

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
CENTRO ESTADUAL DE PESQUISA EM SENSORIAMENTO REMOTO E  
METEOROLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SENSORIAMENTO REMOTO

**SOBRE A TÉCNICA *FAST COLLOCATION*  
(COLOCAÇÃO RÁPIDA) NA  
DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE DO ESTADO  
DE SÃO PAULO UTILIZANDO DADOS DAS  
MISSÕES CHAMP E GRACE**

ALEXANDRE DE PAULA ALVES

Orientador: Prof. Dr. Sergio Florêncio de Souza

Porto Alegre (RS), Junho de 2007

Dissertação de Mestrado apresentada  
ao Programa de Pós-Graduação em  
Sensoriamento Remoto como requisito  
Para obtenção do Título de Mestre

**ALEXANDRE DE PAULA ALVES**

Sobre a Técnica *Fast Collocation* (Colocação Rápida)  
na Determinação do Geóide do Estado de São Paulo  
Utilizando Dados das Missões CHAMP e GRACE

**Porto Alegre – RS  
2007**

(Esta página é deixada intencionalmente em branco)

Dedico este trabalho aos meus pais, Arlindo (*in memoriam*) e Hilda de Paula, que sempre me mostraram que o estudo é a melhor escolha;  
ao Alberto, o futuro “mestrinho”;  
aos meus irmãos, Alionso e Edmar, e minhas irmãs, Rejane e Rosângela.  
Dedico igualmente este trabalho a minha namorada e futura esposa Elizabeth Sleiman.  
A ela o meu carinho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e pela capacidade de chegar até este momento; aos meus pais, Arlindo (*in memoriam*) e Hilda de Paula Alves, responsáveis pela minha educação e formação como cidadão; ao meu “filhote” Alberto; à Elizabeth, sempre companheira, e seus pais, Eli e Maria de Lourdes, que me receberam de braços abertos;

aos meus irmãos Alionso e Edmar; às minhas irmãs, Rosângela e Rejane; aos meus sobrinhos e sobrinhas; aos cunhados e cunhadas;

ao prof. Dr. Sérgio Florêncio de Souza, pela orientação, por me motivar a “encarar” o mestrado e abordar um tema recente e inédito aqui no Brasil; por “emprestar” um pouco de sua sabedoria a respeito de geodésia física, geóide, colocação por mínimos quadrados e programas de cálculo do geóide; por fornecer os dados e programas da Escola do Geóide do IGeS (GRAVSOFTE *package*). Principalmente, pelo apoio, amizade e confiança durante este período de mestrado;

ao CEPSSRM (UFRGS) pela oportunidade de realização do mestrado; aos professores do “Centro”; às secretárias Magdalena e Mônica e aos demais funcionários, servidores ou “terceirizados”; aos colegas Aline, Raquel, Lindolfo, Fabrício, Vivian, Celso e Analberto, pela convivência e pelas trocas de idéias;

ao CNPq pelo suporte financeiro integral durante a realização do curso de mestrado através de bolsa de estudos.

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b><u>INTRODUÇÃO</u></b> -----	<b>18</b>
1.1	PREÂMBULO -----	18
1.2	PROPÓSITO DO ESTUDO E CONTRIBUIÇÃO DO AUTOR -----	21
<b>2.</b>	<b><u>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u></b> -----	<b>22</b>
2.1	INTRODUÇÃO -----	22
2.2	POTENCIAL GRAVITACIONAL E POTENCIAL DE GRAVIDADE -----	22
2.3	POTENCIAL PERTURBADOR, DISTÚRBO DO POTENCIAL OU POTENCIAL ANÔMALO ( $T$ )-----	26
2.4	O POTENCIAL ANÔMALO ( $T$ ) COMO UM ELEMENTO DO ESPAÇO DE HILBERT -----	27
2.5	COEFICIENTES DOS HARMÔNICOS ESFÉRICOS -----	31
2.6	REDUÇÕES E ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS -----	37
2.6.1	Correção atmosférica-----	40
2.6.2	Correção ar-livre ( <i>Free Air Correction</i> )-----	42
2.6.3	Correção Bouguer -----	44
2.6.4	Anomalia de Helmert -----	46
2.6.5	Correção de terreno-----	47
2.7	EXPANSÃO DA ANOMALIA GRAVIMÉTRICA ( $\Delta g$ ) EM HARMÔNICOS ESFÉRICOS-----	50
<b>3.</b>	<b><u>TÉCNICAS USADAS NA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE</u></b> -----	<b>54</b>
3.1	INTEGRAL DE STOKES -----	54
3.1.1	Integração numérica-----	55
3.1.2	Convolução (FFT)-----	57
3.2	OBTENÇÃO DIRETA DA ALTURA GEOIDAL ( $N$ ) ATRAVÉS DE NIVELAMENTO E GPS -----	57
3.3	COLOCAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS -----	59
3.3.1	Modelo matemático da CMQ-----	61
3.3.2	Função covariância -----	67
3.3.3	Covariâncias esféricas -----	68
3.3.4	Modelagem da função covariância esférica-----	71
3.4	<i>FAST COLLOCATION</i> (COLOCAÇÃO RÁPIDA)-----	72
3.4.1	Estrutura Toeplitz da matriz de covariância -----	73
3.5	TÉCNICA REMOVER-CALCULAR-REPOR ( <i>REMOVE-RESTORE</i> ) -----	83

<b><u>4.</u></b>	<b><u>SENSORIAMENTO REMOTO E OS MODELOS GEOPOTENCIAIS</u></b>	<b><u>84</u></b>
<b>4.1</b>	<b>SENSORIAMENTO REMOTO</b>	<b>84</b>
4.1.1	Caracterização de um sistema sensor	85
<b>4.2</b>	<b>MODELOS GEOPOTENCIAIS</b>	<b>88</b>
<b>4.3</b>	<b>MISSÕES GRAVIMÉTRICAS ESPACIAIS CHAMP, GRACE E GOCE</b>	<b>91</b>
4.1.1	CHAMP ( <i>CHALLENGING Minisatellite Payload</i> )	91
4.1.2	GRACE ( <i>Gravity Recovery And Climate Experiment</i> )	94
4.1.3	GOCE ( <i>Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer</i> )	96
<b><u>5.</u></b>	<b><u>DADOS UTILIZADOS</u></b>	<b><u>100</u></b>
<b>5.1</b>	<b>DADOS DE GRAVIDADE</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>MODELO DO GEOPOTENCIAL</b>	<b>101</b>
<b>5.3</b>	<b>MODELO DIGITAL DE TERRENO</b>	<b>103</b>
<b>5.4</b>	<b>REFERÊNCIAS DE NÍVEL POSICIONADAS COM GPS</b>	<b>104</b>
<b><u>6.</u></b>	<b><u>CÁLCULO DO GEÓIDE NO ESTADO DE SÃO PAULO</u></b>	<b><u>105</u></b>
<b>6.1</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>114</b>
6.1.1	Erro “absoluto” do modelo GEÓIDESP_FC_2007	115
6.1.2	Comparação entre os modelos GEÓIDESP_FC_2007 e MDGR	115
<b><u>7.</u></b>	<b><u>UMA ABORDAGEM SOBRE O SENSORIAMENTO REMOTO QUE CONTEMPLA O CAMPO DE GRAVIDADE</u></b>	<b><u>121</u></b>
<b><u>8.</u></b>	<b><u>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</u></b>	<b><u>126</u></b>
<b><u>9.</u></b>	<b><u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u></b>	<b><u>128</u></b>

## LISTA DE FIGURAS

Fig.1: Superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre.....	19
Fig.2: Expansão em harmônicos esféricos de $V$ converge externamente à esfera de raio $r = r_0$ .....	37
Fig.3: Geóide, co-geóide e elipsóide .....	38
Fig.4: Atmosfera esfericamente simétrica .....	41
Fig.5: Deve ser conhecido o gradiente de gravidade ( $\frac{\partial g}{\partial H}$ ) entre o ponto $P$ e $P_0$ , afastados de uma altura $H$ .....	43
Fig.6: Platô de Bouguer .....	44
Fig.7: Integração numérica – a) Regra do trapézio, b) Método de Romberg e c) Regra de Simpson .....	56
Fig.8: Altura elipsoidal ( $h$ ), altura ortométrica ( $H$ ) e altura geoidal ( $N$ ).....	58
Fig.9: Triângulo esférico.....	69
Fig.10: Funções covariância empírica e analítica.....	72
Fig.11: <i>Grid</i> plano.....	76
Fig.12: <i>Grid</i> geográfico de pontos.....	79
Fig.13: Componentes de um sistema sensor.....	85
Fig.14: Sensores passivo (A) e ativo (B) .....	85
Fig.15: Imagem da plataforma dos satélites Landsat 1, 2 e 3 e algumas especificações	87
Fig.16: Campo de visada ( $\Omega$ ) do detector.....	87
Fig.17: Princípio de rastreamento satélite-a-satélite no modo alto-baixo.....	93
Fig.18: Princípio de rastreamento satélite-a-satélite no modo baixo-baixo .....	96
Fig.19: Princípio de rastreamento satélite-a-satélite no modo alto-baixo (com gradiômetro)	99
Fig.20: Distribuição dos dados gravimétricos dentro (retângulo azul) e fora da área de estudo.....	101
Fig.21: Cobertura dos dados de superfície, conjuntos 1 a 6; as linhas brancas marcam os dados de gravimetria por navio (conjunto de dados 7) sobre áreas com profundidade inferior a 2000 m; áreas brancas mostram porções onde não há cobertura de dados de superfície.....	103



Fig.22: Distribuição dos pontos da rede GPS no Estado de São Paulo e adjacências (área de estudo dentro do retângulo azul) .....	104
Fig.23: Modelo geoidal obtido exclusivamente dos dados do MG CG01c; intervalo das isolinhas 0,5m .....	106
Fig.24: Modelo geoidal obtido exclusivamente dos dados do MG CG01c, em perspectiva .....	107
Fig.25: Anomalias gravimétricas obtidas a partir do MG CG01c desenvolvido até o grau e ordem 180; intervalo das isolinhas 5 mGal.....	108
Fig.26: Modelo digital de anomalias gravimétricas terrestres (5' x 5'); intervalo das isolinhas 5 mGal .....	109
Fig.27: Anomalias gravimétricas residuais; intervalo das isolinhas 5 mGal.....	110
Fig.28: Geóide residual derivado das anomalias residuais via FASTCOL; intervalo das isolinhas 0,1 m .....	111
Fig.29: Modelo geoidal GEÓIDESP_FC_2007 obtido pela técnica <i>Fast Collocation</i> ; intervalo das isolinhas 0,5 m.....	112
Fig.30: Modelo geoidal GEÓIDESP_FC_2007 obtido pela técnica <i>Fast Collocation</i> , em perspectiva .....	113
Fig.31: Diferenças em altura geoidal entre os modelos GEÓIDESP_FC_2007 e MDGR; intervalo das isolinhas 0,1 m.....	117
Fig.32: Diferenças em altura geoidal entre os modelos GEÓIDESP_FC_2007 e MDGR, em perspectiva .....	118
Fig.33: Distribuição das unidades litoestratigráficas aflorantes do Grupo Bauru no Estado de São Paulo.....	119
Fig.34: Províncias geomorfológicas do Estado de São Paulo .....	120

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Estatísticas da comparação entre as alturas geoidais derivadas do MG CG01c e as alturas geoidais derivadas dos ponto de controle ( $N_{GPS} - N_{MG\_CG01c}$ ).....	114
Tabela 2: Estatísticas da comparação entre as alturas geoidais derivadas do modelo GEÓIDESP_FC_2007 e as alturas geoidais derivadas dos pontos de controle ( $N_{GPS} - N_{GEÓIDESP\_FC\_2007}$ ) .....	115
Tabela 3: Estatísticas da comparação entre os modelos GEÓIDESP_FC_2007 e MDGR ( $N_{GEÓIDESP\_FC\_2007} - N_{MDGR}$ ).....	116
Tabela 4: Acelerações não-gravitacionais ( $\frac{m}{s^2}$ ) .....	123

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Modelos do campo de gravidade derivados das missões gravimétricas espaciais CHAMP e GRACE .....	90
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

## LISTA DE SIGLAS

CEPSRM	Centro Estadual de Pesquisas em Sensoriamento Remoto e Meteorologia
CG01c	Modelo do geopotencial derivado das missões CHAMP e GRACE
CHAMP	<i>CHALLENGING Minisatellite Payload</i>
CMQ	Colocação por Mínimos Quadrados
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
COVFIT	Programa do pacote GRAVSOFTE utilizado para ajustar a função covariância
DLR	<i>Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt</i>
EGM 96	<i>Earth Gravitational Model</i>
EMPCOV	Programa do pacote GRAVSOFTE utilizado para determinação da função covariância empírica
ESA	<i>European Space Agency</i>
ESOC	<i>European Space Operations Center</i>
EUVN	<i>European Vertical Network</i>
FASTCOL	Programa <i>Fast Collocation</i> do pacote GRAVSOFTE
FC	<i>Fast Collocation</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
GFZ	<i>GeoForschungsZentrum Potsdam</i>
GGM	<i>Global Geopotential Model</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>

GOCE	<i>Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer</i>
GRACE	<i>Gravity Recovery and Climate Experiment</i>
GRAVSOF	GRAVSOF <i>Package</i> : Programas desenvolvidos em linguagem de programação FORTRAN pelo IGeS, fornecidos pela Escola do Geóide e destinados para a determinação do geóide
GRS80	<i>Geodetic Reference System 1980</i>
HEO	<i>High Earth Orbit</i>
IGeS	<i>International Geoid Service</i>
IAG	<i>International Association of Geodesy</i>
IAG/USP	Instituto Astronômico e Geofísico da Universidade de São Paulo
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IGSN71	<i>International Gravity Standardization Net 1971</i>
KBR	<i>K-Band Range System</i>
LEO	<i>Low Earth Orbit</i>
LSC	<i>Least Squares Collocation</i>
MDGR	Modelo Digital do Geóide Regular
MDT	Modelo Digital de Terreno
MG	Modelo do Geopotencial
MGCP	Método do Gradiente Conjugado Precondicionado
MTDB	Modelo Topográfico Digital do Brasil
MTDSP	Modelo Topográfico Digital do Estado de São Paulo
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>

NGDC	<i>United State National Geophysical Data Center</i>
OSU	<i>Ohio State University</i>
REM	Radiação Eletromagnética
RGFB	Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira
RN	Referência de Nível
RRNN	Referências de Nível
SP	Estado de São Paulo
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
WGS84	<i>World Geodetic System 1984</i>
REM	Radiação Eletromagnética

## LISTA DE SÍMBOLOS

$h$	Altura geométrica ou elipsoidal
$H$	Altura ortométrica
$grad$	Operador gradiente
$div$	Operador divergente
$N$	Altura geoidal
$V$	Potencial gravitacional da Terra real
$W_0$	Potencial de gravidade no nível do mar
$V_0$	Potencial gravitacional no nível do mar
$\bar{V}$	Potencial gravitacional teórico de um elipsóide com a mesma massa da Terra
$U$	Potencial normal
$\Phi$	Potencial centrífugo
$T$	Potencial perturbador, distúrbio do potencial ou potencial anômalo
$\xi, \eta$	componentes do desvio da vertical
$\delta N$	Varição da altura geoidal
$\delta W$	Varição no potencial de gravidade no geóide
$\delta V$	Varição no potencial gravitacional
$\Delta$	Laplaciano $(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z})$

$R$	Raio médio da Terra
$\gamma_0$	Gravidade normal na superfície do elipsóide de referência
$\psi$	Ângulo geocêntrico entre um ponto de interesse ( $P$ ) e o ponto utilizado na integração; na CMQ é utilizado como a distância esférica entre dois pontos
$S(\psi)$	Núcleo (esférico) da integral de Stokes
$\alpha$	Ângulo do azimute em torno do ponto de cálculo
$\delta g$	Efeito da atmosfera sobre a gravidade
$\Delta g$	Anomalia gravimétrica
$R_{AL}$	Correção ar-livre
$\Delta g_{AL}$	Anomalia gravimétrica ar-livre
$H_P$	Altura da estação no ponto $P$
$\rho$	Densidade
$g_B$	Gravidade Bouguer
$\Delta g_B$	Anomalia gravimétrica Bouguer
$R_{BS}$	Correção Bouguer simples ou incompleta
$R_{BC}$	Correção Bouguer completa
$\Delta g_H$	Anomalia gravimétrica de Helmert
$R_{CT}$	Correção de terreno
$G$	Constante universal da gravitação
$M$	Massa da Terra, incluindo as partes sólida, líquida e gasosa
$(r, \theta, \lambda)$	Coordenadas polares esféricas do ponto de cálculo
$\varphi$	Latitude
$\lambda$	Longitude



$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$	Coefficientes dos harmônicos esféricos plenamente normalizados de grau $n$ e ordem $m$ do geopotencial
$\bar{P}_{nm}$	Funções de Legendre plenamente normalizada
$\phi_k$	$k$ -ésima função base
$A$	Atração total devido às partes regular e irregular da topografia
$A^R, A^I$	Atração devido às partes regular e irregular, respectivamente, da topografia
$A_C$	Atração total da camada condensada
$A_C^R, A_C^I$	Atração devido às partes regular e irregular, respectivamente da topografia condensada
$\delta A$	Correção de terreno
$K(P, Q)$	Função covariância do potencial anômalo entre $P$ e $Q$
$C(P, Q)$	Função covariância correspondente à anomalia gravimétrica
$k_n, c_n$	Variâncias de grau do erro correspondente às funções covariâncias do potencial anômalo $K$ e das anomalias $C$ , respectivamente

## RESUMO

Os objetivos deste trabalho são: determinar o geóide do Estado de São Paulo (SP) pela técnica matemática *Fast Collocation* utilizando o modelo do geopotencial CG01c, derivado das novas missões gravimétricas de satélite CHAMP e GRACE, avaliar esse geóide através de estações com alturas geoidais conhecidas e do geóide calculado por Souza (2002), e apresentar uma nova abordagem que amplia a idéia sobre o sensoriamento remoto. O modelo do geopotencial CG01c, obtido com dados das missões CHAMP, GRACE e dados de superfície, e desenvolvido até o grau e ordem 360, foi utilizado para geração de anomalias gravimétricas, as quais foram subtraídas das anomalias gravimétricas terrestres, gerando as anomalias gravimétricas residuais. Essas anomalias residuais serviram de dados de entrada no programa FASTCOL para gerar as alturas geoidais residuais. A essas alturas geoidais residuais foi adicionado o modelo CG01c, representativo dos longos comprimentos de onda do campo de gravidade terrestre, produzindo-se o modelo geoidal chamado GEÓIDESP\_FC\_2007. Este geóide foi avaliado e posteriormente comparado com o Modelo Digital do Geóide Regular (MDGR). Ao final, argumentos foram apresentados para justificar o estudo do campo de gravidade da Terra no âmbito do sensoriamento remoto.

Palavras-chave: *Fast Collocation*, Geóide, Sensoriamento Remoto, Modelo do Geopotencial

## ABSTRACT

The objectives of this work are: to determine the geoid of the São Paulo (SP) State applying the mathematical technique so-called *Fast Collocation* using the CG01c geopotential model, from the new satellite gravity missions CHAMP and GRACE, to evaluate that geoid by stations with known geoidal heights and by the geoid determined by Souza (2002), and to show a new approach that enlarges the idea about the remote sensing. The CG01c geopotential model, obtained from missions CHAMP, GRACE and surface data, and developed up to degree and order 360, it was used to obtain the gravity anomalies, which were subtracted of the terrestrial gravity anomalies, yielding the residuals gravity anomalies. These residuals gravity anomalies it was input to the FASTCOL software to yield the residuals geoidal heights. The CG01c geopotential model, representative of the long wavelengths of the earth gravity field, was added to the residuals geoidal heights, yielding the geoid model so-called GEÓIDESP\_FC\_2007. This geoid was evaluated and later compared with the Modelo Digital do Geóide Regular (MDGR). At the end, arguments were presented to justify the study of the earth gravity field in the scope of the remote sensing

Keywords: *Fast Collocation*, Geoid, Remote Sensing, Geopotential Model

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Preâmbulo

Este capítulo é importante para aqueles que não são familiarizados com a geodésia e, em especial, com as pesquisas em geodésia física. Ele apresenta um breve resumo científico, além de apresentar o propósito do estudo e a motivação da dissertação.

A geodésia é uma das ciências mais antigas da humanidade, talvez tão antiga quanto a astronomia. A geodésia trata da determinação precisa de pontos na superfície terrestre e a determinação do campo de gravidade da Terra.

Como a Terra é um corpo que não possui uma forma geométrica definida, para determinação da “figura da Terra” são necessárias algumas aproximações matemáticas. Considerando que os oceanos cobrem aproximadamente 75% da superfície terrestre, parece óbvio escolher a superfície oceânica média como figura da Terra. Isso conduz a uma das definições mais importantes em geodésia, quiçá nas geociências, o *geóide*. O *geóide* é definido como a superfície equipotencial do campo de gravidade terrestre que mais se aproxima do nível médio dos mares não perturbados e prolongados sobre os continentes. Dentre as várias superfícies equipotenciais do campo de gravidade, chamadas *geópes*, a que tem maior importância para a geodésia física é o *geóide*. A Figura 1 ilustra algumas superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre, inclusive aquela correspondente ao *geóide*:

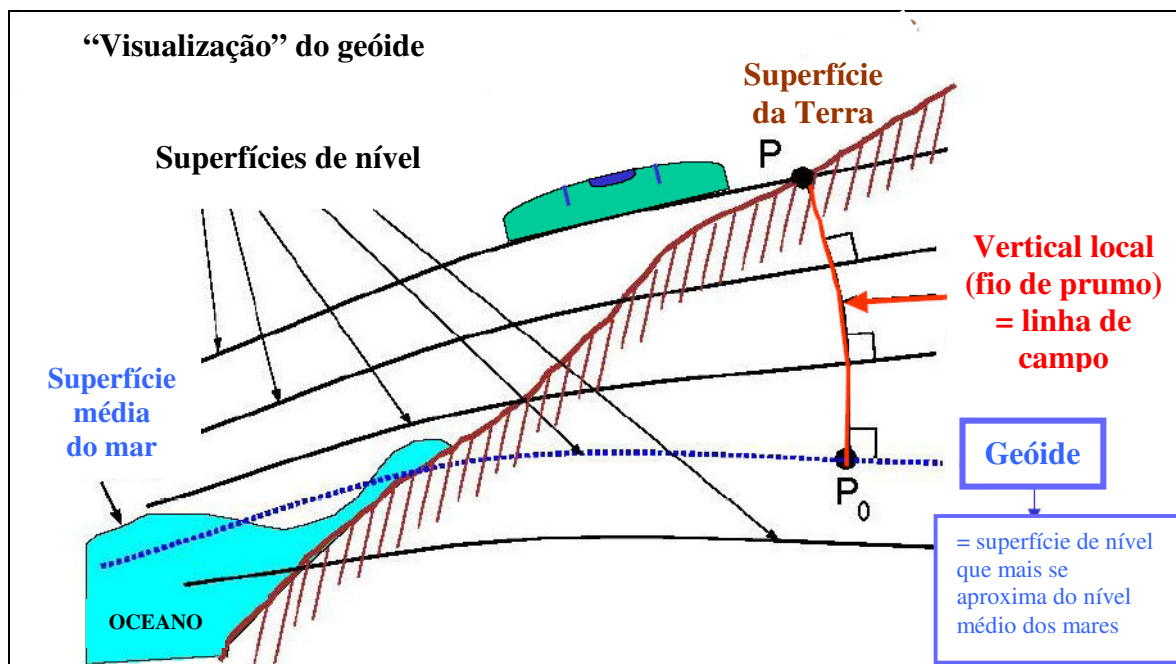


Fig.1: Superfícies equipotenciais do campo de gravidade terrestre

Fonte: (Adaptado de BALMINO, 2004)

O conhecimento do geóide pode revelar informações geofísicas (tectônica das placas, convecção do manto, etc.) e oceanográficas (circulação oceânica) importantes. Em geodésia, o geóide é considerado como uma referência para o estabelecimento de posições verticais de pontos sobre a superfície terrestre. Assim, o geóide desempenha um papel importante, já que as alturas medidas na superfície terrestre são referidas a ele. Muitas obras de engenharia e outras aplicações geodésicas necessitam de alturas relativas ao geóide, chamadas alturas ortométricas ( $H$ ). Até algumas décadas atrás, a determinação das alturas ortométricas era feita por nivelamento, onde alturas conhecidas eram transportadas de RRNN<sup>1</sup> até determinados pontos por aquela técnica de levantamento. Com o advento do Sistema de Posicionamento Global (*Global Positioning System* – GPS), tornou-se possível a obtenção de alturas geométricas ou elipsoidais ( $h$ ), as quais têm como referência uma superfície teórica (elipsóide de referência). Pontualmente, a altura ortométrica ( $H$ ) pode ser obtida a partir da altura elipsoidal ( $h$ ) pela diferença algébrica entre essas duas quantidades ( $h - H$ ), diferença esta chamada altura geoidal ( $N$ ). Ou seja, a altura ortométrica pode ser obtida a partir

<sup>1</sup> RN: Referência de Nível; Plural: Referências de Nível (RRNN). São pontos materializados na superfície terrestre que possuem altura conhecida. Mais especificamente, altura ortométrica.

da diferença entre a altura elipsoidal e a altura geoidal. Para a obtenção de uma altura ortométrica acurada, deve-se ter um modelo geoidal com acurácia comparável à do GPS e à do nivelamento, que em alguns casos são de poucos centímetros.

Das técnicas mais utilizadas na determinação do geóide, foi utilizada nesta dissertação a técnica chamada Colocação Rápida (*Fast Collocation* – FC), a qual se caracteriza por ser fundamentada na técnica Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ). A técnica FC exige que os dados de entrada estejam regular e homoganeamente distribuídos em um *grid*, o que acelera os procedimentos de cálculo (capítulo 3).

Muitos modelos geoidais foram determinados a partir da combinação de dados de gravidade terrestre, de altimetria por satélite e de trajetória de satélites. Com respeito a este último caso, dados de trajetória de satélites, estes dados eram obtidos de satélites cuja finalidade principal não era produzir informações relativas ao comportamento do campo de gravidade terrestre, isto porque eles estão em uma órbita alta, o que, por sua vez, atenua a influência do campo de gravidade sobre o satélite. Para tentar resolver essa situação, foram projetadas três missões de satélite para fornecer dados mais acurados do campo de gravidade: CHAMP, GRACE e GOCE. Os satélites dessas missões possuem órbita baixa e podem, portanto, fornecer dados que possibilitem a obtenção de modelos geoidais mais acurados (capítulo 4).

Em sensoriamento remoto, busca-se obter informações de determinados objetos (ou alvos) a partir da interação remota entre estes objetos e um sistema sensor capaz de detectar e registrar a radiação emitida ou refletida por aqueles objetos. Tradicionalmente, a idéia que se tem a respeito do sensoriamento remoto é que o tipo de interação entre o objeto e o sistema sensor se dá através da radiação eletromagnética (REM). O advento das missões espaciais CHAMP e GRACE (e futuramente da missão GOCE) vem tornar mais clara a idéia de que informações sobre objetos podem ser obtidas não apenas pela interação eletromagnética entre objeto e sensor, mas também pela interação gravitacional entre “objeto” e sensor, ou seja, o conceito acerca de sensoriamento remoto, o qual é pensado em termos de campo eletromagnético, pode ser ampliado, passando a contemplar também o campo gravitacional (capítulos 4 e 7).

Nesse trabalho é apresentado o geóide do Estado de São Paulo, que foi determinado pela técnica FC e utilizou dados das missões espaciais CHAMP e GRACE através do modelo do geopotencial (MG) CG01c. Este geóide, chamado

GEÓIDESP\_FC\_2007, é comparado com o Modelo Digital do Geóide Regular (MDGR) da mesma região já calculado por Souza (2002), que utilizou a técnica CMQ. Para avaliação da componente sistemática foram utilizadas 151 estações com alturas ortométricas e elipsoidais conhecidas e distribuídas ao longo da região (capítulo 5), bem como o próprio MDGR. Os resultados e comparações são apresentados no capítulo 6. Além disso, são apresentados alguns argumentos a favor da ampliação da idéia sobre sensoriamento remoto (capítulo 7).

O capítulo 8 apresenta as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

O capítulo 9 mostra todas as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho.

## **1.2 Propósito do estudo e contribuição do autor**

O principal objetivo desta dissertação é apresentar o geóide do Estado de São Paulo determinado através da técnica *Fast Collocation* (FC) com dados das missões espaciais gravimétricas CHAMP e GRACE.

Esse trabalho enfatiza os aspectos algébricos envolvidos na técnica FC, em especial a estrutura da matriz de dados, chamada estrutura Toeplitz/Toeplitz (matriz Toeplitz simétrica de blocos Toeplitz também simétricos) e as condições de sua utilização. A utilização da técnica FC se justifica por ser ela uma técnica muito pouco explorada no Brasil, porém já bastante aplicada com sucesso na determinação do geóide em países europeus, (BOTTONI; BARZAGHI, 1993) e (SANSÒ; TSCHERNING, 2003). A novidade consiste, também, na utilização de um MG para a região de estudo, o qual representa os longos comprimentos de onda do campo de gravidade terrestre, obtido das novas missões CHAMP e GRACE. Além disso, propõe-se a ampliação da idéia sobre o conceito de sensoriamento remoto, tendo em vista o lançamento das missões espaciais com finalidades gravimétricas, CHAMP, GRACE e GOCE.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1 Introdução

O campo gravitacional da Terra é perturbado. Isto significa dizer que se a Terra fosse uma esfera homogênea seu potencial gravitacional ( $V$ ) seria dado por<sup>2</sup>:

$$V = \frac{GM}{r} \quad (2.1)$$

onde  $r$  é o raio da Terra (nesse caso constante, pois se trata de uma esfera),  $G$  é a constante gravitacional e  $M$  é a massa da Terra. Na realidade, essa situação ideal não ocorre, pois devido principalmente ao achatamento terrestre há um desvio entre o potencial gravitacional terrestre e o potencial gravitacional de uma esfera homogênea com mesmas massa e velocidade de rotação da Terra. Esse desvio é representado por termos que algebricamente são somados ao lado direito da equação (2.1). Ao longo desta dissertação serão apresentados que termos são esses.

### 2.2 Potencial gravitacional e potencial de gravidade

A famosa lei da gravitação de Newton<sup>3</sup> diz que duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por uma distância  $l$ , atraem-se na razão direta de suas massas e na razão inversa do quadrado da distância que as separa, e pode ser resumida pela equação (2.2):

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \quad (2.2)$$

---

<sup>2</sup> O que significa que a órbita de um satélite como a lua seria uma elipse Kepleriana exata.

<sup>3</sup> Isaac Newton (1642 – 1727)



A força  $F$  atua ao longo da linha que une as duas partículas;  $G$  é a constante gravitacional e no Sistema Internacional (SI) vale:

$$G = 6,6742 \times 10^{-11} \left[ \frac{m^3}{s^2 kg} \right] \quad (2.3)$$

Por conveniência, adota-se uma das massas com valor unitário, obtendo-se a equação (2.4):

$$F = G \frac{m}{l^2} \quad (2.4)$$

Agora,  $F$  expressa a força exercida pela massa  $m$  sobre a massa unitária da qual está afastada de uma distância  $l$ . Adotando-se convenientemente um sistema  $x, y, z$  de coordenadas, a força de atração pode ser representada por um vetor  $\mathbf{F}$  com magnitude  $F$ . As componentes de  $\mathbf{F}$  são  $F_x, F_y, F_z$ .

Seja a função escalar (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

$$V = G \frac{m}{l} \quad (2.5)$$

chamada o potencial gravitacional produzido pela massa  $m$ .  $l$  representa a distância entre a massa  $m$  e um ponto  $P$  no espaço onde atua de forma atrativa a massa  $m$ .

As componentes da força gravitacional  $\mathbf{F}$  são dadas por:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.6)$$

Então,

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \text{grad}V \quad (2.7)$$

isto é, o vetor força é o vetor gradiente da função escalar  $V$ .

