**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DA MATEMÁTICA**

**Adriana Bonadiman**

# ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: PRODUZINDO SIGNIFICADOS PARA AS OPERAÇÕES BÁSICAS COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

**Porto Alegre**

**2007**

Adriana Bonadiman

# ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL: PRODUZINDO SIGNIFICADOS PARA AS OPERAÇÕES BÁSICAS COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Ensino da Matemática**, sob a orientação da **Profª. Drª. Elisabete Zardo Burigo.**

Porto Alegre

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Reitor: Prof. Dr. José Carlos Ferraz Hennemann
Vice-Reitor: Prof. Dr. Pedro Cezar Dutra Fonseca

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Diretor: Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha
Vice-Diretor: Prof. Dr. Eduardo Henrique de Matos Brietzke

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Coordenador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vice-Coordenador: Profa Dra Marilaine de Fraga Sant´Ana

CIP – Brasil – Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

B697a Bonadiman, Adriana
Álgebra no Ensino Fundamental : produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas / Adriana Bonadiman. - 2007.

298 f.

Dissertação (mestrado) – UFRGS, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2007.
Orientação: Profa. Dra. Elisabete Zardo Burigo, Instituto de Matemática.

1. Álgebra 2. Ensino de Álgebra 3. Educação Matemática 4. Produção de Significados 5. Aprendizagem Cooperativa I. Título II. Burigo, Elisabete Zardo

CDU 512

Bibliotecária Valéria Ritter – CRB 10/1718

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Bairro Agronomia
Porto Alegre – RS
CEP 91509-900

Fone: (51) 3308-6212
Fax: (51) 3308-6212

E-mail: mat-ppgensimat@ufrgs.br

Adriana Bonadiman

# ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL:
# PRODUZINDO SIGNIFICADOS PARA AS OPERAÇÕES BÁSICAS COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Mestrado Profissionalizante em Ensino da Matemática

Porto Alegre, junho de 2007.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rômulo Campos Lins (UNESP - Rio Claro)

Prof ª. Dr ª. Maria Paula Fachin (UFRGS)

Prof ª. Dr ª. Cydara Cavedon Ripoll (UFRGS)

*Dedico este trabalho:*

*Ao meu pai biológico Ari Bonadiman (in memorian) e ao meu pai de coração Honório Vilibaldo Simon (in memorian), com muita saudade.*

*À minha mãe Maria Oldoni Bonadiman com um carinho muito especial.*

*Ao meu marido Moacir Luiz Cagnin, com amor.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a *Deus*, que além da vida, proporcionou-me, saúde, força e perseverança para que mais um de meus projetos se realizasse.

À Professora Doutora *Elisabete Zardo Búrigo*, pela sua amizade, competência, paciência e extrema dedicação durante todos os nossos encontros.

Aos Professores Doutores *Rômulo Campos Lins, Cydara Cavedon Ripoll* e *Maria Paula Fachin,* pela atenção, comentários e sugestões que tanto contribuíram para evolução deste trabalho, como membros da Banca Examinadora.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelos conhecimentos compartilhados durante o curso.

Ao meu marido *Moacir*, que através do seu amor e compreensão, me apoiou, incentivou nesta caminhada e possibilitou-me dedicação a esta pesquisa permitindo que meu sonho se realizasse.

Aos meu pai *Ari (in memorian)* pelo exemplo de perseverança e zelo.

Ao meu pai *Honório (in memorian)* e minha mãe *Maria,* que me ensinaram a olhar à frente, aceitar e superar as adversidades da vida e, com muito carinho e amor desde o início incentivaram e apoiaram a profissão por mim escolhida.

Aos meus familiares, em especial à minha irmã *Daniela*, por entenderem minhas ausências.

À Direção, professores, funcionários e alunos da Escola Municipal Wenceslau Fontoura pela colaboração nesta pesquisa.

À Direção, professores e alunos da Escola Estadual José Gomes de Vasconcelos Jardim pelo apoio e compreensão na minha ausência.

Aos alunos que participaram desta pesquisa, pela dedicação, carinho e seriedade com que conduziram suas atividades.

Enfim, a todos que de uma forma ou de outra, diretamente ou indiretamente, contribuíram para que este estudo se realizasse.

Muito Obrigada!

## RESUMO

Nesta dissertação destacamos nossa preocupação com o ensino e aprendizagem da álgebra elementar, sempre muito presente em nossa prática docente. Nosso principal objetivo foi a elaboração, implementação e validação de uma proposta didática para o desenvolvimento de um ensino que promovesse a compreensão das operações básicas com expressões algébricas no Ensino Fundamental. De acordo com os referenciais teóricos utilizados buscamos construir uma proposta que contemplasse a produção de significados para a atividade algébrica em um ambiente de aprendizagem cooperativa, fazendo uso de representações múltiplas e de materiais manipulativos juntamente com a resolução de situações-problema. A implementação da proposta foi desenvolvida em duas fases: a primeira, enfocando o uso das letras em álgebra e a segunda voltada para a produção de significados para as operações com expressões algébricas. Apresentamos o resultado da investigação realizada com um grupo de alunos do segundo ano do terceiro ciclo (equivalente à 7ª série) do Ensino Fundamental numa escola da Rede Municipal de Ensino de Porto Alegre. Este estudo mostrou que a proposta implementada contribuiu para o aprimoramento do pensamento algébrico dos alunos que produziram significados para as operações realizadas com expressões algébricas, adquiriram desenvoltura no uso das letras e compreenderam algumas propriedades algébricas, dentre elas a comutatividade da multiplicação e a distributividade da multiplicação em relação à adição, além de estabelecerem condições para a realização da adição e subtração entre expressões algébricas. Notamos, ainda, o progresso dos alunos quanto à autonomia presente nos processos de observação, levantamento de hipóteses, elaboração de conclusões e de justificações. Concluímos, destacando a relevância desta pesquisa no âmbito do trabalho do professor, relacionada à construção de uma atitude de busca de compreensão dos processos de aprendizagem de seus alunos.

**Palavras-chaves:** Álgebra, ensino de álgebra, educação matemática, produção de significados, aprendizagem cooperativa.

## ABSTRACT

This work emphasizes the concern about teaching and learning elementary algebra. The main purpose was the elaboration, implementation and legalization of a didatic proposal having in mind a teaching development that would promote the understanding of basic expressions with algebraic operations in the Elementary School. Based on the chosen theoretical references forementioned, we intended to motivate students to learn algebra in a cooperative directed way through the use of multiple representative allusions with a wide deversity of symbolic, visual and material resources. This proposal implementation was developed in two phases: First it emphasized the algebra letter usage and second the significance production related to algebraic expressions. The accomplished investigation result was presented with a first grade group of students in a county school. This investigation showed that the implemented proposal improved the students algebraic thinking, also they started giving significance to the accomplished operation with algebraic expressions and acquired agility in using letters and understanding some of the algebraic properties including commutation in multiplication and distributions related to multiplication and additions besides establishing conditions to elaborate addition and subtraction among algebraic expressions. It was also noticed the students progress concerning the observation process, hipothesis, propositions, feeling of accomplisments and justifications autonomy. This research took into account the teacher's work considering the construction of an inquisitive searching attitude and a comprehensive understanding.



**Palavras-chaves:** Algebra, algebra teaching, mathematics education, significance production, cooperative learing.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE GRÁFICOS E QUADROS

## LISTA DE TABELAS

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

A busca pela melhoria do ensino de matemática tem sido uma meta constante dos educadores matemáticos. Mas, se pretendemos afetar a qualidade do ensino e da aprendizagem é importante oportunizar aos docentes a reflexão sobre sua prática para que adquiram subsídios que os levem a reconstruí-la em direção ao sucesso escolar de seus alunos.

A necessidade da presente pesquisa surgiu a partir das experiências de sala de aula, onde ficam evidentes as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos abordados na álgebra elementar, em especial com alunos das séries finais do Ensino Fundamental, onde a manipulação e as operações com expressões algébricas são motivo de "pavor" para muitos alunos.

É fato que o atual ensino da matemática, em especial o da álgebra elementar, encontra-se afastado da realidade da maioria dos alunos. Existe maior habilidade por parte dos alunos para resolver os exercícios mecanicamente do que para saber explicá-los. Não sabem por que chegaram a tal resultado ou porque certo problema é resolvido de determinada maneira, muito menos fazem associações com os conhecimentos adquiridos em seu cotidiano.

Nessa perspectiva, a preocupação aqui é desenvolver uma proposta didática no sentido de propiciar que os alunos produzam significados para as operações realizadas com expressões algébricas, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que já possuem.

No primeiro capítulo deste trabalho descrevemos alguns fatores que influenciaram nossa opção por este tema bastante polêmico. Apresentamos as justificativas para a escolha do tema, a problemática da pesquisa, a escolha da abordagem metodológica, bem como aspectos significativos da realidade dos alunos pesquisados.

No segundo capítulo apresentamos os referenciais teóricos que balizaram a elaboração da proposta didática e avaliação da mesma, bem como um breve histórico do desenvolvimento da álgebra dando ênfase à noção de variável e de seu ensino no país.

No terceiro capítulo descrevemos a metodologia utilizada para a implementação de nossa proposta.

No quarto capítulo relatamos a implementação de nossa proposta didática.

Deixamos para o quinto e último capítulo as considerações finais, em que sistematizamos os resultados desta pesquisa e sinalizamos algumas de suas contribuições para o ensino da álgebra na Educação Básica.

# CAPÍTULO 1: CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, serão discutidos os principais motivos que levaram à realização desta pesquisa, as aspirações e anseios em relação a ela, além de sua relevância. Serão apresentados também a problemática, os objetivos e justificativas para a escolha do assunto, além de uma breve apresentação da realidade da comunidade escolar e dos alunos que participaram desta pesquisa.

## 1.1 Por que o ensino de álgebra?

Ao longo da trajetória como professora da Educação Básica e também durante o curso de Mestrado Profissionalizante, nosso interesse esteve sempre muito voltado para o ensino e a aprendizagem da *álgebra elementar*[1], provavelmente porque em nossa experiência profissional percebemos as dificuldades de ensinar os conteúdos algébricos, assim como de aprender, apresentadas pelos alunos da Educação Básica.

Pensamos que a educação oferecida é um reflexo do desenvolvimento da sociedade, ou seja, é a sociedade, de acordo com seu desenvolvimento, que indica o que e como vamos ensinar nas escolas. Nem sempre a álgebra foi vista e ensinada da forma como é hoje. Então, se considerarmos como verdade que a sociedade é que impõe à escola suas finalidades, "há razão em se pensar que é ao redor dessas finalidades que se elaboram as políticas educacionais, os programas e os planos de estudo, e que se realizam a construção e a transformação históricas da escola" (CHERVEL, 1990, p. 219). E, nisso também se inclui a evolução de cada disciplina escolar, inclusive a álgebra.

No Brasil, no que diz respeito ao ensino da matemática, em especial da álgebra

---

[1] Entendemos por *álgebra elementar* uma forma básica e fundamental da álgebra, ensinada e estudada na Escola Básica. No capítulo 2, no final da seção 2.1, falaremos mais sobre esse assunto.

elementar – suas finalidades, políticas educacionais e programas – algumas mudanças foram ocorrendo com o passar do tempo. Algumas muito marcantes como o Movimento da Matemática Moderna, que influenciou o ensino da matemática durante as décadas de 1960 e 1970. Esse movimento, segundo Neves (1995), buscava um sentido para o ensino da matemática via seu internalismo, propondo a unificação dos campos matemáticos através da introdução no currículo de novos elementos tais como, a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações. Também destacou-se o uso de materiais de manipulação para a abstração de conceitos matemáticos.

Segundo Ribeiro (2001), no decorrer dos anos 80 e 90 várias reformas foram feitas e implementadas em diversos países. No Brasil, iniciou-se a elaboração de propostas curriculares nas quais a principal indicação em relação à álgebra era a de que o ensino da mesma deveria ser substituído por tópicos como noções de cálculo literal.

Embora fossem propostas mudanças no ensino, o problema de dar um sentido para o ensino da álgebra elementar era ainda uma questão em aberto: "É fato que o Movimento da Matemática Moderna fracassou em dar este sentido via seu internalismo; por outro lado, esse sentido não poderá ser alcançado via transformismo cego de objetos sem sentido algum" (NEVES, 1995, p. 47).

Em meados dos anos 90, segundo Ribeiro (2001), iniciou-se a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cujo objetivo principal era adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da álgebra em diversos campos.

Mas afinal, porque é tão importante a aprendizagem da álgebra elementar?

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), uma das principais finalidades do ensino da matemática é a construção da cidadania.

Para que isso seja possível, de acordo com tais parâmetros, deve-se propiciar ao aluno meios para que o mesmo possa:

◆ fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);

◆ resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa e utilizar os conceitos e procedimentos matemáticos bem como os instrumentos tecnológicos disponíveis.

Acreditamos que a álgebra elementar é uma ótima ferramenta no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio e processos, bem como na solução de problemas matemáticos e de outras áreas da ciência, tais como Física, Biologia, dentre outras. Além disso, segundo os PCN, "o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização" (BRASIL, 1998, p. 115).

Segundo Castro (2003), hoje o ensino da álgebra faz parte da vida escolar desde o Ensino Fundamental. Ao mesmo tempo, vem apresentando tantos fracassos que passou a ser também um elemento de exclusão, uma vez que grande parte dos alunos não consegue compreendê-la e acabam realizando as atividades mecanicamente sem ter um entendimento do que estão efetuando, transformando a álgebra num simples aglomerado de sinais, símbolos e regras.

O pesquisador americano James Fey chama nossa atenção para o fato de que:

> Na matemática escolar atual os estudantes empregam um tempo enorme em tarefas envolvendo variáveis, enquanto nomes literais para números desconhecidos, e com equações e inequações, que impõem condições nestes números. O ensino de álgebra enfatiza demais os procedimentos formais de transformação de expressões simbólicas e resolução de equações que buscam determinar o valor desconhecido de variáveis (FEY, 1990 apud CASTRO, 2003).

Talvez por isso alguns alunos afirmem não gostar de matemática. Polya (1994), no prefácio de seu livro *A arte de resolver problemas,* escreveu: "A matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso [...] Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a matemática [...] Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la." Essa afirmação de Polya, apesar de, na nossa opinião, não retratar a realidade, nos remete a uma reflexão quanto ao modo como ensinamos matemática, em especial os conceitos algébricos.

É possível que muitas das dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem da álgebra elementar sejam resultado de ensinarmos apenas procedimentos e regras, limitando sua capacidade de compreender os conceitos, as representações e as atividades que são importantes neste domínio do conhecimento. Enfatizamos os procedimentos em detrimento ao significado, e isso muitas vezes em demasia.

Mas o que nós sabemos sobre como nossos alunos produzem significado para a álgebra? Se é que para eles a álgebra – operações com expressões algébricas e propriedades – tem algum significado.

Diversos autores, dentre eles as pesquisadoras Booth (2003) e Chalouch e Kieran (1996), nos indicam que poucas vezes, ou quase nunca, o aluno constrói significado para as operações que realiza com expressões algébricas no Ensino Fundamental. Acreditamos que muitos erros cometidos pelos alunos em cálculos algébricos provêm de associações e construções mal compreendidas em cálculos aritméticos.

Na nossa prática docente observamos, por exemplo, que muitas vezes o aluno, logo após ter-lhe sido ensinado a adição de termos algébricos, opera-os sem aparente dificuldade, mas ao serem ensinados os procedimentos que definem a operação de multiplicação entre eles, passam a fazer a adição usando esta mesma regra. A afirmação é exemplificada pela seguinte situação: o aluno, ao efetuar 4ab + 12ab antes de lhe ser ensinado os procedimentos da multiplicação de expressões algébricas indica como resposta 16ab, porém após o ensino da operação multiplicação, por exemplo, $(2b + 3a).(4b + 2a) = 8b^2 + 4ab + 12ab + 6a^2 =$

$8b^2 + 16a^2b^2 + 6a^2$, obtém $16a^2b^2$ como resposta para $4ab + 12ab$.

Outro exemplo de erro é quando o aluno efetua o quadrado da soma de dois termos, ou o quadrado da diferença de dois termos. É comum aparecerem respostas do tipo $(2b + 3a)^2 = 4b^2 + 9a^2$.

Erros como estes são comuns e, freqüentemente, o professor não sabe como lidar com este tipo de dificuldade de compreensão por parte de seus alunos.

Acreditamos que a dificuldade encontrada pelos alunos na compreensão dos assuntos estudados em álgebra elementar pode estar relacionada, dentre outros fatores, ao modo como tais assuntos são abordados na sala de aula. E, neste caso, as concepções que os professores possuem da álgebra influenciam diretamente o ensino e a aprendizagem dos conceitos algébricos. Na verdade, "[...] o modo de ensinar a matemática é produzido por diferentes práticas discursivas. Isso significa que cada professor/a subjetiva seu/sua aluno/a de acordo com seu modo de ver a matemática e conceber seu ensino. *Geralmente, o/a professor/a utiliza o discurso no qual foi constituído ou o qual julga ser o 'verdadeiro'.*" ( LARA, 2003, p. 14, grifo nosso).

Ou seja, se não tivermos contato com outras abordagens metodológicas e concepções a respeito do ensino e aprendizagem da álgebra elementar e, mais, se não acreditarmos numa outra forma de abordar tal assunto, continuaremos a reproduzir os modelos que talvez sejam equivocados.

## 1.2 Problemática e objetivos

Muitos pesquisadores têm contribuído para compreendermos melhor o processo de ensino e aprendizagem da álgebra elementar visando progressos no ensino da mesma. Algumas dessas contribuições serão apresentadas no próximo capítulo. Entretanto, na literatura não encontramos nenhuma abordagem didática que julgássemos adequada à realidade na qual pretendíamos atuar e, que contivesse todos os elementos considerados por nós imprescindíveis. Pensávamos que uma boa abordagem dos assuntos algébricos necessitaria contemplar, concomitantemente, a resolução de problemas, a oportunidade do aluno se deparar com representações diversas das expressões algébricas para que pudesse buscar justificativas e produzir significados para as mesmas e, mais, que ele pudesse criar uma representação própria para solucionar problemas e produzir justificações para estas representações, conforme aponta Lins (1994a).

Daí porque, quando iniciamos o curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino da Matemática, nos propusemos a estudar e a apresentar uma proposta para o ensino e aprendizagem de álgebra elementar – em especial das operações entre expressões algébricas – primando pela resolução de problemas e pela troca de informações e conhecimentos entre os alunos visando a produção de significado para a atividade algébrica realizada na escola.

Assim sendo, esta pesquisa tem por objetivo principal a elaboração, justificação, planejamento, implementação e validação de uma proposta didática para o desenvolvimento de um ensino que promova a compreensão das operações básicas com expressões algébricas no Ensino Fundamental, mais especificamente, adição, subtração e multiplicação.

São também objetivos desta pesquisa, estudar a produção de significados para as operações com expressões algébricas e sua utilização para representar e solucionar situações-problema, além da elaboração de atividades específicas visando desenvolver no aluno a compreensão de algumas propriedades básicas necessárias no desenvolvimento das operações com expressões algébricas no Ensino Fundamental.

Com os objetivos definidos, determinamos nosso foco de investigação:

*É possível desenvolver um ensino que promova a produção de significados para os procedimentos algébricos no Ensino Fundamental?*

A partir desse foco outras questões surgiram e também são objetos de estudo em nossa pesquisa:

◆ Que significados a álgebra elementar, ensinada nas escolas no Ensino Fundamental, tem para os alunos?

◆ Que preocupações devemos ter, enquanto educadores, com a abordagem dos tópicos algébricos no Ensino Fundamental, de forma a promover a compreensão das operações realizadas e não apenas manipulação simbólica?

◆ Materiais manipulativos podem auxiliar na compreensão de conceitos algébricos?

Nessa perspectiva, a preocupação é desenvolver uma proposta didática no sentido de propiciar que os alunos produzam significados para as operações realizadas com expressões algébricas e que desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente. Assim sendo, o desenvolvimento das habilidades "técnicas" presentes no cálculo algébrico será uma conseqüência desses dois objetivos e não o objetivo principal.

### 1.3 A escolha da abordagem metodológica

Uma vez definida a questão norteadora e as questões adjacentes de nossa pesquisa deparamo-nos com a seguinte problemática: qual a abordagem metodológica mais apropriada para nos aproximarmos melhor da realidade do ensino e aprendizagem, da dinâmica de sala de aula, do processo de produção do conhecimento?

Tendo em vista os fatores motivadores desta pesquisa, apresentados nos itens anteriores, consideramos, em concordância com Menga Lüdke e Marli André (1986), necessária uma abordagem qualitativa para que a pesquisa pudesse contemplar um planejamento aberto e flexível e focalizar a realidade de forma complexa e contextualizada de modo que o pesquisador pudesse interagir com os pesquisados observando seu comportamento, como ocorrem as trocas entre eles, como se dá a produção de significados e das justificações.

Assim sendo, a opção foi por uma abordagem qualitativa na forma de *estudo de caso,* por oferecer um grande potencial para conhecer e compreender os problemas escolares, em especial os enfocados neste estudo.

Segundo Menga Lüdke e Marli André (1986), o caso precisa ser bem delimitado, com seus "contornos claramente definidos no desenrolar do estudo". E mais:

> O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular. [...] O interesse, portanto, incide naquilo que ele tem de único, de particular, mesmo que posteriormente venham a ficar evidentes certas semelhanças com outros casos ou situações. Quando queremos estudar algo singular, que tenha um valor em si mesmo, devemos escolher o estudo de caso (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 17).

Segundo as autoras, o estudo de caso caracteriza-se pelo envolvimento direto do pesquisador com a situação encontrada para a obtenção de dados, por enfatizar mais o processo do que o produto e por preocupar-se em retratar a perspectiva dos participantes.

Lembramos que "esse tipo de abordagem (estudo de caso) enfatiza a complexidade natural das situações, evidenciando a inter-relação dos seus componentes" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 18). Sendo assim, pensamos em realizar o trabalho com uma única turma por considerarmos necessária, mediante a abordagem metodológica escolhida, a observação direta dos alunos pesquisados durante o desenvolvimento da proposta pedagógica aplicada. Consideramos de suma importância a interação do pesquisador com os pesquisados mediante a observação e análise das conjecturas e justificações propostas pelos alunos no decorrer das discussões, de suas expressões corporais, de suas interações, das dúvidas que se apresentaram no decorrer do processo, dos significados produzidos pelos alunos em cada etapa do processo. Enfim, acreditamos que o pesquisador necessita se manter constantemente atento a novos elementos que possam emergir como importantes durante o estudo. Essa característica se fundamenta no pressuposto de que o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente. Essa possibilidade de observação efetiva, dos variados fatores que podem se apresentar no decorrer do estudo, talvez não fosse tão rica se tomássemos como âmbito de estudo mais de uma turma ou um número elevado de participantes.

Além da interação com os pesquisados no decorrer do estudo, pensamos ser importante um conhecimento mais detalhado da realidade social, econômica, familiar e escolar dos alunos pesquisados, por acreditarmos que esse conhecimento nos auxilie na compreensão de seus atos durante o processo de aprendizagem.

Optamos por fazer o estudo de caso com *uma* turma do segundo ano do terceiro ciclo (equivalente à 7ª série) do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental Wenceslau Fontoura, na periferia da cidade de Porto Alegre. Dois motivos levaram à escolha da escola. Primeiro porque é uma representante do ensino público, no qual estuda a maioria da população brasileira, o que aproxima mais nosso estudo da realidade escolar do país. Respeitando o primeiro motivo, o segundo é que se trata da escola em que a autora deste trabalho atua como professora de matemática e também porque houve interesse e aceitação da proposta de trabalho pela equipe diretiva. A escolha da turma foi pensada por ser esse o ano ciclo (série) onde se ensinam os conceitos algébricos focalizados em nosso estudo.

### 1.4 Conhecendo um pouco da realidade dos alunos pesquisados...

A falta de política habitacional popular dos sucessivos governos brasileiros e a crescente crise econômica do país tem forçado milhões de famílias a viverem em condições sub humanas de moradia[2].

Com o êxodo rural, cada vez mais famílias dirigem-se aos grandes centros em busca

[2] Informações obtidas através do site do IBGE http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/indicadoresminimos/default_minimos.shtm

de emprego digno e moradia, porém a realidade que encontram é geralmente adversa.

Porto Alegre, como todas as outras capitais deste país, sofre os mesmos problemas.

Dezenas de áreas de risco ao longo da cidade são ocupadas por famílias em busca de moradia e trabalho.

