um pacote de onda gaussiana.

Este é um resultado notável, pois, com apenas uma gaussiana, $m_c \sim 10^9$ u.m.a. e esse é um valor de massa muito grande e difícil de testar com a tecnologia de hoje em dia, mas, a figura 3 nos mostra que, quando variamos R_2 temos um mínimo global, o que nos sugere que, talvez com alguma condição inicial especial, é possível criar um sistema que seja testável. Porém, mesmo tendo um mínimo global, essa massa continua sendo muito grande, da ordem de 90% do valor de m_c para duas gaussianas e, portanto, ainda não experimentalmente.

Referências

- [1] Alejandro L Garcia. Numerical methods for physics. 2006.
- [2] Domenico Giulini and André Großardt. Gravitationally induced inhibitions of dispersion according to the schrödinger-newton equation. *Classical and Quantum Gravity*, 28(19):195026, 2011.
- [3] Peter Jay Salzman and Steve Carlip. A possible experimental test of quantized gravity. *arXiv preprint gr-qc/0606120*, 2006.
- [4] JR van Meter. Schrödinger-newton 'collapse' of the wavefunction. *Classical and Quantum Gravity*, 28:215013, 2011.