Nota-se que é muito mais fácil o tratamento matemático com a função  $V$  do que com as três componentes da força  $\mathbf{F}$ , já que  $V$ , como foi dito, é escalar. Por isso, o tratamento matemático do campo de gravidade com fins geodésicos é feito totalmente com base no escalar potencial ( $V$ ). Assim, em um sistema com  $n$  partículas, onde a determinação da força resultante poderia ser de difícil solução, o potencial total do sistema será o somatório dos potenciais individuais de cada partícula:

$$V = G \frac{m_1}{l_1} + G \frac{m_2}{l_2} + \dots + G \frac{m_i}{l_i} + \dots + G \frac{m_n}{l_n} = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{l_i} \quad (2.8)$$

Seja o operador divergente (*div*) de um vetor o escalar dado pelo somatório das derivadas parciais das componentes do referido vetor com relação ao respectivo eixo coordenado. Então,

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.9)$$

Substituindo (2.6) em (2.9) temos:

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V \quad (2.10)$$

onde  $\Delta$  é chamado o operador laplaciano, ou, simplesmente, Laplaciano.

Seja a equação de Poisson<sup>4</sup> (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

$$\Delta V = -4\pi G\rho \quad (2.11)$$

---

<sup>4</sup> Siméon Denis Poisson (1781 – 1840)

onde  $\rho$  é a densidade e  $G$  é a constante gravitacional. O laplaciano do potencial gravitacional é dependente da densidade do corpo massivo. Externamente às massas atrativas a densidade é zero ( $\rho = 0$ ), então

$$\Delta V = 0 \quad (2.12)$$

A equação (2.12) tem um significado especial, ela é chamada equação diferencial de Laplace<sup>5</sup>. Todas as funções que satisfazem a equação diferencial de Laplace são chamadas funções harmônicas. Considerando-se (2.12), pode-se concluir que o potencial gravitacional é uma função harmônica externamente às massas atrativas.

O potencial gravitacional  $V$  é devido exclusivamente à massa terrestre. O potencial devido à rotação da Terra chama-se potencial centrífugo. Considerando a Terra como um corpo rígido, com velocidade de rotação constante, um sistema de eixos coordenados  $x, y, z$  associado com a origem coincidindo com o centro de massa terrestre, o eixo  $z$  desse sistema coincidindo com o eixo médio de rotação do planeta e o eixo  $x$  “apontando” para o meridiano médio de Greenwich, o potencial centrífugo em um ponto na superfície terrestre é dado por (2.13) (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (2.13)$$

onde  $x, y$  são as coordenadas do ponto na superfície da Terra e  $\omega$  é a velocidade de rotação terrestre. A soma do potencial gravitacional ( $V$ ) e do potencial centrífugo ( $\Phi$ ) é chamado potencial de gravidade ( $W$ ):

$$W = V + \Phi \quad (2.14)$$

Portanto, o potencial de gravidade é a combinação do potencial gravitacional (devido à massa terrestre) com o potencial centrífugo (devido à rotação do planeta).

O gradiente do potencial de gravidade é o vetor (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

---

<sup>5</sup> Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827)

$$\text{grad}W = \left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \mathbf{g} \quad (2.15)$$

chamado *vetor gravidade*. Sua magnitude vale  $g$  e sua direção é a vertical. A dimensão física de  $g$  é uma aceleração e é medida em gal ( $1 \text{ gal} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ ), em homenagem ao físico italiano Galileo<sup>6</sup>. Em geodésia, utiliza-se a unidade miligal – mGal – ( $1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ gal}$ ).

### 2.3 Potencial perturbador, distúrbio do potencial ou potencial anômalo ( $T$ )

Seja um elipsóide de revolução com a mesma massa  $M$  e mesma velocidade de rotação  $\Phi$  da Terra. O potencial de gravidade desse elipsóide é teórico e vale (MORITZ, 1980):

$$U = \bar{V} + \Phi \quad (2.16)$$

$U$  é chamado esferopotencial e, da mesma forma que as superfícies equipotenciais de  $W$  são chamadas *geópes*, as superfícies equipotenciais de  $U$  são chamadas esferópes (superfícies equipotenciais são superfícies onde o potencial – elétrico ou gravitacional – é constante). Além disso, o vetor gravidade normal é dado pelo gradiente do potencial

$$U, \text{grad}U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \boldsymbol{\gamma}.$$

O potencial  $\bar{V}$  em (2.16) deve satisfazer a equação de Laplace dada por (2.12):

$$\Delta \bar{V} = 0 \quad (2.17)$$

externamente ao elipsóide.

---

<sup>6</sup> Galileo Galilei (1564 – 1642)

Desta forma, têm-se o potencial de gravidade da Terra (real)  $W$  e o potencial de gravidade de um elipsóide com mesmas massa e velocidade de rotação terrestre (teórico)  $U$ . À diferença existente entre o potencial real e o potencial teórico dá-se o nome de *potencial perturbador*, *distúrbio do potencial* ou *potencial anômalo* ( $T$ ):

$$T = W - U \quad (2.18)$$

O potencial anômalo ( $T$ ) é uma função harmônica *externamente à superfície da Terra*, ou seja,  $T$  satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta T = 0 \quad (2.19)$$

## 2.4 O potencial anômalo ( $T$ ) como um elemento do espaço de Hilbert

Fisicamente, o potencial anômalo  $T$  é dado pela eq. (2.18). Matematicamente, a modelagem do campo de gravidade da Terra é feita através do potencial anômalo  $T$ , que é uma função harmônica externamente à superfície terrestre e, por isso, é considerada como um elemento do espaço de Hilbert<sup>7</sup>. SCHNITER (2005) apresenta a seguinte definição para o espaço de Hilbert: “um espaço de Hilbert é um espaço vetorial *completo* dotado de produto interno”. Um espaço **completo** é aquele onde todas as seqüências de Cauchy<sup>8</sup> convergem para algum vetor dentro do espaço. Para maiores detalhes sobre espaço vetorial completo e convergência de seqüências de Cauchy, veja (SCHNITER, 2005) e (BIERENS, 2004).

Seja  $\Omega$  (TSCHERNING, 1978) o conjunto de todos os pontos que satisfazem as funções harmônicas na equação diferencial de Laplace.  $\Omega$ , portanto, é o domínio de tais funções. Pontos em  $\Omega$  são representados por suas coordenadas esféricas  $(\varphi, \lambda, \mathbf{r})$ , onde  $\varphi = \text{latitude geocêntrica}$ ,  $\lambda = \text{longitude}$  e  $\mathbf{r} = \text{distância da origem}$ . O conjunto das funções

---

<sup>7</sup> David Hilbert (1862 – 1943)

<sup>8</sup> August Cauchy (1789 – 1857)

harmônicas em  $\Omega$  forma um espaço vetorial de funções harmônicas,  $\mathbf{H}(\Omega)$ . Os elementos do espaço vetorial  $\mathbf{H}(\Omega)$  dividem-se entre os que possuem norma finita e os que não possuem. Em termos gerais, a norma de um vetor caracteriza-se pelo “tamanho” ou “comprimento” desse vetor. Embora essa noção de “tamanho” ou “comprimento” seja válida quando os vetores são segmentos de reta orientados em um espaço bi ou tridimensional, ela é descaracterizada quando são tratados espaços vetoriais onde os “vetores” são funções, polinômios, matrizes, etc.

O espaço de Hilbert possui norma finita, o que significa dizer que todas as seqüências desse espaço são convergentes (seqüências de Cauchy, já mencionadas). Assim, o espaço de Hilbert é formado pelos elementos de  $\mathbf{H}(\Omega)$  que possuem norma finita, ou seja, é o espaço vetorial  $\mathbf{H}$  de funções harmônicas com norma finita. Como consequência, o espaço de Hilbert é um subespaço de  $\mathbf{H}(\Omega)$ . O espaço de Hilbert aqui tratado é aquele que possui uma base ortonormal infinita enumerável. Uma base ortonormal enumerável para um espaço  $V$ <sup>9</sup> é um conjunto  $S = \{x_k\}$  tal que todo vetor em  $V$  pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos em  $S$  (SCHNITER, 2005). Portanto, considerando-se a característica algébrica do potencial anômalo  $T$  (função harmônica), ele será um elemento do espaço de Hilbert, com norma dada, por exemplo, por (TCHERNING, 1978):

$$\|T\|_0^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [T(P)]^2 d\Omega \quad (2.20a)$$

$$\|T\|_1^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (T(P)^2 + (\nabla T)^2) d\Omega \quad (2.20b)$$

onde  $P$  é um ponto com coordenadas  $\varphi, \lambda, \mathbf{r}$  e  $\nabla T$  é o gradiente de  $T$ .

Ainda segundo TSCHERNING (1978), um elemento qualquer do espaço de Hilbert pode ser representado por uma expansão com respeito a um sistema completo e ortonormal. Um sistema completo é aquele formado pelo conjunto de funções base  $(\phi_i, i = 1, 2, \dots)$  que satisfazem as relações de ortonormalidade. A ortogonalidade refere-se

---

<sup>9</sup> Aqui,  $V$  representa um espaço vetorial genérico e não o potencial gravitacional.

ao produto interno entre duas funções base  $(\phi_i, \phi_j, i \neq j)$  que deve ser 0 (zero). A normalização refere-se ao produto interno entre uma função base e ela mesma  $(\phi_i, \phi_i)$  que deve ser 1, ou seja, a norma da função base  $(\phi_i)$  é 1. Para detalhes a respeito de sistema completo e ortonormal, veja (MORITZ, 1980, p. 30).

Como o potencial anômalo é um elemento do espaço de Hilbert, pode-se fazer a seguinte aproximação de  $T$  :

$$T(P) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \phi_k(P) \quad (2.21a)$$

onde  $\phi_k$  são funções base adequadas com coeficientes  $b_k$  apropriados.

A equação (2.21a) apresenta  $\infty$  (infinito) como limite superior do somatório. No entanto, pode-se fazer uma representação analítica aproximada de  $T$  através de uma série finita de funções base adequadas e coeficientes apropriados (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

$$T(P) \doteq f(P) = \sum_{k=1}^N b_k \phi_k(P) \quad (2.21b)$$

onde  $f$  é uma função que aproxima  $T$  em um ponto  $P$ .

Como  $T$  é uma função harmônica externamente às massas atrativas da Terra, é natural escolher funções  $\phi_k$  também harmônicas na mesma situação. Então,

$$\Delta \phi_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.22)$$

em correspondência a (2.19).

O erro cometido ao aproximar a função  $T$  por uma combinação linear de  $N$  funções  $\phi_k$  será tanto maior quanto menor o valor de  $N$ . Assim, dado um  $\varepsilon > 0$ , existe um  $N$  e um conjunto de constantes  $b_k'$  tal que:

$$\left| T(P) - \sum_{k=1}^N b'_k \phi_k(P) \right| < \varepsilon \quad (2.23)$$

A existência de  $N$  é verificada através da eq. (2.21b), uma vez que pode-se aproximar  $T$  por uma função  $f$ , que é dada pela combinação linear **finita** de funções base adequadas e coeficientes pertinentes. Assim, por exemplo, para um determinado  $N'$  escolhido ter-se-á um “vetor”  $T'$  (uma série que converge para  $T'$ ), que difere de  $T$  por uma quantidade  $\varepsilon'$ . Então, para  $N', N'', \dots$  ter-se-á  $T', T'', \dots$ , respectivamente. A equação (2.23) significa que quanto menor o  $\varepsilon$  escolhido, portanto menor o módulo da diferença entre o potencial anômalo e a série que o representa, maior deverá ser o inteiro  $N$ , o que determina uma resolução espacial para a resolução de  $T$ . No caso limite,  $N \rightarrow \infty$ , teríamos  $\varepsilon = 0$ , ou seja, uma combinação linear de funções base que representa exatamente  $T$ . Isso, na realidade, não acontece! Busca-se, então, encontrar funções  $\phi_k$  e coeficiente  $b'_k$  que tornem a série da equação (2.23) tão próxima da função  $T$  quanto se deseje.

Pode-se postular que a aproximação  $f$  para  $T$  reproduz exatamente  $T$  nos  $N$  pontos dados. Fazendo-se (MORITZ, 1978)

$$f(P_i) = T(P_i) = f_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

têm-se as condições

$$\sum_{k=1}^N A_{ik} b_k = f_i \quad A_{ik} = \phi_k(P_i) \quad (2.25)$$

as quais formam  $N$  equações lineares para as  $N$  incógnitas  $b_k$ . Portanto, pode-se determinar de forma única as incógnitas  $b_k$ , contanto que as  $N$  equação de (2.25) sejam linearmente independentes. Tem-se, então, uma primeira aproximação de como se pode determinar o potencial anômalo  $T$  em um ponto qualquer.



## 2.5 Coeficientes dos harmônicos esféricos

Já que o potencial anômalo é uma função harmônica, ele pode ser expandido em série de harmônicos esféricos:

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda) \quad (2.26)$$

onde  $R$  corresponde ao raio de uma determinada esfera (em aproximação esférica, sobre o geóide  $r = R$ ) e  $T_n(\theta, \lambda)$  representam os harmônicos esféricos de superfície de grau  $n$ :

$$T_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [(\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta)] \quad (2.27)$$

onde,  $\bar{P}_{nm}$  são as funções de Legendre<sup>10</sup> completamente normalizadas e  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  são os coeficientes normalizados da série.

Os coeficientes  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  e as funções de Legendre  $\bar{P}_{nm}$  completamente normalizados são dados por (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

$$\bar{C}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} C_{nm} \quad (2.28)$$

$$\bar{S}_{nm} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} S_{nm} \quad (2.29)$$

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.30)$$

onde,

---

<sup>10</sup> Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833)

$$k = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 2 & \text{se } m \neq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

$C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são os coeficientes dos harmônicos esféricos convencionais e  $P_{nm}(\cos\theta)$  representa as funções de Legendre.

### Uma observação importante

O primeiro parágrafo da seção 2.3 faz referência a um elipsóide com mesma massa e velocidade de rotação da Terra. No primeiro parágrafo desta seção foi citada a esfera de raio  $R$ , externamente à qual o potencial anômalo  $T$  é harmônico. Para não haver confusão entre ter-se mencionado um elipsóide e agora ter-se referido a uma esfera, em especial porque (2.26) é a expansão de  $T$  em harmônicos esféricos, convém a seguinte observação (adaptado de WELLENHOF; MORITZ, 2005, p. 97):

O significado da aproximação esférica deve ser cuidadosamente entendido. A aproximação é usada somente em equações que relacionam quantidades pequenas, como  $T, N, \Delta g$ , etc. (*potencial anômalo, altura geoidal, anomalia da gravidade*, respectivamente). A superfície de referência **nunca** é uma esfera no sentido geométrico do termo, mas sempre um elipsóide. Como o achatamento do elipsóide  $f$  (um dos parâmetros definidores de tal superfície; não confundir com  $f$  de (2.21b)) é muito pequeno, as fórmulas elipsoidais podem ser expandidas em séries de potências em termos de  $f$ , e, portanto, todos os termos contendo  $f, f^2, \dots$ , são negligenciados. Assim, obtém-se fórmulas que são rigorosamente válidas para a esfera, porém, de forma aproximada, também válidas para o elipsóide de referência utilizado. Falar de uma “esfera de referência” no espaço, em qualquer sentido geométrico, pode ser altamente enganador. Essa aproximação esférica pode introduzir erros em  $T$  da ordem de  $0,003T$ . Assim, a “equação fundamental da geodésia física”, equação (2.32), toma a forma da equação (2.33) (MORITZ, 1980):

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R}T + \Delta g = 0 \quad (2.33)$$

onde,

$R = 6371 \text{ km}$  : raio médio da Terra.

$\frac{\partial}{\partial r}$  : derivada radial na “esfera” de raio  $R$ .

Para melhor compreender porque é útil a utilização dos harmônicos esféricos em geodésia, passa-se a explicar sucintamente sua origem.

De acordo com a equação (2.12), o laplaciano do potencial gravitacional da Terra é zero ( $\Delta V = 0$ ). WELLENHOF e MORITZ (2005) mostram que a equação (2.12) para um ponto  $P$  com coordenadas esféricas  $\theta = \text{distância polar}$ <sup>11</sup>,  $\lambda = \text{longitude geocêntrica}$  e  $r = \text{raio vetor}$  pode ser dada pela seguinte expressão:

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.34)$$

Para resolver a equação (2.34), a função do potencial  $V$  é substituída pelo produto de duas funções, uma que depende somente de  $r$  e outra que depende das outras duas variáveis (WELLENHOF; MORITZ 2005):

$$V(\theta, \lambda, r) = f(r)Y(\theta, \lambda) \quad (2.35)$$

A partir de (2.35) são obtidas as seguintes equações diferenciais:

$$r^2 f''(r) + 2rf'(r) - n(n-1)f(r) = 0 \quad (2.36)$$

e

---

<sup>11</sup>  $\theta = 90^\circ - \varphi \therefore \varphi$ : latitude geocêntrica

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y = 0 \quad (2.37)$$

As soluções possíveis para a função  $f(r)$  são:

$$f(r) = r^n \text{ e } f(r) = r^{-(n+1)} \quad (2.38)$$

A solução, ainda desconhecida para (2.37), é genericamente dada por  $Y_n(\theta, \lambda)$  e é chamada harmônico esférico de superfície. Assim, a equação (2.35) é resolvida pelas seguintes funções:

$$V(\theta, \lambda, r) = r^n Y_n(\theta, \lambda) \text{ e } V(\theta, \lambda, r) = \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \quad (2.39)$$

Essas funções são chamadas harmônicos esféricos sólidos. Então, os harmônicos esféricos sólidos são iguais ao produto dos harmônicos de superfície pela solução da equação diferencial formada pela função  $f(r)$ . Como se tratam de equações diferenciais lineares, a soma de todas as soluções destas equações também é uma solução, por isso o potencial gravitacional é dado como um somatório, o que significa dizer que esse somatório também satisfaz a equação de Laplace, ou seja, o somatório também é uma função harmônica.

O passo seguinte é determinar os harmônicos esféricos de superfície, ou seja, a solução da equação (2.37). Assim como foi feito em (2.35), agora a função  $Y(\theta, \lambda)$  é substituída pelo produto de duas funções, uma que depende de  $\theta$ ,  $g(\theta)$ , e outra que depende de  $\lambda$ ,  $h(\lambda)$ . Então (WELLENHOF; MORITZ, 2005),

$$Y(\theta, \lambda) = g(\theta)h(\lambda) \quad (2.40)$$

Substituindo (2.40) em (2.37) e realizando algumas simplificações algébricas (não apresentadas aqui), encontram-se:

$$\operatorname{sen} \theta \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \left[ n(n+1) \operatorname{sen} \theta - \frac{m^2}{\operatorname{sen} \theta} \right] g(\theta) = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} + m^2 h(\lambda) = 0 \quad (2.42)$$

onde  $m^2$  é uma constante.

As soluções de (2.42) e (2.41) são apresentadas por (WELLENHOF; MORITZ, 2005) e valem, respectivamente,

$$h(\lambda) = \cos m\lambda \quad e \quad h(\lambda) = \operatorname{sen} m\lambda \quad (2.43)$$

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.44)$$

onde  $P_{nm}(\cos \theta)$  são as funções de Legendre com  $m \leq n$ . Mais especificamente, as funções de Legendre  $P_{nm}(\cos \theta)$  são chamadas funções associadas de Legendre e podem ser reduzidas aos polinômios de Legendre de grau  $n$  e ordem  $m$ . Então, substituindo (2.43) e (2.44) em (2.40) encontram-se:

$$Y_n(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda \quad e \quad Y_n(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos \theta) \operatorname{sen} m\lambda \quad (2.45)$$

Como as soluções apresentadas em (2.45) são lineares, qualquer combinação linear das soluções (2.45) também é uma solução de (2.40). Assim, uma combinação linear tem a forma (WELLENHOF; MORITZ, 2005)

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \operatorname{sen} m\lambda] \quad (2.46)$$

onde  $a_{nm}$  e  $b_{nm}$  são constantes arbitrárias. A equação (2.46) é a expressão geral para os harmônicos esféricos de superfície  $Y_n(\theta, \lambda)$ .

Substituindo (2.46) em (2.39), obtém-se:

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda] \quad (2.47)$$

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda] \quad (2.48)$$

$V_i$  e  $V_e$  são soluções da equação de Laplace (2.12), isto é, são funções harmônicas.  $V_i$  é solução de toda função que é harmônica internamente à uma certa esfera, o subscrito  $i$  indica interior, e  $V_e$  é solução de toda função que é harmônica externamente a um certa esfera (tal como o potencial gravitacional da Terra), o subscrito  $e$  indica exterior. Dessa forma, pode ser vista a importância dos harmônicos esféricos em geodésia, os quais, em última análise, caracterizam o campo de gravidade terrestre.

Finalizando, discute-se a convergência de (2.48). A série que representa  $V_e$  em (2.48) é uma expansão em potências de  $\frac{1}{r}$ . Portanto, quanto maior for  $r$ , melhor será a convergência da série. Para valores pequenos de  $r$ , a convergência não é assegurada necessariamente. Mostra-se que, para um corpo arbitrário, a expansão de  $V$  em harmônicos esféricos converge sempre externamente a menor esfera de raio  $r = r_0$  que inclui toda a massa do corpo (Figura 2). Dentro dessa esfera, normalmente a série é divergente. Se a Terra fosse um elipsóide homogêneo mais ou menos com as mesmas dimensões, então a série para  $V$  convergiria na superfície terrestre. Porém, devido às irregularidades de massa do planeta, o que se traduz nas diferentes densidades encontradas, a série do potencial  $V$  pode divergir ou não na sua superfície. Na prática, entretanto, é sempre mais seguro considerar a série convergente. A convergência da série em harmônicos esféricos para  $V$  é considerada um tópico avançado e uma discussão mais detalhada pode ser vista em (MORITZ, 1980).

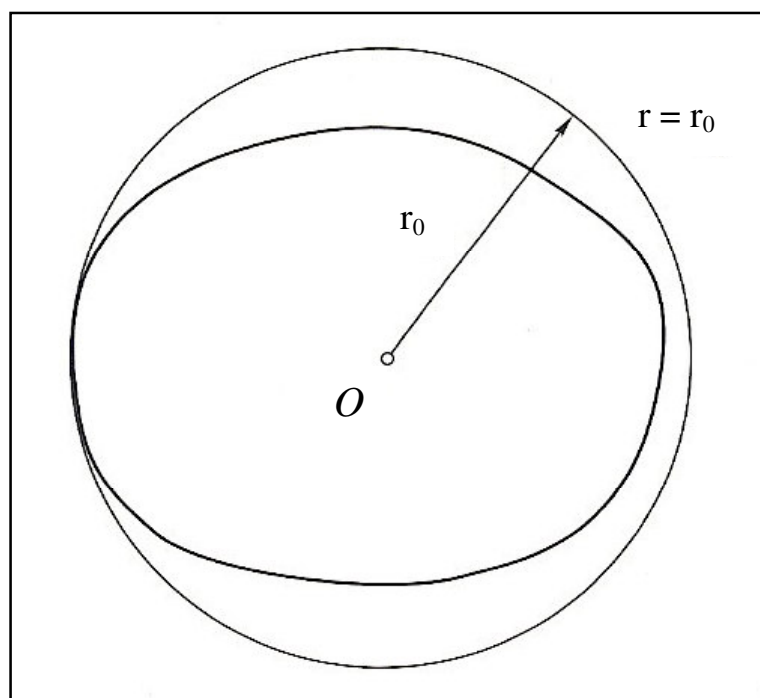


Fig.2: Expansão em harmônicos esféricos de  $V$  converge externamente à esfera de raio  $r = r_0$

Fonte: (Adaptado de WELLENHOF; MORITZ, 2005)

## 2.6 Reduções e anomalias gravimétricas<sup>12</sup>

Um problema para a correta determinação do geóide é a existência de massas acima dessa superfície. Esse problema é solucionado através das correções gravimétricas, basicamente significando que as medidas da gravidade  $g$ , que são feitas na superfície física terrestre, são reduzidas ao geóide, o que na literatura geodésica é conhecido como *downward continuation* (“continuação para baixo”) das anomalias gravimétricas. A gravidade  $g$  deve ser diferenciada da gravidade normal  $\gamma$ , que é obtida de forma teórica utilizando-se a superfície do elipsóide de referência. Para referir a gravidade  $g$  ao geóide são feitas, portanto, as chamadas reduções gravimétricas. O tipo de redução a ser aplicado à  $g$  depende do resultado procurado. Como existem massas acima do geóide, essas massas devem ser removidas ou condensadas sobre o geóide.

<sup>12</sup> Não desconhecendo a existência de outros tipos de anomalias gravimétricas, neste trabalho serão mencionados somente três tipos: “Anomalia Ar-Livre”, “Anomalia Bouguer” e “Anomalia de Helmert”. Maiores detalhes sobre outros tipos de reduções e anomalias gravimétricas podem ser vistos em (HEISKANEN; MORITZ, 1967), (WICHENCHAROEN, 1982) e (WELLENHOF; MORITZ, 2005).

Esses efeitos de remoção das massas e condensação delas sobre o geóide geram efeitos tanto no valor medido da gravidade quanto no potencial gravitacional da Terra, o que gera mudanças no geóide. Essas mudanças no geóide são chamadas *Efeito Indireto* devido às reduções gravimétricas. Assim, o valor medido da gravidade  $g$  em um ponto  $P$  na superfície terrestre, após a remoção ou condensação das massas, passa a ter um novo valor em  $P_0$  sobre o geóide. Esse procedimento equivale a dizer que a força de gravidade é transferida do ponto  $P$  para o ponto  $P_0$  por uma *Redução Ar Livre* (*Free Air Reduction*). Para se obter a anomalia gravimétrica sobre o geóide deve-se subtrair o valor da gravidade normal  $\gamma$  em um ponto correspondente  $Q_0$  sobre o elipsóide de referência do valor da gravidade em  $P_0$  (Figura 3).

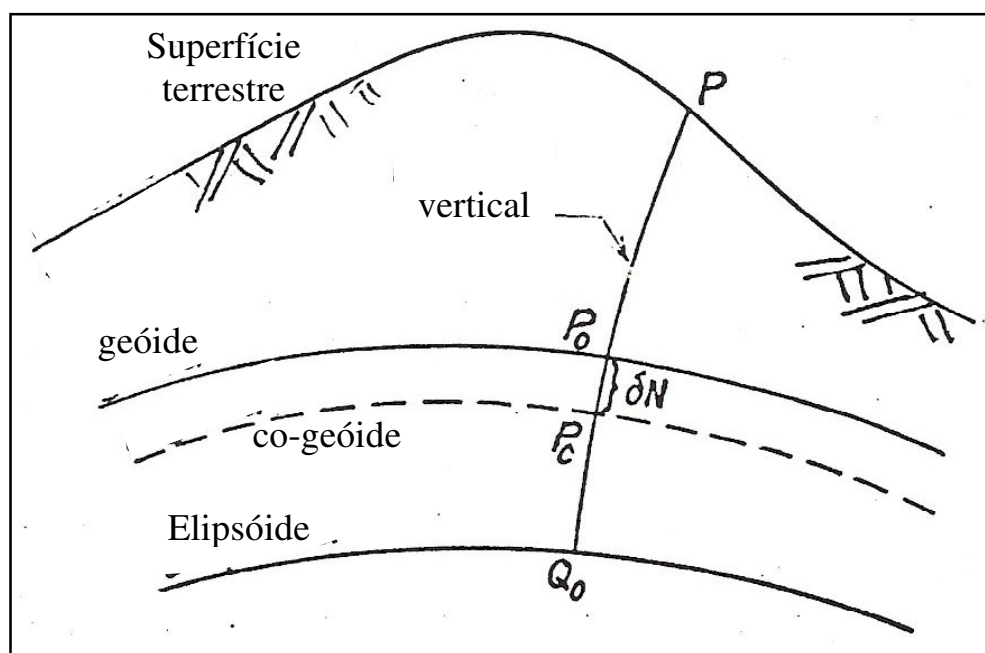


Fig.3: Geóide, co-geóide e elipsóide

Fonte: (Adaptado de WICHENCHAROEN, 1982)

Conforme já mencionado, os processos de redução e condensação das massas provocam uma mudança no potencial gravitacional da Terra, o que gera erros sistemáticos (efeito indireto), dando origem assim a uma superfície que não é o geóide e é chamada *co-geóide*. O afastamento ou separação vertical entre as duas superfícies (de  $P_0$  a  $P_C$ ), geóide e co-geóide, é chamado *efeito indireto da redução da gravidade sobre*



a altura geoidal ( $\delta N$ ) e é determinado pela fórmula de Bruns ( WICHIECHAROEN, 1982):

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma} \quad (2.49)$$

onde  $\delta W$  é a variação no potencial de gravidade no geóide devido ao processo de redução da gravidade e  $\gamma$  é a gravidade normal sobre o elipsóide. Valores positivos de  $\delta N$  indicam que o geóide está acima do co-geóide (WICHIECHAROEN, 1982).

No processo de redução da gravidade não há variação na massa total da Terra, portanto o potencial da força centrífuga permanece constante. Assim, a variação no potencial de gravidade  $\delta W$  é a mesma que a variação no potencial gravitacional,  $\delta V$ . Para mostrar isso, suponha-se que o geóide é uma superfície equipotencial que tem potencial de gravidade  $w_0$ . O potencial gravitacional dessa superfície é  $v_0$ . O processo de redução da gravidade provoca uma variação no potencial de gravidade em um ponto sobre o geóide e vale  $\delta W$ . Da mesma forma, há uma variação no potencial gravitacional e vale  $\delta V$ . Como não há variação na massa total do planeta, o potencial da força centrífuga,  $\Phi$ , permanece inalterado. Então, após o processo de redução da gravidade os potenciais de gravidade e gravitacional valem, respectivamente,  $w_0 - \delta W$  e  $v_0 - \delta V$  (o sinal negativo é convencional). De acordo com a equação (2.14), têm-se:

Antes do processo de redução da gravidade:

$$w_0 = v_0 + \Phi \quad (2.50)$$

Após o processo de redução da gravidade:

$$(w_0 - \delta W) = (v_0 - \delta V) + \Phi \quad (2.51)$$

Subtraindo (2.51) de (2.50):

$$\delta W = \delta V \quad (2.52)$$

Então, a fórmula de Bruns (2.49) torna-se:

$$\delta N = \frac{\delta V}{\gamma} \quad (2.53)$$

Assim, a mudança no potencial refere-se tanto à mudança no potencial de gravidade quanto no potencial gravitacional.

### 2.6.1 Correção atmosférica

O potencial anômalo ( $T$ ), *externamente à superfície da Terra*, satisfaz a equação de Laplace (seção 2.3) e por isso é uma função harmônica. Em outras palavras, para  $T$  satisfazer a equação de Laplace, o espaço externo à superfície terrestre deve ser vazio. Como isso não acontece na realidade, pois existe a atmosfera, deve-se remover matematicamente (ou computacionalmente!!!) o efeito da atmosfera sobre as anomalias gravimétricas ( $\Delta g$ ). Já que esse efeito é bastante pequeno, um modelo simples é suficiente para a correção (MORITZ, 1980). MORITZ (1980) descreve um modelo que assume que a atmosfera consiste de camadas esféricas concêntricas. Além disso, considera-se o elipsóide de referência como uma esfera de raio  $R$  (aproximação esférica).