Nesta realidade, desde 1992, o Departamento Municipal de Habitação (DEMHAB) tem negociado a remoção das famílias moradoras de áreas de risco para loteamentos criados para seu assentamento.

O primeiro destes loteamentos criados pela Prefeitura Municipal de Porto Alegre foi o Wenceslau Fontoura[3], em 1992.

Localizado na região Nordeste da cidade, próximo ao município de Alvorada, o loteamento foi previsto para o assentamento de mais de mil famílias. As primeiras a serem removidas para lá foram as famílias da Vila Sertório, conhecida como Vila Tripa, e as da Vila Riacho Doce.

A Vila Tripa era assim denominada por estender-se ao longo de uma avenida, próxima ao Aeroporto Salgado Filho.

Esta vila era habitada principalmente por famílias que viviam da coleta do papel e biscateiros. Assim sendo, ao mesmo tempo em que ocorreu a remoção também foi construído um galpão de separação de lixo reciclável, a pedido dos moradores.

Entre os moradores do novo loteamento havia muitas crianças e adolescentes que nunca tinham estudado, ou que haviam repetido várias vezes, ou ainda evadidos das escolas. Muitas delas passavam o dia vendendo gêneros ou esmolando pelas ruas da cidade.

Além da construção do galpão de reciclagem, também foi uma exigência dos moradores, a abertura de uma Escola Municipal que pudesse atender as crianças e adolescentes daquela comunidade, levando em consideração suas peculiares características.

---

[3] Este histórico foi baseado em um texto elaborado pelo coletivo de professores da Escola Municipal Wenceslau Fontoura durante estudos realizados nas reuniões pedagógicas no ano de 2003. HISTÓRICO: O surgimento do Loteamento Wenceslau Fontoura e da Escola Municipal WF. Porto Alegre, 2003, 3 p.

Em 1993, foi criada a Escola Municipal de 1º Grau Wenceslau Fontoura, na categoria de escola aberta, ou seja, destinada a meninos e meninas de rua. Para esta escola foram convidados professores que, junto com a Secretaria Municipal de Educação, deveriam elaborar uma proposta pedagógica diferenciada para atender à demanda local.

Assim nasceu a escola que esteve localizada em um prédio provisório de madeira por dois anos e, depois, foi transferida para o prédio onde funciona atualmente.

No final de 1994, com a chegada de dezenas de novas famílias vindas de outras áreas de risco, o perfil da população do Loteamento Wenceslau Fontoura começou a modificar-se rapidamente.

As condições de moradia eram – e continuam sendo – precárias para os que não receberam lotes da prefeitura e foram ocupando espaços irregulares. Moram em casebres sem condições básicas de saneamento.

Os primeiros moradores, que receberam casas prontas para habitação, vivem em condições um pouco melhores, mas há constante venda destas casas. A maioria dos moradores originais deste loteamento já foram embora.

Toda essa nova realidade fez com que se criasse, pouco a pouco, uma demanda por vagas para alunos em idade regular de escolarização. Muitos dos primeiros alunos, que se caracterizavam por serem, na maioria, meninos e meninas de rua, mudaram-se para outros locais, deixando a escola para freqüentarem outras, ou simplesmente evadiram-se.

Com essa nova realidade na comunidade, a escola foi modificando sua estrutura interna procurando se adaptar e aproximar-se mais de uma escola regular, porém tendo uma proposta diferenciada.

Com a inauguração, em 1996, do novo prédio da escola e com o aumento do número de vagas, a escola passa a contar com 65% de alunos com idades entre 6 e 8 anos[4].

[4] Dados extraídos das planilhas da secretaria da escola.

Neste mesmo período, a rede municipal de ensino adotou uma proposta pedagógica baseada nos Ciclos de Formação, a qual foi também implantada na Escola Municipal Wenceslau Fontoura.

Atualmente é uma escola regular e continua adotando a proposta pedagógica por Ciclos de Formação. Tal proposta está organizada em três ciclos com o tempo de três anos cada. Sendo:

> I CICLO:
> Este ciclo caracteriza-se como um período em que aparecem mudanças significativas na interação social do educando, especialmente daqueles que nunca freqüentaram uma escola, por isso o trabalho no ciclo deve propiciar uma articulação estreita com a educação infantil.[...] Chamamos a atenção para o fato de que este ciclo se constitui em uma etapa do processo curricular tendo cada tempo-ano peculiaridades construídas pelo coletivo em consonância com os princípios globais do ciclo e da Escola.
>
> II CICLO
> Torna-se uma etapa intermediária e de transição entre o I e o III ciclo da Educação Básica. Por isso este ciclo deve dar continuidade e aprofundar o ciclo anterior acrescentando-se um conjunto de novos conhecimentos, tais como as noções de cultura e língua estrangeira bem como o estudo geo-político-histórico., ampliando-se as noções próximas do meio para compreender questões de ordem municipal, estadual, nacional e internacional (não necessariamente nesta ordem). Incorpora-se aí, gradualmente, a lógica da conquista da autonomia pessoal e social na relação do educando com o conhecimento e com os demais segmentos da escola.
>
> III CICLO
> O III ciclo completa e torna-se uma etapa de culminância da Educação Básica ao mesmo tempo em que é a transição para o ensino de 2º grau. Assim, continua-se o aprofundamento e a sistematização dos conhecimentos trabalhados nos ciclos anteriores, evidenciando-se a concepção politécnica e suas diferentes dimensões históricas e manifestações na sociedade tecnológica moderna, embora essa noção perpasse todo o processo pedagógico desde o 1º ano do 1º ciclo.[...] Concluindo, o educando sai da Educação Básica como sujeito detentor de uma cultura geral razoável e com destreza de pensamento e comunicação (SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE PORTO ALEGRE, 1996. p. 20-21).

Quanto à organização física, atualmente, a escola possui 22 salas de aula, laboratório de informática, sala de vídeo, laboratório de aprendizagem, refeitório, brinquedoteca e biblioteca.

As salas de aula do terceiro ciclo estão organizadas em salas ambientes (figuras 1.1 e 1.2), isto é, os alunos, na troca de períodos, se deslocam até a sala correspondente à disciplina que terão aula.


Figura 1.1 – Sala ambiente de matemática – entrada

Figura 1.2 – Sala ambiente de matemática – interior

Essa dinâmica de salas ambiente, que pressupõe uma relativa autonomia dos alunos, favorece a organização de um ambiente de aprendizagem: livros e materiais ficam ali guardados à disposição dos alunos e do professor, cartazes produzidos ficam expostos, mesas e cadeiras são dispostas segundo a dinâmica das atividades propostas. Essa organização iniciou-se em 2003, oriunda de uma proposta dos professores atuantes no ciclo em questão.

A escola organizada por ciclos não prevê retenção do aluno ao término do ano letivo, exceto em casos muito especiais, e equipara a carga horária de todas as disciplinas. Sendo assim, a disciplina de matemática no terceiro ciclo possui, na escola em questão, uma carga horária de três períodos semanais.

No que se refere especificamente aos alunos da turma pesquisada cabe salientar que no grupo de alunos pesquisados, 78% têm idade entre 14 e 15 anos, conforme mostram os gráficos 1.1 e 1.2.

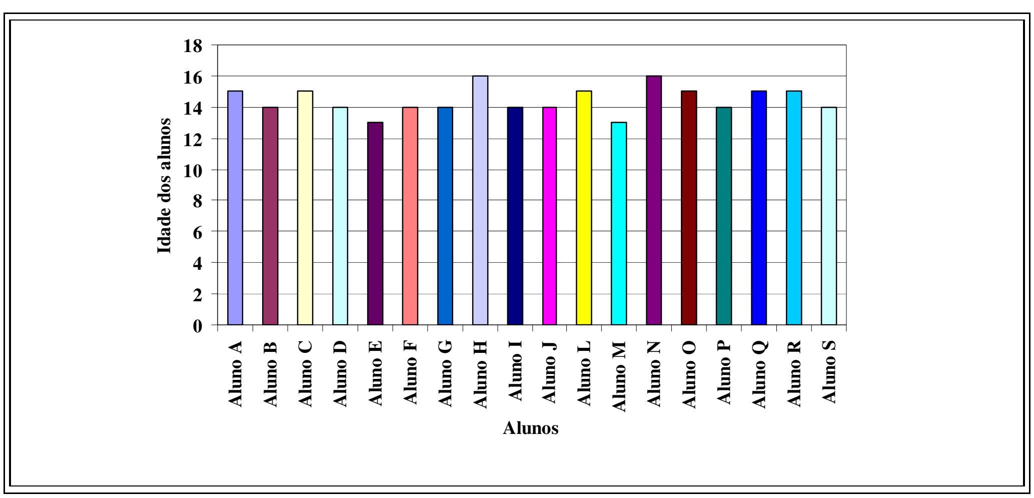



Gráfico 1.1 – Idade dos alunos

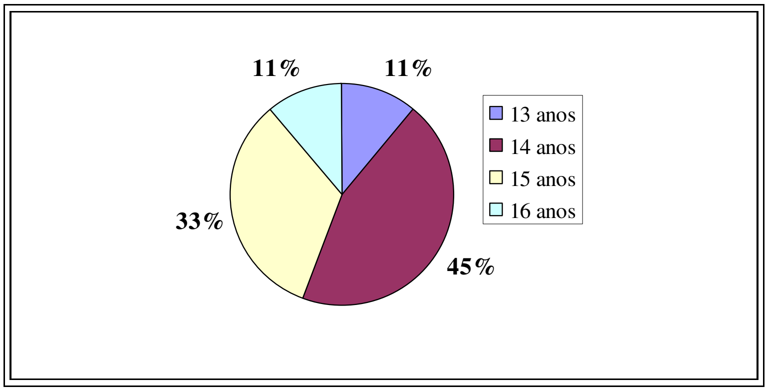



Gráfico 1.2 – Idade dos alunos (porcentagem)

Pela análise das datas de nascimento dos alunos verificou-se que há um percentual considerável de alunos que estão na idade esperada para cursar o segundo ano do terceiro ciclo (7ª série), 11% possuem 13 anos, 45% possuem 14 anos e há alunos com idade acima do esperado para este ano ciclo.

Dos 18 alunos que participaram da pesquisa[5], 44% são do sexo feminino e 56% do sexo masculino. Trata-se de uma turma que estuda no período da tarde, no horário das 13 horas e 15 minutos às 17 horas e 45 minutos.

Mesmo com toda a infra-estrutura e utilizando-se de uma proposta pedagógica diferenciada (que busca a inclusão dos alunos, a diminuição da evasão, que equipara a carga horária de todas as disciplinas, etc.), a escola enfrenta alguns problemas[6], tais como:

- grande rotatividade de alunos;
- dificuldade de comunicação entre os saberes dos alunos e dos professores;
- infreqüência ;
- agressividade verbal e física entre os alunos;
- alunos com dificuldades de aprendizagem.

Estes problemas também estão muito presentes na turma que participou da pesquisa. No entanto, tais problemas não são exclusivos desta turma ou da Escola Municipal Wenceslau

---

[5] Informações sobre gênero e idade de cada aluno constam no anexo A deste estudo.

[6] Informações extraídas das atas da reunião de avaliação da escola no ano de 2004.

Fontoura. Carmen Eckhardt e Cleuza Santos (2004) já haviam chamado atenção para esta realidade que parece ser da maioria das escolas municipais:

> Nossas escolas estão localizadas em bairros periféricos da cidade de Porto Alegre, na sua grande maioria, a violência urbana faz parte do cotidiano dessas comunidades escolares; além disso, temos alunos itinerantes, muitos apresentando dificuldades de aprendizagem em face da estrutura familiar, péssimas condições de alimentação, moradia, saúde entre outros aspectos (ECKHARDT, 2004).

Observando esta realidade, não se pode pensar em um ensino de matemática que aponte somente para os conteúdos matemáticos. Numa prática inclusiva, como é sugerida pela Secretaria Municipal de Educação de Porto Alegre, tendo como público os alunos de classes populares, sente-se a necessidade de repensar o saber da escola e de reconhecer os sujeitos que dela fazem parte.

Assim sendo, o trabalho docente precisa ter uma interlocução necessária e diferenciada em relação aos saberes já escolarizados e uma postura investigativa, trazendo para a sala de aula as vivências e culturas dos alunos, na busca de significados para suas aprendizagens.

Segundo o princípio 39 da Cartilha Princípios da Escola Cidadã:

> O currículo deve buscar uma proposta político-pedagógica progressista, voltada para as classes populares na superação das condições de dominação e que estão submetidas, propiciando uma ação pedagógica dialética, em que se efetiva a construção do conhecimento e a relação entre aprendizagem e desenvolvimento pela comunidade escolar, tanto da(o) professora(or), da(o) aluna(o), quanto do(a) pai (mãe) e do(a) funcionário(a), através de uma atitude interdisciplinar, viabilizada pela “curiosidade científica”, de forma dinâmica, criativa, crítica, espontânea, comprometida, autônoma, contextualizada, investigativa, prazerosa, desafiadora, original e lúdica (AMARO, 1996).

Percebe-se também que a dificuldade dos alunos em compreender conceitos matemáticos, incluindo os algébricos, não é exclusividade desta escola ou desta realidade.

Acreditamos que este estudo de caso trata de um caso singular mas que pode apresentar semelhanças com outros casos, em outras realidades.

Apresentamos no próximo capítulo alguns referenciais teóricos referentes ao ensino e aprendizagem da álgebra elementar na Educação Básica e que influenciaram e balizaram a elaboração de nossa proposta didática.

# CAPÍTULO 2: REFERENCIAIS TEÓRICOS

Muitas pesquisas em Educação Matemática confirmam a dificuldade dos alunos em apropriar-se das noções algébricas ensinadas na escola e propõem orientações para o desenvolvimento de um trabalho tendo em vista a possibilidade de superar estas dificuldades. Essa pesquisa é influenciada em particular pelos trabalhos de Dietmar Küchemann (1981), Lesley Booth (2003), Sônia Ursini e María Trigueros (2005), Zalman Usiskin (2003), Luciano Meira (2003), Rômulo Campos Lins e Joaquim Gimenez (1997), George Polya (1994), Iraci Müller (2000), Gérard Vergnaud (1983; 1994) e Henri Picciotto e Anita Wah (1993), os quais trazem muitas contribuições que estimularam e nortearam o desenvolvimento desta pesquisa.

## 2.1 Comentários sobre a evolução histórica da álgebra

Uma das dificuldades que os alunos revelam no estudo da álgebra elementar é a interpretação e a utilização das letras em expressões algébricas.

Pensamos que compreender como o pensamento algébrico se desenvolveu historicamente possa nos ajudar a compreender melhor algumas dificuldades que os alunos apresentam em relação ao uso das letras em álgebra, principalmente por acreditarmos que existem semelhanças entre o desenvolvimento histórico do pensamento algébrico e o desenvolvimento do pensamento algébrico de nossos alunos.

Conforme Boyer (1974), a palavra *álgebra* é uma variante latina da palavra árabe *aljabr* usada no título do livro *Al-jabr wa'l muqabalah*, escrito por Mohammed ibn-Musa al Khwarizmi, um matemático persa nascido por volta de 800 d.C. em Khwarizmi, atualmente no Uzbequistão, e que viveu em Bagdá. O livro tratava de equações e o título referia-se à idéia de imaginar uma equação como balança em equilíbrio, considerada como um sistema para resolver problemas matemáticos que envolvam números desconhecidos.

De acordo com os apontamentos de Aaboe (1984, p. 37), por volta de 1700 a.C., os matemáticos babilônios já eram excelentes calculistas e mostravam uma forte preferência pelo que chamaríamos hoje de álgebra e teoria dos números. Segundo o autor, nos tabletes babilônios encontramos soluções de equações do primeiro e segundo graus. As equações quadráticas eram apresentadas sob a forma de texto, freqüentemente equivalente a um sistema de duas equações com duas incógnitas, tal como $x + y = a$ e $xy = b$ onde vemos que $x$ e $y$ são soluções de $z^2 - az + b = 0$.

> Na matemática da Babilônia os problemas são enunciados de tal maneira que, quando traduzidos para a notação algébrica moderna, surgem expressões extremamente complicadas, com parênteses encaixados, e não se pode deixar de ficar impressionado com a habilidade dos babilônios, que conseguiam reduzir tais expressões a formas padrões de equações, sem a ajuda de nossas técnicas algébricas. (AABOE, 1984, p. 38).

Outra grande cultura matemática conhecida é a egípcia.

Conforme Boyer (1974), o mais famoso papiro egípcio sobre matemática é o Papiro Rhind (ou Ahmes) produzido por volta de 1650 a.C., um texto matemático contendo 85 problemas da vida cotidiana e suas resoluções. Nele muitos desses problemas são do tipo aritmético, mas pode-se perceber que os egípcios resolviam problemas que hoje são designados como problemas de pensamento algébrico. De acordo com Boyer (1974), esses problemas não se referiam a objetos concretos, específicos, nem exigiam operações entre números conhecidos. Para solucionar alguns problemas era solicitado o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + b = c$, em que $a$, $b$ e $c$ são conhecidos e $x$ é desconhecido. Neste caso, $x$ assumindo o papel de incógnita que era chamada por eles de *aha*.  Notamos aqui a presença de um certo simbolismo para incógnita.

Conforme Eves (1995), o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao longo de três estágios. Primeiro a *álgebra retórica* (ou verbal), em que os argumentos da resolução de um problema são descritos sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir, a *álgebra sincopada,* em que se adotam abreviações de palavras e, finalmente, a *álgebra simbólica,* em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos: "Uma tal divisão arbitrária do desenvolvimento da álgebra em três estágios é naturalmente uma simplificação excessiva; mas serve como primeira aproximação ao que aconteceu" (BOYER, 1974, p. 132). Cabe ressaltar que tanto a álgebra do Egito como a da Babilônia era retórica.

Pensamos que é semelhante o processo através do qual o aluno desenvolve seu pensamento algébrico: primeiro de forma retórica, utilizando-se de sua linguagem corrente, e só depois utilizando uma linguagem mais simbólica[7]. O que estamos querendo dizer é que o aluno, de forma semelhante ao que ocorreu historicamente, desenvolve um pensamento algébrico antes mesmo de desenvolver ou usar um certo simbolismo para expressar esse pensamento.

Segundo Boyer (1974), na obra de Diofante de Alexandria, por volta de 250 d.C., foi encontrada pela primeira vez a utilização de símbolos algébricos, sinais especiais para a incógnita, potências da incógnita até expoente seis, subtração, igualdade, inversos, abreviações e substituições. China e Índia também contribuíram para o desenvolvimento da álgebra, trabalhando em procedimentos de resoluções para equações algébricas. Os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas para o desenvolvimento da álgebra.

O autor comenta que na Europa Ocidental a maior parte da álgebra permaneceu retórica até o século XV e, embora a aparição da álgebra simbólica se desse na Europa Ocidental no século XVI, somente pela metade do século XVII esse estilo acabou se impondo.

---

[7] Entretanto, *não* consideramos que o desenvolvimento da produção de significados e da utilização de linguagem simbólica estejam associados aos estágios de desenvolvimento intelectual conforme afirma Harper (1987 apud Lins & Gimenez, 1997, p. 92) de que "poderíamos classificar a álgebra, em seus vários momentos históricos, em retórica (apenas palavras), sincopada (alguma notação especial, em particular palavras abreviadas) e simbólica (apenas os símbolos e sua manipulação)" e que para essa classificação "de retórico a sincopado e a simbólico haveria um correspondente desenvolvimento intelectual".

No entanto, conforme Boyer (1974), a álgebra só começa a se constituir como um ramo específico da matemática no Renascimento, desenvolvendo-se plenamente na Europa moderna e contemporânea. No início da era moderna, os matemáticos realizaram mudanças nas notações algébricas, passaram a usar letras para representar as incógnitas e adotaram alguns símbolos (**+** para adição, **–** para subtração e o sinal **=** para igualar os termos de uma equação).

Eves (1995) nos diz que François Viète (1540-1603) foi um dos que mais se destacaram no período. Adotou o uso de vogais para representar uma quantidade supostamente desconhecida ou indeterminada, e consoantes representando uma grandeza ou número suposto conhecido ou dado, fazendo, assim, uma distinção entre o conceito de parâmetro e a idéia de uma quantidade desconhecida. No entanto, pensava-se em *parâmetro* e *incógnita* como segmentos e não como números.

Segundo o mesmo autor, Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução do conceito de função ao utilizar instrumentos de medidas aprimorados em suas experiências, expressando relações funcionais em palavras e em linguagem de proporção. Descartes instituiu uma relação de dependência entre quantidades variáveis usando uma equação em $x$ e $y$, possibilitando o cálculo de valores de uma variável a partir dos valores da outra.

As primeiras contribuições efetivas para a construção do conceito de função surgiram com os trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), que introduziram as palavras: constante, variável e função. Newton estabeleceu pela primeira vez um termo específico para função, ao utilizar o nome de *fluentes* para representar algum relacionamento entre variáveis. Leibniz introduziu a palavra *função* ao se referir a qualquer quantidade variando ponto a ponto de uma curva: as coordenadas de um ponto, a inclinação e o raio de curvatura de uma curva. “Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra ‘função’, praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje” (BOYER, 1974, p. 297).

Conforme Castro (2003), corroborando os apontamentos históricos de Boyer (1974) e Eves (1995), a álgebra tal como a conhecemos, com seu simbolismo e regras, é bastante recente, embora o pensamento algébrico esteja presente na construção da matemática desde os primórdios, nas contribuições dos antigos povos que iniciaram a construção desta ciência, como por exemplo, no pensamento dos povos da Mesopotâmia, da China, dos árabes, passando pela civilização grega, romana, dentre outras.

Ainda, de acordo com o referido autor, o crescente processo de utilização de simbolismo na álgebra propiciou tantas facilidades em seu ensino que, pouco a pouco, a álgebra deixou de ser privilégio de poucos estudiosos dotados para se tornar uma disciplina que é considerada requisito para a formação do cidadão comum e, como tal, é ensinada em nossas escolas desde o Ensino Fundamental. A essa álgebra, ensinada e estudada na Escola Básica, denominamos, álgebra elementar. Neste trabalho, de agora em diante, quando mencionarmos ensino da álgebra estaremos nos referindo à álgebra elementar.

Entendemos que um dos conteúdos abordados na álgebra elementar são as operações básicas e regras para manipular expressões algébricas. Consideramos o ensino e o estudo da álgebra úteis na Escola Básica porque permite, através do desenvolvimento do pensamento genérico e da abstração, um primeiro passo para o estudo sistemático das propriedades dos números reais e das estruturas algébricas.

## 2.2 A utilização das letras em álgebra

Ao analisarmos a história da matemática – especialmente o desenvolvimento da álgebra através dos tempos – percebemos que a construção dos conceitos de variável e de incógnita não foram tão simples e a utilização das letras em álgebra não passou a existir desde o princípio.

Na atualidade, Booth (2003) nos chama a atenção para o fato de que o conceito de variável é possivelmente um dos aspectos mais importantes no estudo da álgebra. Para ela, uma das maiores diferenças entre aritmética e álgebra reside na utilização de letras como indicadoras de valores. As letras também aparecem em aritmética, mas de modo diferente. A letra *m*, por exemplo, pode ser utilizada em aritmética para representar "metros", mas não para representar números (a quantidade de metros, por exemplo), como em álgebra.

Booth (2003, p. 31) afirma que os alunos têm uma forte tendência em considerar as letras como representação de valores específicos únicos, como em "$x + 3 = 8$", e não números genéricos ou variáveis como um "$x + y = y + x$". Na aritmética, os símbolos que representam quantidades significam, sempre, valores únicos.

Na década de 70 Küchemann realizou uma investigação com alunos de diferentes séries da escola secundária britânica, com a intenção de identificar as formas de uso, pelos alunos, das letras em álgebra. Tal estudo fazia parte do projeto CSMS – Concepts in Secondary Mathematics and Science[8] – e consistia de um teste constituído por 51 itens. Os itens incluíam procedimentos de substituição, simplificação, construção, interpretação e solução de equações.

Utilizando uma classificação desenvolvida originalmente por Collis (1975, apud KÜCHEMANN, 1981), Küchemann identificou seis diferentes caminhos de interpretação e uso das letras nas respostas dos alunos. Segue abaixo uma breve descrição de cada uma das categorias:

- Letra como valor: A letra recebe um valor numérico desde o início.

Exemplo: "Simplifique: $7b + 5c - b$". Os alunos atribuem para as letras um valor

---

[8] O referido projeto (CSMS) foi coordenado por Kathleen Hart e realizou-se entre 1974 e 1979, na Inglaterra. Em Küchemann (1981) encontramos publicados os resultados dos estudos de Dietmar Küchemann.

particular, por exemplo, correspondente à posição que ocupa no alfabeto; $b = 2$ e $c = 3$.

◆ Letra não utilizada: A letra é ignorada ou sua existência é reconhecida sem que tenha um significado para o aluno.

Exemplo: "Simplifique: $2b + 5c - 3b$". Os alunos respondem 4, ignorando as letras e operando apenas com os números presentes na expressão.

◆ Letra como objeto: A letra é considerada como uma abreviação de um objeto ou como um objeto concreto em si mesma.

Exemplo: "Simplifique $9m + 3b - 5m$". Os alunos consideram, por exemplo, como $m$ sendo maçãs e $b$, bananas.

◆ Letra como uma incógnita específica: A letra é considerada como um número específico, mas desconhecido, podendo ser operada diretamente.

Exemplo: "O que você pode dizer sobre $m$, se $3m - 5 = 13$". Os alunos encontram o valor de $m$ resolvendo a equação ou por tentativa e erro.

◆ Letra como um número generalizado: A letra é vista como representando, ou pelo menos sendo capaz de assumir vários valores, ao invés de somente um.

Exemplo: "Parte desta figura não está desenhada. Há $n$ lados, cada um com comprimento 3. Escreva a expressão algébrica que representa o comprimento de n lados (perímetro)". Através da lei de formação $f(n) = 3n$, o aluno verifica que o perímetro varia em função do número de lados.

◆ Letra como variável: A letra é vista como representante de um domínio de valores não específicos em uma relação sistemática existente com outro conjunto de valores, isto é, os diversos valores que uma letra pode assumir estão relacionados com os diversos valores de uma outra letra.

Exemplo: "Qual expressão é maior $3n$ ou $n + 3$"? Atribuindo valores para $n$, o aluno compara as duas expressões; os dois conjuntos de valores, um representado por $3n$ e o outro por $n + 3$.

Segundo Küchemann (1981), poucos alunos de 13 a 15 anos foram capazes de considerar as letras como números generalizados, um número ainda menor foi capaz de interpretar letras como variáveis. Comparando *letra como uma incógnita específica* e *letra como um número generalizado*, um maior número de alunos interpretou as letras como uma incógnita específica ao invés de letra como um número generalizado. No entanto, a maioria dos alunos tratou as letras como *objeto* ou *letra não utilizada*

De acordo com o pesquisador, parece sensato organizar as aulas para os alunos de forma que os diferentes usos das letras em álgebra possam ser facilmente entendidos por eles. Entretanto, como o autor aponta, não é uma tarefa fácil de entender, por exemplo, a diferença entre o uso de letras como objetos e o uso de letras para representar quantidade de objetos. São nesses conflitos que o aluno passa a sentir a necessidade de organizar seus pensamentos e, é desse modo, que ele passa para um nível mais elevado.

As pesquisadoras Sônia Ursini e María Trigueros também são defensoras da teoria de que para uma aprendizagem satisfatória dos conceitos algébricos, é necessário, num primeiro momento, promover a compreensão das diferentes utilizações do conceito de variável (letra). Porém, diferentemente de Küchemann, acreditam serem três as diferentes utilizações para letras, do ponto de vista algébrico: letra como *incógnita*, como *generalização de número* ou como *variável funcional.*

De acordo com Trigueros e Ursini (2005), "um uso aceitável da álgebra elementar requer uma compreensão adequada do uso de variável, conceito que é fundamental para trabalhar com tópicos matemáticos mais avançados." (tradução nossa).

Entretanto, para estas pesquisadoras, o conceito de variável é muito versátil, sendo quase impossível de definir com precisão. Isso acarreta uma dificuldade de grande parte dos alunos para apropriar-se da sua essência e desenvolver a capacidade de usá-lo adequadamente.

É lembrado pelas autoras que cada um dos três distintos usos de variável[9] envolve seus próprios obstáculos didáticos e epistemológicos e que os estudantes têm dificuldades de trabalhar com cada um deles. Além disso, torna-se bastante difícil para os alunos desenvolver habilidades para reconhecer e empregar os diferentes usos de variável, o que gera dificuldades para o aprendizado da álgebra.

As pesquisadoras observaram que para poder resolver os exercícios e problemas típicos de álgebra elementar faz-se necessário três usos de letra: como incógnita, como generalização de número ou como variável funcional. E, associados a cada uso, se identificam uma série de aspectos que correspondem aos distintos níveis de abstração com que se usam as letras na álgebra elementar. Esta constatação foi o que as motivou para a elaboração do chamado *modelo 3UV* (três usos de variáveis), evidenciado no quadro 2.1.

| | INCÓGNITA | GENERALIZAÇÃO | VARIÁVEL FUNCIONAL |
|---|---|---|---|
| Nível 1 | Identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema | Reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em grupos de problemas semelhantes. | Reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais ou expressões analíticas). |
| Nível 2 | Interpretar os símbolos que aparecem numa equação como a representação de valores específicos. | Interpretar o símbolo como a representação de uma generalização, que pode assumir qualquer valor. | Determinar os valores das variáveis dependentes, dados os valores da variável independente. |

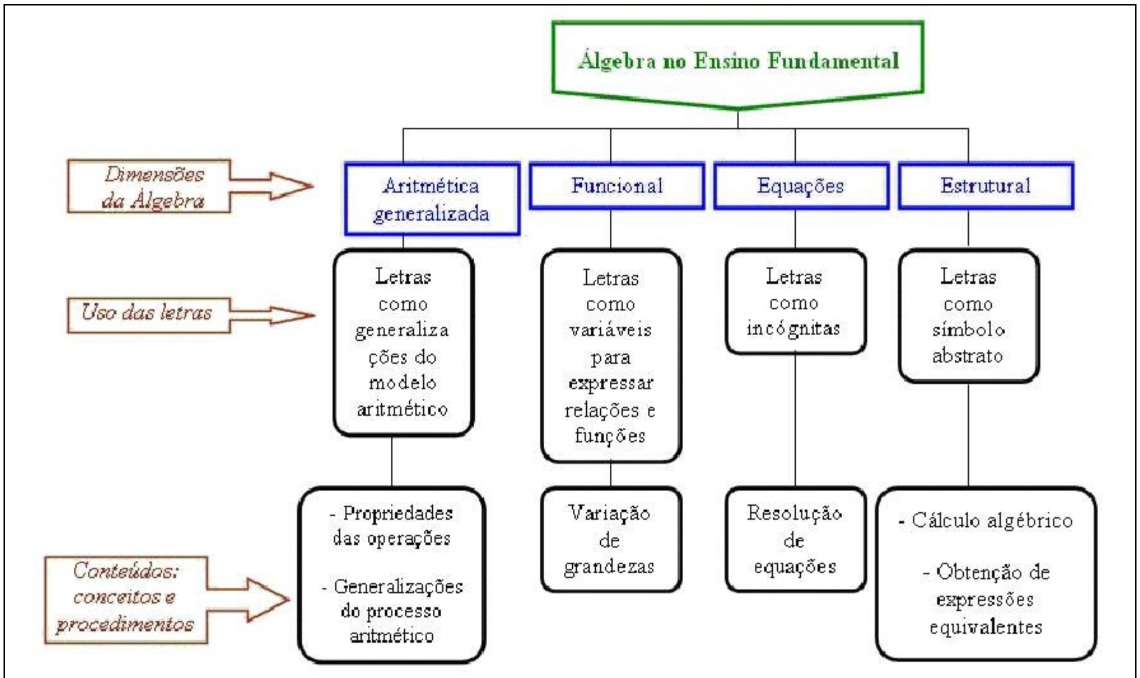
[9] As pesquisadoras, Trigueros e Ursini, utilizam a palavra *variável* para se referirem à utilização de *letras* em álgebra

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nível 3 | Substituir a variável pelo seu valor ou os valores que tornem a equação verdadeira. | Deduzir regras e métodos de generalizações em seqüências ou famílias de problemas. | Determinar os valores das variáveis independentes, dados os valores da variável dependente. |
| Nível 4 | Determinar o valor desconhecido que aparece nas equações ou problemas realizando as operações aritméticas e/ou algébricas. | Manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica. | Reconhecer a variação de ambas as variáveis numa relação funcional, independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais ou expressões analíticas). |
| Nível 5 | Simbolizar as quantidades desconhecidas identificadas numa situação específica e utilizá-las para elaborar equações. | Simbolizar enunciados, regras e métodos de generalização. | Determinar os intervalos de variação de uma das variáveis dado o intervalo de variação da outra. |
| Nível 6 | | | Simbolizar uma relação funcional, baseado na análise dos dados de um problema. |

Quadro 2.1 – Níveis do modelo 3UV

Para Trigueros e Ursini (2005), uma aprendizagem aceitável da álgebra elementar requer que os alunos desenvolvam a capacidade de trabalhar com cada um dos três usos da letra e dos aspectos evidenciados no modelo 3UV, e de passar de um ao outro de modo flexível de acordo com as exigências do problema a ser resolvido.

Esta preocupação também aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como podemos observar no quadro 2.2.




Fonte: BRASIL, 1998, p. 116

Quadro 2.2 – Usos das letras segundo os PCN

Ainda de acordo com os PCN (Brasil, 1998, p. 116), "existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra".

Sendo assim, outros fatores também são importantes de serem lembrados, tais como a concepção que se tem no que diz respeito à álgebra e as finalidades atribuídas ao ensino da mesma.

## 2.3 Comentários sobre a evolução histórica do ensino da álgebra no Brasil

Além da compreensão do uso das letras em álgebra, pensamos que conhecer a evolução do ensino da álgebra em nosso país seja importante para compreendermos as práticas pedagógicas utilizadas atualmente e nos proporcionar subsídios para uma prática pedagógica diferenciada, que vise a compreensão de conceitos e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

De acordo com Neves (1995), o ensino da álgebra no Brasil existe de forma oficial há pelo menos 200 anos e pode ser classificado em três fases: anterior ao movimento da matemática moderna, durante o movimento da matemática moderna e posterior ao movimento da matemática moderna.

Segundo o mesmo autor, no início do ensino oficial da álgebra no Brasil o aluno, no decorrer de sua escolarização, deveria realizar primeiro o curso completo de aritmética para só depois se dedicar aos estudos da álgebra e geometria – restritos a alunos do sexo masculino e pertencentes a uma elite. A álgebra, nesta época, era apresentada exclusivamente como uma álgebra de números, salientada no cálculo algébrico, nas equações do 1º grau e no cálculo com radicais. Tal perspectiva da álgebra foi enunciada por Ottoni: “álgebra é a parte das matemáticas em que se empregam sinais próprios para abreviar e generalizar os raciocínios que exigem a solução das questões relativas aos números” (Ottoni apud NEVES, 1995, p. 19).

Como uma tentativa de renovação no ensino da álgebra, em meados da década de 1920, surge uma nova disciplina – a matemática – com a intenção de combater a organização curricular vigente na escola secundária e unificar os cursos de aritmética, álgebra e geometria numa única disciplina. De acordo com o juízo de Neves (1995), na primeira metade do século passado não se concebia um ensino de álgebra voltado para uma dimensão utilitária de seus conteúdos. Em primeiro, pela visão compartimentada da própria matemática, em segundo, por uma falta de compreensão da articulação de um conhecimento algébrico e por fim, por uma visão dicotômica entre o que seja desenvolver matemática e resolver problemas.

Em meados de 1950 grandes mudanças ocorreram no ensino a nível mundial. Propunha-se um ensino com ênfase na compreensão com o uso de uma linguagem matemática mais simples, porém rigorosa e unificadora dos campos da matemática, em detrimento ao ensino praticado até então. Aqui no Brasil, essa mudança começou a ocorrer durante as décadas de 1960 e 1970 e ficou conhecida como Movimento da Matemática Moderna.

> A matemática moderna prometia a superação de uma dificuldade em aprender matemática que era reconhecida pelos professores e pela sociedade, com um ensino mais eficiente, mais prazeroso, menos assustador (BÚRIGO, 1989, p. 117).

Durante o movimento da matemática moderna, a concepção de álgebra e sua importância no currículo mudou bastante. Havia uma preocupação em desenvolver noções mais gerais. O cálculo algébrico era desenvolvido a partir do estabelecimento de um dado campo numérico e suas propriedades estruturais que permitiam determinadas transformações.

No final da década de 1970, o ensino da matemática moderna começou a ser questionado por enfatizar demasiadamente as estruturas em detrimento do desenvolvimento de habilidades e procedimentos básicos como calcular, medir e resolver problemas.

> Começou a colocar-se a ênfase na resolução de problemas, na ligação da matemática à vida real, e na utilização de calculadoras... Compreendeu-se que os aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, têm importância na aprendizagem de matemática (MATOS, 1989 apud NEVES, 1995, p. 45).

Entretanto, segundo Neves, "a álgebra é ainda ensinada como verdades que são transmitidas ao aluno. A importância de tais verdades é apenas circundada pelo fato de que o aluno deve lidar com elas caso queira prosseguir nos estudos" (1995, p. 47).

## 2.4 Concepções de álgebra

Além da compreensão do uso das letras em álgebra e do conhecimento do histórico de seu ensino, torna-se interessante discutir as concepções que se têm da mesma. Um pesquisador preocupado com isso é Zalman Usiskin.

Em Usiskin (2003), o pesquisador identifica quatro concepções de álgebra:

- Álgebra como aritmética generalizada: Dentro dessa concepção, as atividades centrais para a aprendizagem são traduzir e generalizar. As variáveis[10] são entendidas como generalizadoras de modelos. A partir de várias situações numéricas chega-se à generalização. Por exemplo, como 5.3 = 3.5, 6.8 = 8.6, generaliza-se: ab = ba. Algumas destas generalizações são praticamente automatizadas pelos alunos, como o dobro de um número: $2x$.

- Álgebra como um estudo de procedimentos: para resolver certos tipos de problemas, alguns inclusive que podem ter resoluções aritméticas simples. Nessa concepção as atividades centrais são simplificar e resolver. São exemplos característicos desta concepção problemas como: Adicionando 5 ao dobro de um certo número, a soma é 17, qual é esse número?

- Álgebra como o estudo de relações entre grandezas: Ela se manifesta, por exemplo, pelo estudo de fórmulas, como a fórmula A = bh, que fornece a área de um retângulo. A distinção crucial entre essa concepção e a anterior é que, neste caso, as letras variam.

- Álgebra como estudo das estruturas: Nos cursos superiores, o estudo da álgebra envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Isso parece ter pouca semelhança com a álgebra da Educação Básica. Contudo, reconhecemos a álgebra como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e expressões algébricas. Existem casos, na Educação Básica, em que fazemos uso da álgebra como estudo das estruturas. Para exemplificar, Usiskin usa o problema que pede para fatorar $3x^2 + 4ax - 132a^2$, onde obteremos como resposta $(3x + 22a)(x - 6a)$. Neste exemplo, temos uma concepção para variável que não coincide com nenhuma das concepções apresentadas anteriormente. Não se trata de nenhuma função ou relação, de modo que a variável não é um argumento. Não há equação alguma a ser resolvida, de modo que a variável não atua como incógnita. Também não há nenhum modelo matemático a ser generalizado. A

---

[10] O pesquisador Usiskin usa a palavra *variável* ao se referir à utilização de *letras* em álgebra.

variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

No quadro 2.3, Usiskin (2003, p. 20) procura sintetizar as diferentes concepções de álgebra em correspondência aos diferentes usos de variáveis.

| CONCEPÇÃO DA ÁLGEBRA | USO DAS VARIÁVEIS |
|---|---|
| Aritmética generalizada | Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar) |
| Meio de resolver certos problemas | Incógnitas, constantes (resolver, simplificar) |
| Estudo das relações | Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos) |
| Estrutura | Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar) |

Quadro 2.3 – Usos de variável segundo Usiskin

Indo além das concepções e já pensando nas abordagens para o ensino da álgebra elementar, Lins e Gimenez (1997) procuram caracterizar as atividades algébricas do professor de matemática em sala de aula. Tais autores afirmam que as propostas para a sala de aula resultam sempre de visões do que seja aquilo que queremos promover por meio do ensino. Segundo os autores, existem vários tipos de abordagens para a educação algébrica.

A primeira é chamada de *letrista,* e é assumida por professores que acreditam que atividade algébrica resume-se a "cálculo com letras". Seguem o esquema: primeiro a técnica (algoritmo), depois a prática (exercícios). Não há investigação nem reflexão em relação à álgebra.

A segunda é conhecida como *letrista-facilitadora,* e é assumida por professores que acreditam que uma certa estrutura é formalizada após a abstração realizada pela utilização de situações concretas. Ainda seguem uma linha letrista, mas apresentam alguns elementos facilitadores como situações concretas ou material concreto, geralmente, associando álgebra à geometria.

A terceira abordagem apresentada pelos autores é a *modelagem:* nessa abordagem da álgebra, o concreto também está muito presente, aliás, é o ponto de partida. As atividades propostas são de investigação de situações reais e a álgebra transforma-se em apenas mais um instrumento de leitura do mundo e não o objeto primário de estudo, de modo que os resultados do ensino e aprendizagem não são perceptíveis de imediato e já não é dada tanta ênfase às técnicas algébricas mais sofisticadas. Segundo seus defensores, essa abordagem do ensino da álgebra elementar diminui a distância que há entre a matemática escolar e a matemática da vida.

Segundo Lins e Gimenez (1997), tanto as abordagens letristas quanto as letristas-facilitadoras estão, cada uma a seu modo, equivocadas. As letristas por ignorarem que o "texto em letras" não carrega, em si, significado algum, e que este significado é produzido em relação a um núcleo, e que via de regra há muitos significados possíveis. Todo "cálculo com letras" está subordinado a uma lógica das operações e essa lógica imprime características particulares às possibilidades desse cálculo. As letristas-facilitadoras são consideradas equivocadas por ignorarem que a passagem de um campo semântico a outro não se dá por uma passagem suave, abstração, generalização ou qualquer outro processo que sugira que permanece de alguma forma uma essência.

Para Lins e Gimenez (1997), a abordagem para a atividade algébrica precisa levar em consideração a produção de distintos significados para a mesma e tais significados produzidos devem ser investigados e justificados.

## 2.5 Produção de significados

Segundo Picciotto e Wah (1993), a álgebra não tem significado para muitos alunos, que se preocupam em gerar estratégias para memorizar dados e aplicar fórmulas que serão logo esquecidos, e não chegam a desenvolver o pensamento algébrico. Nos cursos de formação dos professores, geralmente, não existe preocupação de refletir sobre a formação do pensamento algébrico, para que os futuros professores possam ter uma prática mais significativa, que garanta uma aprendizagem da álgebra.

Muitos pesquisadores, entre os quais Davydov, na União Soviética, Wolters, na Holanda, Jorge Tarcísio da Rocha Falcão, no Brasil, preocupados com a educação algébrica que se tem oferecido aos alunos, afirmam que seria adequado iniciar desde cedo a educação das crianças no pensamento algébrico por meio de atividades que assegurem o exercício dos elementos caracterizadores desse pensamento. Neste aspecto, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental também destacam que:

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar "abstratamente", se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1997, p. 117).

Rômulo Campos Lins e Joaquim Gimenez (1997, p. 10) também defendem a idéia de que a aprendizagem da aritmética não deve preceder a da álgebra, mas na verdade, devem ser trabalhadas juntas: "É preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra".

Salientam também que a aritmética de rua e a escolar envolvem seus próprios significados e suas próprias maneiras de proceder e avaliar os resultados desses procedimentos.

> É preciso que se reconheça que ambas as posições estão corretas (a aritmética de rua e a escolar), e o que isso quer dizer é que nossos alunos estão vivendo em dois mundos distintos, cada um com sua organização e seus modos legítimos de produzir significados (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 17).

O termo *significado* que ocupa uma posição central nas perspectivas dos autores assume a característica de ser o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e sim o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significados é, então, falar a respeito de um objeto.

Essa produção de significados também ocorre com a álgebra. Segundo estes autores,

> *A atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a álgebra.[...] A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade* (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 137, grifo dos autores).

A primeira consideração apresentada pelos autores diz respeito à forma como a atividade algébrica é caracterizada: dependente de conteúdos, isto é, a pessoa que examina a atividade a classifica ou não como algébrica de acordo com os significados produzidos para ela, que não coincidem necessariamente com o significado produzido na matemática acadêmica. Entretanto, dizer se isto ou aquilo é ou não álgebra, não parece que seja relevante.

O que particularmente chama atenção nessa caracterização é que é necessário investigar os significados que estão sendo produzidos no interior da atividade algébrica. Isto significa dizer que a perspectiva do que seja álgebra não serve apenas para identificar atividades que podem, potencialmente envolver pensamento algébrico, mas identificar os significados divergentes dos oficiais. Tais significados não sendo tratados como erros, mas uma forma de perceber como o aluno está *pensando sobre* álgebra.

A idéia da álgebra como uma atividade, e não apenas como um domínio do conhecimento acadêmico, sugere uma nova abordagem para o ensino da álgebra elementar, utilizando uma abordagem que parte de uma concepção de conhecimento abrangendo a justificação de um enunciado. Na perspectiva dos autores, faz-se necessário uma reformulação do que é entendido por conhecimento.

A produção do conhecimento, algébrico ou não, ocorre quando o par *crença-afirmação* e *justificação* ocorrem. Sendo a crença-afirmação aquilo no qual o sujeito do conhecimento acredita como produto do mesmo, enquanto que a justificação é o que garante, para este sujeito, que ele pode enunciar aquela crença-afirmação.

> Conhecimento = (crença-afirmação, justificação).
> Para facilitar, um exemplo, $K_1$ = ("2+3 = 5", "Se junto dois dedos com três dedos, tenho cinco dedos") é um conhecimento. "2+3=5" é a crença-afirmação; "Se junto dois dedos com três dedos, tenho cinco dedos" é a justificação.
> A justificação é o que garante – para o sujeito do conhecimento – que ele pode enunciar aquela crença-afirmação (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 141-142).

É possível produzir significados distintos para uma mesma crença afirmação, o que mostra a necessidade de conhecer esses significados. Há justificações diferentes para uma mesma crença-afirmação, isso evidencia diferentes *conhecimentos*.

Para Lins e Gimenez (1997, p. 42), “[...] todo conhecimento é produzido na direção do outro, o que quer dizer que o sujeito que o produz deve acreditar que alguém compartilha com ele aquela justificação”.

As justificações não são apenas importantes para saber se o aluno sabe, de fato, o que está dizendo. Há algo de muito mais importante nas justificações. É através delas que podemos saber como o aluno está pensando, como chegou à sua conclusão, qual a lógica das operações que está efetuando.

Para Meira (2003), *produzir significados* significa estabelecer relações entre os conceitos, as ferramentas que utilizamos para construí-los (computadores ou registros escritos, por exemplo) e as atividades nas quais os conceitos emergem (por exemplo, durante a resolução de problemas). Salienta que seria muito útil para o ensino da álgebra tentar descobrir que relações os alunos constroem durante o processo de produção de significados. Afirma que se prestarmos atenção ao significado que os alunos atribuem para os problemas e expressões algébricas, poderemos mais facilmente compreender suas dificuldades na álgebra elementar e ajudá-los a não separarem tão fortemente o concreto do abstrato.

Meira (2003) define atividade algébrica e diz que esta pode ser muito útil se quisermos ajudar nossos alunos a compreender a álgebra mais elementar. De acordo com ele, a*tividade algébrica* se refere a ações que envolvem, necessariamente mas não exclusivamente, uma intenção (ou motivação) do aluno (ou professor) em usar conhecimentos algébricos para resolver problemas ou comunicar resultados matemáticos. O uso da linguagem da álgebra durante a resolução de um problema engaja o indivíduo na atividade algébrica, no sentido em que ele está naquele momento compartilhando com outros indivíduos uma forma específica e socialmente reconhecida de resolver problemas. Ou seja, devemos estimular o uso da linguagem algébrica pois, na medida em que um aluno usa tal linguagem para resolver problemas (mesmo que o faça com erros), ele está construindo relações entre suas ações e a linguagem falada na sala de aula de matemática, com o uso de certas palavras para fins matemáticos, à linguagem dos textos matemáticos, e a linguagem dos sistemas simbólicos escritos.

Lins (1994a) sugere que a atividade algébrica não é conseqüência natural da aprendizagem da aritmética e que muitas e diferentes são as possibilidades de produção de conhecimento sobre a álgebra, abrindo um enorme campo de investigação nesta área.