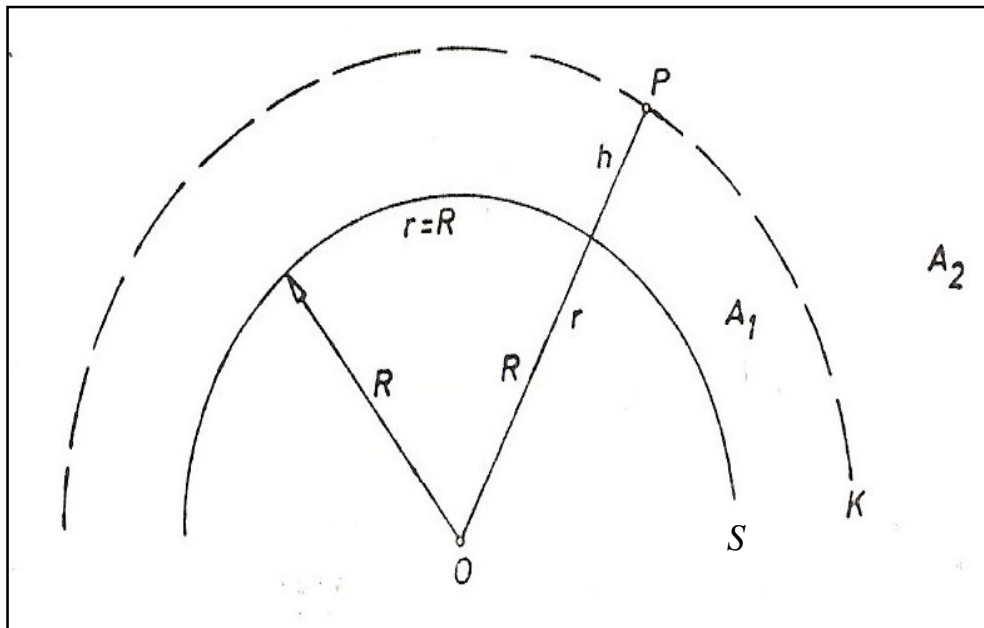


Fig.4: Atmosfera esféricamente simétrica

Fonte: (Adaptado de MORITZ, 1980)

Mostra-se que a atração da atmosfera em um ponto  $P$  (Figura 4), a uma altura  $h$  da superfície terrestre ( $S$ ), é dada pela equação (2.54) abaixo:

$$F = G \frac{m(r)}{r^2} \quad (2.54)$$

onde  $m(r)$  é a massa da camada atmosférica  $A_1$  como uma função do raio  $r$ .

Agora, introduzindo-se a massa  $M(r)$  da atmosfera  $A_2$ , externa à esfera  $K$ , obtém-se:

$$m(r) = M_T - M(r) \quad (2.55)$$

onde  $M_T$  é a massa total da atmosfera. A substituição de (2.55) em (2.54) fornece:

$$F = G \frac{(M_T - M(r))}{r^2} \quad (2.56)$$

$$F = G \frac{M_T}{r^2} - G \frac{M(r)}{r^2} \quad (2.57)$$

O primeiro termo no lado direito de (2.57) é a atração da massa total da atmosfera, transportada para o interior da Terra e lá sendo distribuída de forma esfericamente simétrica<sup>13</sup>. Esse termo é levado em conta nos cálculos se a massa do elipsóide de referência inclui a massa da atmosfera, que é o tratamento usual. O segundo termo é o chamado efeito atmosférico sobre a gravidade ( $\delta g$ ) e deve ser adicionado a cada anomalia gravimétrica:

$$\delta g = G \frac{M(r)}{r^2} \quad (2.58)$$

Para a determinação da correção atmosférica foi adotado o modelo acima descrito (modelo das camadas esféricas concêntricas) e usada a fórmula recomendada pela Associação Internacional de Geodésia (*International Association of Geodesy - IAG*) (MORITZ, 1992 *apud* PIÑA, 2000) e desenvolvida por N. PAVLIS (PIÑA, 2000):

$$R_{AT} = 0,8658 - 9,727 \times 10^{-5} H + 3,482 \times 10^{-9} H^2 \text{ [mgal]} \quad (2.59)$$

onde,

$R_{AT}$  : Correção atmosférica

$H$  : altura do ponto  $P$ .

### 2.6.2 Correção ar-livre (*Free Air Correction*)

É a correção que deve ser aplicada ao valor observado da gravidade  $g$  para se obter a anomalia ar-livre. Essa correção necessita, pelo menos teoricamente, do

---

<sup>13</sup> Aplica-se neste caso a lei Newtoniana para uma partícula, já que o potencial gravitacional externo de um corpo com simetria esférica é o mesmo que o potencial gerado se a massa estivesse concentrada no centro do corpo.

gradiente de gravidade  $\frac{\partial g}{\partial H}$ , ou seja, a taxa de variação da gravidade com a altura ( $H$ ) entre o ponto sobre a superfície terrestre e o ponto correspondente sobre o geóide, ao longo da vertical (Figura 5).

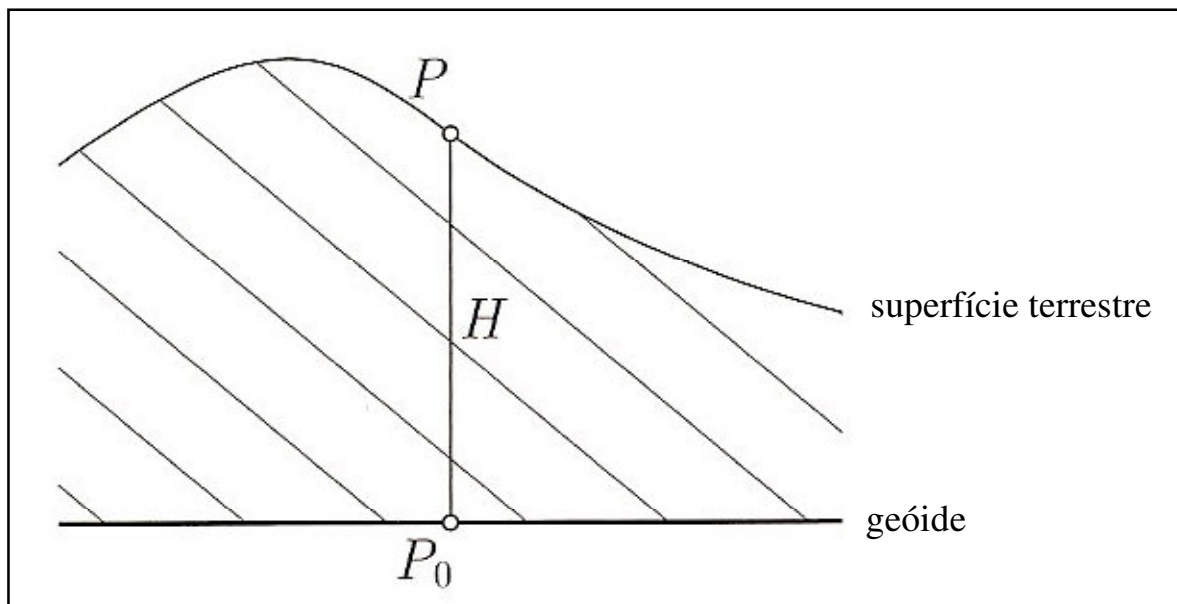


Fig.5: Deve ser conhecido o gradiente de gravidade ( $\frac{\partial g}{\partial H}$ ) entre o ponto  $P$  e  $P_0$ , afastados de uma altura  $H$

Fonte: (Adaptado de WELLENHOF; MORITZ, 2005)

Conforme WELLENHOF e MORITZ (2005) pode ser utilizado o gradiente normal da gravidade (associado com a altura elipsoidal -  $h$ )  $\frac{\partial \gamma}{\partial h}$  ao invés de  $\frac{\partial g}{\partial H}$ . Assim,

$$R_{AL} \cong -\frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot H \cong +0,3086H \text{ [mgal]} \quad (2.60)$$

onde,

$R_{AL}$  : Correção ar-livre

$H$  : altura da estação acima da referência (geóide), em metros.

A correção ar-livre,  $R_{AL}$ , é a quantidade que deve ser adicionada ao valor de  $g$  observado na superfície terrestre e representa uma mudança na gravidade, tendo em vista que a força de gravidade é transferida do ponto  $P$  na superfície terrestre para o ponto  $P_0$  sobre o geóide através do gradiente vertical da gravidade. Assim, a anomalia ar-livre é obtida pela seguinte equação:

$$\Delta g_{AL} = g + R_{AL} - \gamma \quad (2.61)$$

### 2.6.3 Correção Bouguer

A correção Bouguer<sup>14</sup> considera a remoção completa das massas entre a estação e o geóide. É assumido que a área em torno do ponto estação é completamente plana e horizontal, constituindo o chamado platô (ou placa) de Bouguer, o qual tem densidade  $\rho$  e espessura  $H$ , equivalente à altura entre a estação e o geóide (Figura 6).

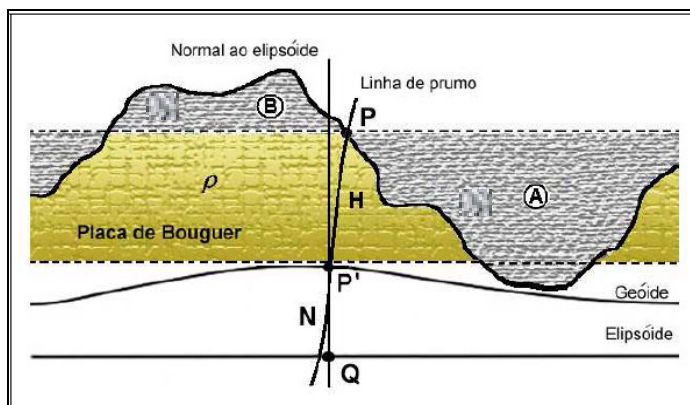


Fig.6: Platô de Bouguer

Fonte: (LOBIANCO, 2005)

A correção Bouguer é dada por:

<sup>14</sup> Pierre Bouguer (1698 – 1758)

$$R_{BS} = 2\pi G\rho H \quad (2.62)$$

onde,

$R_{BS}$  : Correção Bouguer simples

$G$  : Constante Gravitacional

$\rho$  : Densidade da crosta terrestre

$H$  : Altura entre a estação e o geóide

Considerando-se um valor médio para  $\rho$  ( $\cong 2,67 \text{ gcm}^{-3}$ ), densidade da crosta, a equação (2.62) torna-se, para  $H$  em metros:

$$R_{BS} = 0,1119H \text{ [mgal]} \quad (2.63)$$

A correção Bouguer completa consiste na remoção das massas entre a estação e o geóide e na redução da gravidade ao geóide através da correção ar-livre (HEISKANEN; MORITZ, 1967). Então,

$$R_{BC} = R_{AL} + R_{BS} = 0,3086H - 0,1119H = 0,1967H \quad (2.64)$$

O sinal “menos” em (2.64) é explicado pelo fato que a remoção do platô é equivalente a subtrair sua atração (2.62) do valor da gravidade observada (HEISKANEN; MORITZ, 1967). Assim, a gravidade Bouguer é dada por:

$$g_B = g + 0,1967H \quad (2.65)$$

onde,

$g$  : gravidade medida em um ponto  $P$  na superfície terrestre

$H$  : Altura entre a estação em  $P$  e o ponto  $P'$  sobre o geóide, em metros

Então, subtraindo-se a gravidade normal  $\gamma$ , referida ao elipsóide, de (2.65), obtém-se a anomalia Bouguer:

$$\Delta g_B = g_B - \gamma \quad (2.66a)$$

$$\Delta g_B = g + 0,1967H - \gamma \quad (2.66b)$$

### 2.6.4 Anomalia de Helmert

A anomalia de Helmert<sup>15</sup> é obtida a partir da utilização do segundo método de condensação<sup>16</sup> de Helmert. Neste método, as massas topográficas de densidade  $\rho$  são condensadas sobre o geóide, formando uma camada superficial  $\rho H$ , onde  $H$  é a altura da estação na superfície terrestre. A condensação das massas topográficas é processada de tal forma que a massa total da Terra permanece inalterada.

Como as massas topográficas entre a estação (ponto  $P$ ) e o geóide são condensadas em uma superfície sobre o geóide, pode-se imaginar que o valor da gravidade varia de  $g$  para  $g + R_{AL}$ , através de uma redução ar-livre. Porém, diferentemente da anomalia ar-livre, onde há eliminação da porção de massa entre a estação e o geóide, a anomalia de Helmert considera a parcela correspondente à correção do terreno ( $R_{CT}$ ). Assim,

$$\Delta g_{AL} = g + R_{AL} - \gamma \quad (2.67)$$

$$\Delta g_H = \Delta g_{AL} + R_{CT} \quad (2.68a)$$

---

<sup>15</sup> Friedrich Robert Helmert (1841 – 1917)

<sup>16</sup> Helmert introduziu dois métodos de condensação das massas topográficas sobre o geóide. Porém, o primeiro método não é tão popular e tampouco usado pelos geodestas. Nesta dissertação, faz-se referência somente ao segundo método de condensação.



$$\Delta g_H = g + R_{AL} + R_{CT} - \gamma \quad (2.68b)$$

onde,

$\Delta g_H$  : Anomalia de Helmert

$R_{CT}$  : Correção do terreno

### 2.6.5 Correção de terreno

No segundo método de condensação de Helmert as massas topográficas sobre o geóide são condensadas formando uma camada sobre o geóide. Na correção de Bouguer o espaço entre o plano da estação (ponto  $P$ ) e o plano do geóide (ponto  $P'$ ) é totalmente preenchido com massa (formando o platô de Bouguer, Figura 6). Dessa forma, pode-se dividir a topografia em duas partes (WICHIENTHAROEN, 1982): a parte regular, representada pelo platô de Bouguer, e a parte irregular, representada pelas massas sobre o platô (letra B, Figura 6) e pelas partes onde não existem massas sob o platô (letra A, Figura 4). Assim, no ponto  $P'$  sobre o geóide têm-se a atração devido à parte regular da topografia (platô de Bouguer) e a atração devido à parte irregular (massas sobre o platô e massas não existentes sob o platô). No segundo método de condensação de Helmert têm-se as atrações devido às partes regular e irregular da topografia. No primeiro caso, parte regular, há a condensação do platô de Bouguer e, portanto, a atração devido ao platô condensado; no segundo, parte irregular, há condensação das massas topográficas, e, portanto, atração das massas topográficas condensadas. Assim:

$$A = A^R + A^I \quad (2.69)$$

onde,

$A$  : atração total em um ponto  $P$  na superfície terrestre devido às partes regular e irregular da topografia;

$A^R$ : atração em um ponto  $P$  na superfície terrestre devido à parte regular da topografia;  
 $A^I$ : atração em um ponto  $P$  na superfície terrestre devido à parte irregular da topografia.

Após o processo de condensação de Helmert:

$$A_C = A_C^R + A_C^I \quad (2.70)$$

onde,

$A_C$ : atração total em um ponto  $P$  da camada condensada;

$A_C^R$ : atração em um ponto  $P$  devido à parte regular da topografia condensada;

$A_C^I$ : atração em um ponto  $P$  devido à parte irregular da topografia condensada.

A diferença de atração gravitacional entre a topografia (parte regular e irregular) e a camada condensada (parte regular e irregular) é dada por

$$\delta A = A - A_C \quad (2.71)$$

$$\delta A = (A^R + A^I) - (A_C^R + A_C^I) \quad (2.72a)$$

$$\delta A = (A^R - A_C^R) + (A^I - A_C^I) \quad (2.72b)$$

$$\delta A = \delta A^R + \delta A^I \quad (2.73)$$

Em (2.73),  $\delta A^R$  representa a mudança na atração da parte regular da topografia, enquanto  $\delta A^I$  representa a mudança na atração da parte irregular da topografia.

A equação (2.71) representa a *correção de terreno* ( $R_{CT}$ ), a qual é, portanto, a diferença de atração gravitacional entre a topografia e a camada condensada:

$$\delta A = A - A_C = R_{CT} \quad (2.74)$$

A correção de terreno é sempre positiva (para maiores detalhes veja (HEISKANEN; MORITZ, 1967, p. 131)).

Normalmente, o efeito da correção de terreno é muito menor do que aquele do platô de Bouguer, e mesmo para regiões montanhosas com 3000 metros de altura a correção de terreno é somente da ordem de 50mGal (HEISKANEN; MORITZ, 1967).

## 2.7 Expansão da anomalia gravimétrica ( $\Delta g$ ) em harmônicos esféricos

A “equação fundamental da geodésia” (2.32), a qual pode ser considerada apenas como uma condição de contorno para determinação de  $T$ <sup>17</sup>, relaciona a quantidade medida  $\Delta g$  ao potencial anômalo desconhecido  $T$ . Após ser feita a aproximação esférica, a equação que relaciona as quantidades  $\Delta g$  e  $T$  é a eq. (2.33), mostrada abaixo:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R}T \quad (2.75)$$

Em termos de espaço de Hilbert (seção 2.4),  $\mathbf{H}$ , existe outro espaço de Hilbert chamado espaço dual,  $\mathbf{H}^*$ . Esse espaço consiste de funcionais lineares contínuos que mapeiam elementos de  $\mathbf{H}$  em números reais. Esses funcionais lineares são extremamente importantes porque uma quantidade observada geralmente é ou poderá ser expressa como o valor de um funcional linear aplicado a um elemento do espaço de Hilbert (TSCHERNING, 1978). Portanto, a eq. (2.75) representa a aplicação de um funcional linear ao elemento do espaço de Hilbert  $T$  em um ponto  $P$  e apresenta como resultado o número real  $\Delta g$  (também em  $P$ ). Dessa forma, pode-se determinar o desenvolvimento de  $\Delta g$  em harmônicos esféricos, uma vez que  $T$  também tem seu desenvolvimento em harmônicos esféricos. Calculando  $-\frac{\partial}{\partial r}$  de (2.26) obtém-se:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R^{n+1}}{r^{n+1}}\right) T_n = \sum_{n=0}^{\infty} R^{n+1} r^{-n-1} T_n \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ R^{n+1} (-n-1) r^{-(n+2)} T_n \right] = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} T_n \right] \quad (2.77)$$

<sup>17</sup> Segundo WELLENHOF e MORITZ (2005) a “verdadeira” equação diferencial é aquela que diz que o potencial anômalo  $T$  satisfaz a equação de Laplace:  $\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$  e, se suplementada pela condição de contorno (2.32), é suficiente para determinar  $T$  em todo ponto externo ao geóide.

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} T_n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \frac{1}{r} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} T_n \right] = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n \right] \quad (2.78)$$

A substituição de (2.78) e (2.26) em (2.75) fornece:

$$\Delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n \right] - \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} T_n \quad (2.79)$$

Sobre o geóide, o que com a aproximação esférica corresponde a uma esfera de raio  $r = R$ , obtém-se:

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) \left( \frac{R}{R} \right)^{n+1} T_n \right] - \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{R} \right)^{n+1} T_n = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)T_n] - \frac{2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} T_n \quad (2.80)$$

$$\Delta g = \frac{1}{R} \left( \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)T_n] - \sum_{n=0}^{\infty} 2T_n \right) = \frac{1}{R} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (nT_n + T_n) - \sum_{n=0}^{\infty} 2T_n \right) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} nT_n + \sum_{n=0}^{\infty} (T_n - 2T_n) \quad (2.81)$$

$$\Delta g = \frac{1}{R} \left( \sum_{n=0}^{\infty} nT_n + \sum_{n=0}^{\infty} -T_n \right) = \frac{1}{R} \left( \sum_{n=0}^{\infty} nT_n - \sum_{n=0}^{\infty} T_n \right) = \frac{1}{R} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (nT_n - T_n) \right) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)T_n \quad (2.82)$$

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)T_n \quad (2.83)$$

Esta é a expansão em harmônicos esféricos da anomalia gravimétrica.

A eq. (2.83), embora de forma implícita, mostra que podem ser determinados os coeficientes dos harmônicos esféricos do potencial anômalo  $T$  a partir de  $\Delta g$ . Expandindo-se as anomalias gravimétricas  $\Delta g$ , que devem ser medidas sobre toda a superfície terrestre, como uma série de harmônicos esféricos, pode-se computar os

coeficientes que relacionam aquelas duas quantidades,  $T$  e  $\Delta g$ , que são os coeficientes  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$ . De particular importância é o coeficiente:

$$C_{20} = -\frac{C - \bar{A}}{Ma^2} \quad (2.84)$$

que dá a diferença entre os momentos principais de inércia da Terra:  $C$  é o momento polar e

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(A + B) \quad (2.85)$$

é o momento equatorial de inércia médio.  $M$  é a massa da Terra e  $a$  é o semi-eixo maior do elipsóide de referência utilizado no cálculo. O coeficiente  $\{C_{20}\}^{18}$ , que representa o achatamento terrestre, é o maior dos coeficientes dos harmônicos esféricos, e, assim como os outros coeficientes, é um número pequeno e adimensional.

Agora que já foram introduzidas as idéias sobre os harmônicos esféricos e sua utilização para determinação do potencial gravitacional e do potencial anômalo, pode-se complementar a equação (2.1), que poderia ser utilizada se a Terra fosse uma esfera homogênea. Conforme exposto na seção 2.1, o desvio entre a Terra real e *uma Terra esférica e homogênea* para a qual poder-se-ia utilizar a equação (2.1) é representado por termos que algebricamente devem ser somados ao lado direito daquela equação. Abaixo, eq. (2.86), é apresentada a expressão completa para o potencial gravitacional da Terra real desenvolvido em harmônicos esféricos:

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \theta) \right\} \quad (2.86)$$

onde,

---

<sup>18</sup>  $C_{20}$  significa coeficiente  $C$  de grau 2 e ordem 0. Na literatura é encontrada a notação  $J_{nm} = -C_{nm}$ . Para  $m=0$  prevalece a notação  $J_n = -C_{n0}$ .  $J_2$  é chamado de *fator dinâmico de forma da Terra* (excluindo as deformações permanentes devido às marés).

$M$  é a massa da Terra e  $G$  é constante gravitacional. O parâmetro  $a$  é o semi-eixo maior do elipsóide de referência, enquanto  $r$  é a distância radial do ponto onde se calcula o potencial  $V$ .

### 3. TÉCNICAS USADAS NA DETERMINAÇÃO DO GEÓIDE

Várias técnicas podem ser utilizadas para determinação de geóides: Solução da integral de Stokes por integração numérica e FFT (*Fast Fourier Transform*), obtenção direta da altura geoidal pela diferença entre alturas elipsoidais (GPS) e alturas ortométricas (obtidas por nivelamento geométrico), colocação por mínimos quadrados, colocação rápida (*Fast Collocation* – FC). Souza (2002) utilizou a técnica Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ) para determinação do geóide do Estado de São Paulo. A característica básica da CMQ é que ela permite a determinação do campo de gravidade pela combinação de dados diferentes em tipo e precisão. A *Fast Collocation* é uma técnica de determinação rápida do geóide fundamentada na técnica da colocação por mínimos quadrados. É considerada uma técnica rápida porque impõe restrições aos dados de entrada (dados de gravidade, por exemplo) (BOTTONI; BARZAGHI, 1993).

A informação do campo de gravidade terrestre relativa aos longos comprimentos de onda para a determinação do geóide do Estado de São Paulo é fornecida pelo modelo do geopotencial (MG). Neste trabalho é utilizado um MG obtido a partir das novas missões espaciais CHAMP e GRACE.

O objetivo deste capítulo não é identificar a melhor técnica para determinação do geóide, mas apresentar as principais características das técnicas utilizadas em vários países do mundo, bem como apresentar a técnica FC para determinação de geóide, a qual é pouco (ou nunca!) utilizada em nível de Brasil.

#### 3.1 Integral de Stokes

Em 1849 G. G. Stokes<sup>19</sup> publicou uma das mais famosas fórmulas da geodésia física (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (3.1)$$

onde,

---

<sup>19</sup> George Gabriel Stokes (1819 – 1903)



$R$  : raio médio da Terra

$\gamma_0$  : gravidade normal na superfície do elipsóide de referência

$\psi$  : ângulo geocêntrico, ou distância esférica, entre o ponto de interesse  $o$  e ponto utilizado na integração

$S(\psi)$  : função de Stokes, ou núcleo (esférico) da integral de Stokes

$d\sigma$  : elemento infinitesimal de superfície

$\Delta g$  : anomalia gravimétrica

A função de Stokes  $s(\psi)$  é utilizada como núcleo de integração e atua como um parâmetro de ponderação das anomalias gravimétricas. A equação (3.1) é, sem dúvida, uma das mais importantes fórmulas da geodésia física, pois mostra que é possível a determinação do geóide a partir de dados de gravidade ( $\Delta g$ ) distribuídos por *toda* a superfície da Terra. Não obstante a sua grande importância, a fórmula de Stokes na sua forma original (eq. 3.1) somente pode ser aplicada a um elipsóide de referência que (WELLENHOF; MORITZ, 2005): (1) tenha o mesmo potencial  $U_0 = W_0$  que o geóide, (2) encerra uma massa que é numericamente igual à da Terra, e, (3) tenha seu centro coincidindo com o centro de gravidade terrestre. Como as condições (1) e (2) não podem ser satisfeitas de forma exata, a fórmula de Stokes deve sofrer algumas modificações para sua plena utilização.

### 3.1.1 Integração numérica

Utiliza-se a integração numérica quando não é possível determinar analiticamente a integral definida de uma função. Assim, determina-se numericamente uma integral definida através de um somatório (Figura 7). Genericamente, tem-se (BERTULANI, 1996 *apud* LOBIANCO, 2005):

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^N c_i f(a+ih) + F(a,b,h) \approx h \sum_{i=0}^N c_i f(a+ih) \quad (3.2)$$

onde,

$c_i$ : constante

$h = \frac{(b-a)}{N}$ : largura do intervalo

$N$ : número de intervalos (quanto maior for o  $N$  melhor será a aproximação, porém o tempo de cálculo também será maior)

$F(a, b, h)$ : erro de aproximação

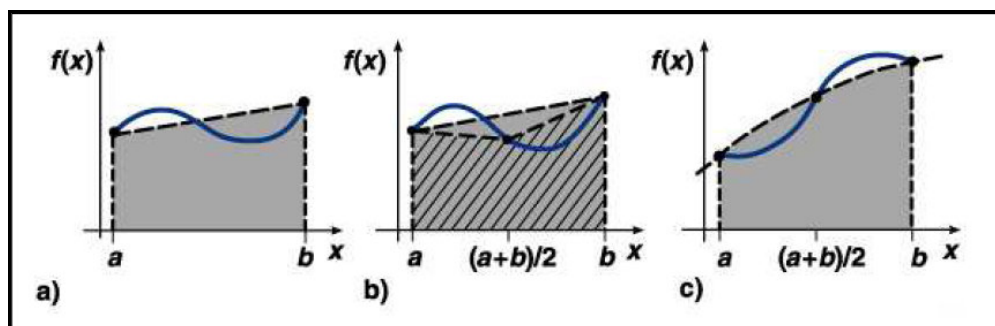


Fig.7: Integração numérica – a) Regra do trapézio, b) Método de Romberg e c) Regra de Simpson

Fonte: (BERTULANI, 1996 *apud* LOBIANCO, 2005)

### 3.1.2 Convolução (FFT)

A Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform – FFT*) é uma ferramenta que permite uma rápida determinação do geóide. Com os dados dispostos em uma *grid* regular, como em geral acontece com dados de topografia (Modelo Digital de Terreno – MDT) e anomalias gravimétricas, pode-se acelerar os cálculos da integral de Stokes segundo algumas aproximações (aproximação plana ou esférica), transformando as integrais em convoluções (Adaptado de GOLDANI, 2006).

## 3.2 Obtenção direta da altura geoidal ( $N$ ) através de nivelamento e GPS

O surgimento do Sistema de Posicionamento Global (*Global Positioning System – GPS*) permitiu a determinação das coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda, h$ ) de pontos na superfície terrestre, respectivamente, latitude, longitude e altura. Como o GPS é um sistema que utiliza um elipsóide como superfície de referência, tais coordenadas são referidas a esta superfície. Assim, a altura  $h$  de um ponto  $P$  na superfície terrestre é a medida do afastamento entre o ponto  $P$  e o elipsóide medido ao longo da normal<sup>20</sup>. A altura  $h$ , chamada altura geométrica ou altura elipsoidal, é uma entidade puramente geométrica, pois está diretamente associada ao elipsóide de referência. Já a altura ortométrica ( $H$ ) de um ponto  $P$  na superfície terrestre é medida ao longo da vertical<sup>21</sup> e é referida ao geóide. A altura  $H$ , portanto, é uma quantidade física, pois está vinculada ao geóide. Negligenciando a não colinearidade entre a normal e a vertical, pode-se obter diretamente a altura geoidal ( $N$ ):

$$N_{GPS} \approx h - H \quad (3.3)$$

A Figura 8 ilustra o que foi mencionado acima.

<sup>20</sup> Normal – Raio vetor que passa através de  $P$  e intercepta ortogonalmente a superfície de referência (elipsóide).

<sup>21</sup> Vertical – Raio vetor que passa através de  $P$  e intercepta ortogonalmente o geóide.

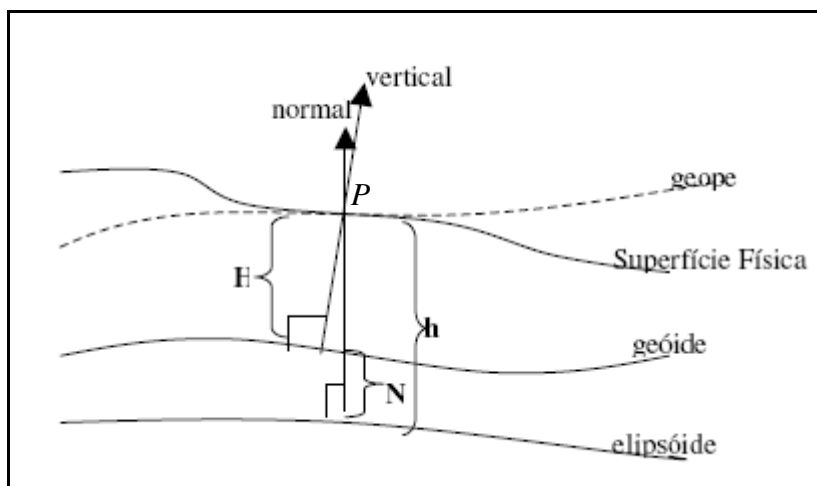


Fig.8: Altura elipsoidal ( $h$ ), altura ortométrica ( $H$ ) e altura geoidal ( $N$ )

Através da eq. (3.3) pode-se obter a altura ortométrica ( $H$ ) de pontos na superfície terrestre onde foi obtida a altura  $h$  por GPS. Para isso, utiliza-se um modelo geoidal da região, o qual fornece o valor de  $N$  determinado, por exemplo, por dados de gravidade ( $N_{grav}$ ), também chamado **geóide gravimétrico**.

Para se determinar a exatidão de geóides gravimétricos ( $N_{grav}$ ) geralmente são utilizados os modelos geoidais obtidos pela eq. (3.3) ( $N_{GPS}$ ). Ou seja, são determinadas as alturas elipsoidais  $h$  de RRNN, que possuem portanto alturas ortométricas  $H$  conhecidas, através do rastreamento dos satélites GPS. Dessa forma, e utilizando a eq. (3.3), determina-se um modelo geoidal,  $N_{GPS}$ , da região. Assim, comparando-se os dois modelos,  $N_{grav}$  e  $N_{GPS}$ , podem ser obtidas as discrepâncias entre eles.

O que foi exposto acima acerca da comparação, para fins de avaliação de  $N_{grav}$ , entre  $N_{grav}$  e  $N_{GPS}$ , descreve uma situação que *em tese* pode se concretizar. A comparação entre  $N_{grav}$  e  $N_{GPS}$  evidentemente poderá ser feita somente se o modelo  $N_{GPS}$  possuir uma exatidão mínima suficiente que permita a ele ser utilizado como “referência” para o modelo  $N_{grav}$  calculado a partir de dados gravimétricos. Fica implícito, porém sem desconsiderar o seu valor, que as RRNN devem ter exatidão e ser em número suficiente que permitam a determinação de um modelo  $N_{GPS}$  satisfatório.

Além disso, o rastreamento sobre as RRNN deve ser realizado após um adequado planejamento que vise a obtenção das melhores condições de rastreio em campo.

### 3.3 Colocação por mínimos quadrados

A colocação por mínimos quadrados (CMQ) é uma técnica matemática utilizada para determinação do campo gravitacional anômalo ( $T = W - U$ ) através da combinação de diferentes tipos de dados, como anomalias gravimétricas, alturas geoidais, componentes principais do desvio da vertical, coeficientes dos harmônicos esféricos, etc. Suas fórmulas podem ser interpretadas como, por exemplo, uma estimação estatística combinando predição e ajustamento por mínimos quadrados e também como uma aproximação analítica do potencial da Terra por meio de funções harmônicas. Nesta técnica, a função covariância desempenha um importante papel. Além disso, na CMQ não é necessária a integração de funções para determinação do geóide e os erros das medições podem ser considerados.

De acordo com a eq. (2.21b) são escolhidas funções base  $\phi_k$  adequadas que aproximam  $f$  de  $T$  em um ponto  $p$ . Além disso, para qualquer sistema de funções base  $\phi_k$  assumido, a determinação dos coeficiente  $b_k$  em (2.21b) sempre envolve a solução de um sistema  $N \times N$  de equações lineares, em geral não simétrico.

Para a interpolação, que é um caso especial da colocação<sup>22</sup>, podem ser escolhidas funções base  $\phi(P)$  que minimizem o desvio padrão do erro de interpolação (também chamado *erro de predição*):

$$M\{e_p^2\} = m_p^2 \quad (3.4)$$

onde,

---

<sup>22</sup> Quando os funcionais  $L_i f$  (ver seção 3.3.1) são iguais a  $f(P_i)$ , temos um caso de interpolação.

$e_p$ : é o erro local de interpolação, que vale zero nos pontos  $P_i$  onde  $f(P_i)=T(P_i)$ . Esta última igualdade é válida se for postulado que  $f$  reproduz  $T$  exatamente nos pontos  $P_i$ ,  $i=1,2,3,\dots,N$ .

$M$ : representa o estimador média

O erro  $e_p$  é dado por:

$$e_p = T(P) - f(P) \quad (3.5)$$

Estabelecendo a condição  $m_p = \min$ , tem-se

$$\phi_k(P) = K(P, P_k) \quad (3.6)$$

onde  $K(\bullet, \bullet)$  é a função covariância do potencial anômalo, definida como (MORITZ, 1978):

$$K(P, Q) = M\{T(P)T(Q)\} \quad (3.7)$$

onde  $M\{\bullet\}$  representa o estimador média.

Por enquanto, é necessário saber apenas que as funções base  $\phi_k$  de (2.21b), estabelecida a condição de desvio-padrão mínimo do erro de predição, são dadas pelas funções covariância (3.7). Maiores detalhes sobre a função covariância serão apresentados nas seções 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4.

### 3.3.1 Modelo matemático da CMQ

Através da aproximação feita em (2.21b) e considerando-se a igualdade em (3.6), mostra-se que a fórmula para interpolação por mínimos quadrados é dada por (MORITZ, 1978):

$$f(P) = [C_{P1} \ C_{P2} \ \dots \ C_{PN}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde

$$C_{Pk} = K(P, P_k) = \phi_k(P) \quad (3.9).$$

A equação (3.8) é usada freqüentemente para interpolação de dados de gravidade, considerando  $f = \Delta g$  ao invés de  $T$ . No entanto, essa fórmula é bastante limitada e é utilizada essencialmente para interpolação de anomalias gravimétricas  $\Delta g$ . Para uma aplicação mais ampla, ou seja, que envolva como dados quaisquer funcionais lineares de  $T$  (dados de diferentes tipos), utiliza-se a fórmula da colocação por mínimos quadrados, demonstrada em MORITZ (1978):

$$f(P) = [C_{P1} \ C_{P2} \ \dots \ C_{PN}] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A CMQ considera como funcionais lineares de  $T$  todos aqueles elementos do campo gravitacional anômalo que se relacionam matematicamente e fisicamente com  $T$ , como, por exemplo, componentes principais do desvio da vertical (eq. 3.11), anomalias gravimétricas (eq. 3.12) e a altura geoidal, a famosa fórmula de Bruns (eq. 3.13):

$$\xi = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.11)$$

onde  $\xi$  e  $\eta$  são, respectivamente, a componente meridiana e a componente 1º vertical do desvio da vertical.

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2}{R} T \quad (3.12)$$

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad (3.13)$$

As equações (3.11) e (3.12) são válidas para pontos em um sistema de coordenadas locais  $x, y, z$ , no qual o eixo  $z$  aponta verticalmente para cima e os eixos  $x$  e  $y$  apontam nas direções norte e leste, respectivamente, e  $R = 6371 \text{ km}$  é o raio terrestre médio. A equação (3.12) é a já conhecida “*equação fundamental da geodésia*” em aproximação esférica (2.33). Dizer que as componentes do desvio da vertical, as anomalias gravimétricas e a altura geoidal são funcionais lineares de  $T$  é dizer que  $\xi, \eta, \Delta g, N$  dependem de  $T$  de acordo com as equações (3.11), (3.12) e (3.13), que claramente são expressões lineares. Elas são os termos lineares de uma expansão em série de Taylor<sup>23</sup> de  $T$ , em que são negligenciados os termos de ordem dois ou superior (WELLENHOF; MORITZ, 2005). Simbolicamente os funcionais lineares de  $T$  são denotados por  $L_i T$ , onde o símbolo  $L_i$  significa, por exemplo, a operação:

$$L_i = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.14)$$

aplicada ao potencial anômalo  $T$  em algum ponto  $P$ .

Fazendo

---

<sup>23</sup> Brook Taylor (1685 – 1731)



$$L_i f = L_i T \quad (3.15)$$

e substituindo (2.21b) em (3.15), obtém-se:

$$L_i f = L_i \left( \sum_{k=1}^N (b_k \phi_k) \right) = \sum_{k=1}^N L_i (b_k \phi_k) = \sum_{k=1}^N b_k (L_i \phi_k) \quad (3.16)$$

$$\sum_{k=1}^N B_{ik} b_k = l_i \quad \text{com } B_{ik} = L_i \phi_k \quad (3.17)$$

onde  $L_i \phi_k$  expressa o número obtido pela aplicação da operação  $L_i$  à função base  $\phi_k$ ; os coeficientes  $B_{ik}$  assim obtidos não dependem dos valores medidos. A equação (3.17) representa um sistema linear de  $N$  equações por  $N$  variáveis, semelhante, mas não igual, àquele da equação (2.25). A diferença está no fato que em (2.25) cada coeficientes  $A_{ik}$  provém da avaliação das funções base  $\phi_k$  em cada um dos pontos  $P_i$ , o mesmo não acontecendo em (3.17), já que neste caso cada coeficiente  $B_{ik}$  é obtido pela aplicação de  $L_i$  à função base  $\phi_k$ . Essa técnica de ajustar uma aproximação analítica a  $N$  funcionais lineares dados é chamada de colocação. A determinação de  $b_k$ , para qualquer sistema de funções base  $\phi_k$  assumido, envolve a solução de  $N \times N$  sistemas de equações lineares, que, em geral, não são simétricas (MORITZ, 1978).

Interpolação e CMQ possuem uma desvantagem que é ter que inverter uma matriz  $N \times N$ , em geral grande, pois a quantidade de dados de observação é enorme. Entretanto, considerando-se as funções base como aquelas do tipo (3.6), elas têm a vantagem que a matriz a ser invertida, sendo a matriz covariância do tipo (3.6), é simétrica e **positiva definida**<sup>24</sup>, diferente do caso geral em (2.25) e (3.17) onde, em ambos os casos, a matriz é assimétrica.

---

<sup>24</sup> Pela definição, uma matriz  $M$  ( $r \times r$ ) é positiva definida se  $\mathbf{xMx}^T \geq 0$  para um vetor linha  $\mathbf{x}$  de  $r$  componentes. O sinal de igualdade é assegurado somente se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (MORITZ, 1980). Conforme AYRES (1962) uma matriz real simétrica  $\mathbf{A}$  é positiva definida se existe uma matriz real não singular ( $\det(\mathbf{A}) > 0$ )  $\mathbf{M}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{MM}^T$ , onde  $\mathbf{M}^T$  é a transposta de  $\mathbf{M}$ .

A equação (3.10) considera que as medidas  $l_i$  são isentas de erro. O caso em que os erros das medidas são considerados será apresentado a seguir.

Conforme foi visto acima, os elementos do campo gravitacional anômalo (anomalias gravimétricas, componentes principais do desvio da vertical, por exemplo) podem ser expressos como funcionais lineares ( $L$ ) de  $T$ :

$$l_i = L_i T \quad (3.18)$$

Se as medidas  $l_i$  são afetadas por erros aleatórios  $n_i$ , então:

$$l_i = L_i T + n_i \quad \therefore i = 1, 2, \dots, N \quad (3.19)$$

Fazendo  $L_i T = s_i$ , produz:

$$l_i = s_i + n_i \quad (3.20)$$

onde  $s_i$  (“sinal”) é a parte de  $l_i$  isenta de erro e representa o efeito puramente gravitacional (por exemplo, medida do elemento do campo -  $\Delta g; \xi, \eta$  - sem erros).

Deve-se considerar que as observações  $l_i$  incluem uma parte sistemática além da parte aleatória (3.19). Dessa forma, temos o seguinte modelo geral para a CMQ (MORITZ, 1978):

$$l = AX + s + n \quad (3.21)$$

ou

$$l_i = \sum_{r=1}^m A_{ir} X_r + s_i + n_i \quad \therefore i = 1, 2, \dots, N \quad (3.22)$$

A eq. (3.22) pode ser “aberta” da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix}_{Nx1} = \begin{bmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1m}X_m \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{2m}X_m \\ \vdots \\ A_{N1}X_1 + A_{N2}X_2 + \dots + A_{Nm}X_m \end{bmatrix}_{Nx1} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix}_{Nx1} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}_{Nx1} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix}_{Nx1} = \left\{ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{Nm} \end{bmatrix}_{Nxm} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}_{mx1} \right\} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix}_{Nx1} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}_{Nx1} \quad (3.24)$$

onde  $l$  é o vetor das observações,  $X$  compreende os  $m$  parâmetros sistemáticos não aleatórios e  $A$  é uma matriz  $Nxm$  conhecida,  $m < N$ ,  $s$  é a parte sem erro de  $l$  e representa puramente o efeito gravitacional (vetor dos sinais do campo anômalo expresso por funcionais aplicados ao potencial anômalo) e  $n$  é o vetor dos erros das observações (ruído). Geralmente, a relação linear  $AX$  será obtida a partir da linearização de uma função inicialmente não-linear (Moritz, 1978).  $AX$  também é chamada componente *determinística* e, neste caso, é representada pelo MG CG01c, o que reduz a expressão (3.21) a um modelo não paramétrico ( $X = \theta$ ) (SOUZA, 2002):

$$l = s + n \quad (3.25)$$

Considerando o modelo (3.25), a fórmula da colocação com erros aleatórios para o sinal e sua respectiva variância são dadas por (MORITZ, 1980):

$$\hat{s} = C_{st} C_{ll}^{-1} l \quad (3.26)$$

$$\sigma_{\hat{s}}^2 = C_{ss} - C_{st} C_{ll}^{-1} C_{ts} \quad (3.27)$$

onde  $C_{ll}$  ( $C_{ll} = C_{tt} + C_{mm}$ ) é a soma das matrizes covariância do sinal e do ruído (erros das observações). A matriz  $C_{st}$  é chamada matriz covariância cruzada, representa a matriz covariância do sinal puro e tem a forma  $C_{st} = [C_{P1} \ C_{P2} \ \dots \ C_{PN}]$ , e  $C_{ss}$  representa a

matriz covariância para o vetor de sinais  $\hat{s}$ . As matrizes covariâncias são determinadas a partir de funções ajustadas às covariâncias empíricas.

Já que o sinal  $s$  pode ser escrito como um funcional linear de  $T$ :

$$s = L^P T(P) \quad (3.28)$$

e que a estimativa do sinal é dada por (3.26), então pode-se obter a estimativa do potencial  $T$  em um ponto  $P$ :

$$\hat{T}(P) = [C_{P1} \quad C_{P2} \quad \cdots \quad C_{PN}] \begin{bmatrix} C_{11} + D_{11} & C_{12} + D_{12} & \cdots & C_{1N} + D_{1N} \\ C_{21} + D_{21} & C_{22} + D_{22} & \cdots & C_{2N} + D_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} + D_{N1} & C_{N2} + D_{N2} & \cdots & C_{NN} + D_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

A equação (3.29) é a generalização de (3.10), pois considera os erros aleatórios das medidas. A única diferença é a presença da matriz covariância dos erros:

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{D} = [D_{ij}] \quad (3.30)$$

MORITZ (1980) mostra que se  $T$  for escrito como uma combinação linear de funções base da mesma forma que em (2.21b), os coeficientes  $b_k$  permanecem os mesmos para todos os sinais ( $T$  ou  $L_i$ ); eles dependem da matriz covariância dos erros  $\mathbf{C}_m$  e são determinados de tal forma que o efeito dos erros das observações é minimizado, e conclui que estes erros afetam somente a determinação dos coeficientes  $b_k$ , mas não as funções base  $\phi_k$ : *não existe risco que a estatística deteriore a estrutura analítica do campo.*

### 3.3.2 Função covariância

A técnica CMQ necessita que as covariâncias sejam determinadas a partir de uma função covariância básica  $K(P, Q)$ . Conforme visto em (3.9), as funções base são diretamente relacionadas às funções covariância. Isso significa que se escolhermos uma forma analítica simples para  $K(P, Q)$ , então as funções base também serão analiticamente simples. A técnica da CMQ descrita anteriormente funciona com qualquer função  $K(P, Q)$  que seja simétrica em  $P$  e  $Q$ , harmônica como uma função de ambos,  $P$  e  $Q$ , e positiva definida. Dessa forma, a CMQ pode ser considerada puramente como uma aproximação analítica sem interpretação estatística, a função  $K(P, Q)$  sendo uma função núcleo no espaço de Hilbert com núcleo reprodutor (MORITZ, 1978). Uma sucinta idéia de função núcleo no espaço de Hilbert com núcleo reprodutor é dada a seguir (MORITZ, 1980).

Suponha que existe uma função  $K(P, Q)$  satisfazendo as duas relações seguintes:

$$K(P, Q) \in H \text{ para um } Q \text{ fixado, onde } H \text{ é o espaço de Hilbert} \quad (3.31),$$

$$f(Q) = (f(P), K(P, Q))_P \text{ para toda } f \in H \quad (3.32)$$

A primeira relação (3.31) diz que  $K(P, Q)$ , considerada como uma função de  $P$ , pertence ao espaço de Hilbert  $H$ . A segunda relação (3.32) diz que o produto interno de  $f$  com  $K$ , ambas consideradas como funções de  $P$ , reproduz  $f$ . Uma função  $K(P, Q)$  que satisfaz as duas propriedades fundamentais (3.31) e (3.32) é chamada *função kernel reprodutora*, ou função kernel.

### 3.3.3 Covariâncias esféricas

Sejam os pontos  $P$  e  $Q$  com coordenadas  $(\theta, \lambda)$  e  $(\theta', \lambda')$ , respectivamente, sobre a superfície de uma esfera terrestre média ( $r = R$ ), a qual corresponde ao elipsóide de referência,  $T(P)$  e  $T(Q)$  o potencial anômalo naqueles pontos e  $M\{\bullet\}$  representando um operador homogêneo (média sobre toda a esfera – independente de translação) e isotrópico<sup>25</sup> (média sobre todos os azimutes – independente de direção). Dessa forma, a função  $K(P, Q)$  dependerá unicamente da distância esférica ( $\psi$ ) entre  $P$  e  $Q$ :

$$K(P, Q) = K(\psi) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\theta, \lambda) T(\theta', \lambda') \sin \theta \, d\theta \, d\lambda \, d\alpha \quad (3.33)$$

A distância esférica relaciona-se com as coordenadas dos pontos através da seguinte equação:

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (3.34)$$

A eq. (3.34) pode ser deduzida a partir do triângulo esférico abaixo, utilizando a equação dos quatro elementos, bem conhecida fórmula da astronomia:

---

<sup>25</sup> As expressões homogêneo e isotrópico referem-se ao fato que o potencial anômalo ( $T$ ), assim como as anomalias gravimétricas ( $\Delta g$ ), resulta de uma superposição de muitas causas relacionadas à distribuição de massa na crosta terrestre. O efeito resultante dessas causas pode ser considerado aleatório. Essa aleatoriedade não é em relação ao tempo (medidas feitas em um mesmo ponto, mas em tempos diferentes), mas em relação ao espaço (medidas feitas simultaneamente em pontos diferentes). O comportamento aleatório é mais ou menos independente da posição e da direção sobre a esfera, ou seja, ele é homogêneo e isotrópico.

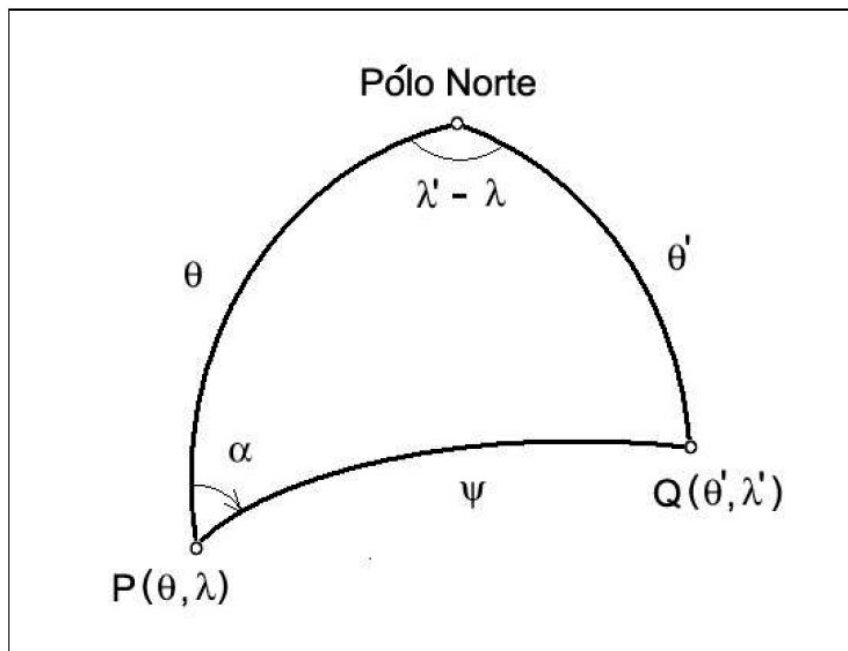


Fig.9: Triângulo esférico

Já que sobre a esfera a função é harmônica, ela pode ser expandida em uma série de harmônicos esféricos. A eq. 3.35 mostra essa expansão:

$$K(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n P_n(\cos \psi) \quad (3.35)$$

onde  $P_n(\cos \psi)$  são os polinômios de Legendre. Se o potencial anômalo  $T$  sobre a esfera ( $r = R$ ) é, da mesma forma, expandido em harmônicos esféricos:

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \cos m\lambda + \bar{b}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (3.36)$$

onde  $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$  expressam as funções de Legendre completamente normalizadas, então os coeficientes  $k_n$  de  $K$  são relacionados aos coeficientes  $\bar{a}_{nm}$  e  $\bar{b}_{nm}$  de  $T$  por (KAULA, 1959 *apud* MORITZ, 1978):

$$k_n = \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm}^2 + \bar{b}_{nm}^2) \quad (3.37)$$

Pode-se estender a função (3.35) para o espaço exterior a uma esfera  $r = R$ . Para isso, deve-se exigir que a função  $K(P, Q)$  seja harmônica neste espaço tanto em relação a  $P$  quanto em relação a  $Q$ , isto é, ela deve satisfazer a equação de Laplace, seja ela uma função do ponto  $P$  ou do ponto  $Q$ .

A representação da função covariância para pontos  $P$  e  $Q$  exteriores à esfera e separados por uma distância  $\psi$  é dada por (MORITZ, 1978):

$$K(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (3.38)$$

onde  $r_P$  e  $r_Q$  são os raios vetores dos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente. A eq. (3.38) expressa a função covariância do potencial anômalo  $T$ .

A função covariância  $K(P, Q)$  do potencial anômalo  $T$  é a função covariância básica, ou função *kernel*, a partir da qual todas as funções covariância dos elementos do campo de gravidade são derivadas por propagação das covariâncias. Dessa forma, a função covariância correspondente à anomalia gravimétrica  $\Delta g$  é dada por:

$$C(P, Q) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) \quad (3.39)$$

onde,

$$c_n = \left( \frac{n-1}{R} \right)^2 k_n \quad (3.40)$$

A expressão (3.39) segue da já conhecida relação em harmônicos esféricos entre  $T$  e  $\Delta g$ , e do fato que  $r\Delta g$  é harmônica no espaço (eq. 2.83). Assim, de uma das funções  $C(P, Q)$  e  $K(P, Q)$  é possível determinar a outra. No entanto, do ponto de vista da



determinação empírica, a função covariância  $C(P,Q)$  das anomalias gravimétricas  $\Delta g$  tem um caráter mais fundamental, pois as anomalias gravimétricas formam a principal quantidade empírica utilizada na determinação prática das covariâncias do sinal.

Todas as funções covariância, bem como todas as matrizes covariâncias, devem ser positivas definidas, o que é equivalente a não negatividade do espectro (PAPOULIS, 1965 *apud* MORITZ, 1978). No caso das funções definidas sobre a esfera, a representação espectral é a expansão em harmônicos esféricos. Portanto, exigir que as funções  $K$  e  $C$  sejam positivas definidas é equivalente a exigir a não negatividade de todos os coeficientes  $k_n$  e  $c_n$ , o que é garantido por (3.37) e (3.40).

### 3.3.4 Modelagem da função covariância esférica

O modelo de função covariância usado neste trabalho foi o proposto por (TSCHERNING; RAPP, 1974):

$$C(P,Q) = \sum_{n=2}^N c_n \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+24)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) \quad (3.41)$$

onde  $\psi$  é a distância esférica entre os pontos  $P$  e  $Q$  com distância radial  $r_P$  e  $r_Q$ , respectivamente,  $c_n$  representa a variância de grau do erro das anomalias e é associado com os coeficientes do modelo do geopotencial,  $R_B$  é o raio da esfera de Bjerhammar<sup>2627</sup>.  $N$  é um valor fixo, que é igual ao grau de truncamento do modelo do geopotencial; neste trabalho  $N=180$ . Os parâmetros desconhecidos  $A$  e  $R_B$  devem ser determinados para ajustar a função covariância empírica. Para determinação da função covariância empírica foi utilizado o programa da Escola do Geóide (*International Geoid Service* – IGeS) EMPCOV, que faz parte do pacote GRAVSOFT, desenvolvido por C.

<sup>26</sup> Arne Bjerhammar (1917 – )

<sup>27</sup> A esfera de Bjerhammar é uma esfera teórica que se supõe estar completamente dentro da Terra e é utilizada para fins de convergência da série.

C. TSCHERNING (1974). A covariância empírica foi ajustada com o programa COVFIT, também do pacote GRAVSOFT. A figura 10 mostra a função covariância empírica e a função covariância analítica ajustada. Os parâmetros ajustados são  $A = 1.308.562,00$  e  $R - R_B = 8.103,745$  m.

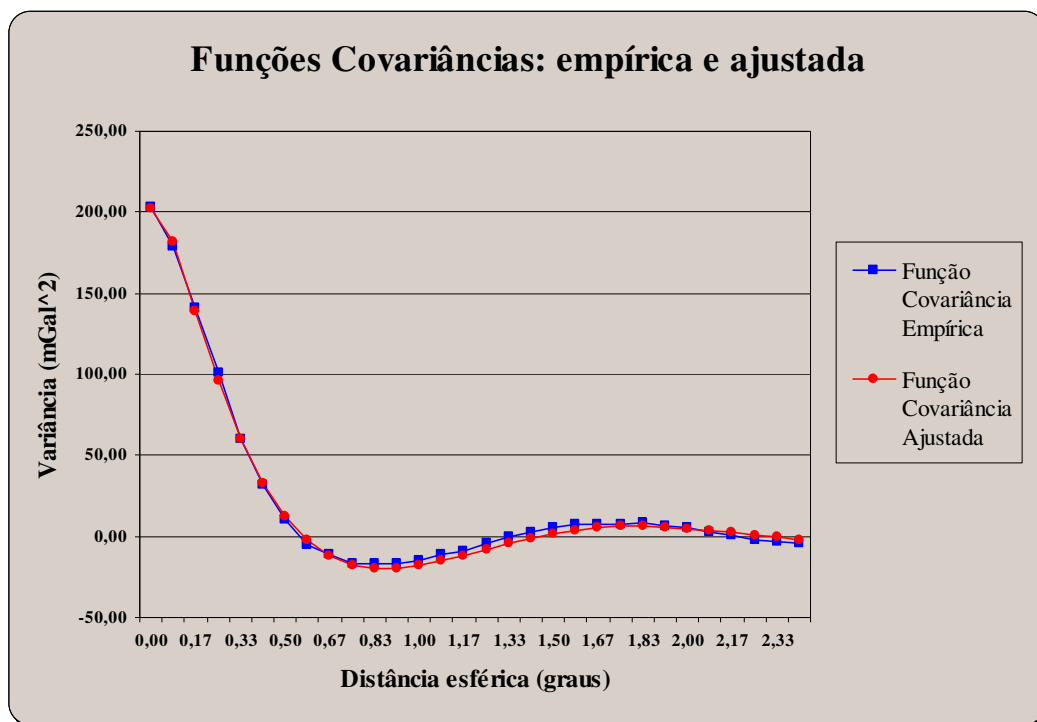


Fig.10: Funções covariância empírica e analítica

### 3.4 *Fast Collocation* (Colocação rápida)

O objetivo desta seção é apresentar as características principais da técnica *Fast Collocation*, em especial a estrutura da matriz covariância, e não os procedimentos numéricos e algoritmos para resolver o sistema Toeplitz<sup>28</sup>, embora sejam feitas algumas referências a este último caso.

<sup>28</sup> Otto Toeplitz (1881 – 1940)

BOTTONI e BARZAGHI (1993) propuseram algumas modificações à forma original da técnica CMQ, permitindo determinar o geóide por colocação de maneira rápida e confiável. Esta nova técnica é chamada *Fast Collocation*<sup>29</sup> (Colocação Rápida). A utilização da *Fast Collocation* (FC) pressupõe que os dados utilizados estejam homoganeamente distribuídos em um *grid*. Isto implica que a matriz autocovariância que entra na fórmula da colocação é uma matriz do tipo Toeplitz. Em particular, se as observações estão localizadas em um *grid* plano bidimensional, a matriz autocovariância é uma matriz Toeplitz de blocos simétrica, e cada bloco é ele próprio uma matriz Toeplitz simétrica (estrutura Toeplitz/Toeplitz). Desta maneira, a técnica FC acelera a solução do sistema devido às restrições aos dados de entrada. Isto é particularmente importante quando temos grandes conjuntos de dados, cobrindo vastas áreas. Nesse caso, em um único passo pode-se computar a solução por colocação sem particionamento dos dados em subconjuntos e posterior “remendo” das soluções locais para obtenção do resultado final. Os dados de anomalia gravimétrica (ou qualquer outro elemento do campo gravitacional anômalo) em geral não se encontram em um *grid* “plano”, e isto poderia dificultar a utilização da técnica FC, no entanto a análise pode ser estendida a um *grid* geográfico regular, considerado uma generalização do caso plano, levando em conta as distorções sobre a estrutura Toeplitz/Toeplitz induzidas pela convergência dos meridianos (BOTTONI; BARZAGHI, 1993).

### 3.4.1 Estrutura Toeplitz da matriz de covariância

A técnica FC é baseada na utilização de uma estrutura matricial chamada estrutura Toeplitz/Toeplitz, que é uma matriz simétrica de blocos onde cada bloco também é uma matriz Toeplitz simétrica. Uma matriz Toeplitz é qualquer matriz  $B_{n \times n}$  com valores constantes ao longo de cada diagonal (da esquerda para direita e de cima para baixo). Ou seja, uma matriz Toeplitz tem a forma:

---

<sup>29</sup> A técnica *Fast Collocation* não é muito (ou quase nada!) difundida no Brasil para determinação do geóide, talvez por isso não exista no país uma tradução amplamente divulgada para o nome da técnica. Por não haver essa tradução, portanto, preferiu-se usar ao longo desta dissertação o nome da técnica originalmente em inglês.

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-(n-1)} & \cdots & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Uma matriz Toeplitz simétrica tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Uma matriz Toeplitz simétrica de ordem  $n$  pode ser representada por um vetor  $\mathbf{x}$  de tamanho  $n$  contendo os elementos da primeira coluna da matriz (ou os elementos da primeira linha!), tal que  $x_i = a_{i1}$  para  $i=1, \dots, n$ . O vetor abaixo representa a matriz  $\mathbf{A}$  de (3.43):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

O modo de armazenamento dos elementos do vetor  $\mathbf{x}$  é mostrado através do exemplo abaixo, onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz Toeplitz simétrica e positiva definida.

Dada a matriz  $\mathbf{A}$  :

$$A = \begin{bmatrix} 33 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 33 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 33 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 33 & 5 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 33 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

o vetor no qual ela é armazenada é dado por:

$$X = (33, 5, 6, 7, 8) \quad (3.46)$$

Suponha uma equação matricial da forma

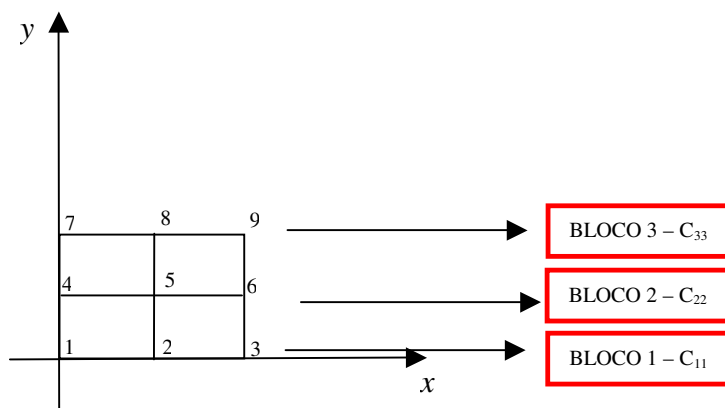
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.47)$$

a qual representa um problema geral de  $n$  equações lineares simultâneas a ser resolvido. Se a matriz  $\mathbf{A}$  é uma matriz Toeplitz, então o sistema torna-se especial, pois tem solução rápida, já que pode ser resolvido com  $O(2n-1)$  operações ( $2n-1$  graus de liberdade), ao contrário de  $O(n^2)$  operações, no caso de  $\mathbf{A}$  não ser Toeplitz (WIKIPEDIA, 2006). A rapidez na solução se deve ao fato de que a matriz  $\mathbf{A}$  é substituída por um simples vetor que carrega toda a informação contida em  $\mathbf{A}$ , como em (3.46), o que, por consequência, faz diminuir o número de operações a serem realizadas.

Agora, será montada uma matriz com estrutura Toeplitz/Toeplitz, ou seja, uma matriz Toeplitz simétrica de blocos com blocos Toeplitz simétricos, a partir de nove pontos dispostos em um *grid* bidimensional  $(x, y)$  e uma função covariância  $C(P, Q)$  que depende somente da distância plana  $d_{PQ}$  entre os pontos  $P$  e  $Q$  (exemplo adaptado de BOTTONI; BARZAGHI, 1993).

$$C(P, Q) = C(|P - Q|) = C(d_{PQ}) \quad (3.48)$$

Seja o *grid* abaixo:

Fig.11: *Grid* plano

A matriz covariância  $C$  computada para este *grid* usando a função covariância (3.48) é uma matriz com estrutura Toeplitz/Toeplitz, ou seja, uma matriz Toeplitz simétrica de blocos onde cada bloco é uma matriz Toeplitz simétrica. A matriz  $C$  pode ser escrita da seguinte forma

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ & C_{22} & C_{23} \\ \text{Simétrico} & & C_{33} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Então, para os blocos diagonais têm-se

$$C_{11} = \begin{bmatrix} C(d_{11}) & C(d_{12}) & C(d_{13}) \\ C(d_{21}) & C(d_{22}) & C(d_{23}) \\ C(d_{31}) & C(d_{32}) & C(d_{33}) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} C(d_{44}) & C(d_{45}) & C(d_{46}) \\ C(d_{54}) & C(d_{55}) & C(d_{56}) \\ C(d_{64}) & C(d_{65}) & C(d_{66}) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$C_{33} = \begin{bmatrix} C(d_{77}) & C(d_{78}) & C(d_{79}) \\ C(d_{87}) & C(d_{88}) & C(d_{89}) \\ C(d_{97}) & C(d_{98}) & C(d_{99}) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Como os pontos no *grid* da Figura 11 são simétricos, vemos que  $C(d_{ij})=C(d_{ji})$ ,  $d_{jj}=0$  e  $d_{i+1,j+1}=d_{ij}$ . Assim, cada matriz listada acima é do tipo Toeplitz. Além disso, nota-se que essas matrizes descrevem as correlações entre pontos sobre uma mesma linha (indicado na figura pelos retângulos em vermelho). Desta forma, estando os pontos sobre um *grid* regular e considerando uma função covariância com a propriedade (3.48) conclui-se que:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_0 \quad (3.53)$$

Considere as matrizes fora da diagonal principal,  $C_{12}$  e  $C_{23}$ :

$$C_{12} = \begin{bmatrix} C(d_{14}) & C(d_{15}) & C(d_{16}) \\ C(d_{24}) & C(d_{25}) & C(d_{26}) \\ C(d_{34}) & C(d_{35}) & C(d_{36}) \end{bmatrix} \quad (3.54a)$$

$$C_{23} = \begin{bmatrix} C(d_{47}) & C(d_{48}) & C(d_{49}) \\ C(d_{57}) & C(d_{58}) & C(d_{59}) \\ C(d_{67}) & C(d_{68}) & C(d_{69}) \end{bmatrix} \quad (3.54b)$$

Em  $C_{12}$ ,  $d_{j,j+3}$ ,  $j=1,\dots,3$ , são iguais às distâncias entre a primeira e a segunda linha e, portanto, os elementos da diagonal são iguais entre si ( $d_{14}=d_{25}=d_{36}$ ). Além disso, pode ser visto que  $a_{ij}=a_{ji}$ <sup>30</sup>, ou seja,  $d_{15}=d_{24}$ , por exemplo, e  $d_{16}=d_{26}$ . Assim, pode-se concluir que  $C_{12}$  possui estrutura Toeplitz. Com o mesmo raciocínio mostra-se que  $C_{23}$  também possui estrutura Toeplitz.