Em Lins e Gimenez (1997) os autores chamam a atenção para a produção de significados por alunos para atividades envolvendo elementos algébricos. É importante propiciar atividades para os alunos no sentido de favorecer a produção de significados para a álgebra simbólica. Se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação.

É importante perceber que as tarefas trazidas para a aula são sempre transformadas pelos alunos, na medida em que eles produzem significados próprios que dependem de seus objetivos. Assim, ao invés de enfatizar as tarefas em si e esperar que tenham um significado único e fixo, nós professores deveríamos nos preocupar em gradualmente aproximar os significados produzidos pelos alunos e aqueles pretendidos pela tarefa. Esta forma de olhar a atividade dos alunos requer uma nova forma de comunicação e aprendizagem na sala de aula.

Neste trabalho assumimos que *produzir significado* a respeito de um determinado assunto, conteúdo ou atividade algébrica é enunciar um conjunto de afirmações, perguntas ou suposições que podem ser ditas sobre esse determinado assunto, conteúdo ou atividade, envolvendo conjecturas e justificações.

### 2.6 Representações múltiplas e o uso de materiais manipulativos[11]

De acordo com Henri Picciotto e Anita Wah (1993) a álgebra ensinada na escola secundária tem sido inacessível para a maioria dos estudantes. Até mesmo estudantes que aparentemente têm sucesso escolar desenvolvem uma compreensão superficial do assunto.

Os autores comparam a álgebra a um portão. Um portão que é fechado para muitos estudantes. No entanto, a solução, segundo os autores, não seria substituir a álgebra por um curso mais fácil ou adiar os tópicos de álgebra para depois. Na verdade, a álgebra[12] é considerada o idioma pelo qual a maioria da matemática é comunicada e esta provê meios de operar com conceitos a um nível abstrato, podendo aplicá-los em processos de generalizações além do contexto original. A representação algébrica é um pré-requisito para avançar no trabalho formal em todos os assuntos matemáticos – inclusive em estatística, álgebra linear, matemática discreta e cálculo, dentre outros. Além disso, o uso crescente de métodos quantitativos, nas ciências naturais e em disciplinas como economia, psicologia, e sociologia, fez dos procedimentos algébricos uma ferramenta importante para a aplicação da matemática.

Sendo assim, Henri Picciotto e Anita Wah (1993) chamam atenção para a questão de que uma abordagem satisfatória da álgebra deva envolver uma organização em espiral onde

---

[11] Entende-se por materiais manipulativos toda espécie de material que possa ser manipulado com a finalidade de promover compreensão ou auxiliar na resolução das atividades propostas.

[12] Esta definição de álgebra, citada por Henri Picciotto e Anita Wah (1993), está de acordo com National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 1989.

constem, além dos *temas*, *conceitos* e *ferramentas*, *habilidades*, *aplicações* e *representações múltiplas*. Ou seja, uma abordagem que implemente padrões como multidisciplinaridade, uso de ferramentas, motivação através de temas, habilidade em resolver problemas e que não possua uma organização linear.

O esquema apresentado na figura 2.1 representa a visão destes autores sobre uma boa abordagem da álgebra.

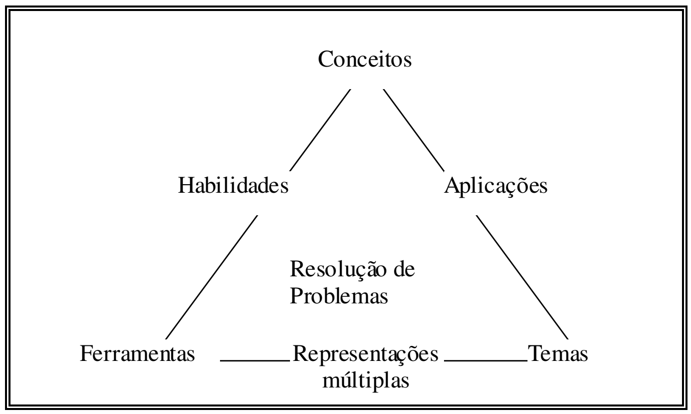



Figura 2.1 – Abordagem da álgebra segundo Picciotto e Wah

Os vértices contemplam ferramentas, temas e conceitos que, segundo os autores alicerçam uma abordagem mais interessante e uma aprendizagem com maior compreensão dos conceitos algébricos. Entendendo melhor o que significa cada vértice:

*Ferramenta:* é toda espécie de material que possa ser manipulado com a finalidade de promover compreensão ou auxiliar na resolução das atividades propostas. As ferramentas proporcionam acesso ao conhecimento, discurso (na medida que servem para validar hipóteses e possibilitam argumentação sobre as mesmas), independência e múltiplas representações de um mesmo assunto. Seriam exemplos de ferramentas todos os materiais concretos.

*Tema:* Tudo que pode servir como motivação para o estudo de tópicos algébricos. Temas como movimento, otimização, comparações, área, perímetro, dentre outros.

*Conceitos:* Ferramentas e temas são os meios, não o fim, seu propósito é ajudar os estudantes a aprender conceitos de álgebra como função, números, variáveis, operações, equações, e estrutura geralmente mais matemática.

Segundo eles, a interação de ferramentas e temas possibilitam *representações múltiplas*, a interação entre temas e conceitos possibilita as *aplicações* enquanto que a interação das ferramentas com os conceitos permite o desenvolvimento das *habilidades.*

As habilidades matemáticas são desenvolvidas na medida em que o estudante utiliza-se das ferramentas para produzir significado para os conceitos. Nesse envolvimento são utilizadas habilidades como análise de dados, comparações, generalizações, uso de variáveis, resolução de equações, dentre outras. Na interação dos conceitos e dos temas, podemos descobrir aplicações destes conceitos em outras áreas de conhecimento ou em outros temas.

Os autores entendem que as diferentes formas de representação de um tema possa facilitar na compreensão dos conceitos envolvidos, estas diferentes formas são chamadas por eles de representações múltiplas. Por exemplo, um estudante que pensou em raízes quadradas de um modo de multidimensional, com ajuda de ferramentas como o geoplano, papel quadriculado, calculadoras e gráficos, tem um melhor entendimento dos conceitos envolvidos nesse conteúdo do que um estudante que praticou somente operações com radicais de forma dissociada. Esse entendimento ocorrerá, principalmente se forem explícitas as relações entre as diferentes representações.

Vimos que esses autores propõem mudanças pedagógicas e um redirecionamento do currículo, dando um enfoque em temas interessantes que conectem a álgebra elementar com outros assuntos, apresentando diversas abordagens para a introdução ao pensamento algébrico. Tais abordagens, segundo eles, podem ser feitas através do uso de material concreto, de gráficos, de tabelas, do geoplano, dentre outras.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem que o ensino da álgebra deve ser repensado em relação ao ensino tradicional:

> [...] não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à matemática mostram claramente que isso não é verdade (BRASIL, 2000, p. 43).

Nesse sentido, os PCN (1998) também sugerem uma abordagem para o ensino da álgebra elementar. Uma abordagem em que os professores trabalhem situações que levem o aluno a:

> - reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
> - traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
> - utilizar os conhecimentos sobre operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

Segundo os PCN, isto deveria acontecer desde os ciclos iniciais – 1º e 2º ciclos (1ª a 4ª série do ensino fundamental), de modo informal, através de um trabalho articulado com a aritmética. O objetivo é que o aluno adquira experiências e subsídios para uma aprendizagem algébrica mais consistente.

As propostas dos PCN vão ao encontro de nosso estudo, principalmente a que indica que o professor trabalhe situações que levem os alunos a descobrir regularidades e propriedades numéricas, geométricas e algébricas, desenvolvendo o potencial de abstração, a construir estratégias de resolução para as situações-problema e a conhecer e interagir com as diferentes soluções apresentadas pelos colegas.

## 2.7 Resolução de situações-problema

Um dos objetivos do ensino de matemática e a grande competência que ele visa desenvolver é a capacidade de pensar e de resolver situações-problema com autonomia.

Isso pode ser alcançado através do desenvolvimento, na escola, de atividades matemáticas significativas, que impliquem na construção de estratégias e procedimentos, mobilização e busca de conhecimento.

Resolver essas situações relaciona-se a uma série de competências matemáticas que serão desenvolvidas não antes, mas durante o processo de construção de solução. São as situações que dão sentido aos conceitos. Um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações, os conhecimentos dos alunos são moldados pelas situações que encontram e, progressivamente, dominam.

Podemos falar em situações e problemas como faz Vergnaud ao dizer que "a aquisição de conhecimento é moldada pelas situações e problemas previamente dominados e, portanto, o conhecimento do sujeito tem muitos aspectos locais" (1994, p. 42).

Em outro trabalho, Vergnaud diz que "na verdade, os conceitos se desenvolvem através da resolução de problemas, e esse desenvolvimento é lento" (1983, p. 172).

Isso significa que a resolução de problemas ou as situações de resolução de problemas são essenciais para a conceituação mas, como chama atenção Vergnaud (1994, p. 42), "um problema não é um problema para um indivíduo a menos que ele tenha conceitos que o tornem capaz de considerá-lo como um problema para si mesmo". Ou seja, existe uma relação entre a conceituação e a resolução de problemas. Para Vergnaud, a problematização vai muito além da abstração de regularidades do mundo observável. Problemas são teóricos e práticos, não meramente empíricos. De acordo com Vergnaud (1994), quando uma classe de problemas é resolvida por um indivíduo (o que significa que ele desenvolve um esquema eficiente para lidar com todos ou quase todos os problemas dessa classe), o caráter problemático dessa classe específica desaparece. Mas essa competência desenvolvida pelo indivíduo o habilita a reconhecer ou considerar novos problemas para si mesmo; trata-se então, de um processo cíclico.

Entretanto, Müller (2000) chama a atenção para um equívoco comum no que se refere à compreensão precisa do que seja um problema.

Segundo a autora, a resolução de problemas, como estratégia para o desenvolvimento da educação matemática, precisa se desvencilhar daquele sentimento de *mal necessário*, produzido pela lista interminável de *problemas* que, normalmente, ao término de cada unidade programática, o professor apresenta aos alunos.

O uso tradicional dos problemas, reduzidos à aplicação e sistematização dos conhecimentos, provoca a antipatia e o desinteresse do aluno, impedindo o seu pleno desenvolvimento intelectual. O treino excessivo de definições e técnicas torna-se uma atividade rotineira e mecânica, em que se valoriza apenas o produto final. A desconsideração das etapas de exploração e comunicação das idéias lógico-matemáticas impede a necessária construção dos conceitos. Desta forma, "o saber matemático não se apresenta ao aluno como um sistema de conceitos, que lhe permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato, incompreensível” (BRASIL, 1995, p. 30).

Vergnaud chama de *ilusão pedagógica* (1983, p. 173) a atitude dos professores que crêem que o ensino consiste na apresentação organizada, clara, rigorosa, das teorias formais e que quando isso é bem feito os alunos aprendem. Ele acredita que é através de situações de resolução de problemas que os conceitos são desenvolvidos pelo aluno e as situações de resolução de problemas que tornam os conceitos significativos para os alunos podem estar, pelo menos inicialmente, muito distantes do formalismo apresentado pelo professor. Mas, apesar disso, tais situações formais são essenciais para o desenvolvimento de conceitos. Quer dizer, ao mesmo tempo em que as situações formais são necessárias é preciso levar em consideração que o aluno pode estar ainda muito longe delas (VERGNAUD, 1983, p. 172).

Müller (2000) lembra que, em substituição à prática arcaica e pouco frutífera que se desenvolve nas escolas, conceituados educadores matemáticos apresentam a proposta de resolução de problemas e chamam atenção para alguns pontos-chave:

Inverte-se a lógica tradicional de apresentação do conteúdo: *teorema – demonstração – aplicação*. O problema passa a ser o *ponto de partida*. Inicialmente, o aluno procura resolver o problema utilizando estratégias que conheceu ou desenvolvendo outras, pelas transferências que faz entre o conteúdo conhecido e o novo que lhe é apresentado. Através das transferências, retificações e rupturas, o aluno refaz o processo histórico de construção do conhecimento.

A autora salienta, ainda que:

- Não se deve confundir exercício de aplicação, repetição e memorização com problemas. Só há problema se o aluno é obrigado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta, de estruturar a situação que lhe é apresentada.

- Ao resolver problemas, o aluno constrói um campo de conceitos que utiliza de acordo com o contexto de aprendizagem, sempre acompanhado de retificações e generalizações.

- A aprendizagem de matemática deve estar embasada e orientada a partir da resolução de problemas, fazendo com que esta deixe de ser um apêndice ao final de cada unidade.

A aplicação dos princípios acima acarreta algumas conseqüências. A resposta ou solução do problema não se apresenta pronta logo de início; o que é problema para um, pode não ser para outro, um problema é desafio e não automatização, memorização de técnicas ou algoritmos. Não existe um algoritmo único para resolução de problemas; simulações, tentativas, comprovações de hipóteses são procedimentos válidos que aproximam-se do procedimento considerado padrão. A compreensão de um problema só se efetiva se o aluno, ao final, é capaz de comprovar os resultados, avaliar hipóteses, compreender diferentes algoritmos; o processo de escolha das estratégias de resolução dos problemas é mais importante do que o produto final, pois fornece valiosas informações sobre a bagagem de conhecimentos do aluno. Conforme Polya (1994, p. v), "uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema".

No quadro 2.4, apresentamos o esquema de Polya (1994) para resolução de problemas.

| ETAPAS | QUESTÕES / RECOMENDAÇÕES |
|---|---|
| Compreender o problema | ◆ O que se pede no problema?<br>◆ Quais são os dados e as condições do problema?<br>◆ É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?<br>◆ É possível estimar a resposta? |
| Elaborar um plano | ◆ Qual é o seu plano para resolver o problema?<br>◆ Que estratégia você tentará desenvolver?<br>◆ Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?<br>◆ Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.<br>◆ Tente resolver o problema por partes. |
| Executar o plano | ◆ Execute o plano elaborado, verificando-o passo-a-passo.<br>◆ Efetue todos os cálculos indicados no plano.<br>◆ Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema. |
| Fazer o retrospecto ou verificação | ◆ Examine se a solução obtida está correta.<br>◆ Existe outra maneira de resolver o problema?<br>◆ É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes? |

Quadro 2.4 – Resolução de problemas

Visando a compreensão efetiva do aluno, ao final do processo este deverá ser capaz de comprovar os resultados, avaliar hipóteses e compreender diferentes algoritmos. O uso sistemático desse esquema ajuda o aluno a organizar o pensamento. O confronto de sua idéia inicial de resolução, com a de um colega ou grupo, favorece o aprendizado, redimensionando, desta forma, o papel do professor.

## 2.8 Aprendizagem cooperativa

Picciotto e Wah (1993) dizem-nos que ferramentas e temas criam um ambiente onde os estudantes são motivados e podem resolver problemas, descobrindo e realizando uma aprendizagem cooperativa[13] e onde as habilidades matemáticas podem ser desenvolvidas de forma espontânea.

Pensamos que, embora as ferramentas e temas sejam necessários, não significa que ferramentas bem escolhidas e temas sejam suficientes para garantir que os estudantes farão generalizações e transferirão a compreensão que tiveram de um contexto para outro. Tais habilidades e o desenvolvimento da capacidade de nossos estudantes pensarem matematicamente serão mais facilmente explorados se for desenvolvido um trabalho de grupo com discussões conduzidas pelo professor, e com registros realizados pelos alunos, tais como relatórios, projetos, pastas, e testes. A questão do trabalho em grupos já era observada por Vygotsky (1991). Segundo ele, o pensamento tem origem social, e forma-se e evolui com o contato social nas interações grupais.

Acreditamos, em concordância com Vygotsky (1984; 1991), que os conhecimentos são concebidos como produtos sócio-culturais. Assim sendo, um trabalho realizado em grupo (aprendizagem cooperativa) proporciona maiores condições para tais produções. O objetivo principal com a atividade coletiva é a cooperação concebida dentro de um esquema teórico sócio-cognitivo, no qual ela é parte integrante da elaboração do conhecimento. A coordenação

[13] O termo *aprendizagem cooperativa* tem aqui o significado de uma aprendizagem que ocorra a partir da troca de experiências entre alunos e entre alunos e professor, evidenciadas na verbalização e discussões referentes às justificações elaboradas pelos alunos e no trabalho em grupo.

das ações se articula com a resolução dos problemas propostos para os alunos de modo que o confronto e as contradições entre as diferentes opiniões, concepções, hipóteses e justificações dos sujeitos da aprendizagem são concebidos como algo intrínseco à construção da aprendizagem dita cooperativa.

A utilização de situações-problema, ao invés de apenas exercícios e o fato de sempre pedir ao aluno que registre suas hipóteses, explicando como pensou, independentemente se a solução ou resposta esteja certa ou errada, são também observados em Lins (1997; 2003).

Segundo Lins (2003), as explicações dadas pelos alunos, além de ajudar o professor a entender o que o aluno pensou, poderão ajudar o aluno em seu aprendizado.

Além do registro, a verbalização das justificações pelo aluno é importante. Em seu artigo, Lins (1994b, p. 27) exemplifica como realizou o trabalho em sala de aula: inicialmente em pequenos grupos e depois o trabalho dos grupos era comunicado para o grande grupo, de modo que os alunos falassem uns com os outros e registrassem o que estava sendo dito, mesmo que não estivessem muito seguros ou corretos em suas afirmações. A verbalização de seu raciocínio, pelo aluno, facilita sua aprendizagem porque o mesmo toma consciência do seu próprio modo de pensar podendo confrontá-lo com opiniões adversas ou favoráveis, desenvolvendo habilidades importantes ao conhecimento matemático, tais como elaboração de hipóteses, comparação e argumentação. Dessa forma, o erro deixa de ser, para o aluno, uma demonstração de incapacidade. Aliás, na aprendizagem escolar o "erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução" (BRASIL, 1997, p. 59).

Sendo assim, o trabalho em sala de aula, exemplificado por Lins, reforçou a idéia de propiciar aos alunos um ambiente de aprendizagem que permitisse a troca de idéias, justificações e conclusões.

# CAPÍTULO 3: METODOLOGIA

Neste capítulo será relatada a metodologia utilizada nesta pesquisa acompanhada da descrição dos procedimentos utilizados durante a realização da mesma. Inicialmente será apresentado um panorama geral de nosso estudo seguido de uma explicação mais detalhada de cada uma de suas respectivas etapas – sondagem, elaboração e escolha da proposta e atividades e implementação da proposta.

Gostaríamos de ressaltar que as idéias, exemplos e orientações apresentados no capítulo anterior – tais como a importância da discussão quanto à interpretação e a utilização das letras em expressões algébricas, as concepções de álgebra, a necessidade de produção de significados para a atividade algébrica, uma abordagem didática para essa atividade algébrica que se utilize de representações múltiplas e de materiais manipulativos, juntamente com a resolução de situações-problema, primando por uma aprendizagem cooperativa – influenciaram na elaboração e aplicação de nossa proposta didática.

## 3.1 Método de pesquisa

Considerando a problemática que pretendemos investigar, optamos pela metodologia de pesquisa qualitativa, pois a pesquisa qualitativa “[...] envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação encontrada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes” (BOGDAN; BIKLEN apud LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 13). Além disso, “os métodos qualitativos poderão observar, diretamente, como cada indivíduo, grupo ou instituição experimenta, concretamente, a realidade pesquisada” (GOLDENBERG, 1999, p. 63).

Dentre as muitas abordagens qualitativas optamos pelo *estudo de caso* devido ao foco do interesse desta pesquisa incidir naquilo que é particular – a escola onde foi realizada a pesquisa, a situação sócio-econômica dos alunos, a política pedagógica, o conteúdo enfocado – mas que pode ter semelhanças com outros casos ou situações. Além de ser uma abordagem que parte do pressuposto de que o leitor vá usar o estudo aqui apresentado para fazer comparações e desenvolver novas idéias, produzir novos significados, desenvolver novas compreensões a respeito do objeto de estudo e do assunto aqui apresentados.

Para a realização desta pesquisa, foram considerados dois grupos: um *grupo de sondagem* e um *grupo experimental.*

Com o grupo de sondagem, como o nome sugere, o objetivo era avaliar a pertinência do problema proposto, além de levantar informações para nortearem, juntamente com o referencial teórico, a elaboração das tarefas integrantes da proposta didática. Procurou-se observar, através das respostas dadas, como ocorre o ensino e aprendizagem das operações realizadas com expressões algébricas no Ensino Fundamental, constatar algumas noções ou propriedades algébricas que não foram bem compreendidas pelos alunos, além de constatar a ocorrência de erros comuns cometidos pelos alunos em cálculos algébricos.

O grupo experimental foi o grupo no qual foi implementada proposta didática elaborada.

## 3.2 Descrição do estudo

A presente pesquisa contou com três etapas: sondagem, elaboração das atividades e da proposta didática, implementação da proposta.

O esquema apresentado no quadro 3.1 exibe as etapas do desenvolvimento desta pesquisa na seqüência realizada para que o leitor tenha uma visão geral do estudo como um todo. Após, discutiremos cada uma destas etapas.

<table>
<tr><td>1ª ETAPA<br>Sondagem</td><td colspan="2">◆ elaboração teste de sondagem;<br>◆ aplicação do teste de sondagem aos alunos;<br>◆ entrevistas com alunos;<br>◆ entrevistas com os professores.</td></tr>
<tr><td>2ª ETAPA<br>Elaboração das atividades<br>e da proposta didática</td><td colspan="2">◆ elaboração das tarefas e escolha da abordagem didática;<br>◆ escolha e confecção do material manipulativo;<br>◆ elaboração dos testes de avaliação.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3ª ETAPA<br>Implementação da<br>proposta</td><td>1ª FASE<br>Usos da letra</td><td>◆ aplicação das atividades referentes aos usos da letra;<br>◆ aplicação do teste.</td></tr>
<tr><td>2ª FASE<br>Operações com expressões<br>algébricas</td><td>◆ aplicação das atividades envolvendo operações com expressões algébricas;<br>◆ aplicação do teste.</td></tr>
</table>

Quadro 3.1 – Etapas do estudo

### *3.2.1 Etapa 1: Sondagem*

A primeira etapa deste estudo destinou-se ao planejamento e aplicação das atividades de sondagem, aplicação de testes e entrevistas com alunos e professores. Assim sendo foi selecionado um grupo denominado *grupo de sondagem* com o qual foram realizadas as atividades referentes a esta etapa.

A etapa da sondagem passou por quatro momentos: a escolha das questões que seriam aplicadas no teste escrito aos alunos, a aplicação do teste de sondagem aos alunos, a entrevista com alguns destes alunos e a entrevista com os professores.

*3.2.1.1 O grupo de sondagem*

Quanto ao grupo de sondagem, participaram alunos e professores de matemática do último ano do terceiro ciclo (ou oitava série) do Ensino Fundamental de algumas escolas públicas da região metropolitana de Porto Alegre.

Foram selecionadas cinco escolas públicas, sendo três da rede municipal de ensino de Porto Alegre e duas da rede estadual de ensino. Destas foram selecionados cinco professores de matemática atuantes no último ano do Ensino Fundamental, um de cada escola, e seus respectivos alunos.

A escolha pelo terceiro ano do terceiro ciclo (oitava série) deveu-se ao fato de que o aluno que freqüenta tal ano já teve um contato com as operações básicas entre expressões algébricas, conteúdo algébrico enfocado nesta pesquisa.

*3.2.1.2 Sondagem com os alunos*

A escolha das questões levou em consideração modelos que envolvessem um nível crescente de dificuldades – fácil, médio e difícil. Algumas foram selecionadas de livros didáticos e outras foram elaboradas com a finalidade de proporcionar uma análise mais detalhada dos procedimentos de resolução pelos alunos.

Apresentamos, no quadro 3.2, as questões contidas no teste de sondagem.

<u>Questão 1:</u> Resolva as operações indicadas:

a) $3 + 8 - 15 + 9 =$
b) $- 5. (4 + 7) =$
c) $5 + 3 . (2 - 6 + 2) - 7 =$
d) $(8 - 5)^2 =$
e) $(2x + 4) . (5 + 3x) =$
f) $\frac{8(3+5)}{2} =$

g) $2x + 3y - 5x + 9 + y + 6x - 5y - 5=$
h) $- 3x . (2x + 5x^2) =$
i) $2x + 3y - x . (3 + y + 6x) - 5xy =$
j) $(3 - c)^2 =$
l) $(y + c)^2 =$
m) $\frac{2(a+b)}{2} =$

| | |
|---|---|
| Questão 2[14]: Nas igualdades abaixo *a* e *b* representam números reais. Assinale V para a sentença verdadeira e F para a falsa. | |
| ( ) $\frac{3+9}{3}=9$ | ( ) $(2 + b).(9 - 3) = 12 + 6b$ |
| ( ) $(5 + b)^2 = 5^2 + b^2$ | ( ) $a(a + b) = a^2 + ab$ |
| ( ) $(a + b).(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ | ( ) $\frac{a+b}{a}=b$ |
| ( ) $4(a + 4) = 4a + 4^2$ | ( ) $\frac{5(a+b)}{5}=a+b$ |
| ( ) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ | |

Quadro 3.2 – Teste de sondagem[15]

Com os alunos participantes do grupo de sondagem, a pesquisa ocorreu em duas fases:

- Fase *a* – Aplicação do teste de sondagem, com questões de cálculo algébrico.

O objetivo deste teste era analisar como os alunos utilizam-se dos conhecimentos algébricos para simplificar as expressões, bem como identificar possíveis "erros" em cálculo algébrico.

Com relação às expressões numéricas apresentadas juntamente com as algébricas, queríamos observar se os alunos utilizavam as propriedades algébricas na simplificação das expressões numéricas e vice-versa.

- Fase *b* – Entrevista com alguns alunos selecionados.

Alguns dos alunos que participaram da fase *a* foram selecionados, randomicamente, para uma entrevista oral na qual foi solicitado aos mesmos que justificassem as respostas dadas no teste de sondagem, objetivando, com isso, observar os procedimentos e estratégias utilizadas na resolução.

---

[14] Observamos, posteriormente, que o enunciado desta questão deveria ter sido melhor formulado uma vez que em alguns itens permite que ambas respostas estejam corretas. Citamos como exemplo o segundo item, cuja sentença é falsa para todo b diferente de zero, mas para b = 0 tal sentença torna-se verdadeira. Porém, não consideramos que este fato invalide a sondagem realizada uma vez que, além das respostas escritas, os alunos foram entrevistados oralmente e nesta entrevista explicaram como "pensaram" para responder cada item da questão ficando evidente sua interpretação do enunciado.

[15] Formato apresentado apenas para uma boa visualização do leitor. Na aplicação, apresentou-se em uma folha com espaço para resolução abaixo de cada item das questões.

O objetivo ao realizar esta entrevista era identificar se e como os alunos utilizavam os aspectos estruturais da álgebra – propriedades das operações – para resolver as questões específicas.

*3.2.1.3 Alguns resultados obtidos na sondagem com os alunos*

Apresentaremos alguns resultados obtidos a partir da sondagem realizada com os alunos na fase *a* e algumas justificativas dadas pelos alunos na fase *b*.

Na primeira questão, item *d,* foi solicitada aos alunos a solução da expressão $(8 - 5)^2$.

Nas resoluções corretas, as estratégias utilizadas foram basicamente duas: realizar a operação de subtração seguida da potenciação ou aplicar a propriedade distributiva.

- $(8 - 5)^2 = (3)^2 = 9$
- $(8 - 5)^2 = (8 - 5) . (8 - 5) = 64 - 40 - 40 + 25 = 64 - 80 + 25 = 9$

Já os alunos que erraram a questão evidenciaram a utilização de outras estratégias de resolução, sendo a terceira a mais utilizada:

- $(8 - 5)^2 = 16 - 10 = 6$
- $(8 - 5)^2 = (3)^2 = 6$
- $(8 - 5)^2 = 64 - 25 = 39$

Um dos alunos entrevistados, que obteve como resposta 39, expôs sua justificativa para realizar a operação: "Primeiro faço a potência e depois diminuo"(Antônio[16]).

Ao ser questionado sobre porque usar a potência antes da subtração o aluno respondeu: "Existe uma ordem para resolver que é primeiro potência e raiz, depois multiplicação e divisão e, por último mais e menos" (Antônio).

Observamos pela resposta do aluno que o mesmo utiliza alguma hierarquia das

[16] Este nome é fictício, assim como os demais nomes utilizados para caracterizar os diferentes alunos entrevistados oralmente na fase *b*.

operações na resolução, entretanto ignorou completamente a presença dos parênteses e sua função nesta expressão.

Outro item da questão 1 (item j) solicitava que os alunos resolvessem a expressão $(3b - c)^2$. Chamou-nos atenção a quantidade de respostas incorretas para este item.

Os alunos que acertaram o resultado utilizaram produtos notáveis ou a propriedade distributiva. Os alunos que não acertaram a questão apresentaram várias formas de resolução, dentre elas:

- $(3b - c)^2 = (3b)^2 - c^2 = 9b^2 + c^2$ . Observamos que o erro cometido é semelhante ao cometido por Antônio no item *d*.
- (3b – c)2 = (3b – c) . (3b – c) = 9b2 + c2. Aqui, o erro cometido é devido à aplicação incorreta da propriedade distributiva. Essa resposta foi apresentada por um dos alunos entrevistados oralmente. Na entrevista, o aluno João justificou-a dizendo: "Como é uma potência dois então tenho que repetir duas vezes e multiplicar. O primeiro termo com o primeiro e o outro com o segundo" (João).
- $(3b - c)^2 = (3b - c) . (3b - c) = 9b^2 - 3bc - 3bc + c^2 = 9b^2 - 6b^2c^2 + c^2$. Evidencia um erro na compreensão do conceito de adição em cálculo algébrico pois $- 3bc - 3bc = - 6bc$ e não $- 6b^2c^2$.
- $(3b - c)^2 = (3b)^2 - 2.3b.c + c^2 = 9b^2 - 9bc + c^2$
- $(3b - c)^2 = (3b)^2 - 2.3b.c + c^2 = 9b^2 + 6bc + c^2$
- $(3b - c)^2 = (3b - c) . (3b + c) = 9b^2 - 3bc + 3bc + c^2 = 9b^2 + c^2$

Estas três últimas soluções apresentadas demonstram erros cometidos por falta de atenção ou erros na realização dos cálculos aritméticos.

Na segunda questão do teste de sondagem, onde era solicitado aos alunos para assinalarem V para a sentença verdadeira e F para a falsa, queríamos observar se os alunos perceberiam o desenvolvimento algébrico (ou aritmético) correto.

A maioria dos alunos que realizou o teste de sondagem acertou o primeiro item desta questão, que perguntava se a igualdade $\frac{3+9}{3}=9$ era verdadeira ou não. Entretanto, alguns alunos responderam que a igualdade era verdadeira.

Um desses alunos foi entrevistado e justificou sua resposta da seguinte maneira: “3 + 9 = 12 e 12 dividido por 3 é nove.” (João)

Ao ser questionado sobre quanto eram três vezes nove o aluno respondeu que eram 27. E completou dizendo: “Bah! Errei nas contas.”

O aluno Antônio comentou: “Dá essa resposta porque dá para simplificar o três”. E mostrou, por escrito, como realizou a simplificação: “ $\frac{\cancel{3}+9}{\cancel{3}}=9$ .”

Ao ser questionado se havia outra forma de realizar a operação sem simplificar, o aluno respondeu que não, porque se fizesse de outro jeito o resultado seria diferente de nove. Essa justificativa, num primeiro momento, nos levou a crer que o aluno assumiu como verdadeira a igualdade e buscou uma forma de obter o resultado apresentado. Entretanto, o aluno utilizou a mesma estratégia – essa forma de simplificar – em outros itens dessa questão, como veremos na justificativa dada por ele para o penúltimo item.

Quanto à igualdade $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ , a maioria dos alunos respondeu ser falsa.

Uma aluna entrevistada justificou porque considerava falso: “Se eu fizer as contas vai dar outra coisa. Olha só: $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .”(Maria).

João justificou dizendo: “Sei que a resposta é essa mas não sei porque.”

Dentre os alunos que responderam que a igualdade era verdadeira, dois foram entrevistados e as justificativas dadas pelos alunos foram:

“A resposta é essa porque $a . a = a^2$ e $b . b = b^2$ .” (Antônio)

“É verdadeiro porque $(a + b)^2 = (a + b) . (a + b) = a^2 + b^2$.” (Marta)

Outro item da questão dois onde foram apresentas justificativas muito interessantes foi o penúltimo, no qual os alunos deveriam verificar se a igualdade $\frac{a+b}{a}=b$ era verdadeira ou não.

As justificativas apresentadas pelos alunos que consideraram a igualdade falsa foram:

"Porque não dá para dividir isso sem saber quanto vale o *a* e o *b*." (Maria)

"Porque $\frac{a+b}{a}=\frac{2ab}{a}=2b$." (João)

"$\frac{a+b}{a}=\frac{ab}{a}$ então não é igual a b." (Marta)

A última justificativa nos sugere que a aluna está, na verdade, realizando a operação de multiplicação entre *a* e *b* e não adição.

Dos alunos que consideraram a igualdade verdadeira, alguns apresentaram suas justificativas ao serem entrevistados.

"É verdadeira porque $\frac{a+b}{a}=\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}}=$ b." (Mateus).

Da mesma forma que os alunos Marta e João, Mateus está admitindo que a + b = ab para todo *a* e *b*.

O aluno Antônio justificou de forma análoga à justificativa apresentada por ele para o primeiro item desta questão: $\frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}=b$.

Apesar de, tradicionalmente, a álgebra ensinada nas escolas estar voltada ao treino de habilidades, à mecanização de algoritmos e à memorização de regras, com a realização desta sondagem, e também pela nossa experiências em sala de aula, pudemos observar que, mesmo em questões onde o aluno necessita apenas dessas habilidades ou técnicas, seu rendimento não é satisfatório.

Acreditamos que conhecer alguns "erros" dos alunos e a forma como estes alunos pensaram no momento da resolução nos forneceu subsídios para um planejamento voltado para a produção de significados para as operações com expressões algébricas.

*3.2.1.4 Sondagem com os professores*

A etapa da sondagem realizada com os professores teve outro enfoque.

Com os professores foram realizadas entrevistas orais através de um roteiro semi-estruturado[17], apresentado no quadro abaixo:

- Qual sua formação acadêmica (Curso que realizou ou está realizando, instituição, ano de conclusão)?
- Em que ano começou a lecionar e qual o tipo de escola? (Municipal, Estadual e Particular).
- Para que séries (ano ciclo) você leciona atualmente?
- Você segue alguma proposta curricular ou livro didático?
- Como foi seu primeiro contato com a álgebra enquanto aluno (a)?
- O que representa para você a álgebra?
- Que importância tem a álgebra na formação matemática dos seus alunos?
- Na sua opinião, como se "aprende" álgebra?
- Na sua opinião, que pré-requisitos devem ter seu aluno para compreender álgebra. Justifique:
- Você leva em consideração esses pré-requisitos na abordagem de um novo conteúdo algébrico? Como você procede se seu aluno não possui esses pré-requisitos?
- Quais os erros mais comuns que seus alunos cometem em cálculo algébrico? Cite exemplos.
- Você pode descrever uma de suas aulas onde aborda a álgebra?

Quadro 3.3 – Entrevista com professores

[17] As questões aqui apresentadas foram usadas como um modelo de roteiro para a entrevista. Durante a realização da mesma os professores tiveram liberdade para explicar suas concepções, acrescentar comentários ou outras informações pertinentes ao tema da entrevista.

Tal entrevista teve o objetivo de perceber a concepção que cada professor possui em relação ao ensino e aprendizagem da álgebra, bem como a metodologia utilizada em sala de aula para abordar tal conteúdo com a finalidade de auxiliar na busca de bibliografias e diferentes metodologias a serem utilizadas neste estudo.

#### *3.2.1.5 Concepções dos professores entrevistados*

Consideramos importantes alguns comentários feitos pelos professores, durante as entrevistas, por evidenciarem a visão que possuem em relação à Álgebra e seu ensino em sala de aula. Tais comentários serão apresentados a seguir.

Ao ser questionado sobre que significado a Álgebra possui para ele, o professor A[18] respondeu: “A Álgebra é uma ferramenta para a generalização de situações, para a resolução de problemas. É uma linguagem universal.”

Quanto à importância da Álgebra na formação dos alunos, o professor C expressou que: “Quando eles (os alunos) sentem dificuldades para resolver problemas eles já sabem que a representação genérica é uma letra”.

O professor A afirma que: “A introdução de Álgebra é complicada. Talvez por imaturidade dos alunos, talvez a forma didática que o professor utiliza não é adequada, enfim, sempre procuro usar exemplos práticos da realidade do aluno para após partir para os problemas mais complexos.”

Aos professores entrevistados foi indagado sobre os pré-requisitos que seus alunos deveriam ter para poderem compreender Álgebra. Muitos foram os pré-requisitos apresentados.

“Ter desenvolvido estratégias de organização e sistematização do pensamento para a

---

[18] Os professores entrevistados serão identificados por letras maiúsculas.

resolução de problemas. Ter conhecimento das operações com inteiros e racionais. Conceituar os símbolos e identificar a linguagem matemática. Não tendo estas noções básicas, não conseguem relacionar os diferentes significados que são atribuídos às letras". (Professor B)

"Conhecimentos aritméticos: operações, propriedades, hierarquia, resolução de expressões. Conhecimentos geométricos: área, perímetro, construções e propriedades de algumas figuras." (Professor C)

"As operações: Adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Além de área e perímetro." (Professor D)

"Raciocínio aritmético das operações e conseguir abstrair idéias." (Professor E)

Quanto à ocorrência de erros comuns em cálculos algébricos, os professores entrevistados comentaram que alguns erros que os alunos cometem aparecem em variadas situações, em turmas diferentes e em anos diferentes.

De acordo com o Professor A, "eles (os alunos) confundem as operações e suas propriedades. Por exemplo: $2 + x = 2x$ ; $x + x = x^2$ ; $x^3 + x^7 = x^{10}$."

Já o Professor B nos chama atenção para "erros do tipo: $(9x)^2 = 81\ x$; $(-4\ x^2)^3 = -16\ x^6$; $(x^2 + x + 2) + (2\ x^2 + 2x + 4) = 3\ x^4 + 2\ x^2 + 6$" .

O Professor C afirma: "Os mais comuns são: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$; $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$; $a^2 = 2a$; $(2a)^2 = 4a$; $x^2 + x^2 = 2x^4$; $(x^2)^3 = x^8$."

E, ainda, o Professor E afirma que os alunos "cometem erros do tipo: $a\ .\ a = 2a$; $(x + y)^2 = x^2 + y^2$; $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x = \frac{3}{8}x$."

O professor D apresenta os erros que considera comuns:

"Os alunos confundem os coeficientes com o valor da variável, por exemplo, em $3a$ para eles o $a$ vale 3. Um (erro) muito comum é fazerem $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Alguns alunos ignoram o uso dos parênteses para estabelecer hierarquia nas operações, por exemplo, $3.(x + 1)$ eles fazem $3.x + 1$. Fazem confusão com as regras de sinais da multiplicação utilizando-as na soma."

Observamos, entre os professores entrevistados, que a concepção de álgebra como aritmética generalizada[19] é a mais assumida pelos professores do Ensino Fundamental e a atividade algébrica se concentra no "cálculo com letras", tratando as letras como objetos, eventualmente introduzidos através de representações geométricas[20].

Tais práticas podem ser constatadas na forma apresentada pelos professores para introduzir um novo conteúdo algébrico.

O professor A exemplifica a introdução à resolução de equações do segundo grau:

"Primeiro friso que não podemos somar $x^2$ com x, explicando a origem do $x^2$ e do x. Após, vem toda a demonstração da fórmula de Bhaskara e por último saliento o objetivo central do problema que é achar os valores que o x pode assumir".

Já o professor B diz introduzir as expressões algébricas através de um fluxograma e exemplifica:

"Pense num número, some 5, calcule o dobro, retire 8, calcule a metade, diminua o número pensado, o resultado é um, fim. Vamos escrever em linguagem algébrica:

$$x \rightarrow x+5 \rightarrow 2.(x+5) \rightarrow 2.(x+5)-8 \rightarrow \frac{2.(x+5)-8}{2} \rightarrow \frac{2.(x+5)-8}{2}-x \rightarrow \frac{2.(x+5)-8}{2}-x = 1,$$

depois conceituo o que é uma expressão algébrica e dou alguns exemplos."

"Também uso conhecimentos geométricos como área e perímetro para generalizações." (professor C).

"Trabalho bastante com geometria para descrever os produtos notáveis, por exemplo" (professor D).

"Sobre sistema de 1º grau: começo comentando com eles (alunos) uma situação do

---

[19] Esta concepção de álgebra foi apresentada por Usiskin (2003) e comentada no capítulo 2, seção 2.4, deste trabalho.

[20] Estas práticas pedagógicas são classificadas por Lins e Gimenez (1997) como letrista e letrista-facilitadora.

cotidiano para que eles entendam melhor o que está sendo feito. Logo em seguida, trago um exemplo e explico o método algébrico. Após são dados outro exemplos e exercícios" (professor E).

Os erros apresentados nesta etapa de sondagem, as concepções apresentadas pelos professores referentes à Álgebra, o ensino e aprendizagem de conceitos algébricos além dos referenciais teóricos, possibilitaram-nos reflexões e forneceram-nos alguns subsídios para a escolha da abordagem didática e elaboração das atividades de nossa proposta.

### *3.2.2 Etapa 2: Elaboração das atividades e da proposta didática*

A segunda etapa deste estudo destinou-se ao planejamento da proposta didática, desde a escolha da abordagem didática e elaboração das atividades, a escolha e confecção do material manipulativo até a elaboração dos testes.

#### *3.2.2.1 Elaboração das atividades e da abordagem didática*

Baseada nos referenciais teóricos apresentados no segundo capítulo deste estudo e nos elementos apresentados na sondagem, a abordagem didática para o desenvolvimento deste, na verdade é uma combinação de abordagens, que envolve a resolução de problemas, o uso de material manipulativo e o trabalho cooperativo entre os alunos.

Essa mescla ocorreu tendo em vista a produção de significados, pelo aluno, para a atividade algébrica – em especial, as operações entre expressões – e indo ao encontro dos pressupostos apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (BRASIL, 1998, p. 63).

Também procuramos nortear nosso estudo pelas pesquisas de Trigueros e Ursini (2005) e de Usiskin (2003), além dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997; 1998; 2000). Estes autores consideram importante o estudo das quatro dimensões da álgebra: aritmética generalizada, funcional, equações e estrutural; com seus respectivos usos para letras (letras como generalizações do modelo aritmético, letras como variáveis para expressar relações e funções, letras como incógnitas e letras como símbolo abstrato).

Sendo assim, consideramos de suma importância iniciar o trabalho com os diferentes usos da letra antes das operações entre expressões algébricas. Desta forma o trabalho se estruturou em duas fases: a primeira enfocando os três diferentes usos da letra (como generalizações do modelo aritmético, como variáveis para expressar relações e funções e como incógnitas) e a segunda fase enfocando o uso da letra como símbolo abstrato, as operações entre expressões algébricas e suas propriedades.

Levamos em consideração as pesquisas de Henri Picciotto e Anita Wah (1993) no que se refere a uma boa abordagem da álgebra elementar e cientes de que as representações múltiplas são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento, pois funcionam como elemento que constrói o sentido do objeto em estudo tornando possível a construção do conhecimento. Assim, também, apoiamo-nos no fato de que uma noção não pode ser formada a partir de um único registro, por isso necessitamos de um trabalho de diversificação e integração de registros para a formação dos conceitos.

Tais escolhas foram feitas com o objetivo de permitir ao aluno exercer o direito de reflexão, discussão, interpretação e produção de conhecimento.

Wheeler (1996) afirma que, quando escolhemos uma abordagem para introduzir o pensamento algébrico, de alguma forma estamos interferindo no trabalho com as outras abordagens.

Tendo consciência de que outras abordagens também seriam possíveis para o desenvolvimento do pensamento algébrico e compreensão das operações entre expressões algébricas, escolhemos a abordagem aqui descrita por acreditar que, qualitativamente, a mesma proporciona alguns aspectos que merecem destaque, tais como o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem, a formulação de hipóteses e argumentações, o processo de produção de significados para as operações entre expressões algébricas e conseqüentemente de conhecimento, a cooperatividade entre os alunos.

Quanto às atividades, pensou-se em modelos de questões coerentes com a proposta didática e também que formassem um nível de crescimento de dificuldades – fácil, médio e difícil. Algumas foram elaboradas, outras adaptadas de livros didáticos nacionais, em particular Isolani (1999), Dante (2002), Giovanni (2002) e Bigode (2000). Alguns cuidados foram estabelecidos quanto à linguagem utilizada, de modo que se aproximasse o máximo possível da linguagem verbal usada pelos alunos, e que as atividades representassem problemas a serem solucionados pelos mesmos.

Para a primeira fase de atividades[21] – usos da letra – buscamos questões que contemplassem os diferentes níveis para o modelo 3*UV*[22] das pesquisadoras Trigueros e Ursini (2005). Foram, portanto, separados em três grupos de questões, o primeiro que enfoca o uso de variável como incógnita, o segundo o uso de variável em generalizações aritméticas e o terceiro como variável funcional.

O objetivo principal nas atividades desenvolvidas foi estimular os alunos para que sentissem a necessidade de algo a mais do que eles já sabiam. O aluno deveria perceber que a aritmética nem sempre dá conta de responder às questões propostas.

As primeiras aulas[23] tinham a finalidade de desenvolver um trabalho envolvendo o uso

[21] A proposta desta primeira fase da implementação, os objetivos com cada atividade e as atividades referentes a esta fase estão, na íntegra, no anexo B.

[22] O *modelo 3UV*, bem como seus níveis, foi apresentado no segundo capítulo desta dissertação.

[23] Aulas 1 e 2 do anexo B.

da letra como incógnita. Alguns exemplos de situações-problema apresentadas aos alunos são apresentadas nos quadros 3.4 e 3.5. No anexo B encontram-se as demais situações-problema trabalhadas com a turma.

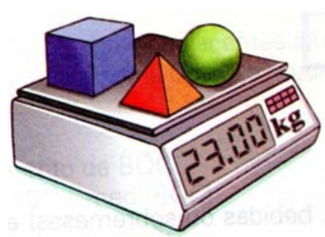
Caio recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 24 notas, algumas são de R$ 50,00 outras de R$ 5,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$ 525,00. Quantas notas de R$ 50,00 e quantas notas de R$ 5,00 Caio recebeu de seu patrão?

a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:

b) Como essa situação poderia ser representada?

Quadro 3.4 – Situação-problema 1 do uso de variável como incógnita

Observe a balança abaixo. Se o cubo pesa 12 quilogramas e a bola pesa 4 quilogramas. Qual é o peso da pirâmide?




a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:

b) Descreva uma forma de representar o peso da pirâmide se soubermos o peso do cubo e da bola:

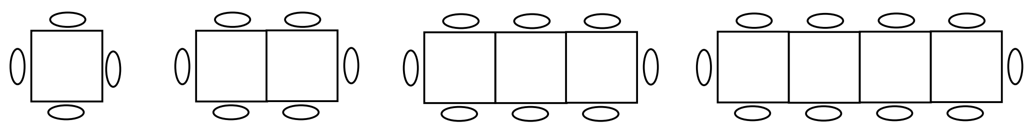
Quadro 3.5 – Situação-problema 6 do uso de variável como incógnita

O objetivo do trabalho com este tipo de questão (quadros 3.4 e 3.5) era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação em que é necessário usar procedimentos para resolver certos tipos de problemas, alguns inclusive que podem ter resoluções aritméticas simples. Os alunos devem observar as incógnitas a serem descobertas em cada uma das situações-problema apresentadas, envolvendo diferentes operações.

O segundo grupo de atividades procura trabalhar com generalizações de procedimentos aritméticos. Ao propor tais questões nosso objetivo era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação caracterizada por Usiskin como *álgebra como aritmética generalizada*, em que as idéias-chave são *traduzir e generalizar*.

Um exemplo de questão apresentada aos alunos com este objetivo é a apresentada no quadro 3.5.