Vê-se que as matrizes  $C_{i,i+1}$ ,  $i=1,2$  contém as correlações entre pontos da  $i$ -ésima linha e pontos da  $(i+1)$ -ésima linha. Como o *grid* é regular, ou seja, a distância

---

<sup>30</sup> Aqui  $a_{ij}$  representa um elemento genérico de uma matriz posicionado na linha  $i$  e na coluna  $j$ .

entre as linhas é constante, então, conclui-se que  $C_{12} = C_{23} = C_1$ . Finalmente, considere o bloco  $C_{13}$ :

$$C_{13} = \begin{bmatrix} C(d_{17}) & C(d_{18}) & C(d_{19}) \\ C(d_{27}) & C(d_{28}) & C(d_{29}) \\ C(d_{37}) & C(d_{38}) & C(d_{39}) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

A matriz acima (3.55),  $C_{13}$ , contém as correlações entre os pontos da primeira e da terceira linha. Além disso,  $d_{j,j+6}$ ,  $j=1,\dots,3$ , são iguais às distâncias entre a primeira e a terceira linha e, portanto, os elementos da diagonal são iguais entre si ( $d_{17} = d_{28} = d_{39}$ ). Além disso, vê-se que  $a_{ij} = a_{ji}$ , ou seja,  $d_{19} = d_{37}$ , por exemplo, e  $d_{18} = d_{29}$ . Assim, conclui-se que  $C_{13}$  é uma matriz que possui estrutura Toeplitz. Fazendo  $C_{13} = C_2$ , a matriz  $C$  pode ser reescrita como:

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 \\ & C_0 & C_1 \\ \text{simétrico} & & C_0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Uma importante consequência da estrutura Toeplitz/Toeplitz é que podemos reduzir a área de armazenamento para a matriz  $C$ . Se for armazenada somente a primeira linha de da matriz  $C$ , pode-se computar os elementos da primeira linha dos blocos, já que cada bloco é uma matriz Toeplitz. Portanto, usando a estrutura Toeplitz/Toeplitz pode-se obter qualquer outro elemento de  $C$ . Isto se torna de vital importância se possuímos conjuntos com uma quantidade  $N$  muito grande de dados, o que implicaria em uma matriz covariância  $C(N \times N)$  que não poderia ser inteiramente armazenada.

O exemplo mostrado acima é bem adequado para o caso onde os dados estão regular e homogeneamente distribuídos em um *grid* plano de coordenadas retangulares  $(x, y)$  e uma função covariância que depende da distância plana entre os pontos. Entretanto, no caso de os pontos estarem sobre um *grid* geográfico com coordenadas



geodésicas  $(\varphi, \lambda)$  e uma função covariância que dependa da distância esférica  $(C(\psi))^{31}$  entre eles, a matriz covariância obtida a partir de  $C(\psi)$  não possui a estrutura Toeplitz/Toeplitz como o descrito no exemplo acima. Somente a estrutura Toeplitz de cada bloco é preservada, ou seja, cada um dos blocos mantém a propriedade de uma matriz Toeplitz simétrica, caracterizada pelos valores constantes ao longo de cada diagonal, semelhante à matriz de (3.43). A estrutura Toeplitz dos blocos não é mantida devido à convergência dos meridianos. Nota-se, por exemplo, que  $C_{11} \neq C_{22}$ , pois as covariâncias de  $C_{11}$  são diferentes daquelas de  $C_{22}$ .

A Figura 12 mostra um *grid* geográfico com nove pontos distribuídos e serve para ver que a estrutura Toeplitz de blocos não é preservada.

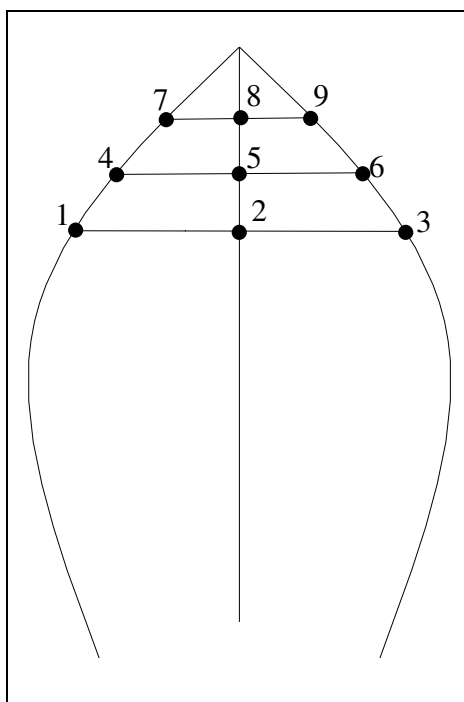


Fig.12: *Grid* geográfico de pontos

Nos blocos  $C_{11}$  e  $C_{22}$  as covariâncias entre os pontos sobre o mesmo paralelo são armazenadas da mesma forma que em (3.50) e (3.51), respectivamente. Considere os

<sup>31</sup> O argumento da função  $C(\psi)$  é semelhante àquele de (3.34). Usando-se a relação  $\theta = 90 - \varphi$ , fica:  $\cos(\psi) = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$

pontos sobre o mesmo paralelo e uma função covariância cujo argumento é do tipo (3.57):

$$\cos(\psi_{PQ}) = \text{sen } \varphi_P \text{ sen } \varphi_Q + \cos \varphi_P \cos \varphi_Q \cos(n\Delta\lambda) \quad (3.57)$$

onde,

$\Delta\lambda$  : incremento em longitude do *grid*

$$n = \frac{(\lambda_P - \lambda_Q)}{\Delta\lambda}$$

Como os pontos estão sobre o mesmo paralelo, então  $\text{sen } \varphi_P = \text{sen } \varphi_Q$  e  $\cos \varphi_P = \cos \varphi_Q$  e (3.57) torna-se:

$$\cos(\psi_{PQ}) = \text{sen}^2 \varphi_P + \cos^2 \varphi_P \cos(n\Delta\lambda) \quad (3.58)$$

A eq. (3.58) mostra que, para dois pontos quaisquer sobre o mesmo paralelo, a função covariância entre eles dependerá de suas latitudes (na verdade, dependerá da latitude de um deles, já que ambos estão sobre o mesmo paralelo), ou seja, a função covariância varia com a latitude.

No caso dos blocos  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , que representam as covariâncias entre pontos que estão sobre diferentes paralelos mas sobre os mesmos meridianos (veja 3.54a e 3.54b), o argumento da função covariância fica:

$$\cos(\psi_{PQ}) = \text{sen } \varphi_P \text{ sen } \varphi_Q + \cos \varphi_P \cos \varphi_Q \cos(m\Delta\varphi) \quad (3.59)$$

onde,

$\Delta\varphi$  : incremento em latitude do *grid*

$$m = \frac{(\varphi_P - \varphi_Q)}{\Delta\varphi}$$

Como os pontos estão sobre o mesmo meridiano, então  $\lambda_P = \lambda_Q$ , daí,

$$\cos(\psi_{PQ}) = \sin \varphi_P \sin \varphi_Q + \cos \varphi_P \cos \varphi_Q \cos(0) \quad (3.60)$$

e usando a relação trigonométrica do cosseno da subtração de arcos, (3.60) fica:

$$\cos(\psi_{PQ}) = \cos(m\Delta\varphi) \quad (3.61)$$

A eq. (3.61) mostra que, para dois pontos quaisquer sobre o mesmo meridiano, a função covariância dependerá da diferença de latitude entre eles.

No caso dos blocos  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  e  $C_{33}$ , os elementos acima da diagonal principal, em suas respectivas posições, diferem entre si de uma quantidade  $\varepsilon$  (que neste momento não nos interessa seu valor!). Pode-se afirmar, por exemplo, que o elemento  $a_{12}$  de  $C_{11}$  é igual ao elemento  $a_{12}$  de  $C_{22}$  mais  $\varepsilon_1$ , ou seja,  $a_{12}(\text{do bloco } C_{11}) = a_{12}(\text{do bloco } C_{22}) + \varepsilon_1$ . Este raciocínio pode ser feito para todos os demais elementos dos blocos  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  e  $C_{33}$ .

No caso dos blocos  $C_{12}$  e  $C_{23}$  o raciocínio é idêntico ao apresentado acima para os blocos  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  e  $C_{33}$ . Para o bloco  $C_{13}$ , tem-se um caso semelhante àquele dos blocos  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , pois ele representa as covariâncias entre os pontos que estão sobre paralelos diferentes mas sobre os mesmos meridianos.

Os elementos da diagonal principal de  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  e  $C_{33}$  são todos iguais entre si ( $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ ), basta ver a eq. (3.58), que se reduz a uma constante, visto que para cada ponto temos  $\lambda_P = \lambda_Q$ . Os elementos da diagonal principal de  $C_{12}$  e  $C_{23}$  são todos iguais entre si ( $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ ), pois pela eq. (3.61) eles dependem somente da diferença em latitude dos pontos. Como as diferenças em latitude entre os pontos 1 e 4, 4 e 7; 2 e 5, 5 e 8; 3 e 6, 6 e 9 são iguais (figura 12), os elementos das diagonais principais são todos

iguais. Os elementos da diagonal principal do bloco  $C_{13}$  são iguais entre si. Para ver isto basta notar que o processo de construção do bloco é semelhante àquele dos blocos  $C_{12}$  e  $C_{23}$  e que a diferença em latitude entre os pontos 1 e 7, 2 e 8, 3 e 9 são iguais.

Dessa forma, pode-se concluir que sobre um *grid* geográfico a função covariância  $C(\psi_{PQ})$  conduz a uma matriz covariância do tipo (BOTTONI; BARZAGHI, 1993):

$$C = \tilde{C} + \delta C \quad (3.62)$$

onde  $\tilde{C}$  é a matriz covariância obtida seguindo a regra Toeplitz/Toeplitz como em 3.56 (matriz Toeplitz de blocos com blocos Toeplitz) e  $\delta C$  é uma matriz que tem elementos nulos na diagonal de cada bloco:

$$\delta C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{simétrico} & & \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Cada bloco de  $\delta C$  será uma matriz Toeplitz desde que  $C$  e  $\tilde{C}$  têm essa propriedade (BOTTONI; BARZAGHI, 1993). BOTTONI e BARZAGHI (1993) realizaram testes numéricos que provaram que os elementos não nulos de cada bloco em (3.63) têm valores próximos de 10% dos elementos da diagonal dos blocos correspondentes de  $C$  e são considerados “suficientemente pequenos”, o que possibilita a criação de um procedimento iterativo para obtenção da solução por colocação quando os dados estão em um *grid* geográfico, uma vez que no primeiro passo da iteração o termo  $\delta C$  é desconsiderado.

A solução do sistema Toeplitz/Toeplitz é baseada no Método do Gradiente Conjugado Precondicionado (MGCP). O Método do Gradiente Condicionado é usado

como um método iterativo para resolver sistemas lineares determinando a solução numérica  $\mathbf{x}$  de um sistema de  $n$  equações simultâneas,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , por meio de sucessivos cálculos da melhor tentativa no espaço  $n$ -dimensional, que minimiza a função erro (GONÇALVES, 2002). O condicionamento surge como forma de determinar uma aproximação numérica da solução  $\mathbf{x}$  do sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , quando a matriz  $\mathbf{A}$  possui um número de condição grande (muitos autovalores distintos). Para *precondicionar* a matriz  $\mathbf{A}$ , o sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  é substituído por  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ , onde  $\mathbf{M}$  é uma aproximação de  $\mathbf{A}$  e deve obedecer algumas propriedades, como, por exemplo,  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$  ser mais bem-condicionada que a matriz  $\mathbf{A}$  (mais detalhes sobre o MGCP ver GONÇALVES, 2002).

No programa FASTCOL, utilizado neste trabalho para a determinação do geóide do Estado de São Paulo, a matriz de condicionamento é a matriz formada pela diagonal da matriz autocovariância.

### 3.5 Técnica remover-calcular-repor (*remove-restore*)

A técnica remover-calcular-repor (*remove-restore*) é amplamente empregada no cálculo combinado de geóides regionais. Através dessa técnica as informações dos longos comprimentos de onda, presentes no MG usado, são removidas dos dados de gravidade ( $\Delta g, N, etc.$ ). Com isso, o efeito da topografia também é removido e isto deve ser levado em conta quando se trata com o efeito topográfico, conforme alerta TSCHERNING (2001). Existe outro efeito devido à remoção (e reposição) do modelo de campo de gravidade. A remoção do modelo tornará os valores médios locais muito próximos de zero (se isso não acontecer, provavelmente existem erros sistemáticos nos dados (TSCHERNING; 2001)), o que produz uma suavização nas quantidades residuais tornando mais fácil a interpolação (predição) de dados. Após os procedimentos de cálculo, o MG deve ser repostado para obtenção completa da solução.

## 4. Sensoriamento Remoto e os Modelos Geopotenciais

### 4.1 Sensoriamento remoto

O sensoriamento remoto é caracterizado pela aquisição de dados de um determinado alvo através de sensores remotos, portanto sem contado direto entre o alvo e o sensor. Sensor remoto é todo sistema capaz de detectar e registrar a radiação emitida ou refletida<sup>32</sup> por objetos que estejam afastados de tal sensor e gere produtos passíveis de interpretação.

COLWELL (1975) relaciona o sensoriamento remoto da superfície da Terra com os **recursos** disponíveis em sua superfície, tais como vegetação, solo, água, culturas agrícolas, dentre outros, para o posterior gerenciamento destes recursos. Além disso, afirma que “muitas técnicas de sensoriamento remoto utilizam a radiação para a detecção e identificação de objetos distantes”, isto porque a radiação eletromagnética proveniente do Sol ao interagir com alvos na superfície terrestre pode ser absorvida, transmitida ou refletida “seletivamente” por tais alvos, cabendo à porção refletida da radiação ser utilizada de forma adequada para identificação<sup>33</sup> dos alvos. Por fim, aponta que “sensores eletromagnéticos utilizam ondas eletromagnéticas”.

---

<sup>32</sup> Embora o conceito de sensoriamento remoto esteja fortemente vinculado à idéia de *radiação emitida ou refletida* por objetos distantes, busca-se nesta dissertação ampliar tal conceito.

<sup>33</sup> Para identificação dos alvos, pode ser utilizada também a radiação emitida por eles. Essa radiação chama-se *radiação termal* e é emitida por qualquer corpo com temperatura superior a zero absoluto (0 K ou  $-273^{\circ}\text{C}$ ). A radiação termal (ou infravermelho distante) é emitida da superfície terrestre na forma de calor de acordo com a lei de Planck<sup>34</sup> e está na faixa de comprimento de onda de  $\sim 3 - 100$  mm.

<sup>34</sup> Max Planck (1858 – 1947)

### 4.1.1 Caracterização de um sistema sensor

Basicamente, um sistema sensor é constituído por três componentes: um coletor, um sistema de registro (detetor) e um processador, que transforma o dado registrado em informação passível de interpretação (Figura 13).

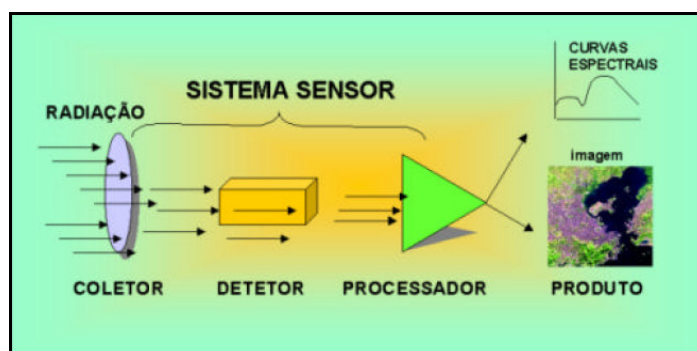


Fig.13: Componentes de um sistema sensor

Fonte: (MOREIRA, 2001)

Em uma primeira classificação, os sistemas sensores são divididos em sensores *ativos* e *passivos*. Sensores ativos são aqueles que possuem sua própria fonte de radiação, como, por exemplo, o radar. Sensores passivos são aqueles que medem a radiação emitida ou refletida pelos alvos e que não possuem sua própria fonte de radiação eletromagnética, ou seja, dependem de uma fonte externa, como o Sol (Figura 14).



Fig.14: Sensores passivo (A) e ativo (B)

Fonte: (MOREIRA, 2001)

Os sistemas sensores ainda são classificados quanto ao princípio de funcionamento em duas categorias: de varredura (*scanning*) e de não-varredura (*non scanning*). Os sistemas sensores de não-varredura registram a radiação refletida de uma área da superfície da Terra em sua totalidade em um mesmo instante (MOREIRA, 2001). Nos sistemas sensores de varredura a imagem da cena é obtida através do registro de “porções elementares do terreno” (NOVO, 1992 *apud* MOREIRA, 2001).

Quanto ao tipo de produto os sistemas sensores ainda são classificados em fotográficos (energia representada de maneira contínua) e não-fotográficos (energia representada em quantidade discreta). Os sensores fotográficos, através de um conjunto de lentes (sistema ótico), registram a imagem de alvos na superfície terrestre em películas fotossensíveis (filmes). Como exemplo, podem ser citadas as câmeras métricas, que são dispositivos aerotransportados e operam no nível suborbital. Os sensores não-fotográficos registram a radiação eletromagnética emitida ou refletida de alvos na superfície da Terra. Essa radiação situa-se dentro de determinadas faixas do espectro eletromagnético. Os equipamentos que dispõem de sistemas sensores não-fotográficos são chamados radiômetros (MOREIRA, 2001). Os radiômetros são equipamentos que medem a intensidade da energia radiante (radiância, simbolizada pela letra  $L$ ) dentro de determinadas faixas do espectro eletromagnético provenientes dos alvos na Terra. A radiação eletromagnética medida pelo radiômetro a bordo de plataformas orbitais (como o Landsat, por exemplo, Figura 15) equivale à radiância média contida no campo de visada do detector (Figura 16, seta vermelha).



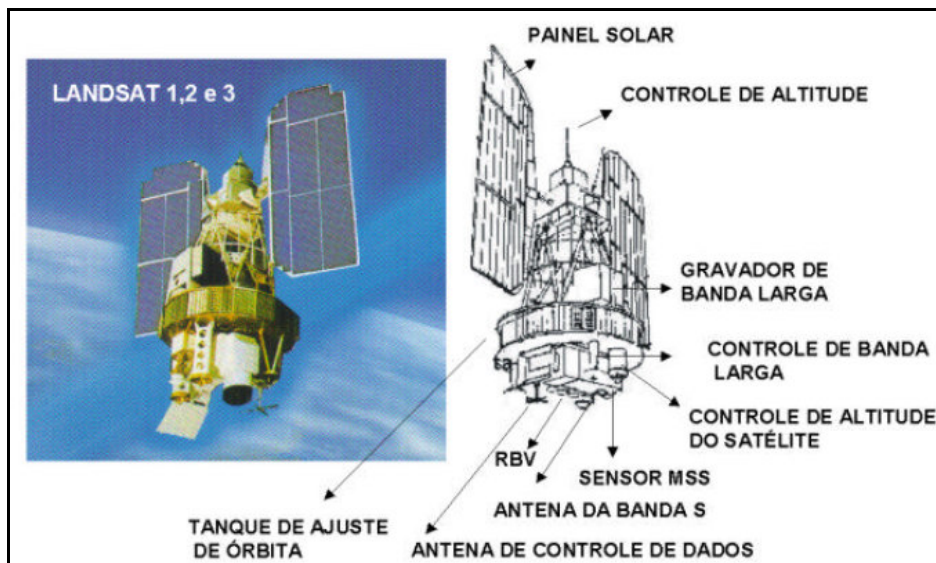


Fig.15: Imagem da plataforma dos satélites Landsat 1, 2 e 3 e algumas especificações

Fonte: (MOREIRA, 2001)

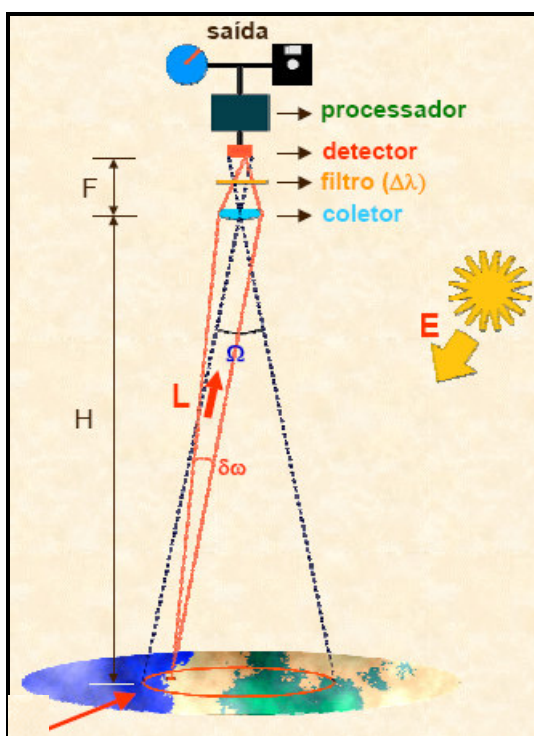


Fig.16: Campo de visada ( $\Omega$ ) do detector

Fonte: (STEFFEN, 2005)

## 4.2 Modelos geopotenciais

Um modelo do geopotencial (MG), através da sua expansão em harmônicos esféricos, pode ser utilizado para a determinação do geóide. Entretanto, devido ao nível de acurácia exigido nas aplicações geodésicas modernas, a informação exclusiva de um MG é inadequada. Tal informação reflete a contribuição dos longos e médios comprimentos de onda do campo de gravidade da Terra e pode ser obtida a partir de dados de trajetória de satélites artificiais.

Na confecção de um MG, a contribuição dos longos comprimentos de onda do campo de gravidade terrestre é recuperada a partir dos dados de trajetória de satélite. As melhorias aos modelos do campo de gravidade para os médios e curtos comprimentos de onda devem advir do uso de altimetria por satélite e levantamentos gravimétricos terrestre, marinho ou aéreo, de várias épocas, qualidade e cobertura geográfica (ELLMANN, 2004).

Normalmente, na determinação de geóides gravimétricos escolhe-se um MG que melhor se ajusta ao campo de gravidade local (AMOS; FEATHERSTONE, 2003).

AMOS e FEATHERSTONE (2003) dividem os MG em três classes:

- MG obtidos unicamente de dados de satélite: são derivados somente da análise da órbita de satélites terrestres artificiais. Historicamente, esses modelos eram limitados em precisão devido à combinação de: forte atenuação do campo gravitacional com a altitude; inabilidade em rastrear órbitas completas de satélite usando estações terrestres; modelagem imprecisa do atrito atmosférico, forças não-gravitacionais; e amostragem incompleta do campo de gravidade global devido ao número limitado de inclinações da órbita do satélite disponível. Portanto, embora alguns MG com grau acima de 70 estejam disponíveis para utilização, quanto maior é o grau dos coeficientes, digamos maior que 20 (VANICEK, SJÖRBERG, 1991), ou 30 (RUMMEL et al., 2002), maior a contaminação por ruído. Contudo, várias das limitações acima têm sido reparadas pelo uso de missões de satélite dedicadas à gravimetria (RUMMEL et al., 2002; FEATHERSTONE, 2002).

- MG combinados: são derivados a partir da combinação de dados de satélite, observações de gravidade terrestre e oceânica, anomalias gravimétricas derivadas de altimetria por radar através de satélites, e mais recentemente dados de aerogravimetria (RAPP, 1998). Geralmente, isto permite um incremento no grau máximo do harmônico esférico do MG. Contudo, esses modelos também são limitados em precisão devido às restrições mencionadas acima que afetam os MG obtidos unicamente com dados de satélite, bem como a cobertura espacial e a qualidade dos dados adicionais utilizados. Por exemplo, a utilização de diferentes *data* geodésicos verticais causam erros de longos comprimentos nas anomalias gravimétricas (HECK, 1990).
- MG ajustados (*tailored*): São MG obtidos a partir do ajuste (e freqüentemente o aumento do grau do harmônico esférico máximo) de um MG derivado unicamente de dados de satélite ou de um MG combinado usando dados de gravidade que podem não necessariamente ter sido utilizados anteriormente (WENZEL, 1998a, 1998b). Isto normalmente é conseguido usando fórmulas integrais para derivar correções aos coeficientes existentes do geopotencial, ao invés da combinação ao nível da equação normal, que é usada para construir os MG combinados. É importante enfatizar que o MG ajustado deve ser utilizado somente na área sobre a qual foi aplicado o ajuste, porque podem ocorrer efeitos espúrios em áreas onde não existam dados disponíveis (KEARSLEY; FORSBERG, 1990).

Após o lançamento dos satélites gravimétricos CHAMP e GRACE, vários MGs derivados dos dados dos novos satélites foram disponibilizados para a comunidade científica e testados em várias partes do mundo. Por exemplo, ELLMANN (2004) utilizou os MGs GGM01s ([www.csr.utexas.edu/grace/gravity](http://www.csr.utexas.edu/grace/gravity)), completo até o grau 120, obtido com dados somente do GRACE e o GGM01c, completo até o grau 200, obtido pela combinação do GGM01s com dados de gravidade terrestre na determinação do geóide para os países Bálticos. HECIMOVIC (2005) testou os MGs CG01c, completo até o grau 360, obtido com dados do CHAMP, GRACE e terrestres, CHAMP03s, completo até o grau 140, obtido com dados somente do CHAMP, GRACE02s, completo até o grau 150, obtido com dados somente do GRACE, dentre outros, utilizando a Rede de Referência Vertical Européia – *European Vertical Reference*

*Network* (EUVN). BILKER (2005) avaliou onze MGs derivados a partir dos dados das missões CHAMP e GRACE com alturas geoidais obtidas por GPS e nivelamento na Fennoscandia. O Quadro 01 mostra os MGs testados:

Quadro 1: Modelos do campo de gravidade derivados das missões gravimétricas espaciais CHAMP e GRACE

Fonte: (BILKER, 2005)

Modelo	Descrição	Completo até o grau	Referência
<b>CHAMP</b>			
EIGEN-1S	Somente CHAMP: 88 dias	100	Reigber et al (2002)
EIGEN-2	Somente CHAMP: 6 meses	120	Reigber et al (2003)
EIGEN-3p	Somente CHAMP: 3 anos	120	Reigber et al (2005a)
TEG-4	Combinado: CHAMP (80 dias) + multi-satélites e dados de superfície	200	Tapley et al (2001)
<b>GRACE</b>			
EIGEN-GRACE01S	Somente GRACE: 39 dias	120	Reigber (2004)
EIGEN-GRACE02S	Somente GRACE: 110 dias	150	Reigber et al (2005b)
GGM01S	Somente GRACE: 111 dias	120	Tapley et al (2004)
GGM02S	Somente GRACE: 363 dias	160	UT-CSR (2004)
GGM01C	Combinado: GGM01S + multi-satélites e dados de superfície	200	Tapley et al (2004)
GGM02C	Combinado: GGM02S + multi-satélites e dados de superfície	200	UT-CSR (2004)
<b>COMBINADO</b>			
EIGEN-CG01C	Combinado: 860 dias CHAMP + 109 dias GRACE + dados de superfície	360	Reigber (2005)

Nos testes realizados, HECIMOVIC (2005) conclui que, de uma maneira geral, os modelos gerados com dados somente da missão GRACE dão melhores resultados que os modelos gerados com dados exclusivos da missão CHAMP.

### 4.3 Missões gravimétricas espaciais CHAMP, GRACE e GOCE

O campo gravitacional gerado pelas feições na superfície terrestre pode ser modelado por curtos, médios e longos comprimentos de onda. Matematicamente, essa modelagem é representada pelo grau e ordem do polinômio utilizado para determinar o elemento do campo gravitacional calculado:

- Longos comprimentos de onda: grau e ordem ~90;
- Médios comprimentos de onda: grau e ordem ~200;

A parte de longos comprimentos de onda dos modelos do campo gravitacional terrestre pode ser obtida a partir de dados de missões de satélite, dados de altimetria sobre os oceanos, etc..., já que essa parte diz respeito ao campo gravitacional gerado por grandes feições da superfície da Terra.

A partir dos anos 60, dados de trajetórias de satélite têm sido usados para determinação de componentes dos longos comprimentos de onda do campo gravitacional terrestre em uma escala global. Os MGs derivados de dados de satélite são fornecidos como coeficientes de uma expansão em série de funções base em harmônicos esféricos. A resolução espacial máxima (metade do comprimento de onda mínimo) do MG (em km) na superfície da Terra é obtida pela divisão entre  $19.980\text{km}$  e o grau máximo da expansão em harmônicos esféricos.

Antes do lançamento das missões CHAMP e GRACE os MGs eram compostos de diferentes tipos de dados, incluindo dados de órbitas de diferentes satélites (de órbitas altas), dados de altimetria sobre os oceanos, e observações gravimétricas aéreas e na superfície. Portanto, a acurácia desses modelos não é homogênea e as partes de longos comprimentos de onda contêm grandes incertezas. As missões CHAMP, GRACE e GOCE surgem para mudar esse panorama.

#### 4.1.1 CHAMP (*CHALLENGING Minisatellite Payload*)

O satélite alemão da missão *CHALLENGING Minisatellite Payload* (CHAMP) foi lançado em 15 de julho de 2000 com um tempo de vida aproximado de cinco anos. A

missão CHAMP foi uma idéia e está sob responsabilidade do *Geoforschungszentrum Potsdam*. WELLENHOF e MORITZ (2005) apontam os principais objetivos da missão CHAMP como sendo os seguintes:

- mapeamento do campo gravitacional global, ou , mais especificamente, a determinação precisa dos longos comprimentos de onda daquele campo e suas variações temporais (causadas, por exemplo, por redistribuição de massa atmosférica, circulação oceânica, etc.);
- mapeamento do campo magnético global e suas variações;
- determinação do perfil da ionosfera e da troposfera e, mais especificamente, obtenção de informações sobre temperatura, vapor d'água, e íons da atmosfera, derivadas de sinais GPS que sofrem refração.

Os principais parâmetros do satélite da missão CHAMP são listados abaixo (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

- órbita quase circular (excentricidade  $e < 0,004$ ) e quase polar ( $i = 87^\circ$ );
- altitude inicial de  $454\text{km}$ ;
- tempo de vida projetado em cinco anos, embora tenha uma expectativa de vida muito maior.

A altitude do satélite, que inicialmente é de 454 km, diminuirá até 300 km devido principalmente ao atrito atmosférico. Isto é importante porque possibilita um aumento na sensibilidade do campo de gravidade terrestre, o que é refletido na determinação dos coeficientes dos harmônicos esféricos.

A missão CHAMP conta com um receptor GPS de dupla frequência a bordo para determinação da órbita do satélite, um acelerômetro para medir as acelerações não gravitacionais (atrito atmosférico, etc.), dentre outros equipamentos.