Ao organizar uma festa de 15 anos, houve uma discussão sobre como organizar as mesas para acomodar os convidados. As mesas eram quadradas e foram testadas algumas maneiras de colocá-las. As figuras abaixo representam a vista superior da disposição de cadeiras em volta de mesas:



Responda:

a) Como seria a disposição das cadeiras se tivéssemos 5 mesas enfileiradas? Desenhe:

b) Supondo que a organização das mesas continuassem sendo enfileiradas, conforme as acima, complete a tabela:

| Quantidade de mesas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade de cadeiras | | | | | | | | | |

c) Descreva uma forma de obter o número de cadeiras a serem colocadas em volta das mesas se soubermos a quantidade de mesas que estarão dispostas como o sugerido acima?

d) Quantas cadeiras seriam necessárias se fossem colocadas 15 mesas enfileiradas?

e) Existirá um número máximo de mesas que poderão ser enfileiradas? Justifique?

f) Quantas mesas seriam necessárias enfileira para acomodar 42 cadeiras?

g) Qual a menor quantidade de mesas dispostas em uma única fila seriam necessárias para acomodar 318 cadeiras?

h) É possível saber a quantidade de mesas que devem ser enfileiradas se soubermos a quantidade de cadeiras que estarão dispostas? Explique como:

Observação: Adaptação de atividade contida em Isolani (1999, p. 68).

Quadro 3.5 – Atividade do uso de variável como generalização: situação-problema 10

Já o terceiro grupo de atividades procurava enfocar o uso da letra como variável funcional. Temos um exemplo de questão com esse enfoque no quadro 3.6.

Bruno, aluno da professora de matemática, gostou da idéia de máquina que transforma número e inventou essa outra máquina:


a) Observe o que a máquina de Bruno faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de saída | | | | | | | | | | | |

b) O que podemos afirmar sobre o "número de saída" relacionado ao "número de entrada"?

c) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina? Qual?

d) Se x representa o "número de entrada", como poderíamos representar o que "sai" da máquina?

e) Tente completar esta tabela:

| Número de entrada | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Número de saída | 23 | 11 | - 13 | 32 |

f) Que procedimentos você teve para chegar aos resultado desta tabela?

Observação: Adaptação de atividade contida em Dante (2002, p. 158)

Quadro 3.6 – Atividade do uso de variável como variável funcional: situação-problema 14

O objetivo com este tipo de questão era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam ao serem convidados a analisar regularidades numéricas a partir de dados organizados em tabelas e se estabeleceriam uma relação funcional entre as variáveis envolvidas.

Para a segunda fase de atividades[24] – que enfoca o uso da letra como símbolo abstrato e as operações com expressões algébricas – foram utilizadas questões que remeteriam às operações entre expressões algébricas, bem como ao uso da linguagem simbólica. As questões também deveriam provocar a elaboração de hipóteses e a discussão entre os grupos. Nosso principal objetivo era proporcionar aos alunos a produção de significado para as operações entre expressões algébricas e suas propriedades, para que, ao término de nosso trabalho, os alunos conseguissem manipular as expressões algébricas compreendendo e justificando os procedimentos utilizados.

Algumas situações-problema remetiam ao uso da adição (ou subtração), como as exemplificada no quadro 3.7. Com este tipo de atividade pretendíamos que os alunos observassem que a situação pode ser representada através de uma expressão algébrica e que a mesma possui outra expressão equivalente (mais simplificada), obtida através do agrupamento de termos semelhantes.

<u>Situação-problema 1:</u>

Uma empresa de alimentos distribui seus produtos em cinco mercados da região. Um caminhão parte da empresa para fazer entregas em todos os cinco mercados. Sabe-se que:

– para ir da empresa até o primeiro mercado, o caminhão irá percorrer uma certa distância em quilômetros;

– para ir do primeiro mercado até o segundo, o caminhão irá percorrer 5 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

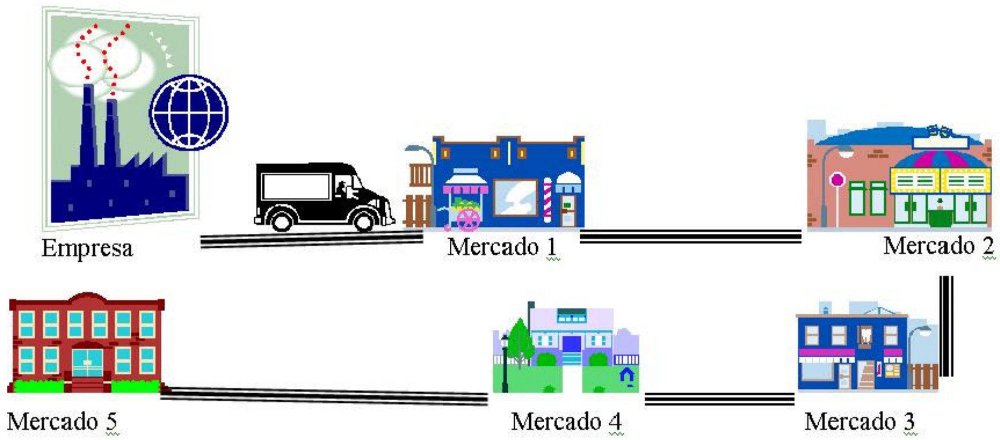
– para ir do segundo mercado até o terceiro, o caminhão irá percorrer 3 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– para ir do terceiro para o quarto mercado, o caminhão irá percorrer 2 quilômetros a menos que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– e, finalmente, do quarto mercado para o último, o caminhão irá percorrer o dobro do que percorreu para ir da empresa até o primeiro mercado.

[24] A proposta desta segunda fase da implementação, os objetivos de cada atividade e as atividades referentes a esta fase estão, na íntegra, no Anexo C deste estudo.

Faça uma simulação da situação representando no esquema abaixo e responda as perguntas:




a) Como você poderia representar a distância total que o caminhão vai percorrer?

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

c) Se considerarmos a distância da empresa até o mercado 1 como sendo x, qual seria o valor de x se a distância total percorrida pelo caminhão foi de 15 km?

Atividade proposta em aula:

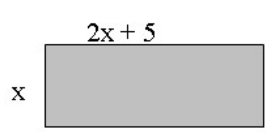
Utilizando o material, como poderíamos representar a expressão algébrica $x^2 + 3x - 2 + 3x^2 - 5x + 4$ de maneira mais simplificada?

Quadro 3.7 – Atividades com o uso de operações – adição e subtração *a*

Outras questões, como a situação-problema 7 e a atividade proposta em aula, apresentadas no quadro 3.8, tinham o objetivo de que o aluno percebesse a possibilidade de representar a área de um retângulo através da multiplicação entre as expressões algébricas que representam as medidas de seus lados e utilizassem essa multiplicação para obter uma expressão equivalente ao produto.

Situação-problema 7:

Observe a figura abaixo:



a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa figura:

b) Existe uma expressão algébrica que representa a área da figura abaixo? Qual?

c) Suponha que o x vale 5 centímetros, então qual seria a área desta figura?

d) E se x valesse 8 centímetros?

e) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para x e calcular?Justifique:

Atividade proposta em aula:

Utilizando o que já estudamos, indique a expressão algébrica equivalente a :

a) (x + 2) . (x + 5) =

b) (2x + 3) . (x + 1) =

c) (x + 1) . ( x + 3) =

d) (y + 1) . ( y + 1) =

e) (3x + 2) . (4x + 1) =

f) (x +1) . (x – 1) =

Quadro 3.8 – Atividades com o uso de operações – multiplicação

Outras, como a segunda atividade do quadro 3.8, objetivavam vincular o cálculo algébrico – no caso, a multiplicação – com o uso da propriedade distributiva, trabalhando de forma generalizada com números e operações.

Havia situações, como a apresentada no quadro 3.9, cujo principal objetivo era que o aluno percebesse a propriedade distributiva da multiplicação.

Situação-problema 10:

Complete a tabela abaixo:

| **Valor de w** | **Valor de x** | **Valor de y** | **Valor de z** | **(w+x).(y+z)** | **w.(y+z)+x.(y+z)** | **w.y+x.z** | **w.y+w.z+x.y+x.z** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | | | | |
| 2 | 4 | 0 | 3 | | | | |
| 3 | –1 | 4 | 1 | | | | |
| –1 | 5 | 8 | –2 | | | | |
| 2 | –2 | –1 | 3 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na quinta coluna, na sexta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de w, x, y e z, como você poderia representar (w + x) . (y + z)?

Quadro 3.9 – Atividades com o uso de operações – propriedade distributiva

Situação-problema 14:

Complete a tabela abaixo:

| Valor de x | Valor de y | $(x + y)^2$ | $x^2 + y^2$ | x . (x+ y) + y. (x + y) | $x^2 + 2.x.y + y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | 3 | | | | |
| – 2 | – 6 | | | | |
| 0 | 2 | | | | |
| 1 | 8 | | | | |
| 2 | –1 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na terceira coluna, na quinta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de x e y, como você poderia representar $(x + y)^2$?

Quadro 3.10 – Atividades com o uso de operações – potenciação

Algumas atividades salientavam, ainda, a potenciação de expressões algébricas, como a apresentada no quadro 3.10. Com esta situação-problema, tínhamos como objetivo que o aluno percebesse a ocorrência de alguns produtos notáveis, onde multiplicando e multiplicador eram a mesma expressão algébrica.

### *3.2.2.2 Escolha e confecção do material manipulativo*

Tendo em vista um dos objetivos deste estudo, que é o de possibilitar a produção de significados referentes às operações com expressões algébricas em uma aprendizagem cooperativa, fazendo uso de representações múltiplas e pensando nas diferentes linguagens utilizadas – informal, simbólica ou algébrica, além da geométrica – ponderamos a utilização de materiais que pudessem proporcionar uma forma de representação das expressões com o intuito de auxiliar os alunos nas suas justificações.

A escolha da ferramenta utilizada neste estudo foi feita tendo em vista estas finalidades além de proporcionar uma representação associada a figuras geométricas.

De acordo com Neves (1995, p. 50), o uso de representações geométricas para dar sentido a sentenças algébricas parece facilitar a análise dos alunos frente a objetos algébricos.

O pesquisador salienta ainda que

> Este recurso didático parece facilita a compreensão dos alunos para certos fatos algébricos. Ele se apóia em uma transposição didática onde a significação das relações entre números é transposta para o cálculo genérico de áreas. Aqui a atividade algébrica se beneficia dos recursos visuais do pensamento geométrico (NEVES, 1995, p. 51).

A ferramenta, aqui chamada de *material manipulativo,* é uma *adaptação* feita a partir de alguns materiais comercializados, em especial nos Estados Unidos. De acordo com Picciotto (2006), há três versões comerciais de materiais de manipulação para o ensino de álgebra. São eles, em ordem de aparecimento no mercado, *Algebra Tiles* (Cuisenaire)**,** *Lab Gear* (Creative Publications) e *Algeblocks* (Southwestern Publishing). Todos os três utilizam-se da propriedade distributiva e do conceito de área. Porém, só o Lab Gear e Algeblocks permitem o trabalho em três dimensões.

O material manipulativo utilizado neste trabalho está baseado nos conceitos e regras dos materiais Algebra Tiles e Lab Gear, deste último, nada que envolva três dimensões foi empregado. Porém, algumas regras de utilização, propriedade dos materiais e peças utilizadas nas versões comerciais citadas foram modificadas a fim de obter uma adequação aos objetivos deste estudo.

Cabe advertir que a utilização de ferramentas que usam representações geométricas para produzir significado para sentenças algébricas como recurso didático é útil para lidar com certos tipos de operações entre algumas expressões algébricas e não com outras. Existem algumas ressalvas, como por exemplo, a de que não existe significação, para representação geométrica com o material manipulativo, para $x^4 + x^5 + 2x^5 - 3x^4$. Por isso, neste estudo, não nos detivemos apenas no uso do material manipulativo para a produção de significados, ele teve um caráter auxiliar.

Neves (1995, p. 51) afirma que "devemos incentivar recursos didáticos desse tipo, entretanto não devemos esperar que isso resolva todas as dificuldades dos alunos com álgebra." Compartilhamos deste pensamento do autor e gostaríamos de destacar que essa, com certeza, não é nossa expectativa com o uso do material manipulativo. Por isso, salientamos que sua utilização é apenas o de um auxiliar na produção de significado para a atividade algébrica com o intuito de fornecer subsídios para os alunos elaborarem suas justificações.

*Descrição do material manipulativo:*

Retângulos e quadrados coloridos feitos em papel cartão sendo:

- quadrados grandes de lado 5 cm, na cor vermelha;
- quadrados médios de lado 3,5 cm, na cor preta;
- quadrados pequenos de lado 1,5 cm, na cor amarela;
- retângulos na cor laranja, cujas dimensões são 1,5 cm x 5 cm ;
- retângulos na cor azul, cujas dimensões são 3,5 cm x 5 cm;
- retângulos na cor verde, cujas dimensões são 1,5 cm x 3,5 cm.

As medidas dos lados dos quadrados e retângulos podem ser alteradas conforme a necessidade, no entanto é conveniente não utilizar medidas que possibilitem associações entre os lados. Por exemplo, um quadrado de lado 1 cm e outro de lado 2 cm, o lado do segundo quadrado comporta dois do quadrado menor. Esse tipo de associação pode proporcionar ao aluno conclusões não verdadeiras.

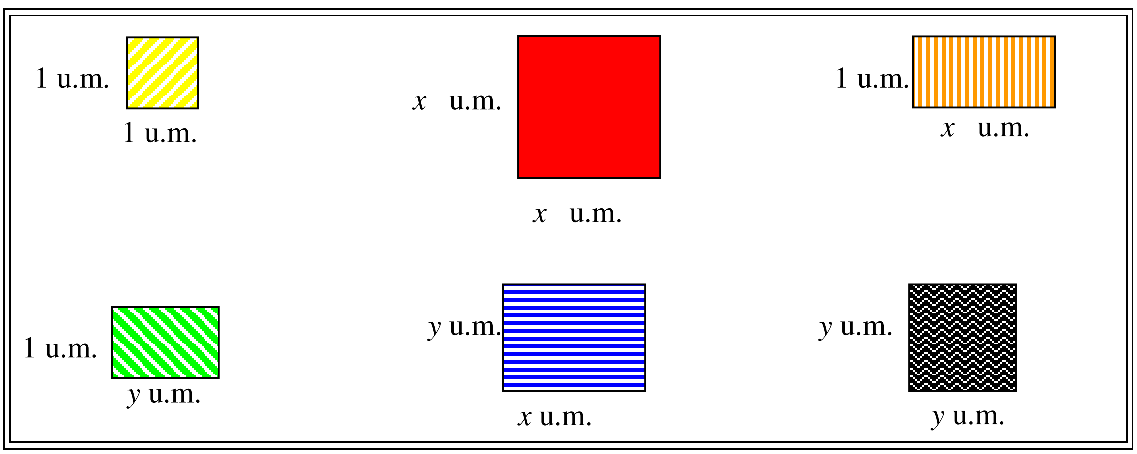
<u>*Utilização:*</u>

Para a utilização do material foram estabelecidas algumas combinações com os alunos ("regras"), que são as seguintes:

◆ Todo o trabalho será realizado utilizando-se a área dos retângulos e quadrados em função da medida de seus lados (pré-estabelecidos).

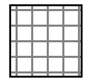
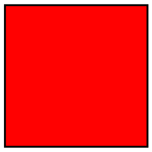
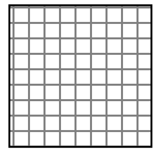
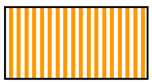
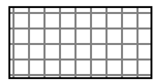
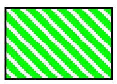
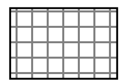
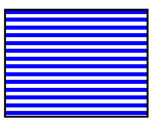
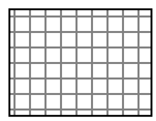
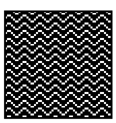
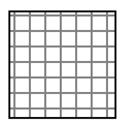
◆ Convenções para utilizar o material:

a) o quadrado menor (amarelo) será a unidade de área, tendo como medida do lado 1 u.m., o quadrado maior (vermelho) terá como medida do lado $x$ u.m., o retângulo laranja, terá altura 1 u.m e comprimento $x$ u.m., o retângulo verde terá altura 1 u.m e comprimento y u.m., o retângulo azul terá altura y u.m e comprimento $x$ u.m. e om quadrado médio (preto) terá como medida do lado y u.m. Portanto, o quadrado menor terá área 1, o maior terá área $x^2$ u.a. e o retângulo terá área $x$ u.a., e assim por diante, como mostrado no quadro 3.11.




Quadro 3.11 – Material manipulativo: convenção *a*

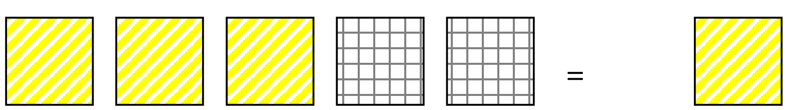
b) O lado colorido será utilizado para a representação de valores positivos correspondentes às áreas dos quadriláteros e o verso de cada peça será utilizado para representar o oposto desse valor, portanto um valor negativo. Portanto o sinal de menos na frente de um número ou expressão indica seu oposto, por exemplo, – (+ 1) indica o oposto de + 1, ou seja, – 1. Podemos observar essa convenção no quadro 3.12. Assim sendo, – (– 1) indica o oposto de – 1, ou seja, + 1.

| | | | |
|---|---|---|---|
|  | Representa 1 |  | Representa –1 |
|  | Representa $x^2$ |  | Representa – $x^2$ |
|  | Representa $x$ |  | Representa – $x$ |
|  | Representa $y$ |  | Representa – $y$ |
|  | Representa $xy$ |  | Representa – $xy$ |
|  | Representa $y^2$ |  | Representa – $y^2$ |

Quadro 3.12 – Material manipulativo: convenção *b*

c) Cada positivo anula um negativo da mesma espécie, isto é, cada peça colorida anula uma virada da mesma espécie. Isso significa que a subtração entre dois números ou duas expressões, com o uso do material, é considerado como a adição do primeiro(a) com o oposto do segundo(a). Por isso toda vez que surgir o sinal de menos indicando uma subtração, o mesmo é interpretado pelo aluno como a adição com o oposto, por exemplo 3 – 5 é 3 + (–5).

Exemplo:



d) Partindo do conhecimento de que a área do retângulo pode ser obtida através da multiplicação de suas dimensões, convencionou-se, com o material, que a área do retângulo cujo comprimento é um dos termos da multiplicação e cuja largura é o outro termo será obtida através da soma das áreas das figuras que compõem tal retângulo.

Por exemplo, o retângulo cujas dimensões são $x + 3$ e $x$ possui uma área igual a $x^2 + 3x$ como pode ser observado na figura 3.1.

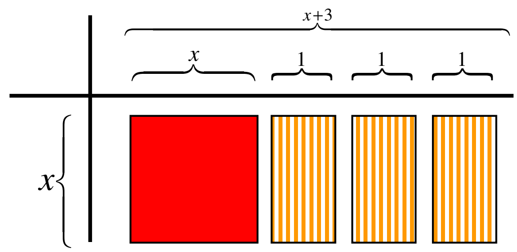



Figura 3.1 – Material manipulativo: multiplicação

Para facilitar a formação do retângulo e a visualização de suas dimensões podem-se utilizar as próprias peças do material para marcar as medidas dos seus lados. Entretanto, deve ficar claro para os alunos que o que está sendo considerado é o comprimento (medida do lado) das peças utilizadas na marcação e não sua área. Vejamos, nas figuras 3.2 e 3.3, alguns exemplos de como se poderiam utilizar as próprias peças para delimitar o retângulo obtido e estabelecer a expressão resultante da multiplicação de suas dimensões.

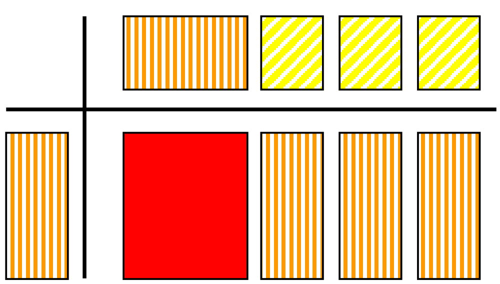


Figura 3.2 – Material manipulativo: multiplicação exemplo 1

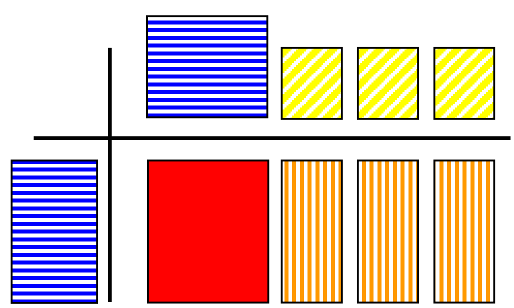


Figura 3.3 – Material manipulativo: multiplicação exemplo 2

Convém ressaltar que devem ser considerados alguns detalhes quanto à disposição das peças para formar o retângulo.

As duas figuras a seguir são retângulos (figura 3.4) feitos com a mesma quantidade de peças, mas o retângulo da direita está mais organizado. Esta organização deve ser levada em consideração.

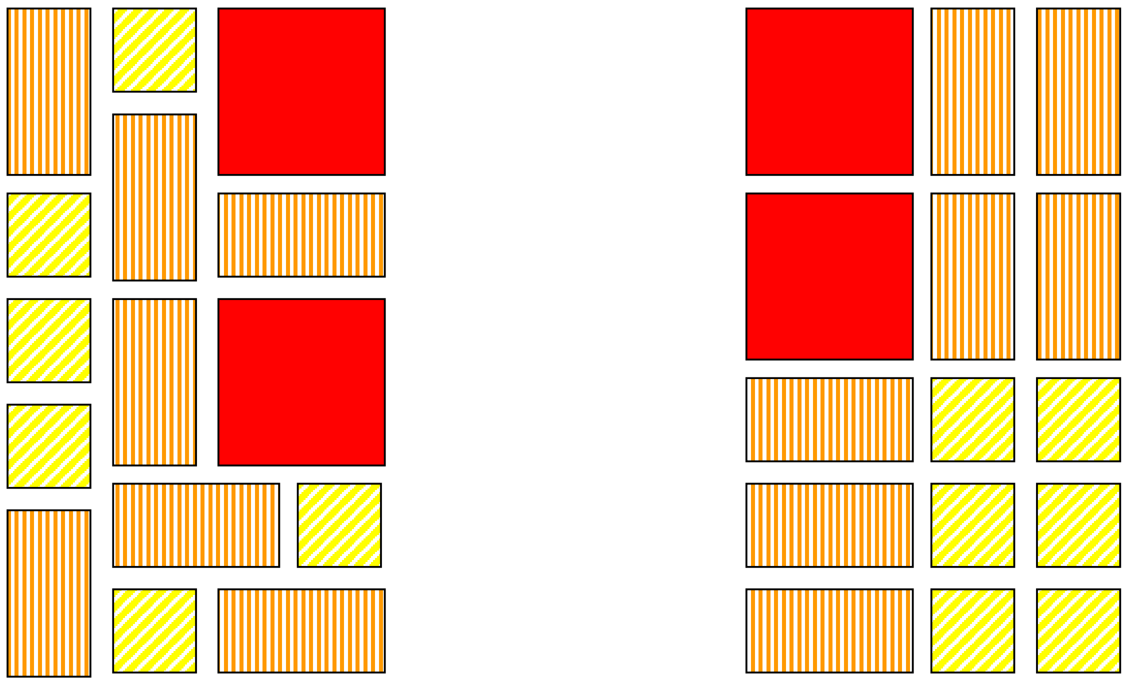


Figura 3.4 – Material manipulativo: organização dos retângulos

São regras para a construção organizada dos retângulos:

- Para que duas figuras sejam justapostas, os lados contíguos devem ter a mesma medida.
- Quadrados grandes não pode ser adjacente do quadrado pequeno.
- Quadrados pequenos devem estar sempre juntos e quadrados grandes também.

Temos consciência de que este material manipulativo apresenta algumas limitações:

1) só pode representar situações onde apenas duas variáveis estão envolvidas;
2) restringe $x$ e $y$ a valores positivos ;
3) ele sugere que $x$ e $y$ são maiores que 1, devido às dimensões das peças;
4) o material não é uma simulação de cada situação-problema em si, é apenas uma representação possível para a expressão algébrica obtida na situação-problema original.

### *3.2.2.3 Elaboração dos testes*

Foram realizados dois testes, um após a primeira fase da implementação – usos de variável – e outro após a segunda fase da implementação – operações com expressões algébricas.

Estes testes foram pensados em caráter complementar em termos de registros, servindo como mais um subsídio para a verificação da aprendizagem dos alunos.

O processo de elaboração das questões para cada teste escrito foi complexo devido às características das variáveis didáticas envolvidas – os testes deviam contemplar a maior parte dos assuntos discutidos em aula para uma melhor análise do aprendizado, seriam respondidos individualmente pelos alunos e realizados num tempo determinado (2 períodos de aula).

A fundamentação teórica nos serviu de base para a definição dos critérios de seleção das questões aplicadas aos alunos.

Para o *primeiro teste* foram escolhidas seis questões, divididas em quatro grupos: as três primeiras questões se referiam ao uso da letra como incógnita, a quarta questão remetia para uma generalização, a quinta questão para a letra com valor funcional e a última questão era um teste de compreensão quanto aos diferentes usos da letra.

Seguem as questões teste aplicado ao final da primeira etapa de nosso estudo, os itens que as orientaram e seus respectivos comentários.

As questões descritas no quadro 3.13 são questões fechadas, isto é, que apresentam uma única solução numérica.

Com relação à primeira questão, trata-se de uma questão apresentada em linguagem coloquial, que pode ser solucionada através do equacionamento e posterior resolução ou por tentativas.

Com relação às questões 2 e 3 (quadro 3.13), apresentadas em linguagem simbólica, queríamos estudar o conhecimento dos alunos sobre resolução de equações e como lidavam com as incógnitas, o que elas representavam para eles. São questões que poderiam ser solucionadas por tentativas, desfazendo operações ou pela propriedade da igualdade de dois termos.

| |
|---|
| Questão 1<br><br>Pensei em um número e multipliquei-o por 10. Em seguida dividi o resultado obtido por 5. A resposta final foi 4.<br><br>a) Que número eu havia pensado?<br>b) Explique como você chegou nesse resultado:<br>c) É possível pensar um número diferente deste que você encontrou e, realizando as mesmas operações, chegar no resultado 4? Explique sua resposta: |
| Questão 2<br><br>Quanto deve valer x para que esta afirmação esteja correta? $x - 5 = 15$ |
| Questão 3<br><br>Para que valor ou valores de n esta afirmação estará correta? $2.n + 3 = 123$ |

Quadro 3.13 – Questões 1, 2 e 3 do teste sobre os usos de variável

O objetivo destas questões era estudar se os alunos apresentavam algum raciocínio algébrico e se eles o utilizavam nos procedimentos algorítmicos de resolução de equações.

Ao propor a questão 4 (quadro 3.14) nosso objetivo era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação que envolvia o uso da variável como generalização, além de verificar como os alunos traduziam e generalizavam a situação proposta.

Questão 4

Em uma apresentação de dança, a professora de dança resolveu organizar os dançarinos em filas, da seguinte forma:

1ª fila ⟶
2ª fila ⟶
3ª fila ⟶
4ª fila ⟶
⋮

⋮

a) Quantos dançarinos estarão na 5ª fila?

b) Quantos dançarinos estarão na 10ª fila?

c) Existe uma regra para a formação das filas? Você pode escrevê-la?

d) Explique como chegou a essa regra de formação:

e) Qual fila terá exatamente 9 dançarinos?

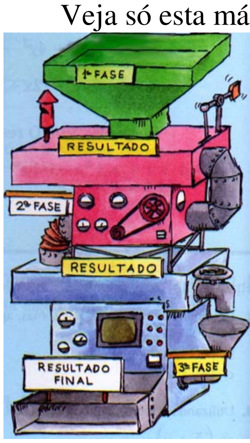
f) É possível saber a fila se soubermos quantos dançarinos há nela? Explique:

Quadro 3.14 – Questão do teste sobre os usos de variável

O objetivo da questão 5 (quadro 3.15) era verificar as hipóteses que os alunos apresentariam diante de uma situação que envolvia o uso da variável em uma relação funcional, bem como verificar se os mesmos identificavam tal relação existente entre o número de entrada e o resultado final.

Questão 5

Veja só esta máquina, ela trabalha em fases. Em cada fase há uma operação a ser feita:




**1ª fase:** multiplica por 10

**2ª fase:** soma 3

**3ª fase:** diminui 5

a) Observe o que a máquina faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resultado final | | | | | | | | | |

b) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina? Qual?

c) Se n representa o "número de entrada", como poderíamos representar o resultado final da máquina?

d) O resultado final que iremos obter depende de alguma coisa? De quê?

e) Se o resultado final foi 98, qual o número que entrou na máquina?

f) Explique como você encontrou esse número:

Observação: A figura desta questão foi retirada do livro: Matemática idéias e desafios, Sétima série, editora Saraiva, 2003, p. 64.

Quadro 3.15 – Questão 5 do teste sobre os usos de variável

Esperava-se, com a questão 6, apresentada no quadro 3.16, verificar se os alunos reconhecem e diferenciam os dois usos distintos da letra em álgebra: como variável funcional ou como incógnita.

Questão 6

Observe em quais situações o $x$ pode ter um **apenas um valor** ou **pode variar**[25], isto é, $x$ pode assumir vários valores. Em seguida, ligue cada expressão ao resultado de sua observação:

| | |
|---|---|
| $3x + 4 = 10$ ◆ | ◆ Apenas um valor |
| $2x + 10$ ◆ | |
| $\frac{4x}{3} = 8$ ◆ | |
| $x + 3 - 2 = 8$ ◆ | |
| $x + 3 = y$ ◆ | |
| $3 = x + 1$ ◆ | ◆ Pode variar |
| $4x + 3 - 2 = m$ ◆ | |
| $-5x = 10$ ◆ | |
| $2x + 3x - 1$ ◆ | |
| $p = \frac{x}{2}$ ◆ | |

Quadro 3.16 – Questão 6 do teste sobre os usos de variável

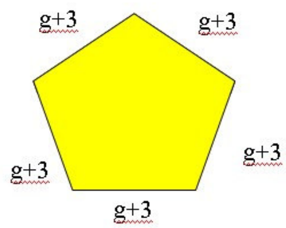
[25] Ao formularmos o enunciado desta questão, utilizamos a expressão "pode variar" esperando que o aluno aceitasse a possibilidade (ou não) do $x$ variar. Sendo assim, não sentimos a necessidade de definirmos se $p$, $m$ e $y$ eram constantes ou variáveis, uma vez que o esperado era que as duas possibilidades fossem analisadas pelos alunos.

Quanto ao *segundo teste,* que tratava do foco de nossa pesquisa, foram selecionadas seis questões. Nas quatro primeiras questões as expressões algébricas eram referidas a medidas de figuras, enquanto que as duas últimas só utilizavam linguagem simbólica e consistiam em uma miscelânea de situações envolvendo operações entre expressões algébricas estudadas no decorrer da implementação da proposta.

A seguir serão apresentadas as questões do teste acompanhadas de comentários e das expectativas envolvidas.

Questão 1

Como você representaria o perímetro desta figura?



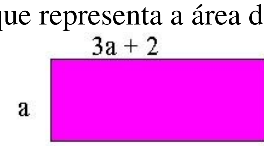

Se a letra g vale 10 centímetros, então qual será o perímetro da figura acima?

Quadro 3.17 – Questão 1 do teste sobre operações entre expressões algébricas

Com o primeiro item desta questão (quadro 3.17) o objetivo era observar se o aluno perceberia que o perímetro pode ser obtido com a adição das expressões algébricas que representam as medidas dos lados e como esta adição era efetuada. Com o segundo item o objetivo era perceber como o aluno usaria a informação numérica, se substituindo na expressão simplificada no primeiro item ou se substituiria nas informações da figura e recalcularia o perímetro.

Questão 2

Qual a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo?

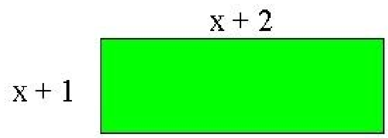



Expressão algébrica:

Se a valer 5, qual será a área da figura?

Questão 3

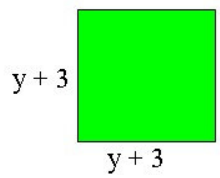
Qual a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo?




Expressão algébrica:

Questão 4

Qual a expressão algébrica que representa a área do quadrado abaixo?




Expressão algébrica:

Há uma outra expressão algébrica que represente essa área?Qual?

Quadro 3.18 – Questões 2,3 e 4 do teste sobre operações entre expressões algébricas

Com as três questões acima (quadro 3.18) os objetivos eram os mesmos: verificar se o aluno utilizaria a operação de multiplicação entre as expressões algébricas, qual o procedimento e ferramenta utilizados para realizar a multiplicação e se havia a percepção da propriedade distributiva.

Questão 5

Existe uma forma mais simples de escrever este expressão algébrica? Se sim, qual?

$$x \cdot (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$$

Quadro 3.19 – Questão 5 do teste sobre operações entre expressões algébricas

A finalidade da questão 5 (quadro 3.19) era observar se o aluno percebe a possibilidade de simplificar a expressão dada e se para isso respeita a hierarquia de operações, bem como analisar os procedimentos utilizados para realizar a simplificação.

| Questão 6 | |
|---|---|
| Resolva as operações indicadas: | |
| a) $3 + 8 - 15 + 9 =$ | g) $2x + 3y - 5x + 9 + y + 6x - 5y - 5=$ |
| b) $5.(4 + 7) =$ | h) $- 3x .(2x + 5x^2) =$ |
| c) $(x + 2).(x + 3) =$ | i) $(8 - 5)^2 =$ |
| d) $(2x + 4).(5 + 3x) =$ | j) $(3 - c)^2 =$ |
| e) $(x + 4).(x + y) =$ | l) $(y + c)^2 =$ |
| f) $(x - 1).(x + 3) =$ | m) $(y - 5).(y - 6) =$ |

Quadro 3.20 – Questão 6 do teste sobre operações entre expressões algébricas

Foram vários os objetivos propostos para esta sexta questão (quadro 3.20). De modo geral queríamos observar os procedimentos utilizados para a simplificação das expressões apresentadas. No entanto tínhamos alguns objetivos específicos para cada item da questão, os quais serão explicitados a seguir.

Nos itens *a* e *b* (quadro 3.20) queríamos observar se os alunos iriam utilizar os mesmos procedimentos utilizados nas expressões algébricas ou se utilizariam os procedimentos aritméticos somente.

Quanto aos itens *c, d, e, f, h* e *m* (quadro 3.20) queríamos verificar a compreensão da propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma. Com os itens *f*, *h* e *m* (quadro 3.20), além da propriedade distributiva queríamos analisar a questão do sinal de menos, qual o significado produzido pelo aluno para o mesmo.

Com o item *g* (quadro 3.20) o objetivo era observar se na realização das somas o aluno levaria em consideração o agrupamento dos termos semelhantes.

E, finalmente, com os itens *i*, *j* e *l* (quadro 3.20) o objetivo era analisar o significado produzido para a potenciação e qual o procedimento utilizado para efetuá-la, se a utilização da propriedade distributiva ou dos produtos notáveis estudados anteriormente.

### *3.2.3 Etapa 3: Implementação da proposta*

A implementação da proposta será relatada no capítulo seguinte.

# CAPÍTULO 4: NOSSA INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA

Neste capítulo, será apresentado um relato da aplicação das atividades[26] deste estudo e uma análise das estratégias utilizadas pelos alunos no transcorrer das tarefas e dos testes, interpretadas de acordo com os referenciais teóricos expostos no capítulo 2.

A implementação da proposta didática ocorreu com o *grupo experimental,* denominação dada por nós à turma do segundo ano do terceiro ciclo (correspondente a uma sétima série) do Ensino Fundamental na qual foram desenvolvidas a metodologia e as atividades propostas. No que se refere especificamente aos alunos da turma pesquisada, cabe salientar que no início do ano letivo a turma contava com 23 alunos. Entretanto no decorrer do ano letivo este número sofreu alterações devido à saída de alguns alunos e à entrada de outros. Dos 23 alunos que iniciaram o ano letivo nessa turma, três foram transferidos para outras escolas e dois foram infreqüentes (com mais de 75% de faltas). Assim sendo, estes não foram considerados para o estudo, embora tenham realizado algumas atividades. Também não foi considerada para fins de estudos a aluna que ingressou na turma em meados de outubro. Efetivamente participaram da pesquisa 18 alunos.

O grupo participou de 25 encontros totalizando 38 períodos de aula, sendo 26 destes períodos de 50 minutos e 12 de 30 minutos[27]. Destes, 8 encontros (12 períodos) foram destinados à primeira fase de atividades referentes aos usos da variável e 17 encontros (26 períodos) destinados à compreensão das operações entre expressões algébricas.

O período de implementação desta proposta foi de julho a outubro de 2006.

Optamos por realizar as atividades em grupos, definidos pelos próprios alunos, a fim de que desenvolvessem as habilidades de expressão oral e escrita, desenvolvessem o convívio

[26] Todas as atividades, situações-problema e testes aplicados em sala de aula encontram-se nos anexos deste estudo. No anexo B encontram-se as atividades referentes à fase 1 e no anexo C as utilizados na fase 2.

[27] Às quintas-feiras ocorriam as reuniões pedagógicas da escola, sempre após o intervalo. Por esse motivo, neste dia da semana, os alunos tinham cinco períodos de aula de 30 minutos cada. Um dos três períodos semanais de matemática nesta turma ocorria no referido dia da semana.

em grupo, trocassem informações com os outros, discutissem procedimentos e estratégias para resolução das atividades, levantassem conjecturas e hipóteses, fizessem comentários e conclusões comuns, visando, com isso, o enriquecimento do conhecimento de cada um dos alunos. Essa sistemática foi adotada no decorrer das duas fases da implementação.

As situações-problema a serem solucionadas eram entregues impressas a cada grupo. Os grupos discutiam as possibilidades, levantavam hipóteses e estratégias, anotavam suas conclusões na folha impressa que continha a situação-problema e entregavam-na para a professora. Em seguida, socializavam suas conjecturas e conclusões com o restante da turma e em conjunto, formulavam uma conclusão mais generalizada para a situação. As conclusões eram anotadas pelos mesmos em seus cadernos para possíveis consultas posteriores.

As interferências orais da professora ocorreram durante a apresentação do material manipulativo e de suas convenções para a utilização, quando solicitada pelos alunos (ou grupos) ou quando, nas socializações realizadas em grande grupo, os alunos validavam alguma convenção errônea ou apresentavam alguma conclusão falsa. Em tais intervenções, a professora procurava ter o cuidado de não apresentar a “sua” versão mas de provocar os alunos, através de questionamentos para que chegassem às conclusões corretas. Momentaneamente, nas discussões em pequenos grupos, eram aceitas todas as hipóteses e conclusões levantadas pelos alunos, pois os mesmos teriam a possibilidade de revê-las nas discussões com a turma.

Foi considerado que a professora não deveria, em hipótese alguma, dizer para o aluno o que ele deveria fazer, mas encaminhar a atividade por meio de questionamentos que ajudassem o aluno, ou ao grupo, a perceber caminhos que o levassem ao resultado esperado.

Na primeira fase da implementação, os alunos não contavam com ferramentas para auxiliar na confirmação de suas hipóteses. Enquanto que, na segunda fase, tinham à sua disposição o material manipulativo que os auxiliava na confirmação ou refutação de suas hipóteses referentes às situações-problema solicitadas.

Todas as aulas foram gravadas em áudio para que pudesse ser feita análise *a posteriori*.

Os testes, ao final de cada fase da implementação, foram propostos individualmente, para que os alunos tivessem a oportunidade de criar e testar seus conhecimentos e habilidades, refletindo sobre seus erros, acertos e dificuldades.

O desenvolvimento das atividades junto aos alunos foi realizado de tal forma que os alunos trabalharam sempre em grupos cuja formação foi por afinidades, tendo no máximo 5 integrantes em cada grupo e podendo ser alterada a cada aula.

As atividades foram aplicadas em grupos por acreditarmos que este tipo de trabalho promova a interação entre alunos, favorecendo o desenvolvimento oral e escrito das argumentações, explorando as habilidades de observação, descrição, explicação, questionamento e elaboração de hipóteses. Além disso, o que um aluno percebe pode ser percebido por outro de forma diferente, ou até nem ser percebido, o que serve como alavanca para despertar discussões entre os grupos. Isso é o que entendemos por aprendizagem cooperativa.

Todo o trabalho foi coordenado e aplicado por mim que além de ser a pesquisadora também era a professora de matemática da referida turma.

## 4.1 Aplicação das atividades da fase 1: observações e análise

Para a aplicação das atividades desta primeira fase foram utilizados 8 encontros. Em todos os encontros, as atividades foram entregues uma de cada vez. Uma vez entregue, cada grupo lia sua atividade e procurava solucioná-la.

Durante as discussões em grupo a professora percorria a sala de aula, observando como os alunos trabalhavam e orientando-os para que escrevessem como tinham chegado às suas respostas.

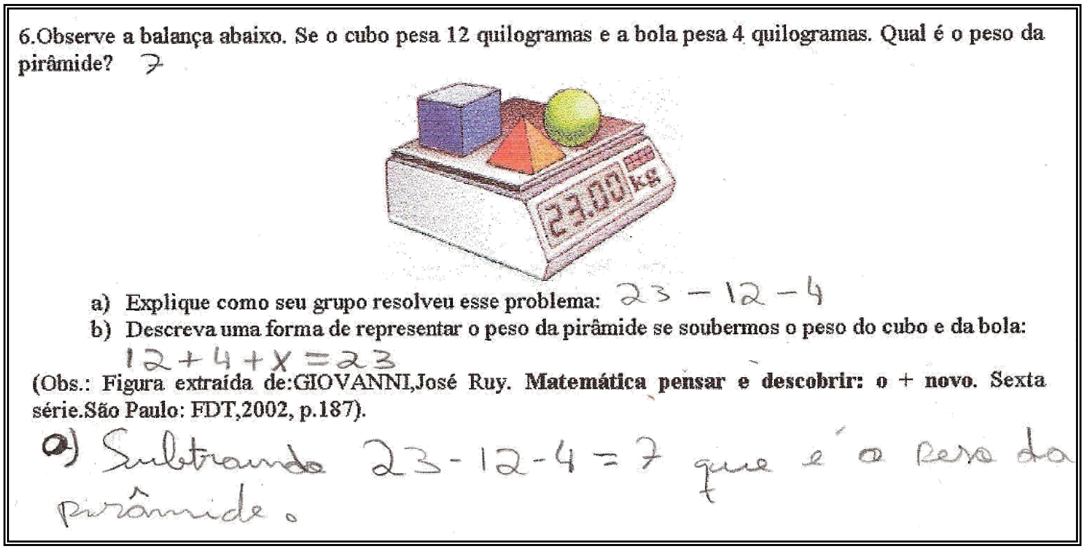
Percebemos um grande interesse, pela maioria dos alunos, em realizar as atividades. Mas, num primeiro momento, queriam que a professora verificasse se o que eles estavam escrevendo estava certo, assim tivemos que reforçar que nosso interesse com as atividades era perceber como eles estavam pensando para resolver os problemas e não o resultado – correto ou errado – da questão.

Quanto ao desenvolvimento do trabalho, as atividades eram entregues uma de cada vez para os grupos, que discutiam a situação-problema apresentada e elaboravam hipóteses procurando validá-las. Após, cada grupo fazia uma exposição oral das suas idéias ao grande grupo (turma) e era realizada a sistematização e elaboração das conclusões do grande grupo em relação aos conceitos envolvidos.

Serão apresentados alguns comentários sobre as atividades e análises dos aspectos considerados relevantes para este trabalho. Entretanto não nos deteremos muito nas análises das atividades desta etapa pois, embora este trabalho inicial com o uso de variáveis tenha se mostrado de suma importância, o foco deste estudo encontra-se na dimensão estrutural da álgebra, mais precisamente nas operações com expressões algébricas e suas respectivas propriedades, abordadas na segunda etapa.

### *4.1.1 Letra utilizada como incógnita*

Ao analisarmos as atividades realizadas pelos alunos referentes ao uso da letra como incógnita, percebemos que a maioria destes se encontram no nível 4 e, alguns no nível 5, de acordo com a classificação de Trigueros e Ursini (2005). De fato, alguns alunos simbolizam as quantidades desconhecidas identificadas em algumas situações específicas e utilizam essas representações para elaborar equações, mas a maioria determina o valor desconhecido sem fazer uso desse simbolismo. A letra é considerada pelos alunos como um número específico, mas desconhecido, podendo ser operada diretamente. Nos fragmentos abaixo (figura 4.1 e figura 4.2) exemplificamos esta afirmação.

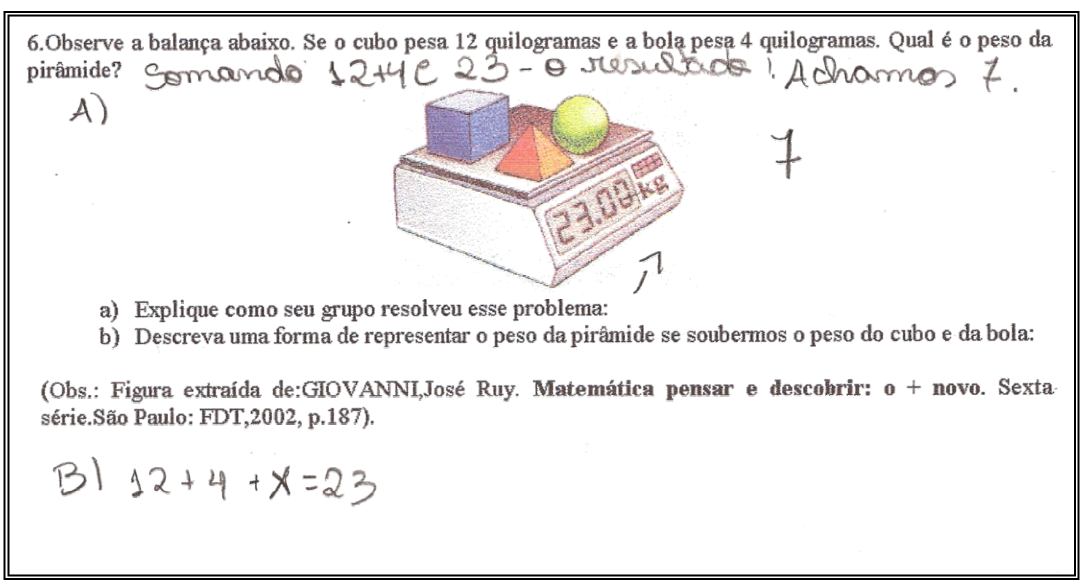

6.Observe a balança abaixo. Se o cubo pesa 12 quilogramas e a bola pesa 4 quilogramas. Qual é o peso da pirâmide? 7

a) Explique como seu grupo resolveu esse problema: 23 – 12 – 4
b) Descreva uma forma de representar o peso da pirâmide se soubermos o peso do cubo e da bola:
12 + 4 + x = 23

(Obs.: Figura extraída de:GIOVANNI,José Ruy. **Matemática pensar e descobrir: o + novo.** Sexta série.São Paulo: FDT,2002, p.187).

a) Subtraindo 23-12-4 = 7 que é o peso da pirâmide.

Figura 4.1 – Fase 1: situação-problema 6 – grupo 1


6.Observe a balança abaixo. Se o cubo pesa 12 quilogramas e a bola pesa 4 quilogramas. Qual é o peso da pirâmide? Somando 12+4 e 23 - o resultado! Achamos 7.

A)

7

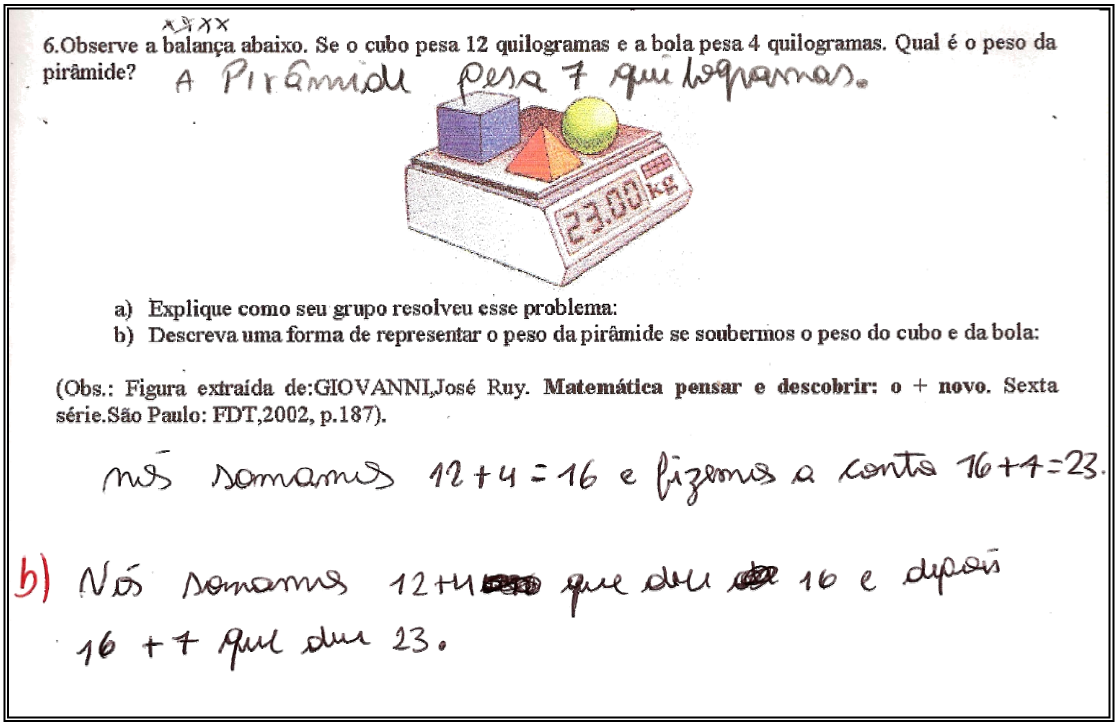
a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:
b) Descreva uma forma de representar o peso da pirâmide se soubermos o peso do cubo e da bola:

(Obs.: Figura extraída de:GIOVANNI,José Ruy. **Matemática pensar e descobrir: o + novo.** Sexta série.São Paulo: FDT,2002, p.187).