O princípio no qual se baseia a missão CHAMP chama-se “rastreamento satélite-a-satélite no modo alto-baixo”. A órbita do satélite em órbita terrestre baixa (*Low Earth Orbit* – LEO) é continuamente determinada pelos satélites GPS que são considerados como satélites que estão em uma órbita terrestre alta (*High Earth Orbit* – HEO). O princípio é mostrado na Figura 17:

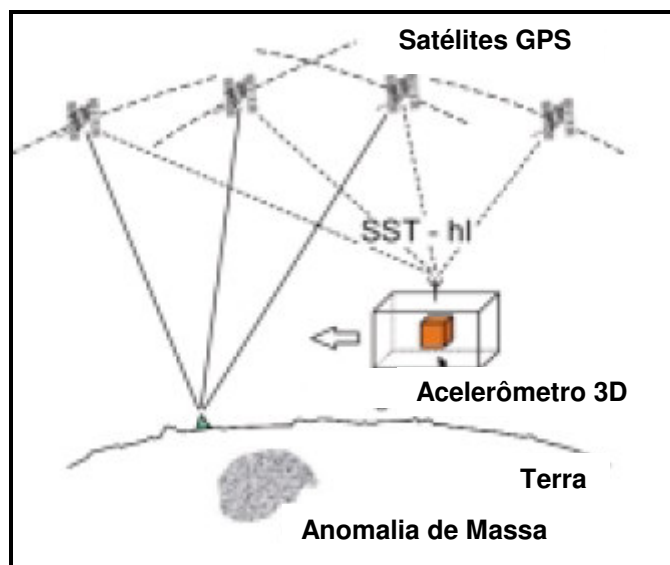


Fig.17: Princípio de rastreamento satélite-a-satélite no modo alto-baixo

Fonte: (LOBIANCO, 2005)

SCHWINTZER e REIGBER (2002) apontam as seguintes vantagens da missão CHAMP em relação a todas as missões gravimétricas anteriores:

- (1) Configuração da órbita – O efeito da atenuação do sinal gravitacional com a altitude é minimizado devido à altitude da órbita ser baixa, e a cobertura completa da superfície terrestre graças à órbita quase polar;
- (2) Receptor GPS: O receptor GPS a bordo permite o rastreamento contínuo por até 12 satélites GPS simultaneamente;
- (3) Acelerômetro: O satélite da missão CHAMP experimenta em sua baixa altitude aumentos na aceleração devidos ao atrito atmosférico. O acelerômetro a bordo do satélite mede diretamente o vetor das acelerações não-gravitacionais, isto é, atrito atmosférico mais pressão da radiação solar direta e indireta. Essas medidas substituem os modelos de densidade do ar, que possuem resolução temporal e acurácia insuficientes.

Maiores detalhes e informações atualizadas sobre a missão CHAMP podem ser obtidos no *site*: <http://op.gfz-potsdam.de/champ>.

#### 4.1.2 GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*)

A missão *Gravity Recovery And Climate Experiment* (GRACE) é um projeto conjunto entre a *U. S. National Aeronautics and Space Administration* (NASA) e o *Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt* (DLR). Os dois satélites da missão foram lançados em 17 de março de 2002 e têm um tempo de vida estimado de cinco anos. Os principais objetivos da missão GRACE são apontados por WELLENHOF e MORITZ (2005) como sendo os seguintes:

- determinação do campo gravitacional global em alta resolução;
- determinação das variações temporais de gravidade.

Os objetivos acima traçados poderão servir para ajudar os cientistas a melhor quantificar os movimentos de massa sobre a superfície terrestre e seus impactos no clima da Terra. No GRACE BROCHURE (2002), material disponibilizado no *site* da missão, há referência sobre a utilização dos dados da missão GRACE para estudos climáticos:

*O derretimento das camadas de gelo provoca um aumento na área superficial dos oceanos, que absorvem mais calor, elevando a temperatura, o que provoca mais derretimento de gelo e também contribui para o aumento do nível do mar. A missão GRACE será capaz de medir precisamente as variações no campo gravitacional da Terra devido às mudanças de massa das camadas de gelo.*

Os principais parâmetros dos dois satélites da missão GRACE são listados abaixo (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

- órbita quase circular (excentricidade  $e < 0,005$ ) e quase polar ( $i = 89^\circ$ );
- altitude inicial entre 485km e 500km;
- os dois satélites estão separados por uma distância aproximada de 220km (o que requer manobras a cada um ou dois meses para manter a separação entre os dois satélites);



- tempo de vida projetado em cinco anos, mas com uma expectativa média de vida superior.

A separação entre os dois satélites (“Tom” e “Jerry”) deve ser determinada com alta acurácia. Sua taxa de afastamento deve ser conhecida com uma precisão de cerca de  $5\mu\text{m}$  (LOBIANCO, 2005), a qual é atingida através de medidas feitas por um sistema de microondas (K-band Ranging System – KBR). Isso possibilita a determinação do campo gravitacional global com uma resolução que pode ser estendida de 500 km a 150 km (meio comprimento de onda) com um ganho na acurácia de uma a duas ordens de grandeza, comparada com o conhecimento atual (LOBIANCO, 2005).

A missão GRACE possui como carga útil, dentre outros, receptores GPS que servem para determinar a órbita precisa dos satélites, o sistema KBR para medir as mudanças no afastamento entre os satélites usando sinais de microondas (os afastamentos são obtidos a uma taxa de amostragem de  $10\text{Hz}$ ), e o acelerômetro para medir todas as forças não-gravitacionais sobre os satélites.

O princípio no qual se baseia a missão GRACE chama-se “rastreamento satélite-a-satélite no modo baixo-baixo”. Conforme este princípio, dois satélites em LEO são colocados na mesma órbita, porém afastados por algumas centenas de quilômetros (220 km no caso da missão GRACE). Afastamento e taxa de afastamento entre os satélites são medidas com extrema acurácia. Individualmente, a órbita de cada satélite em LEO é afetada por acelerações perturbadoras que correspondem à derivada primeira do potencial gravitacional. Isso resulta em diferenças de aceleração entre os satélites. Além disso, a posição das LEOs é determinada pelos satélites GPS, o que implica que o “rastreamento satélite-a-satélite no modo alto-baixo” é inerente a este princípio (WELLENHOF; MORITZ, 2005). O princípio “rastreamento satélite-a-satélite no modo baixo-baixo” é mostrado na Figura 18:

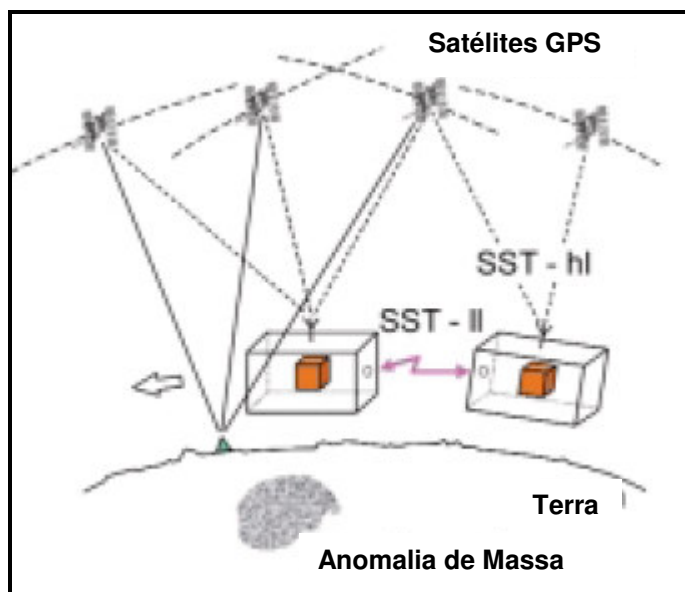


Fig.18: Princípio de rastreamento satélite-a-satélite no modo baixo-baixo

Fonte: (LOBIANCO, 2005)

Em 2004 foi liberada para o público a primeira versão de um novo modelo do campo de gravidade da Terra (EIGEN-GRACE 02s), completo até o grau e ordem 150. A missão GRACE possibilitará a determinação não apenas de um campo de gravidade global estático, mas também suas variações temporais.

WELLENHOF e MORITZ (2005) colocam que, conceitualmente, a missão GRACE pode ser considerada como um gradiômetro unidimensional com uma linha de base muito longa de 220 km. Em contraste a este conceito, a missão GOCE usa linhas de base muito curtas (50 cm) em três direções.

Maiores detalhes e informações atualizadas sobre a missão GRACE podem ser obtidos no *site*: <http://op.gfz-potsdam.de/grace>.

#### 4.1.3 GOCE (*Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*)

O terceiro satélite na sequência das recentes missões gravimétricas é o da missão *Gravity Field and steady-state Ocean Circulation Explorer* (GOCE), que é um projeto da agência espacial europeia (*European Space Agency – ESA*). O lançamento do satélite

da missão GOCE estava previsto para o ano 2007 (até o término desta dissertação o satélite não havia sido lançado!). Os principais objetivos da missão GOCE são medir o campo de gravidade estacionário da Terra e modelar o geóide com uma acurácia extremamente alta, e mais especificamente (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

- determinar anomalias gravimétricas com uma acurácia de  $1mgal$  ;
- determinar o geóide com acurácia entre  $1-2cm$  ;
- atingir esses resultados a uma resolução espacial melhor do que  $100km$  .

Diferentemente das missões anteriores CHAMP e GRACE, a missão GOCE possibilitará a recuperação do campo gravitacional não baseada puramente nas perturbações de órbita, isto porque ela medirá do espaço os gradientes de gravidade de forma direta.

Os principais parâmetros da missão GOCE são listados a seguir (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

- órbita sol-síncrona com inclinação de  $96,5^\circ$  ;
- altitude da órbita: aproximadamente  $250km$  ;
- estação terrestre única em Kiruna, Suécia, para intercâmbio de dados e comandos; o Centro Europeu de Operações Espaciais (European Space Operations Center – ESOC), em Darmstadt, será usado para controle da missão e do satélite.

Os principais componentes da carga útil do satélite são (WELLENHOF; MORITZ, 2005):

- gradiômetro tri-axial baseado em três pares de acelerômetros para medir gradientes de gravidade em três direções espaciais ortogonais: o sinal desejado é a diferença em aceleração gravitacional (entre um par de acelerômetros separados por uma distância de  $0,5\text{ m}$ ) entre massas de teste localizadas dentro da espaçonave causada por anomalias de gravidade das massas atratoras terrestres;

- receptor GPS de dupla frequência para: (1) determinar a órbita do satélite GOCE e (2) derivar informação de gravidade a partir dessa órbita;
- propulsores iônicos que controlam permanentemente a altitude.

O satélite da missão GOCE voará em uma órbita extremamente baixa (250km de altitude), que será mantida pelos propulsores iônicos (SCHWINTZER; REIGBER, 2002).

A missão GOCE, com período relativamente curto de duração de apenas doze meses, objetiva uma resolução final alta e acurada do campo gravitacional da Terra até meio comprimento de onda abaixo de 100 km (SCHWINTZER; REIGBER, 2002).

O princípio no qual se baseia a missão GOCE é o da gradiometria por satélite (Figura 19), que consiste na medida de diferenças de aceleração em três direções espaciais ortogonais entre as massas de teste de seis acelerômetros (dois em cada um dos três eixos) dentro do satélite. Conforme LOBIANCO (2005):

*Cada massa de teste é confinada em um compartimento e mantida levitada (flutuando sem nunca tocar as paredes) por um mecanismo de retro-alimentação capacitivo ou indutivo. A diferença nos sinais de retro-alimentação entre duas massas de teste é proporcional à sua aceleração relativa e exercida puramente pelo campo gravitacional diferencial.*

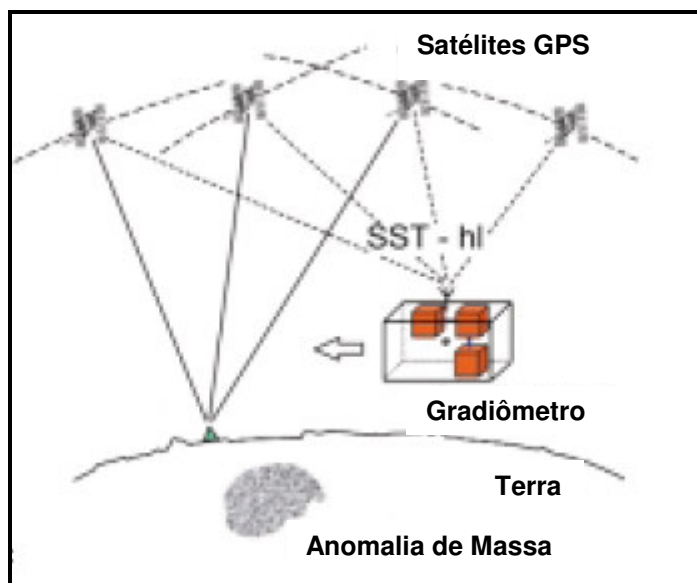


Fig.19: Princípio de rastreamento satélite-a-satélite no modo alto-baixo (com gradiômetro)

Fonte: (LOBIANCO, 2005)

Maiores detalhes e informações atualizadas sobre a missão GOCE podem ser obtidos no *site*: <http://www.esa.int/export/esaLP/goce.html>.

WELLENHOF e MORITZ (2005) apontam as diferenças entre os métodos descritos acima, nos quais se baseiam as missões CHAMP, GRACE e GOCE: As missões CHAMP e GRACE baseiam-se no rastreamento satélite-a-satélite nos modos alto-baixo e baixo-baixo, respectivamente. O primeiro caso corresponde à determinação tridimensional da posição, velocidade ou aceleração de um satélite em LEO. Matematicamente, isto é expresso pelas derivadas de primeira ordem do potencial gravitacional. O segundo caso corresponde à medida, ao longo da linha de vôo, do afastamento, taxa de afastamento ou diferença de aceleração entre os dois satélites que estão em uma órbita baixa. O elo entre os dois satélites em LEO corresponde à diferença de aceleração entre eles. Matematicamente, isto é expresso pela diferença das derivadas de primeira ordem do potencial gravitacional sobre uma linha de base longa (ou seja, a distância entre os dois satélites em órbita baixa). No caso da missão GOCE, cujo método é o da gradiometria por satélite, são medidas pelo gradiômetro as diferenças de aceleração tridimensionais referidas a linhas de base curtas (no caso 0,5 m). Matematicamente, isto é expresso pelas derivadas de segunda ordem do potencial gravitacional.

## 5. DADOS UTILIZADOS

### 5.1 Dados de gravidade

Os dados gravimétricos utilizados neste trabalho resultaram da integração de três tipos de informações: terrestres, oceânicas e de altimetria por satélite. As informações terrestres foram obtidas em levantamentos realizados por várias instituições, com objetivos diversos; as informações oceânicas foram coletadas por instituições internacionais nos levantamentos de geofísica marinha, processadas e fornecidas pelo *United State National Geophysical Data Center (NGDC)*; e, finalmente, as informações de altimetria por satélite são aquelas resultantes das missões GEOSAT e ERS-1, convertidas em anomalias ar-livre na forma digital (ANDERSEN; KNUDSEN, 1998 apud SOUZA, 2002).

As medidas terrestres foram referidas à Rede Gravimétrica de Padronização Internacional de 1971 (*International Gravity Standardization Net 1971 - IGSN71*) através da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira (RGFB), implantada a partir de 1975. Os dados gravimétricos terrestres foram acrescidos de levantamentos realizados por diversas instituições (Figura 20). Com a junção de todos os dados gravimétricos existentes (terrestres e oceânicos) foi gerado um arquivo contendo cerca de **10.285** registros.

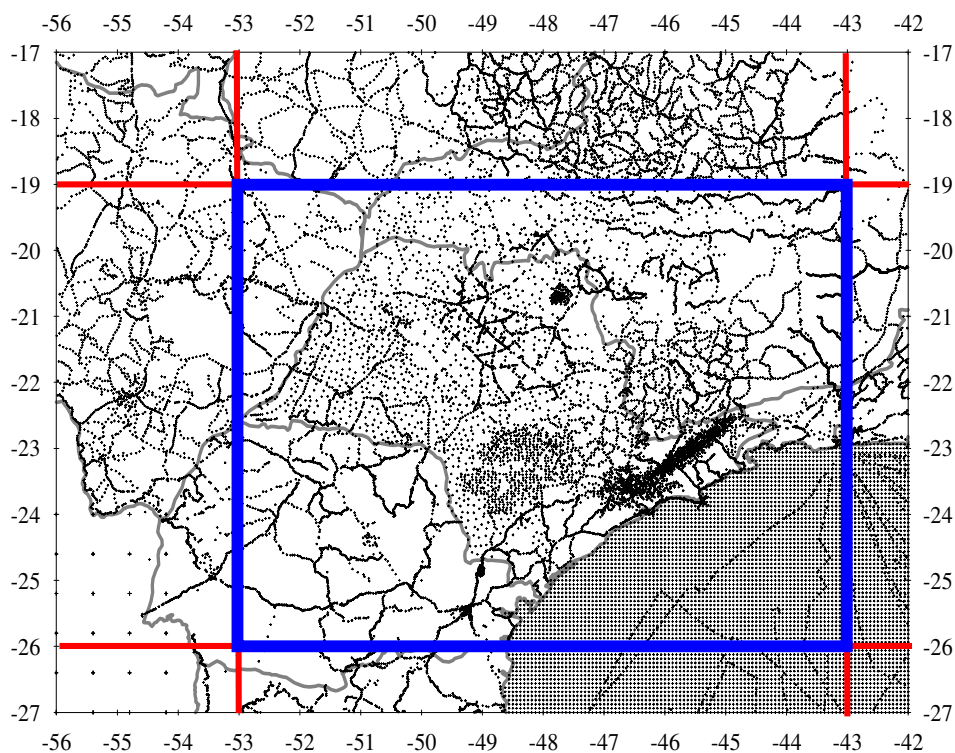


Fig.20: Distribuição dos dados gravimétricos dentro (retângulo azul) e fora da área de estudo

Fonte: (SOUZA, 2002)

## 5.2 Modelo do geopotencial

O modelo do geopotencial (MG) desempenha um importante papel na determinação de modelos geoidais, pois é responsável pelas informações de longo e médio comprimento de onda do campo de gravidade terrestre (capítulo 4). O MG usado nesta dissertação é o chamado CG01c (<http://www.csr.utexas.edu>), liberado em outubro de 2004 para a comunidade científica. O CG01c é um modelo combinado (capítulo 4) que foi compilado a partir de dados da missão CHAMP (860 dias – outubro de 2000 a junho de 2003), dados da missão GRACE (200 dias – abril/maio/agosto/novembro de 2002 e abril/maio/agosto/outubro/novembro de 2003) e dados de superfície de gravimetria e altimetria. O modelo CG01c é completo até o grau e ordem 360, o que

corresponde a uma resolução do campo de gravidade terrestre (meio comprimento de onda mínimo,  $\frac{\lambda}{2}$ ) de aproximadamente  $50\text{ km}$ .

Foram usados os seguintes dados de superfície (Figura 21) combinados com os dados dos satélites CHAMP e GRACE:

- (1) Anomalias gravimétricas do Projeto Gravimétrico do Ártico para regiões com  $\varphi > 64^\circ$ ;
- (2) Anomalias gravimétricas cobrindo a América do Norte;
- (3) Anomalias gravimétricas cobrindo duas pequenas áreas da Antártica, e, também, sobre gelo marinho adjacente àquelas áreas;
- (4) Anomalias gravimétricas sobre os oceanos obtidas por altimetria por satélite;
- (5) Ondulações geoidais sobre os oceanos usando altura da superfície oceânica e topografia da superfície oceânica;
- (6) Anomalias gravimétricas terrestres (não cobertas pelos conjuntos 1 a 3) incluindo desvios-padrão, cobertura de quase todo o continente mundial, exceto para a Antártica e algumas áreas com ausência de dados, e
- (7) Anomalias gravimétricas sobre águas com profundidade inferior a  $2000\text{ m}$  obtidas por navio.



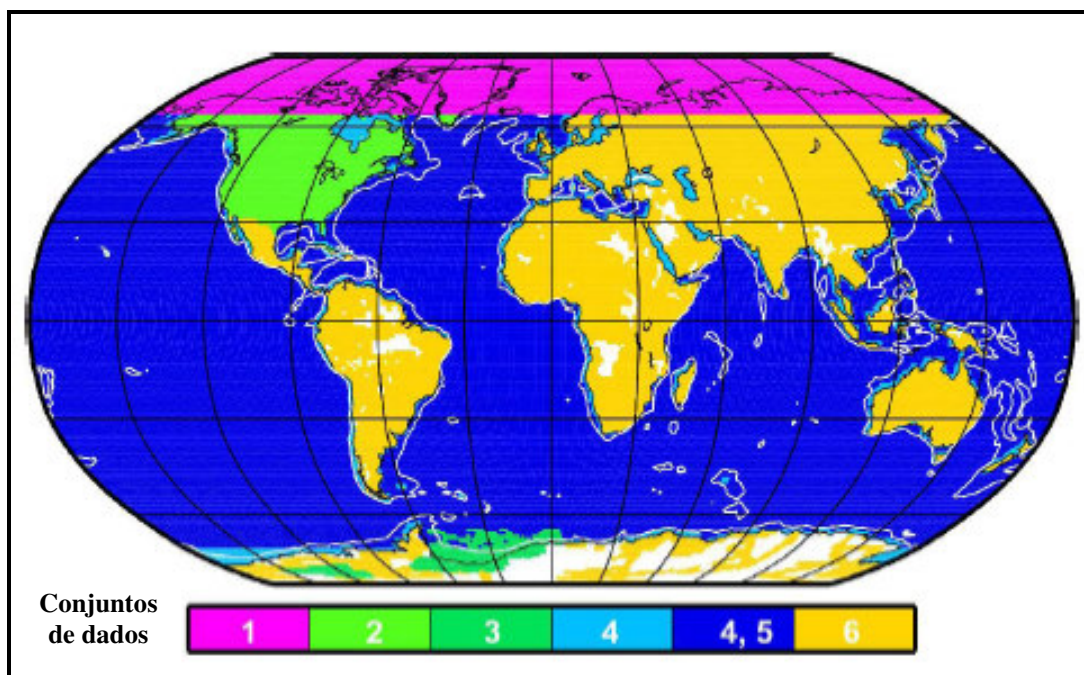


Fig.21: Cobertura dos dados de superfície, conjuntos 1 a 6; as linhas brancas marcam os dados de gravimetria por navio (conjunto de dados 7) sobre áreas com profundidade inferior a 2000 m; áreas brancas mostram porções onde não há cobertura de dados de superfície

### 5.3 Modelo digital de terreno

O modelo topográfico utilizado neste trabalho faz parte do Modelo Topográfico Digital do Brasil (MTDB), que vem sendo usado em correções gravimétricas e na determinação do geóide gravimétrico de alta resolução para o Brasil. A resolução efetiva do MTDB correspondente à região deste projeto é de 2,5', enquanto que para o restante do Brasil é de 5'. Isto significa que o Modelo Topográfico Digital do Estado de São Paulo (MTDSP) tem resolução de 2,5' no continente e aproximadamente 10' no oceano.

A principal contribuição do MTDSP é possibilitar a obtenção do Modelo Digital da anomalia ar-livre a partir do Bouguer (2002). A partir das anomalias ar-livre são obtidas as anomalias residuais, entradas do programa FASTCOL.

## 5.4 Referências de nível posicionadas com GPS

A rede GPS do Estado de São Paulo é constituída de 160 RRNN (Figura 22), selecionadas entre as mais de 10.000 que integram as redes do IGG e do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) na região, visando o aprimoramento do geóide e o apoio básico local (SÁ et al., 2001 *apud* SOUZA, 2002). Essas 160 RRNN estão distribuídas no estado e regiões adjacentes, de maneira a possibilitar uma distância média entre as RRNN da ordem de 70km, o que implica em bases com distâncias não superiores a 40km. O levantamento dos pontos foi realizado pelo IAG/USP com receptores de dupla frequência da marca ASTECH – Z12.

Obs.: Todos os dados utilizados nesta dissertação foram compatibilizados com o sistema de referência *World Geodetic System 1984 (WGS84)*.

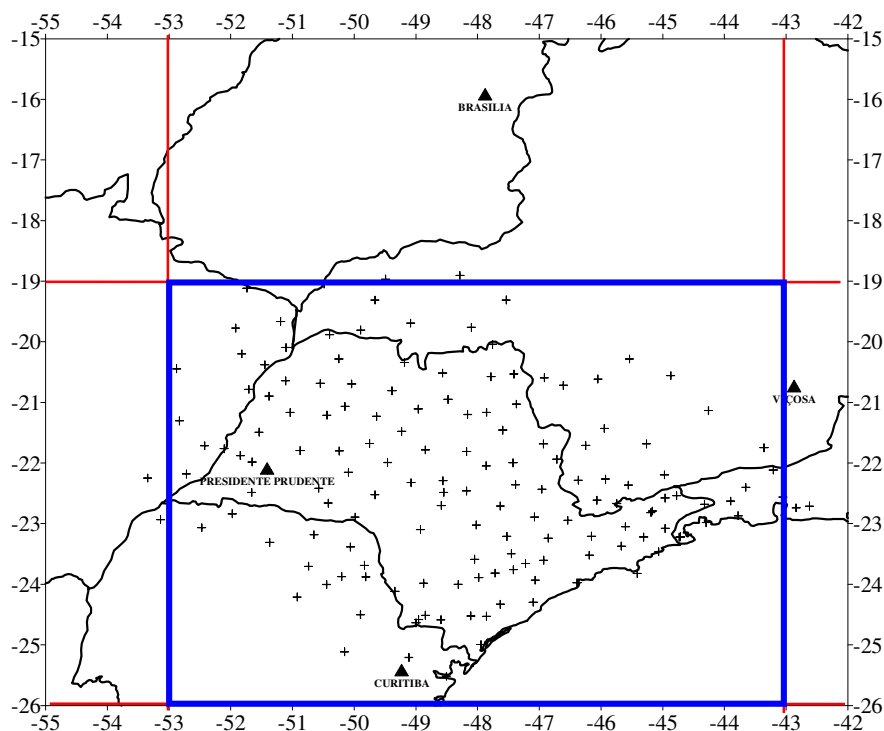


Fig.22: Distribuição dos pontos da rede GPS no Estado de São Paulo e adjacências (área de estudo dentro do retângulo azul)

Fonte: (SOUZA, 2002)

## 6. CÁLCULO DO GEÓIDE NO ESTADO DE SÃO PAULO

Foram geradas alturas geoidais a partir dos coeficientes do MG CG01c (Figuras 23 e 24); também foram geradas anomalias gravimétricas a partir do MG CG01c (Figura 25). O modelo digital de anomalias gravimétricas é apresentado na Figura 26. As anomalias residuais, obtidas pela diferença entre as anomalias terrestres e anomalias derivadas do MG CG01c, são apresentadas na Figura 27. Essas anomalias residuais foram utilizadas no programa FASTCOL, desenvolvido em FORTRAN, para determinar as alturas geoidais residuais (Figura 28). A componente de longo comprimento de onda do geóide foi finalmente adicionada às alturas geoidais residuais, dando origem ao modelo GEÓIDESP\_FC\_2007 (Figuras 29 e 30). Para todos os modelos gerados foi utilizado o MG desenvolvido até o grau e ordem 180. A área de cálculo foi limitada pelas latitudes  $-19^\circ$  e  $-26^\circ$  e pelas longitudes  $-43^\circ$  e  $-53^\circ$ .

As alturas geoidais do modelo GEÓIDESP\_FC\_2007 foram avaliadas a partir das alturas geoidais obtidas através da diferença entre a altura elipsoidal derivada das observações GPS e a altura ortométrica determinada por nivelamento geométrico (daqui em diante chamada “ $N_{GPS}$ ”) Além disso, fez-se a comparação entre o GEÓIDESP\_FC\_2007 e o MDGR, modelo geoidal de Souza (2002), que foi calculado para a mesma região utilizando a técnica CMQ (Figuras 31 e 32).

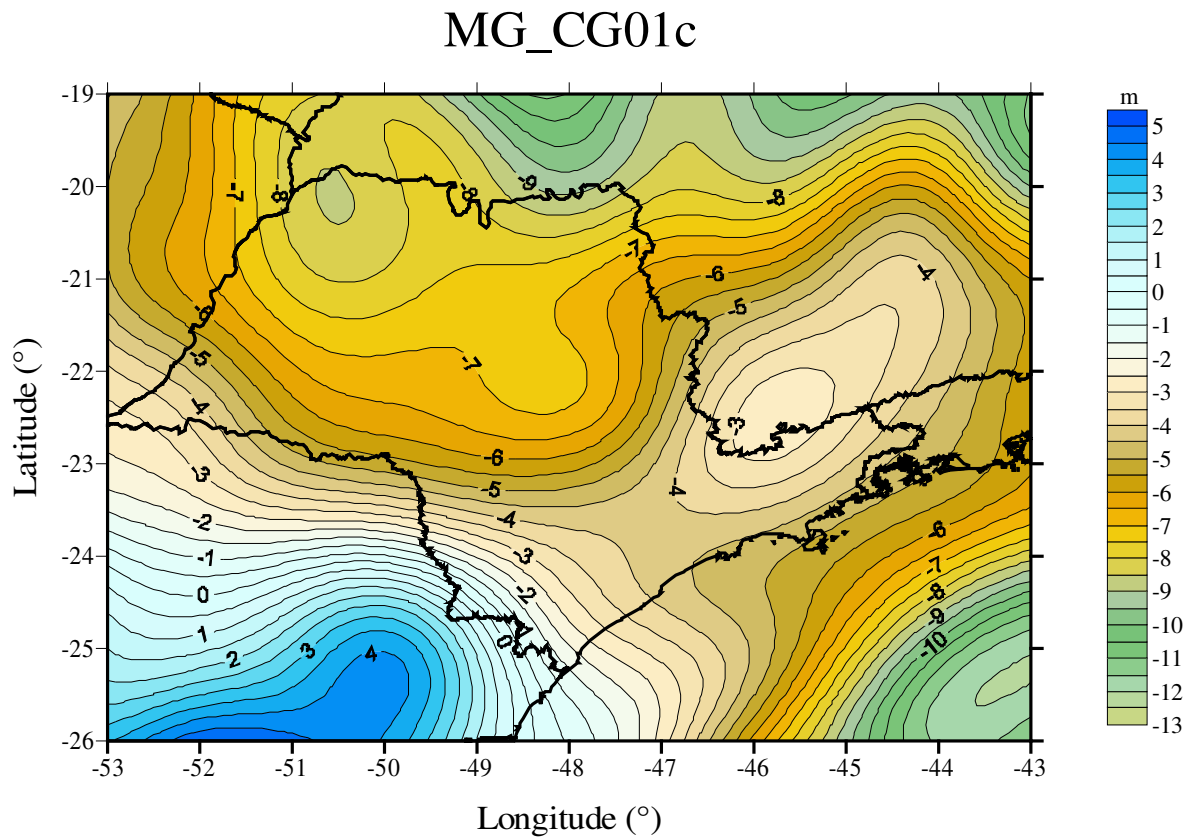


Fig.23: Modelo geoidal obtido exclusivamente dos dados do MG CG01c; intervalo das isolinhas 0,5m

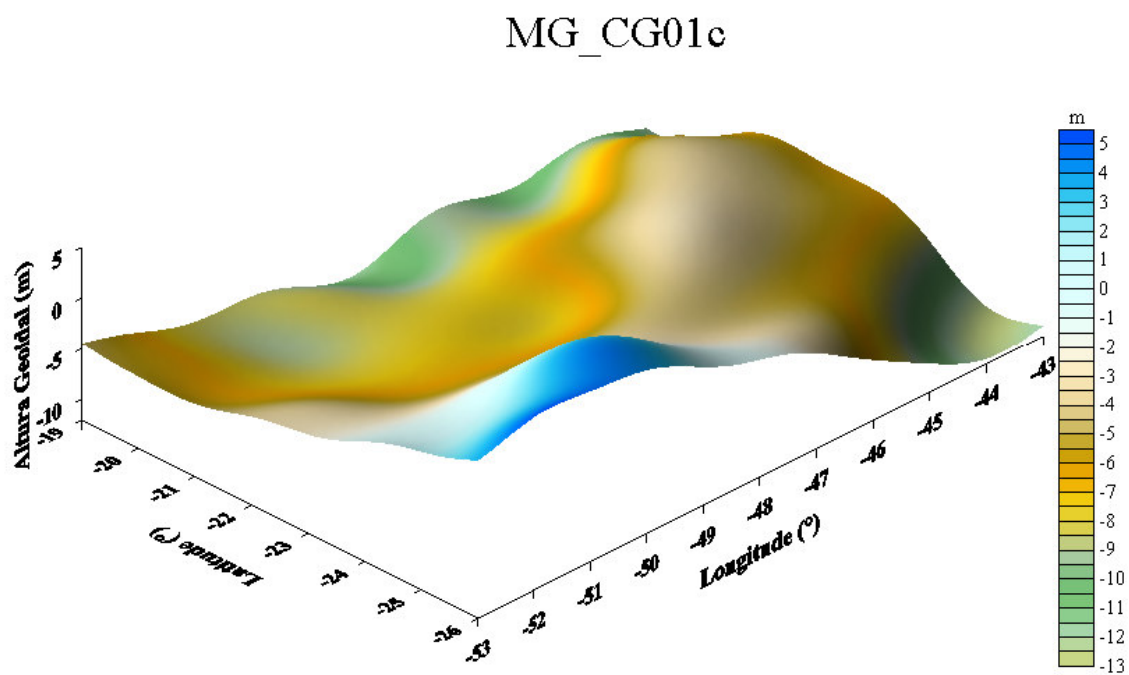


Fig.24: Modelo geoidal obtido exclusivamente dos dados do MG CG01c, em perspectiva

## ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS DERIVADAS DO MG CG01c

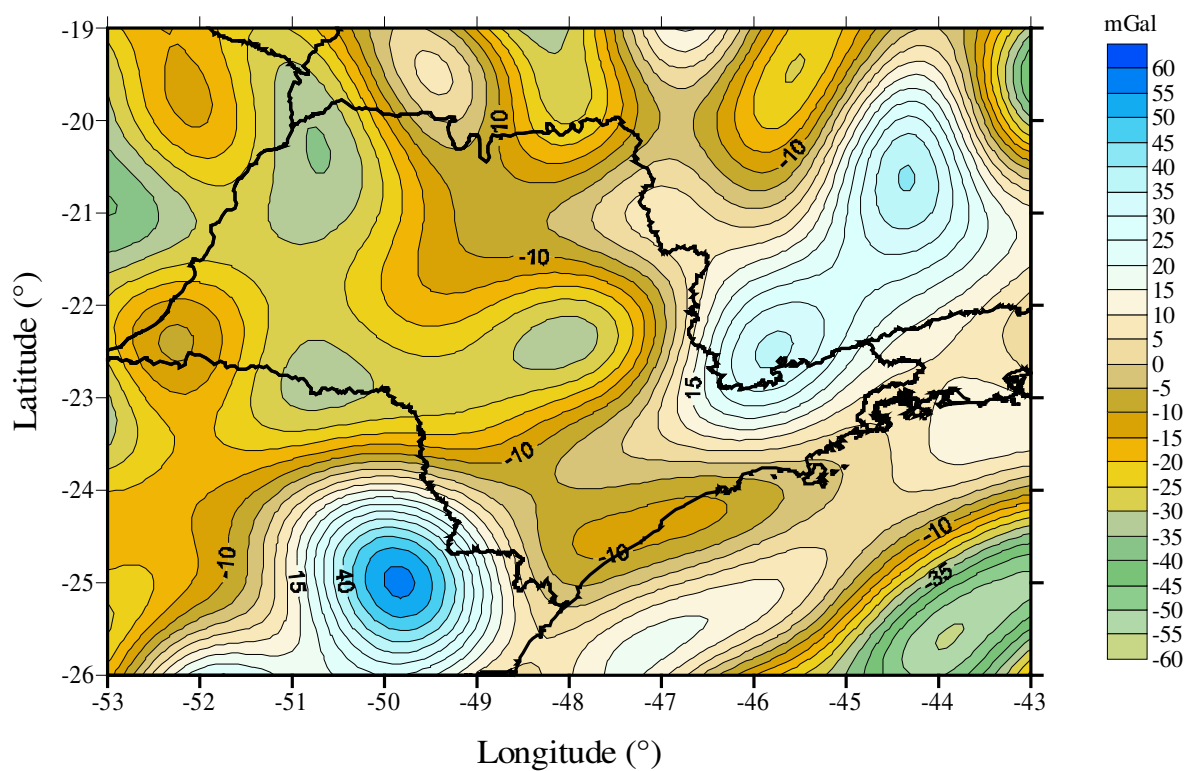


Fig.25: Anomalias gravimétricas obtidas a partir do MG CG01c desenvolvido até o grau e ordem 180; intervalo das isolinhas 5 mGal

## MODELO DIGITAL DE ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS (Resolução: 5')

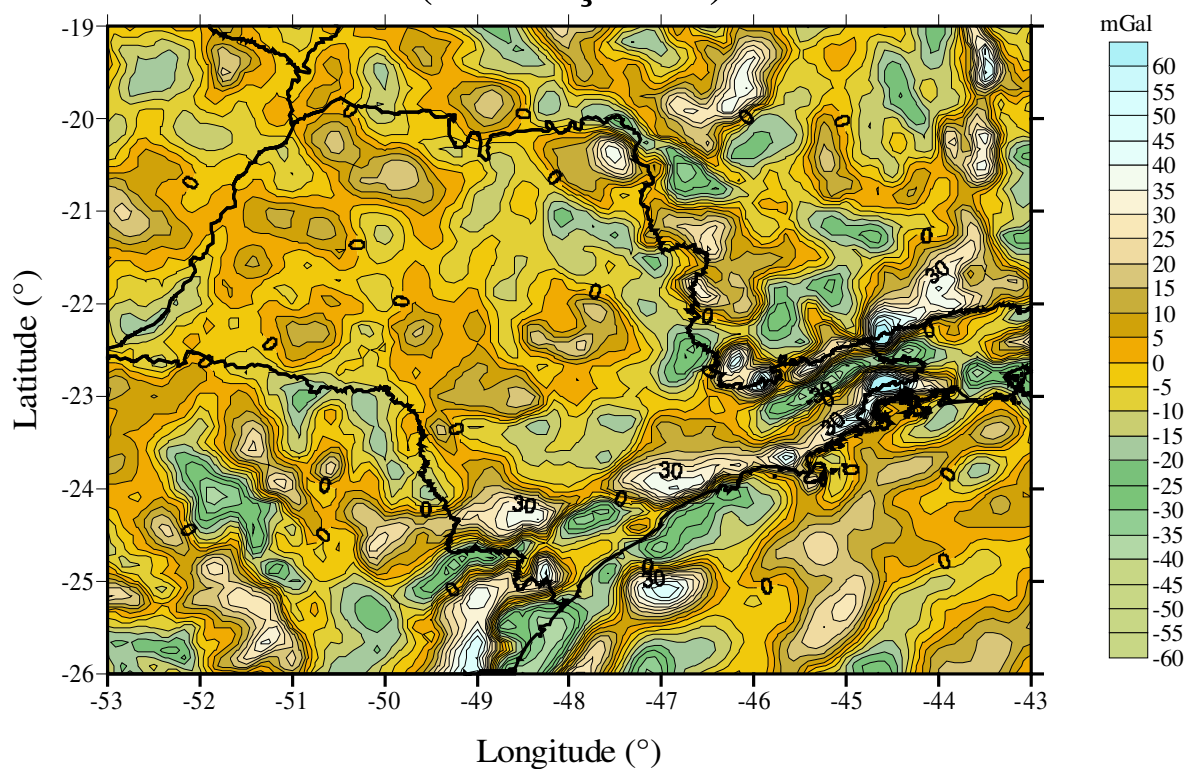


Fig.26: Modelo digital de anomalias gravimétricas terrestres (5' x 5'); intervalo das isolinhas 5 mGal

## ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS RESIDUAIS

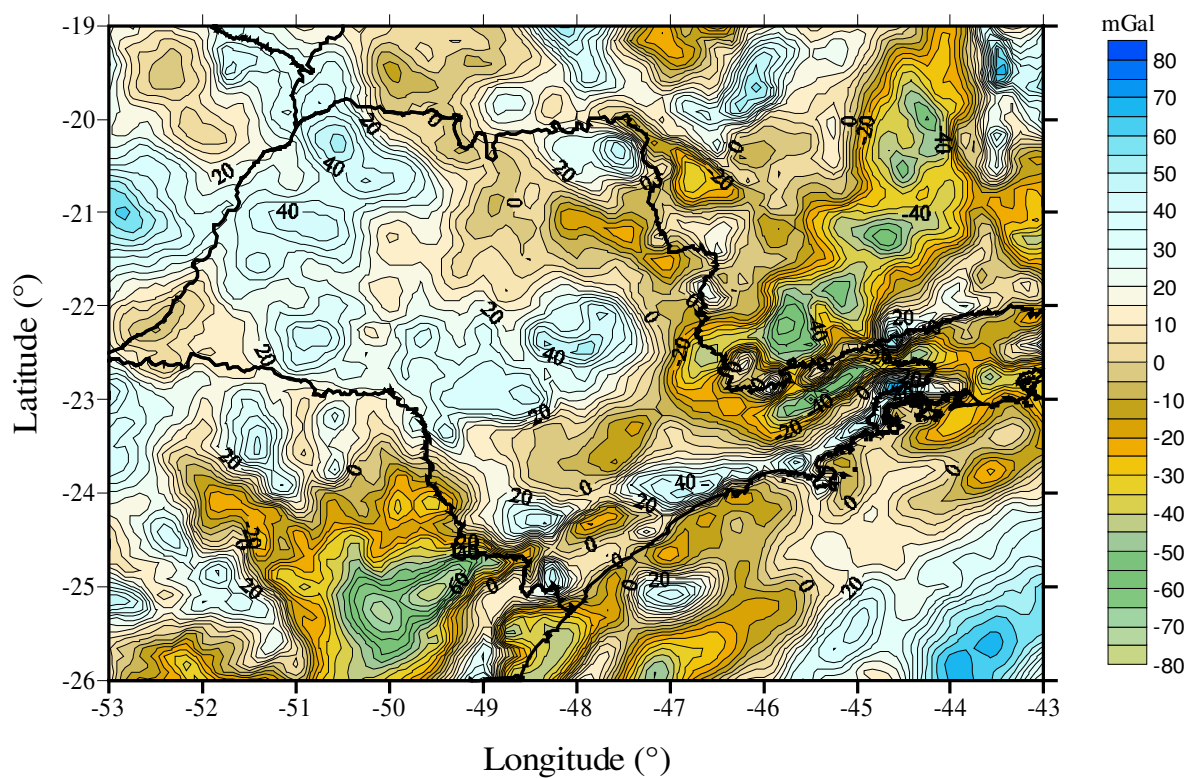


Fig.27: Anomalias gravimétricas residuais; intervalo das isolinhas 5 mGal



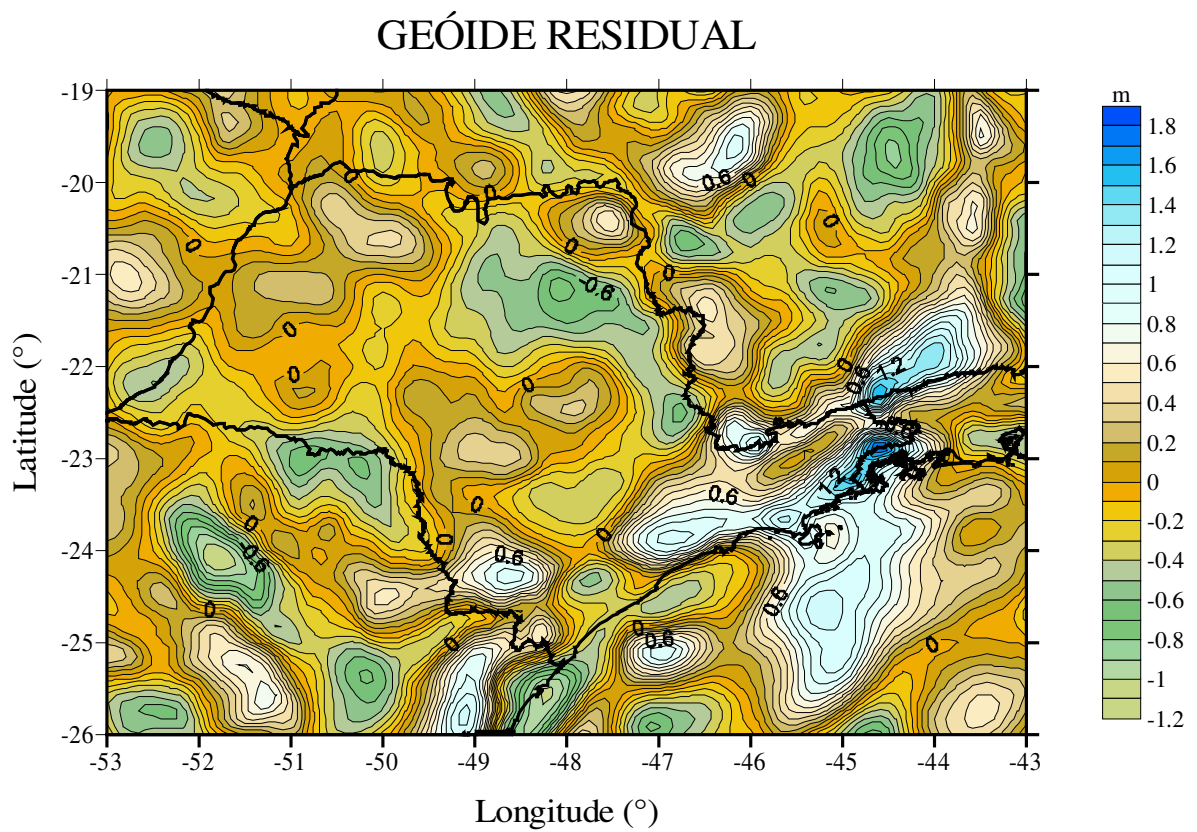


Fig.28: Geóide residual derivado das anomalias residuais via FASTCOL; intervalo das isolinhas 0,1 m

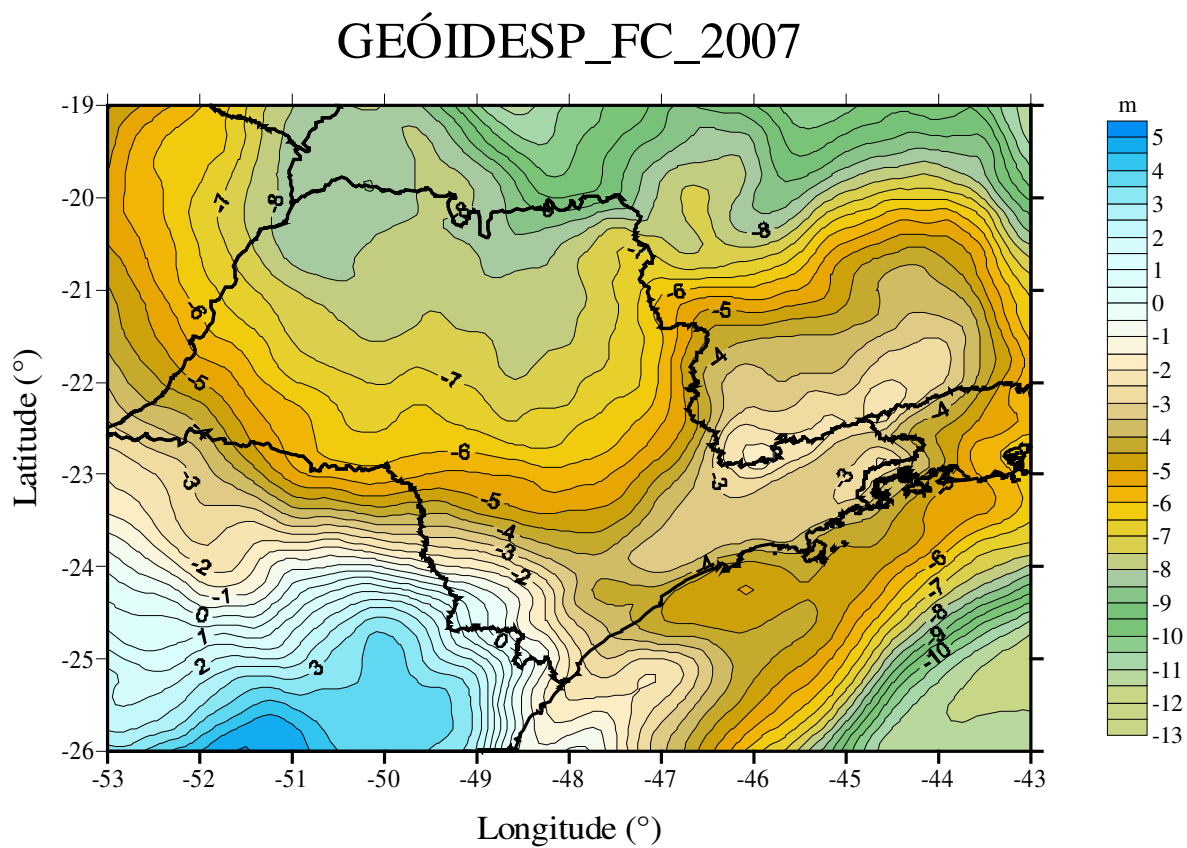


Fig.29: Modelo geoidal GEÓIDESP\_FC\_2007 obtido pela técnica *Fast Collocation*;  
intervalo das isolinhas 0,5 m

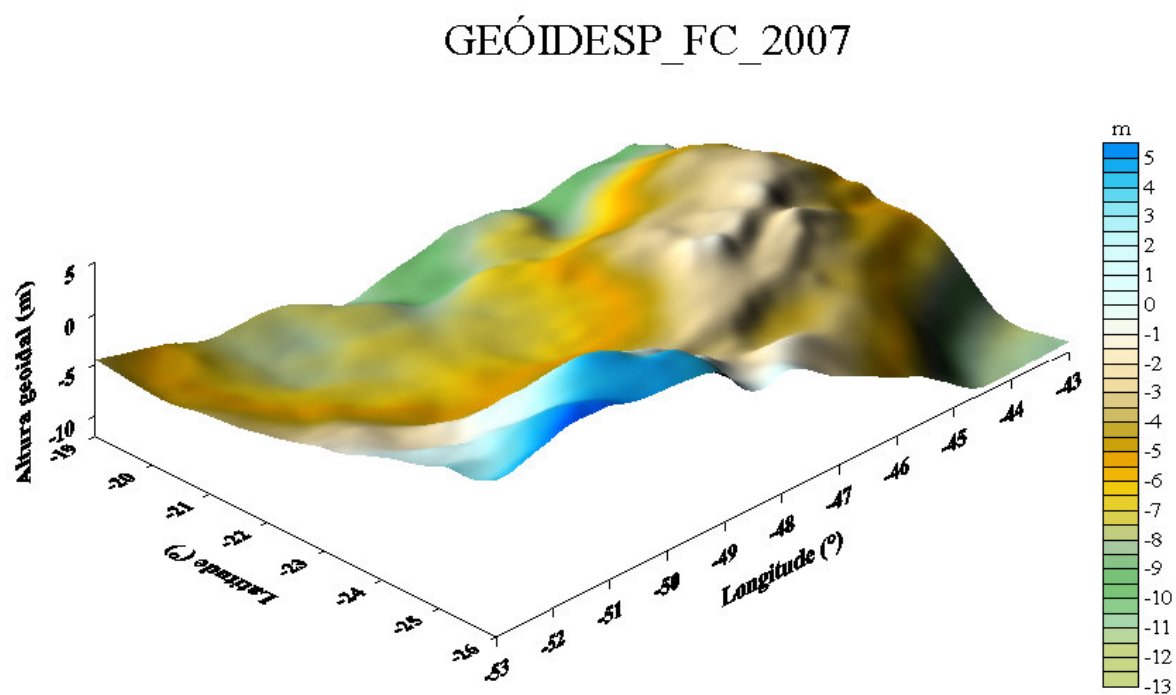


Fig.30: Modelo geoidal GEÓIDESP\_FC\_2007 obtido pela técnica *Fast Collocation*, em perspectiva

## 6.1 Resultados

Inicialmente, as alturas geoidais derivadas do MG CG01c, desenvolvido até o grau e ordem 180 (desse ponto em diante chamada “ $N_{MG\_CG01c}$ ”), foram comparadas com as alturas geoidais provenientes da diferença entre a altura elipsoidal derivada das observações GPS e a altura ortométrica determinada por nivelamento geométrico ( $N_{GPS}$ ). Essa comparação serviu para mostrar a importância das recentes missões gravimétricas CHAMP e GRACE, pois revelou que o novo MG derivado a partir dos dados daquelas missões começa rapidamente a suplantar os antigos MGs, como o EGM96 e o longínquo OSU91, na suas épocas gerados com dados de satélites não gravimétricos. O lançamento do satélite GOCE, em futuro próximo, vem solidificar e melhorar ainda mais a estrutura espacial com finalidade geodésica.

A média das diferenças entre  $N_{GPS}$  e  $N_{MG\_CG01c}$  mostra um bom ajuste do modelo CG01c ao geóide de São Paulo e indica uma componente sistemática média da ordem de 0,738 m. Esse valor é explicado pelo fato de o MG CG01c representar somente os longos comprimentos de onda do campo de gravidade (Tabela 1).

Tabela 1: Estatísticas da comparação entre as alturas geoidais derivadas do MG CG01c e as alturas geoidais derivadas dos ponto de controle ( $N_{GPS} - N_{MG\_CG01c}$ )

Modelo	Média (m)	Desvio Padrão (m)	Variância (m <sup>2</sup> )	Valor Máximo (m)	Valor Mínimo (m)
CG01c	0,738	0,505	0,255	3,328	-1,311

### 6.1.1 Erro “absoluto” do modelo GEÓIDESP\_FC\_2007

Foram utilizadas as alturas geoidais  $N_{GPS}$  para determinação do erro “absoluto” do modelo GEÓIDESP\_FC\_2007. A Tabela 2 mostra as estatísticas dessas comparações.

Tabela 2: Estatísticas da comparação entre as alturas geoidais derivadas do modelo GEÓIDESP\_FC\_2007 e as alturas geoidais derivadas dos pontos de controle ( $N_{GPS} - N_{GEÓIDESP\_FC\_2007}$ )

Modelo	Média (m)	Desvio Padrão (m)	Variância (m <sup>2</sup> )	Valor Máximo (m)	Valor Mínimo (m)
GEÓIDESP_FC_2007	0,681	0,589	0,347	3,685	-2,286

### 6.1.2 Comparação entre os modelos GEÓIDESP\_FC\_2007 e MDGR

O modelo geoidal MDGR, determinado por Souza (2002) que utilizou a técnica matemática CMQ para sua determinação, foi utilizado nesta dissertação para comparação com o modelo GEÓIDESP\_FC\_2007, determinado pela FC. O MDGR

contempla toda a área de cálculo utilizada neste trabalho  $\left\{ \begin{array}{l} \varphi : -19^\circ \\ \varphi : -26^\circ \\ \lambda : -43^\circ \\ \lambda : -53^\circ \end{array} \right\}$ . A Tabela 3 mostra

os resultados dessa comparação.

Tabela 3: Estatísticas da comparação entre os modelos GEÓIDESP\_FC\_2007 e MDGR  
( $N_{\text{GEÓIDESP\_FC\_2007}} - N_{\text{MDGR}}$ )

Modelo	Média (m)	Desvio Padrão (m)	Variância (m <sup>2</sup> )	Valor Máximo (m)	Valor Mínimo (m)
GEÓIDESP_FC_2007 - MDGR	-0,043	0,182	0,033	0,483	-0,923

Foi verificada **na prática** uma redução significativa no tempo de processamento para determinação do modelo geoidal pela técnica FC, com uma qualidade tão boa quanto a aquela do MDGR, que, por sua vez, foi determinado após um longo tempo de processamento. A explicação para o reduzido tempo de processamento no caso da técnica FC, conforme já mencionado, é, além da estrutura Toeplitz/Toeplitz da matriz covariância, a utilização de somente uma função covariância para toda a área de cálculo. No caso da MDGR, que foi determinado por CMQ, a área total foi dividida em blocos e para cada bloco foi determinada uma função covariância, gerando para cada ponto uma equação! Isto, sem dúvida, aumenta o tempo de processamento, o que faz com que a solução por CMQ seja demorada. Justifica-se, portanto, a utilização da técnica FC. As Figuras 31 e 32 mostram as diferenças entre os dois modelos: GEÓIDESP\_FC\_2007 e MDGR.

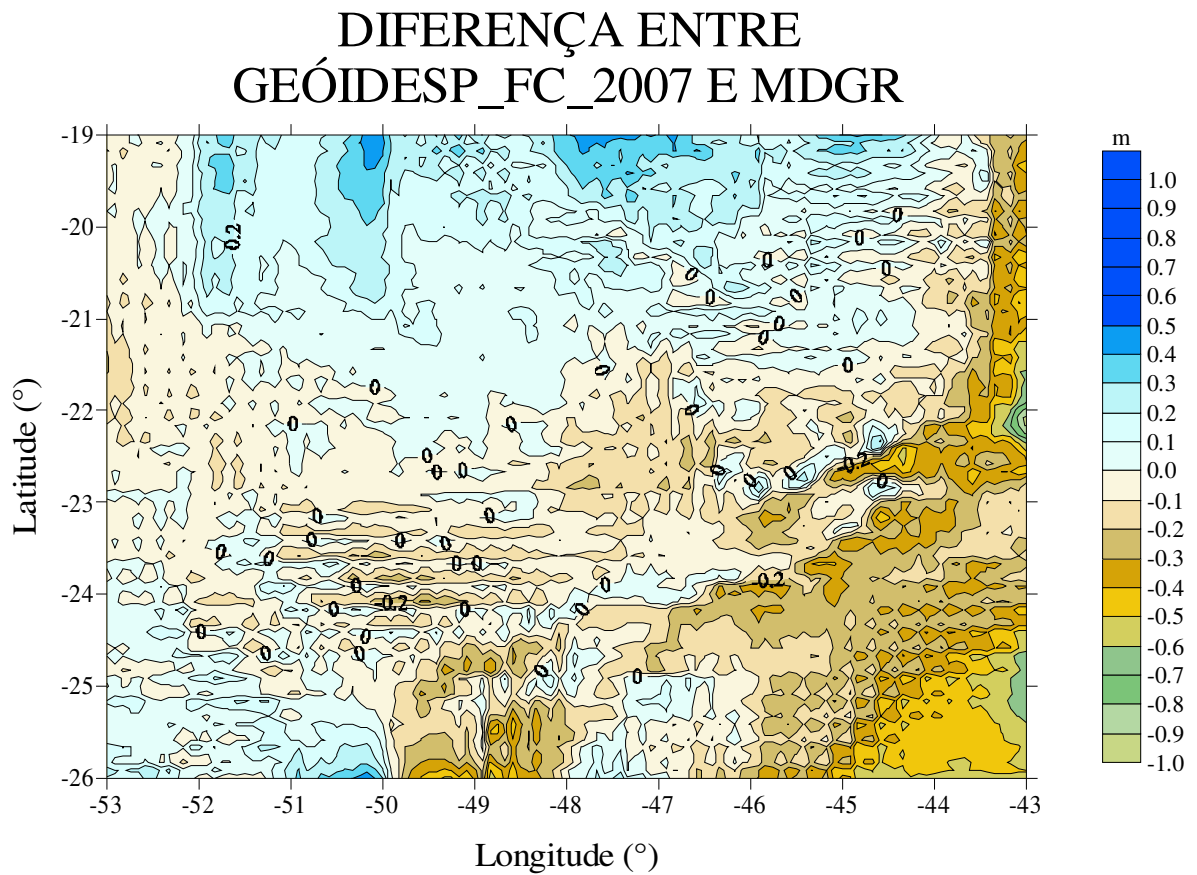


Fig.31: Diferenças em altura geoidal entre os modelos GEÓIDESP\_FC\_2007 e MDGR;  
intervalo das isolinhas 0,1 m

## DIFERENÇA ENTRE GEÓIDESP\_FC\_2007 E MDGR

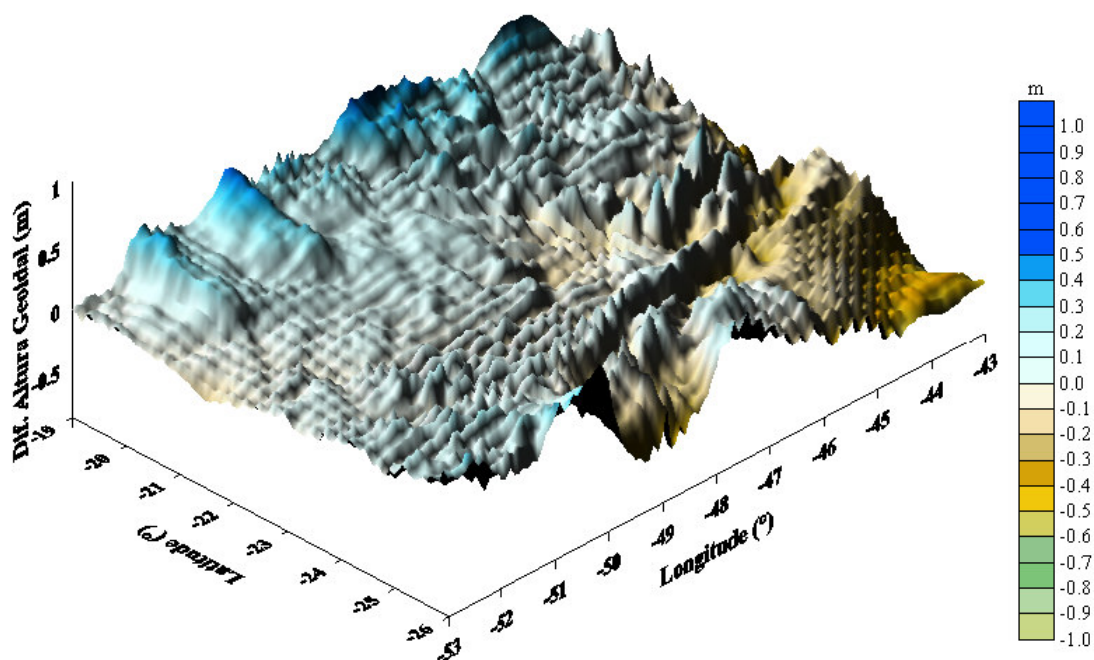


Fig.32: Diferenças em altura geoidal entre os modelos GEÓIDESP\_FC\_2007 e MDGR, em perspectiva

A análise do geóide calculado permite identificar algumas características geológicas da região. Nas regiões a norte do paralelo 24°S praticamente todas as alturas geoidais são negativas, indicando que naqueles locais o elipsóide está acima do geóide ( $N = h - H$ ). Além disso, as isolinhas na parte ocidental da fig. 29 parecem demonstrar a forte influência da configuração geológica da região sobre o geóide, conhecida como Grupo Bauru, o qual é formado por rochas cretáceas suprabasálticas da Bacia do Paraná



(PAULA e SILVA, F.; CHANG, H. K.; CAETANO-CHANG, M. R., 2003) (Figura 33), o que corresponde ao planalto ocidental (Figura 34).

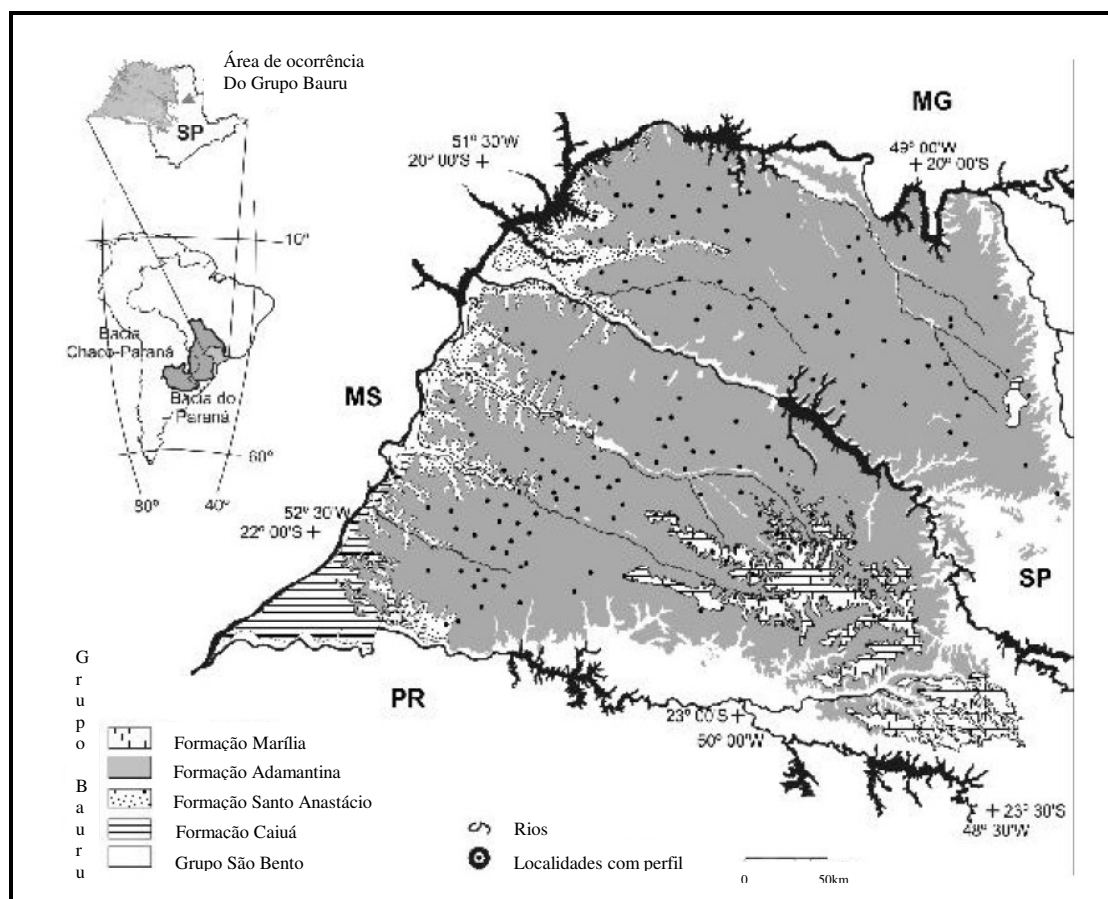


Fig.33: Distribuição das unidades litoestratigráficas aflorantes do Grupo Bauru no Estado de São Paulo

Fonte: (PAULA e SILVA, F.; CHANG, H. K.; CAETANO-CHANG, M. R., 2003)

Outra característica marcante é a área compreendida de forma aproximada pelos paralelos 24°S e 25°S e pelos meridianos 47°W e 49°W, que geomorfologicamente é classificada como província costeira (Figuras 29 e 34), o que está de acordo com a realidade, uma vez que a oeste desta área a altura geoidal sofre uma mudança de sinal, de negativo para positivo, passando naturalmente pela altura *zero*, o que equivale a coincidir com o nível médio do oceano. A configuração do geóide na parte sudoeste do Estado de São Paulo é determinada pela distribuição das unidades litoestratigráficas do

Grupo Bauru naquela região (formação Caiuá, no extremo oeste, e Grupo São Bento, mais ao sul, lat. 22°30'S e long. 51°W) (Figura 33). Neste caso, nota-se que, embora muito próximos, os valores de altura geoidal não são iguais nessas partes, indicando a influência das diferentes porções do substrato geológico na configuração do geóide. Cabe destacar que essas ocorrências diversificadas, no que se refere ao contexto geológico, alojam uma ampla série de recursos minerais que sustentam uma indústria extrativa que produz cerca de 25 variedades de substâncias e que abastece, sobretudo, o mercado doméstico paulista (CABRAL JÚNIOR et al, 2001). Uma análise mais profunda sobre as características geológicas da região e suas influências sobre a configuração do geóide pode ser realizada, no entanto isso fugiria do tema deste trabalho. Buscou-se mostrar apenas a correlação existente entre geodésia física e geologia, a qual é bem conhecida principalmente dos geofísicos.

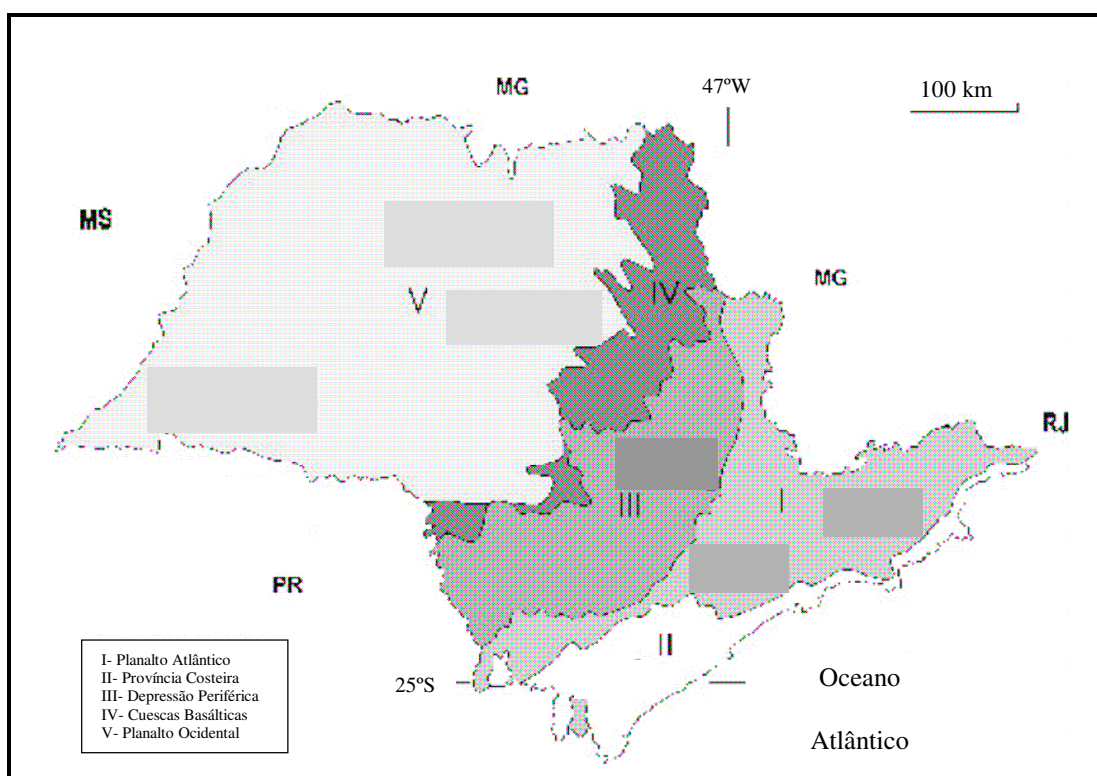


Fig.34: Províncias geomorfológicas do Estado de São Paulo

Fonte: (CABRAL JÚNIOR et al, 2001)

## 7. UMA ABORDAGEM SOBRE O SENSORIAMENTO REMOTO QUE CONTEMPLA O CAMPO DE GRAVIDADE

No capítulo 4, seção 4.1, o sensoriamento foi caracterizado pela aquisição de dados de um determinado alvo na superfície terrestre através de sensores remotos, que são dispositivos capazes de detectar e registrar a radiação emitida ou refletida pelo referido alvo. A radiação emitida ou refletida pelos alvos é detectada e registrada pelo sensor remoto, que transforma essa radiação recebida em produto passível de interpretação. Um dos produtos de grande utilização, seja para a comunidade científica, seja para os usuários leigos, são as *imagens de satélite*. Tais imagens sintetizam todo o processo acima descrito que vai desde a interação com o alvo da radiação eletromagnética proveniente do Sol até a geração do produto final que é a imagem de satélite propriamente dita. Essas imagens são utilizadas para vários fins. São realizados estudos com objetivos de aplicar as imagens de satélite, por exemplo, na previsão de safras, no auxílio à atualização cartográfica urbana e rural graças às imagens de alta resolução, na geração de modelos digitais de elevação, com finalidades climáticas como previsão de ciclones, etc. Outras importantes abordagens são feitas objetivando, por exemplo, a criação de novos classificadores para as imagens.

Desde os primeiros relatos que se tem informação sobre o sensoriamento remoto, com a utilização da fotografia aérea como ferramenta de reconhecimento do terreno, até os dias atuais, com a utilização de modernos e poderosos sensores orbitais que geram imagens das mais variadas resoluções e para os mais diversos tipos de aplicação, o conceito ou a idéia amplamente difundida de sensoriamento remoto é fortemente vinculado à interação entre sensor e **radiação eletromagnética**. A radiação refletida do alvo é absorvida pelo detector, que é sensível à radiação, mudando suas propriedades elétricas que podem ser medidas. O sinal de saída do detector é baixo e deve ser amplificado e filtrado pelo processador para diminuir o *ruído* antes de ser liberado para o dispositivo de digitalização e gravação. Vê-se, portanto, que há interação entre a

energia eletromagnética proveniente do alvo e o detector, e assim são geradas as imagens do referido alvo<sup>35</sup>.

Apesar de ter sido feita referência de que um MG é representativo dos longos comprimentos de onda do campo de gravidade terrestre (seção 4.2), nada foi mencionado a respeito desse campo “possuir” curtos, médios e longos comprimentos de onda. Pode parecer estranho àqueles que não estão familiarizados com as pesquisas em geodésia física, mas o campo de gravidade pode ser representado através dos seus diferentes comprimentos de onda. O comprimento de onda está associado ao “tamanho” da feição na superfície que gera o campo. As informações dos longos comprimentos de onda são geradas pelas grandes feições na Terra e podem ser obtidas a partir de dados de trajetória de satélite. As informações de médios comprimentos de onda do campo de gravidade estão contidas nas anomalias gravimétricas médias, e as informações de curtos e muito curtos comprimentos de onda podem ser aprimoradas com um tratamento cuidadoso das altitudes (LOBIANCO, 2005). O conjunto de comprimentos de onda do campo de gravidade forma o chamado *Espectro do Campo de Gravidade*, da mesma forma que o espectro eletromagnético reúne a radiação eletromagnética nos seus comprimentos de onda e respectivas frequências. No sentido físico, o espectro do campo de gravidade, assim como o espectro eletromagnético, não possui intervalos, o que permite concluir que podem ser obtidos comprimentos de onda do campo de gravidade de qualquer “tamanho”, diferenciando-se apenas no modo como podemos captá-los. Da mesma maneira que um sensor a bordo de um satélite detecta a radiação refletida de um alvo dentro de um faixa do espectro eletromagnético, os satélites também podem detectar informações gravitacionais das feições na superfície terrestre, sendo o comprimento de onda detectado de acordo com o “sensor” a bordo do satélite. FEATHERSTONE e ZHANG (1995), há mais de duas décadas, já mencionavam o comportamento espectral do campo de gravidade da Terra através da relação espectral entre as anomalias gravimétricas e o potencial anômalo (semelhante à eq. (2.83)):

$$\Delta g_n = \frac{(n-1)}{r} T_n.$$

Portanto, essa noção já é antiga, porém pouco divulgada Brasil. Os satélites gravimétricos CHAMP, GRACE e GOCE poderão tornar mais clara a noção de representação do campo de gravidade através dos seus comprimentos de onda.

---

<sup>35</sup> Aqui, o termo *alvo* refere-se a uma determinada porção da superfície terrestre, ou dos objetos que estão sobre ela, que está dentro do campo de visada do sensor.

Com o advento das missões gravimétricas espaciais (seção 4.3), o lançamento da missão CHAMP no ano 2000, o lançamento dos satélites da missão GRACE no ano 2002 e o lançamento do satélite da missão GOCE, previsto para futuro próximo, para modelagem do campo de gravidade da Terra, e, por consequência, a determinação dos longos comprimentos de onda do geóide (e também dos médios e curtos comprimentos de onda no caso do GOCE), pode-se ampliar a idéia de sensoriamento remoto, pelo menos a idéia amplamente difundida. Os satélites das missões gravimétricas estão em uma órbita relativamente baixa e, por isso, mais susceptíveis a pequenas variações do campo de gravidade terrestre, que se refletem nas mudanças de órbita, as quais são previamente planejadas. Conclui-se, daí, que existe uma correspondência (não biunívoca!) entre variações no campo de gravidade da Terra e uma mudança na órbita do satélite. Uma mudança no campo de gravidade terrestre implica em uma mudança na órbita do satélite, e uma mudança na órbita do satélite é devida a uma variação no campo de gravidade da Terra (não exclusivamente, por isso que a correspondência não é biunívoca). Sobre o satélite em órbita atuam as chamadas forças não-gravitacionais, tais como as forças devido ao atrito atmosférico, que fazem com que o satélite perca altitude durante seu trajeto, e as forças devido à pressão da radiação solar, que resultam da reflexão ou absorção de fótons que são continuamente emitidos pelo Sol. Essas forças são responsáveis pelas acelerações não-gravitacionais e devem, de alguma forma, ser compensadas das forças gravitacionais. Uma idéia da magnitude dessas forças não-gravitacionais é fornecida por ABT (2004). Para determinação de um modelo do campo de gravidade utilizando dados de aceleração de um mês do satélite CHAMP, ABT apresentou os valores máximo, mínimo, médio e de desvio padrão das acelerações não-gravitacionais ocorridas no mês de julho de 2002 (Tabela 4):

Tabela 4: Acelerações não-gravitacionais ( $\frac{m}{s^2}$ )

<b>max</b>	<b>min</b>	<b>méd</b>	<b>desv pad</b>
$1,736 \times 10^{-6}$	0	$3,887 \times 10^{-7}$	$1,431 \times 10^{-7}$

Fonte: (ABT, 2004)

Em seu trabalho, ABT conclui que as acelerações não-gravitacionais (Tabela 4) são muito pequenas para serem levadas em conta no seu estudo e portanto as rejeita durante o processamento.

Essas forças não-gravitacionais são medidas pelos acelerômetros que fazem parte da carga útil dos satélites e seus efeitos são considerados durante o processamento e geração dos dados de gravidade. Dessa forma, os produtos finais gerados pelos satélites são devidos exclusivamente às variações gravitacionais do planeta Terra.

Como se viu, através da interação remota entre satélite e superfície terrestre pode-se determinar um modelo de geóide, seja global ou regional (dependendo do tipo de “sensor” a bordo do satélite e de sua capacidade de detectar os longos, médios ou curtos comprimentos de onda do campo de gravidade). A diferença em relação ao sensoriamento remoto “clássico” consiste basicamente no produto final.

Diferentemente dos produtos “clássicos” gerados pelos sensores que transformam a radiação eletromagnética detectada e registrada em imagens (após várias etapas de processamento, a bem da verdade), os produtos gerados pelos satélites gravimétricos, em especial os satélites CHAMP e GRACE, são coeficientes dos harmônicos esféricos. Esses coeficientes são obtidos através de medidas indiretas das mudanças no campo de gravidade terrestre. Essas mudanças no campo de gravidade da Terra causam variações na órbita dos satélites e podem ser detectadas e medidas pelos acelerômetros. Dessa maneira, pode-se determinar o geóide de forma *indireta*. Por que *de forma indireta*? Porque não são feitas medidas **diretas** de gravidade. Uma eventual mudança na disposição de uma porção de massa da Terra, na crosta ou mesmo no seu interior, causa uma variação no potencial de gravidade do planeta (como no caso de um sistema carregado positiva ou negativamente, onde cada nova configuração do sistema produz um novo potencial elétrico em um ponto específico do espaço, embora a carga total do sistema seja mantida constante!). No caso da Terra, um rearranjo das porções de massa provoca uma mudança no potencial de gravidade do planeta, embora a massa total se mantenha constante. Como os satélites são programados para seguirem uma determinada órbita, “de acordo com uma configuração de massa do planeta”, e portanto de acordo com um campo e potencial de gravidade específicos (o daquela configuração de massa), qualquer alteração no potencial de gravidade provocará uma alteração na

órbita do satélite. Essas alterações de órbita são detectadas, medidas e no processo final são gerados os coeficientes dos harmônicos esféricos, os quais, em última análise, caracterizam o campo de gravidade da Terra. Dessa forma, e utilizando a equação (2.83), é possível determinar as anomalias gravimétricas  $\Delta g$  a partir da série em harmônicos esféricos do potencial gravitacional  $V$  (WELLENHOF; MORITZ, 2005). No caso da missão GOCE, serão gerados os coeficientes dos harmônicos esféricos, mas também, e principalmente, outros elementos do campo de gravidade, os chamados gradientes de gravidade, que são, matematicamente falando, as derivadas de segunda ordem do potencial gravitacional ( $V$ ) em relação a cada um dos três eixos coordenados  $(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2})$ . Nesse caso, é possível determinar o geóide de forma *direta*, pois as variações no campo de gravidade estão sendo medidas diretamente.

Conclui-se, então, que indiretamente (no caso das missões CHAMP e GRACE) e diretamente (no caso da missão GOCE), mas *sem nenhum contato com o “alvo”*, é possível obter informações sobre a Terra; analisar, avaliar, estudar, enfim, compreender o planeta ou parte dele do ponto de vista geodésico ou geofísico. E da mesma maneira que um sensor que detecta a radiância de um determinado alvo a transforma em um conjunto numérico que vai originar uma imagem daquele alvo, os satélites das missões gravimétricas detectam a mudança no campo de gravidade e a transformam em um conjunto numérico que poderá originar, também, uma “imagem” de uma determinada região. Dessa forma, amplia-se a idéia sobre o sensoriamento remoto, transpondo a barreira do campo eletromagnético e passando a contemplar também o campo de gravidade.

## 8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A técnica FC e o MG CG01c foram usados com êxito na criação do modelo GEÓIDESP\_FC\_2007. As comparações realizadas entre GEÓIDESP\_FC\_2007 e MDGR mostraram diferenças inferiores a 1m, o que mostra que a técnica FC apresentou-se adequada para determinação do geóide da região de estudo. Além disso, pôde-se comprovar que o MG CG01c, derivado das novas missões gravimétricas CHAMP e GRACE, possui um bom ajuste à área de cálculo, permitindo concluir que os novos MGs derivados dessas missões tendem a suprimir modelos como o EGM96, o qual foi usado no MDGR.

A média das diferenças entre  $N_{GPS}$  e  $N_{MG\_CG01c}$  (Tabela 1) indica uma componente sistemática média em conformidade com a representação espectral do MG, o que o torna válido para a área de estudo. O desvio padrão encontrado mostra um bom grau de aderência das diferenças entre  $N_{GPS}$  e  $N_{MG\_CG01c}$ .

A avaliação do erro absoluto do modelo GEÓIDESP\_FC\_2007, dado pela diferença entre  $N_{GPS}$  e as alturas geoidais provenientes do referido modelo, mostrou uma componente sistemática média da ordem de **0,681m** (Tabela 2). A existência da componente sistemática deve-se a fatores como distorções nas alturas ortométrica e geométrica e nas alturas geoidais, fatores geodinâmicos e aproximações realizadas na obtenção da altura geoidal. O valor médio encontrado nesta avaliação é menor do que aquele obtido da comparação entre  $N_{GPS}$  e  $N_{MG\_CG01c}$  (Tabela 1), indicando que os dados de anomalias gravimétricas terrestres contribuíram com as componentes de longo comprimento de onda dado pelo MG para determinação do geóide da região. O desvio padrão encontrado mostra um bom grau de aderência das diferenças entre  $N_{GPS}$  e  $N_{GEÓIDESP\_FC\_2007}$ .

A comparação entre os modelos GEÓIDESP\_FC\_2007 e MDGR, através da diferença entre as alturas geoidais ( $N_{GEÓIDESP\_FC\_2007} - N_{MDGR}$ ), mostrou uma diferença média da ordem de **-0,043 m**. Esta diferença pode estar associada à utilização de MGs diferentes, uma vez que o MDGR utilizou o MG EGM96, e também ao fato de que a técnica empregada para determinação do MDGR (CMQ) permite a inserção dos erros associados aos dados gravimétricos no cálculo do geóide e de seu erro. Isto, portanto,



permite concluir que a diferença encontrada entre os modelos não se deve exclusivamente a fatores aleatórios. No entanto, mostra que o MG derivado das novas missões gravimétricas é tão bom quanto o EGM96 e que a técnica FC mostrou-se plenamente adequada para o cálculo do geóide do Estado de São Paulo.

O âmago da questão de determinar um geóide com boa acurácia está na quantidade e distribuição de pontos sobre a superfície terrestre. Uma avaliação profunda deve ser feita a esse respeito, levando-se em consideração os erros dos dados de gravidade devidos aos erros dos *data* (plural de *datum*) verticais, dados GPS sobre nivelamento, variação de densidade topográfica, MGs e MDTs, caso contrário, nunca se chegará a um *geóide centimétrico*.

Novos MGs derivados das missões gravimétricas e associados à técnica FC devem ser testados na região de estudo, uma vez que nesta dissertação foi testado apenas o modelo CG01c. Isto possibilitará determinar o MG mais apropriado a ser utilizado tanto na computação do geóide da região quanto em outras aplicações geocientíficas, bem como servirá de validação dos dados provenientes das missões gravimétricas. Além disso, recomenda-se que a técnica FC seja utilizada em outras regiões do País, de forma a verificar sua eficácia.

A abordagem feita sobre o sensoriamento remoto no capítulo 7 buscou mostrar uma possível ampliação da idéia que envolve seu conceito. As argumentações serviram para justificar o estudo do campo de gravidade por meio das missões espaciais gravimétricas. Fica colocada, portanto, mais essa questão para possíveis debates.

## 9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABT, T. L. **Determination of a Gravity Field Model from One Month of CHAMP Satellite Data Using Accelerations**. Thesis. Universität Stuttgart. Geodätisches Institut, 2004.

ANDERSEN, O. B.; KNUDSEN, P. Global Marine Gravity Field from the ERS-1 and GEOSAT Geodetic Mission Altimeter. **Journal of Geophysics Research**, v. 102, n° C4, p. 8129-8137, 1998.

AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY. **Manual of Photogrammetry**. 4.ed. Falls Church, Va., 1980.

AMOS, M. FEATHERSTONE, W. Comparisons of Recent Global Geopotential Models with Terrestrial Gravity Field Observations Over New Zealand and Austrália. **Geomatics Research Australasia**, v. 78, p. 67-83, 2003.

AYRES, F. Jr. **Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices**. New York: Schaum, 1962.

BALMINO, G. **La mission GOCE. Présentation scientifique**. In: Projet "GOCE-Gravité". Phase A. Centre National D'Etudes Spatiales. Toulouse, França, 2004.

BERTULANI, C. **Integração Numérica**, 1996. Disponível em <<http://www.if.ufrj.br/teaching/compute/nodel139.html>> Acesso em 2005.

BIERENS, H. J. Hilbert Spaces. **Nota Técnica**. Pennsylvania State University, 2004.

BILKER, M. Evaluation of the New Global Gravity Field Models From CHAMP and GRACE with GPS-Leveling Data in Fennoscandia. **Nota Técnica**. p. 21-26, 2005

BOTTONI, G. P.; BARZAGHI, R. Fast Collocation. **Bulletin Geodésique**, v. 67, p. 119 – 126, 1993.

CABRAL JÚNIOR, M. et al. Recursos Minerais do Estado de São Paulo. **Geociências**, v. 22, n. 1, p. 105 – 159, 2001.

COLWELL, R. N. **Manual of Remote Sensing**. Introduction. American Society of Photogrammetry. Falls Church, Virginia. p. 1 – 26, 1975.

ELLMANN, A. **The Geoid for the Baltic Countries Determined by the Least Squares Modification of Stokes' Formula**. Doctoral Dissertation in Geodesy n° 1061. Royal Institute of Technology (KTH). Stockholm, Sweden, 2004.

FEATHERSTONE, W. E.; ZHANG, K. F. The Statistical Fit of High Degree Geopotential Models to the Gravity Field of Australia. **Geomatics Research Australasia**, n. 63, p. 1-18, 1995.

FEATHERSTONE, W. Expected Contributions of Dedicated Satellite Gravity Field Missions to Regional Geoid Determination With Some Exemples from Austrália. **Journal of Geospatial Engineering**, v. 4, p. 2-19, 2002

GOLDANI, D. **Modelo Geoidal de Alta Resolução para o Estado do Paraná: Aplicação da Transformada Rápida de Fourier - Stokes e do Valor do Potencial do Geóide na Definição da Superfície de Referência Vertical**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2006.

GONÇALVES, S. F. T. **A Transformada Wavelet Discreta Incompleta Aplicada à Resolução das Equações de Poisson**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

GRACE BROCHURE. 2002. Material disponibilizado no *site* da missão GRACE (“GRACE\_Brochure.pdf”). Disponível em <<http://op.gfz-potsdam.de/grace>> Acesso em 2005.

HECIMOVIC. Z. **Spectral Behavior of Global Gravitational Models Considering EUVN Network.** Disponível em <<http://www.geof.hr/~zhecimovic/PopisRadova/Hecimovic-SpectralbehaviorofGPMInEUVN.pdf>> Acesso em 31/05/2006.

HECK. B. An Evaluation of Some Systematic Error Sources Affecting Terrestrial Gravity Anomalies. **Bulletin Geodésique**, v. 64, p. 88-108, 1990.

HEISKANEN, W.; MORI TZ, H. **Physical Geodesy**. San Francisco: Freeman and Co., 1967.

KAULA, W. M. Statistical and Harmonic Analysis of Gravity. **Journal of Geophysic Research**, v. 64, p. 2401 – 2421, 1959.

KEARSLEY, A. FORSBERG, R. Tailored Geopotential Models – Applications and Short-comings. **Manuscripta Geodaetica**, v. 15, p. 151-158, 1990.

LOBIANCO, M. C. B. **Determinação das Alturas do Geóide no Brasil**. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

MOREIRA, M. A. **Fundamentos do Sensoriamento Remoto e Metodologias de Aplicação**. 1ª ed. São José dos Campos, São Paulo, 2001.

MORITZ, H. Least-Squares Collocation. **Reviews of Geophysics and Space Physics**. v. 16, n. 3, p. 421 – 430, 1978.

MORITZ, H. **Advanced Physical Geodesy**. Karlsruhe, Germany: Herbert Wichmann Verlag, 1980.

MORITZ, H. Geodetic Reference System 1980. **Bulletin Geodésique**, v. 66, p. 187 – 192, 1992.

NOVO, E. M. L. M. **Sensoriamento Remoto: Princípios e Aplicações**. 2ª ed. São José dos Campos, São Paulo, 1988.

PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. McGraw-Hill, New York, 1965.

PAULA E SILVA, F; CHANG, H. K.; CAETANO-CHANG, M. R. Perfis de Referência do Grupo Bauru (K) no Estado de São Paulo. **Geociências**, v. 22, n. Especial, p. 21 – 32, 2003.

PIÑA, W. H. S. **A Determinação de um Modelo Geoidal de Precisão para o Uruguai**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Paraná, 2000.

RAPP, R. H. **Past and Future Developments in Geopotential Modelling**. In: FORSBERG, R.; FEISSEL, M.; DIETRICH, R. (Ed.). **Geodesy on the Move**. Berlin. Heidelberg: Springer-Verlag. (International Association of Geodesy Symposia, v. 119) p. 58-78, 1998.

REIGBER, C. et al. A High Quality Global Gravity Field Model From CHAMP GPS Tracking Data and Accelerometry (EIGEN-1S). **Geophysical Research Letters**, 29(14), 10.1029/2002GL015064, 2002.2002.

REIGBER, C. et al. The CHAMP-only Earth Gravity Field Model EIGEN-2. **Advanced in Space Research** 31(8), 1883-1888, 2003 (doi: 10.1016/S0273—1177(03)00162-5), 2003.

REIGBER, C. **First GFZ GRACE Gravity Field Model EIGENGRACE01S**. 2004. Disponível em <<http://op.gfzpotdam.de/grace/results>> Acesso em 2006.

REIGBER, C. **Combined Gravity Field Model EIGEN-CG01C**. 2005. Disponível em <[http://www.gfzpotdam.de/pbl/op/grace/results/grav/g003\\_eigen-cg01c.html](http://www.gfzpotdam.de/pbl/op/grace/results/grav/g003_eigen-cg01c.html)> Acesso em 2006.

REIGBER, C. et al. **Earth Gravity Field and Seasonal Variability From CHAMP**. In: REIGBER, C.; LÜHR, H.; SCHWINTZER, P.; WICKERT, J. (eds.), **Earth Observation With CHAMP – Results From Three Years in Orbit**, Springer, Berlim, 25-30. 2005a.

REIGBER, C. et al. An Earth Gravity Field Model Complete to Degree and Order 150 From GRACE: EIGEN-GRACE02S, **Journal of Geodynamics** 39(1), 1-10. 2005b.

RUMMEL et al. Dedicated Gravity Field Missions – Principles and Aims. **Journal of Geodynamics**, v. 33, p. 3 – 20, 2002.

SÁ, N. C. et al. **O GPS no Estado de São Paulo: Potencialidades, Desafios e Estratégias**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, 20, 2001. Porto Alegre. Anais... Porto Alegre: [s.n.]. **CD-ROM**.

SANSÒ, F.; TSCHERNING, C. C. Fast Spherical Collocation: Theory and Examples. **Journal of Geodesy**, v. 77. p. 101 – 112, 2003.

SCHNITER, P. **Hilbert Spaces**. The Connexions Module: m 10434. 2005. Disponível em <<http://cnx.org/content/m10434/latest>> Acesso em 19/09/2006.

SCHWINTZER, P.; REIGBER, C. The Contribution of GPS Flight Receivers to Global Gravity Recovery. **Journal of Global Positioning System**, v. 1. n. 1, p. 61 – 63, 2002.

SOUZA, S. F. **Contribuição do GPS para o Aprimoramento do Geóide no Estado de São Paulo**. Tese (Doutorado) - Instituto Astronômico e Geofísico - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

STEFFEN, C. A. **Fundamentos de Radiometria Óptica**. Apresentação no CEPSRM. Porto Alegre, 2005.

TAPLEY, B. et al. **Gravity Field Determination From CHAMP Using GPS Tracking and Accelerometer Data: Initial Results**, EOT Trans. AGU, 82(47), Fall Meet. Suppl., Abstract G41C-02, 2001. 2001.

TAPLEY, B. et al. The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission Overview and Early Results, **Geophys. Res. Lett.**, 31(9), L09607, doi: 10.1029/2004GL019920, 2004. 2004.

TSCHERNING, C. C.; RAPP, R. H. Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulation and Deflections of the Vertical Implied by the Anomaly Degree Covariance Models. **Report of the Ohio State University**. Columbus, n. 208, 1974.

TSCHERNING, C. C. Collocation and Least Squares Methods as a Tool for Handling Gravity Field Dependent Data Obtained Through Space Research Techniques. **Bulletin Geodésique**, v. 52, p. 199 – 212, 1978.

TSCHERNING, C. C. **Geoid Determination After the First Satellite Gravity Missions**. 2001. Disponível em <<http://www.gfy.ku.dk/~cct/torge02.htm>>. Acessado em 08/02/2007.

UT-CRS. **GRACE Gravity Model 02**. 2004. Disponível em <<http://www.csr.utexas.edu/grace/gravity>> Acesso em 2006.

VANICEK, P., SJÖRBERG, L. Reformulation of Stokes' Theory for Higher than Second-degree Reference Field and Modification of Integrations Kernels. **Journal of Geophysical Research**, v. 96, n. B4, p. 6529-6539, Apr. 10, 1991.

WELLENHOF, B. H.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Springer-Wien New York, 2005.

WENZEL, H.-G. Ultra-High Degree Geopotential Model GPM93E97A to Degree 1800 Tailored to Europe. **Masala, Report** n° 98:4, p. 71-80, 1998a.

WENZEL, H.-G. **Ultra-High Degree Geopotential Models GPM98A, B and C to Degree 1800**. 1998b. Disponível em <<http://gik.uni-karlsruhe.de/~wenzel/gpm98abc/gpm98abc.htm>> Acesso em 2006.

WICHIENTHAROEN, C. The Indirect Effects On The Computation Of Geoid Undulations. Reports of the Department of Geodetic Science and Surveying. **Report n.º 336. The Ohio State University**, 1982.

WIKIPEDIA. **Toeplitz Matrix**. Free Enciclopedia. Disponível em <[http://en.wikipedia.org/wiki/Toeplitz\\_matrix.htm](http://en.wikipedia.org/wiki/Toeplitz_matrix.htm)> Acesso em 07/02/2006.