B) 12+4 +x=23

Figura 4.2 – Fase 1: situação-problema 6 – grupo 2

Entretanto, alguns alunos ainda baseiam-se em argumentos puramente aritméticos, como é observado no fragmento (figura 4.3), na qual a letra é ignorada.


6.Observe a balança abaixo. Se o cubo pesa 12 quilogramas e a bola pesa 4 quilogramas. Qual é o peso da pirâmide? A Piramide pesa 7 quilogramas.



a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:
b) Descreva uma forma de representar o peso da pirâmide se soubermos o peso do cubo e da bola:

(Obs.: Figura extraída de:GIOVANNI,José Ruy. **Matemática pensar e descobrir:** o + **novo.** Sexta série.São Paulo: FDT,2002, p.187).

nós somamos 12+4=16 e fizemos a conta 16+7=23.

b) Nós somamos 12+4 que deu 16 e depois 16+7 que deu 23.

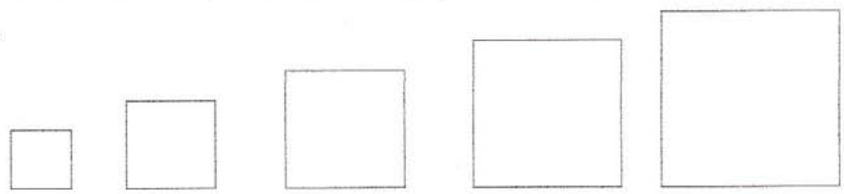
Figura 4.3 – Fase 1: situação-problema 6 – grupo 3

### *4.1.2 Letra utilizada como generalização do modelo aritmético*

Pensamos que o desenvolvimento do pensamento genérico seja muito importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim sendo, o objetivo ao propormos as tarefas desta etapa era observar se os alunos percebiam o uso da letra em situações onde ela pode ser utilizada como generalização do modelo aritmético. No entanto, procuramos não induzir o pensamento genérico sugerindo a utilização de letras para a generalização, nas atividades desta etapa, pois nossa intenção nesse momento era o de verificar se o pensamento genérico surgiria espontaneamente nos grupos.

Analisando as respostas obtidas, observamos que grande parte dos alunos reconhece padrões, percebe regras e métodos em seqüências e em grupos de problemas semelhantes e interpreta o símbolo como a representação de uma generalização, que pode assumir qualquer valor (figura 4.4). Entretanto nenhum aluno demonstrou nesta etapa habilidade em simbolizar enunciados, regras e métodos de generalização nem em manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica.

1. Observe a seqüência de quadrados, cujas medidas estão numa mesma unidade:




a) Qual a medida do lado dos próximos dois quadrados dessa seqüência? 6, 7

b) Complete a tabela abaixo:

| Medida do lado do quadrado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área do quadrado | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |

c) Qual seria a área de um quadrado se seu lado medisse 10 unidades de medida? 100

d) E se o lado medisse 50 unidades de medida? 500

e) Observando os números da tabela descubra uma regra para calcular a área do quadrado se souber a medida do seu lado:

Multiplicando base X altura

f) É possível um quadrado com 64 unidades de área? Justifique sua resposta:

sim 8 8

g) E com 144 unidades de área?

sim 12 12

h) É possível um quadrado com 105 unidades de área? Justifique sua resposta:

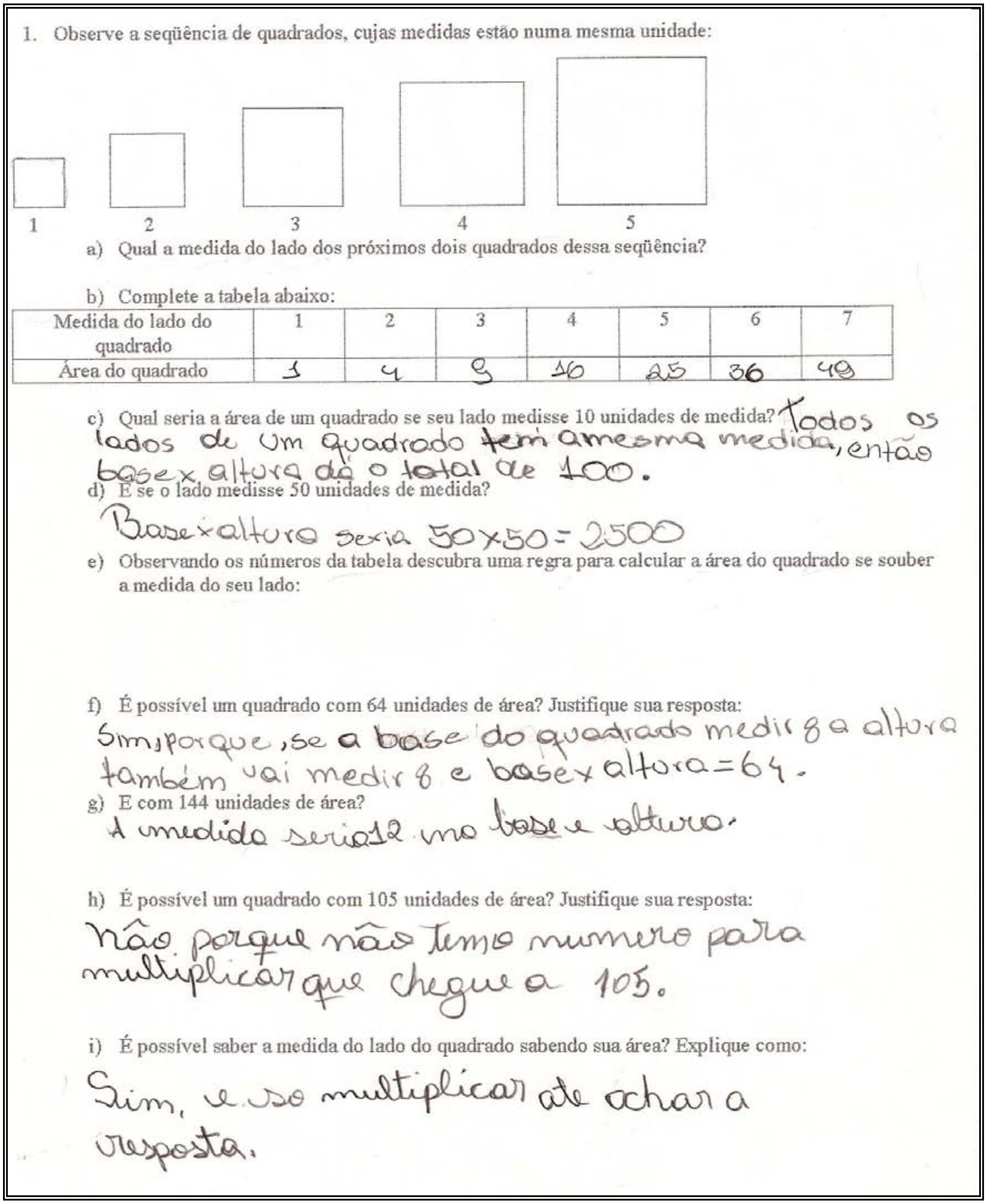
NÃO por que 10 x 10 = 100 que dá menos de 105 e 11 x 11 = 121 que dá mais de 105.

i) É possível saber a medida do lado do quadrado sabendo sua área? Explique como:

Sim Área ÷ x = x

Figura 4.4 – Fase 1: situação-problema 9 – grupo 3

A estratégia utilizada é basicamente a da "tentativa e erro" e a argumentação utilizada pelos alunos ainda é a linguagem natural. Podemos compreender melhor essa afirmação ao observarmos a resposta ao item *h* dada pelo grupo 3 (figura 4.4) e pelo grupo[28] 2 (figura 4.5).



1. Observe a seqüência de quadrados, cujas medidas estão numa mesma unidade:

1 2 3 4 5

a) Qual a medida do lado dos próximos dois quadrados dessa seqüência?

b) Complete a tabela abaixo:

| Medida do lado do quadrado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área do quadrado | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |

c) Qual seria a área de um quadrado se seu lado medisse 10 unidades de medida? Todos os lados de um quadrado tem a mesma medida, então base x altura dá o total de 100.

d) E se o lado medisse 50 unidades de medida?
Base x altura seria 50x50 = 2500

e) Observando os números da tabela descubra uma regra para calcular a área do quadrado se souber a medida do seu lado:

f) É possível um quadrado com 64 unidades de área? Justifique sua resposta:
Sim, porque, se a base do quadrado medir 8 a altura também vai medir 8 e base x altura = 64.

g) E com 144 unidades de área?
A medida seria 12 na base e altura.

h) É possível um quadrado com 105 unidades de área? Justifique sua resposta:
não porque não temo numero para multiplicar que chegue a 105.

i) É possível saber a medida do lado do quadrado sabendo sua área? Explique como:
Sim, e so multiplicar ate achar a resposta.

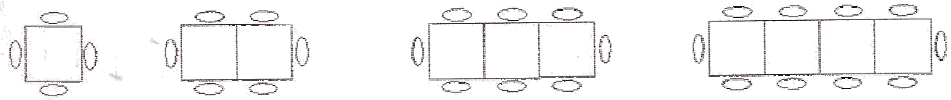
Figura 4.5 – Fase 1: situação-problema 9 – grupo 2

Em geral, as argumentações são empíricas como as apresentadas pelo grupo 1 no item *c* e item *h* (figura 4.6). Poucas argumentações estão baseadas nas propriedades das operações

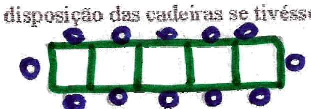
[28] Neste capítulo a numeração dos grupos refere-se à realização de cada atividade; os grupos foram se alterando no decorrer das aulas.

como a resposta dada pelo grupo 3 ao item *h* (figura 4.7).

2) Ao organizar uma festa de 15 anos, houve uma discussão sobre como organizar as mesas para acomodar os convidados. As mesas eram quadradas e foram testadas algumas maneiras de colocá-las. As figuras abaixo representam a vista superior da disposição de cadeiras em volta de mesas:



a) Como seria a disposição das cadeiras se tivéssemos 5 mesas enfileiradas? Desenhe:



b) Supondo que a organização das mesas continuassem sendo enfileiradas, conforme as acima, complete a tabela:

| Quantidade de mesas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade de cadeiras | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |

c) Descreva uma forma de obter o número de cadeiras a serem colocadas em volta das mesas se soubermos a quantidade de mesas que estarão dispostas como o sugerido acima?

contamos de 2 Em 2

d) Quantas cadeiras seriam necessárias se fossem colocadas 15 mesas enfileiradas?

Seriam necessarios 32 cadeiras

e) Existirá um número máximo de mesas que poderão ser enfileiradas? Justifique?

Depende do tamanho do salão e das mesas,

f) Quantas mesas seriam necessárias enfileira para acomodar 42 cadeiras?

Seriam necessarios 20 Mesas

g) Qual a menor quantidade de mesas dispostas em uma única fila seriam necessárias para acomodar 318 cadeiras?

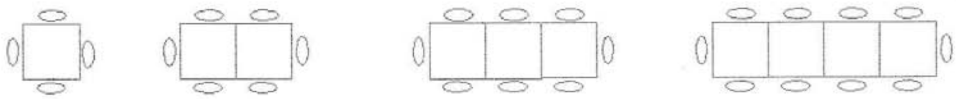
É necessarios 168 mesas para 318 cadeiras

h) É possível saber a quantidade de mesas que devem ser enfileiradas se soubermos a quantidade de cadeiras que estarão dispostas? Explique como:

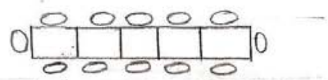
nós desenhamos 100 cadeiras que deu 50 mesas e somamos três vezes 50 que deu 300 e desenhamos 8 cadeiras que deu 368.

Figura 4.6 – Fase 1: situação-problema 10 – grupo 1

2) Ao organizar uma festa de 15 anos, houve uma discussão sobre como organizar as mesas para acomodar os convidados. As mesas eram quadradas e foram testadas algumas maneiras de colocá-las. As figuras abaixo representam a vista superior da disposição de cadeiras em volta de mesas:



a) Como seria a disposição das cadeiras se tivéssemos 5 mesas enfileiradas? Desenhe:



b) Supondo que a organização das mesas continuassem sendo enfileiradas, conforme as acima, complete a tabela:

| Quantidade de mesas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade de cadeiras | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |

c) Descreva uma forma de obter o número de cadeiras a serem colocadas em volta das mesas se soubermos a quantidade de mesas que estarão dispostas como o sugerido acima?

Cada mesa aposta é mais duas cadeiras a serem colocados.

d) Quantas cadeiras seriam necessárias se fossem colocadas 15 mesas enfileiradas? 32

e) Existirá um número máximo de mesas que poderão ser enfileiradas? Justifique?

Sim

depende do tamanho da area.

f) Quantas mesas seriam necessárias enfileira para acomodar 42 cadeiras? 20

g) Qual a menor quantidade de mesas dispostas em uma única fila seriam necessárias para acomodar 318 cadeiras?

158

318 | 2
-2 159
11
-10
018
-18
00

159
-1
158

h) É possível saber a quantidade de mesas que devem ser enfileiradas se soubermos a quantidade de cadeiras que estarão dispostas? Explique como:

Dividindo as cadeiras por dois e depois tirar uma.

Figura 4.7 – Fase 1: situação-problema 10 – grupo 3

### *4.1.3 Letra utilizada como variável em uma relação funcional*

Procuramos analisar, com as situações-problema apresentadas nesta etapa da fase 1, as hipóteses que os alunos apresentaram ao perceberem regularidades numéricas a partir de dados organizados em tabelas e se estabeleceram uma relação funcional entre as variáveis envolvidas.

2) Bruno, aluno da professora de matemática, gostou da idéia de máquina que transforma número e inventou essa outra máquina:


a) Observe o que a máquina de Bruno faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de saída | -7 | -4 | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 |

b) O que podemos afirmar sobre o "número de saída" relacionado ao "número de entrada"?

O numero de entrada passa por multiplicação e soma e o numero de saída é o resultado.

c) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina ? Qual?

$x \cdot 3 + 2 = y$

x - número de entrada

y - número de saída

d) Se x representa o "número de entrada", como poderíamos representar o que "sai" da máquina?

y

e) Tente completar esta tabela:

| Número de entrada | 7 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Número de saída | 23 | 11 | - 13 | 32 |

f) Que procedimentos você teve para chegar aos resultado desta tabela?

Pegamos o numero de saída, somamos, multiplicamos e chegamos ao número de entrada.

Figura 4.8 – Fase 1: situação-problema 14 – grupo 1

Todos os grupos que realizaram as atividades propostas reconheceram a correspondência entre as variáveis relacionadas, independentemente da representação utilizada. Na sua maioria, conseguiram determinar os valores das variáveis dependentes, dados os valores da variável independente, bem como os valores das variáveis independentes, dados os valores da variável dependente (salvo alguns erros de cálculo aritmético). E apenas dois grupos conseguiram simbolizar uma relação funcional, baseados na análise dos dados do problema (figuras 4.8 e 4.9).

2) Bruno, aluno da professora de matemática, gostou da idéia de máquina que transforma número e inventou essa outra máquina:



a) Observe o que a máquina de Bruno faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de saída | -7 | -2 | 1 | 2 | 3 | 6 | 11 | 18 | 27 | 38 | 51 |

b) O que podemos afirmar sobre o "número de saída" relacionado ao "número de entrada"? Por causa que é somado por dois mas o nº de entrada é multiplicado é somado por dois da entrada e multiplicado X 3 e é somado por +2

c) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina? Qual?

$x \times 3 = j + 2 = m$

d) Se x representa o "número de entrada", como poderíamos representar o que "sai" da máquina?

$x \times 3 + 2 = m$

e) Tente completar esta tabela:

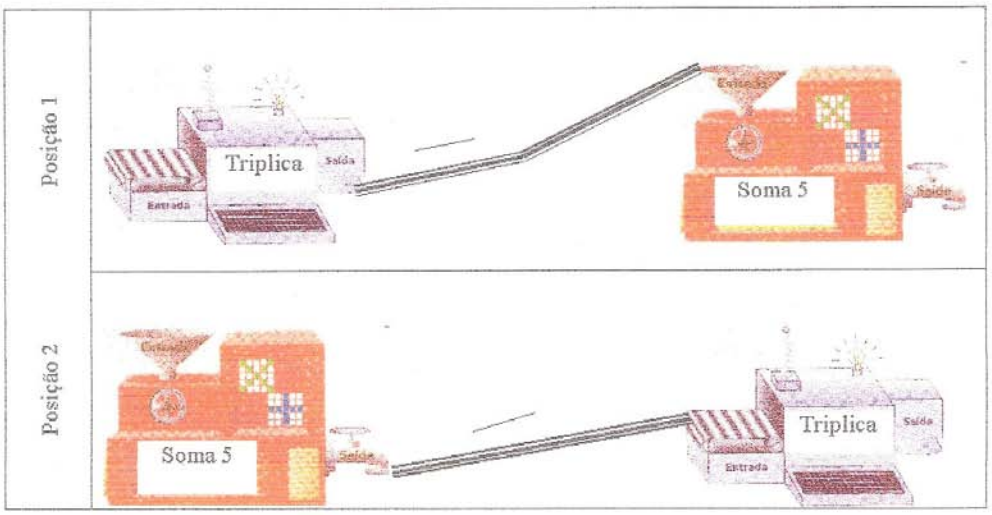
| Número de entrada | 7 | 3 | -5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| Número de saída | 23 | 11 | - 13 | 32 |

f) Que procedimentos você teve para chegar aos resultado desta tabela? Menos 2 e o resultado dividimos por 3

Figura 4.9 – Fase 1: situação-problema 14 – grupo 4

Na figura 4.9, no item *c*, observamos que a relação de igualdade não foi utilizada de maneira correta. Entretanto, para o grupo, a compreensão era de que a multiplicação do número de entrada por 3 resultaria em outro número incógnito (no caso representado por *j*) e que a este número deveria ser somado 2 resultando em outro valor que até então era incógnito (o número de saída) representado pela letra *m*. Ou seja, o funcionamento da máquina havia sido compreendido pelo grupo mas não representaram esse "funcionamento" através de uma equação, apenas utilizaram uma linguagem própria para representá-lo, sem a preocupação com o simbolismo matemático. No item *d,* quando era solicitada uma simbologia matemática, o grupo apresentou corretamente a função correspondente.

5) Gostando da idéia de máquinas, um aluno da turma resolveu fazer uma experiência maluca, usar duas máquinas e verificar o que aconteceria com os números após passarem por elas em diferentes posições:




a) Se colocarmos o número 2 na primeira máquina da posição 1 e na primeira máquina da posição 2, o número que sairá depois da segunda máquina será o mesmo para as duas posições?

SOMANDO O NÚMERO PRIMEIRO FICA MAIS ALTO PARA TRIPLICAR. NÃO

b) Complete as tabelas:

Posição 1

| Número de entrada | Número de saída |
|---|---|
| -1 | 2 |
| 0 | 5 |
| 1 | 8 |
| 2 | 11 |

Posição 2

| Número de entrada | Número de saída |
|---|---|
| -1 | 9 |
| 0 | 15 |
| 1 | 18 |
| 2 | 21 |

c) Faça a experiência com outros números e escreva suas conclusões:

$4 \times 3 = 12 + 5 = 17$

$5 + 5 = 10 \times 3 = 30$

d) Descreva uma regra para indicar o "número de saída" para as máquinas da posição 1.

$X \times 3 + 5 = Y$

e) Agora, descreva uma regra para as máquinas que estão na posição 2:

$X + 5 \times 3 = Y$

Figura 4.10 – Fase 1: situação-problema 17 – grupo 4

Com a situação apresentada na figura 4.10, nosso interesse era observar se os alunos perceberiam que a ordem de resolução alteraria o resultado final. Cabe ressaltar que todos os grupos perceberam esse fato. Entretanto, poucos conseguiram representar suas conclusões utilizando uma escrita simbólica. Uma das exceções foi o grupo 4 (figura 4.10). Porém, podemos perceber que no item *e,* o grupo não fez uso dos parênteses na representação da função.

Booth (2003, p. 33) afirma que os alunos geralmente não usam parênteses "porque acham que a seqüência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados".

Observamos, no decorrer do trabalho com os diferentes usos das letras, que os alunos produzem pouco significado para a linguagem algébrica simbólica. Como vimos, as justificativas mais comuns eram as empíricas como "pegamos o número, somamos e multiplicamos" ou "nós desenhamos 100 cadeiras que deu 50 mesas". Talvez essa "ausência de necessidade" de utilizar a linguagem algébrica possa ser em parte atribuída ao fato de isso não ter sido cobrado pela professora durante a realização das atividades da primeira fase e, como a mesma havia dito que o interesse era a percepção de como estavam pensando, procuraram escrever suas idéias desta forma, como "estavam pensando".

Com a finalidade de observar o desenvolvimento individual dos alunos no que se refere aos diferentes usos da variável, foi realizado um teste, cujo resultado será apresentado a seguir.

## 4.2 Teste fase 1: Usos da letra[29]

Embora todo o trabalho da fase 1 tenha sido realizado em grupos, optamos por não

[29] Todas as questões do teste encontram-se no anexo B (aula 8).

realizar o teste desta mesma forma, pois a finalidade deste era observar a aprendizagem de forma mais individualizada.

Apresentamos, a seguir, o percentual de acertos, erros e questões não respondidas da avaliação, juntamente com alguns comentários referentes às respostas dadas acompanhados de exemplos.

### *4.2.1 Questão 1*

As três primeiras questões do teste referiam-se ao uso de variável como incógnita. A primeira (quadro 4.1) foi expressa numa linguagem não simbólica, enquanto as duas seguintes utilizavam-se da representação por meio de equações. Nosso objetivo era observar como os alunos resolveriam as situações, mas principalmente as justificações dadas para as respostas.

Questão 1

Pensei em um número e multipliquei-o por 10. Em seguida dividi o resultado obtido por 5. A resposta final foi 4.

a) Que número eu havia pensado
b) Explique como você chegou nesse resultado:
c) É possível pensar um número diferente deste que você encontrou e, realizando as mesmas operações, chegar no resultado 4? Explique sua resposta:

Quadro 4.1 – Fase 1: teste – questão 1

Podemos observar o desempenho geral da turma com relação à primeira questão nas tabelas abaixo (tabela 4.1 e 4.2).

| QUESTÃO 1 – *item a* | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| 59% | 24% | 17% |

Tabela 4.1 – Fase 1: teste – questão 1 – item a

Quanto ao item *b,* algumas das justificações foram:

"Porque era o único número que dava este resultado" (Aluno A).

"Fazendo 10 x 2 = 20 ÷ 5 = 4" (Aluno L).

"4 x 5 = 20 ÷ 10 = 2" (Aluna R).

"*x* . 10 = F ÷ 5 = 4" (Aluna J).

| QUESTÃO 1 – *item c* | | |
|---|---|---|
| É possível | Não é possível | Não respondido |
| 60% | 20% | 20% |

Tabela 4.2 – Fase 1: teste – questão 1 – item c

Houve um considerável número de acertos nos itens da questão 1, muitos alunos solucionaram o item *a* utilizando-se de operações inversas (figura 4.11), enquanto outros utilizaram o método tentativa e erro.

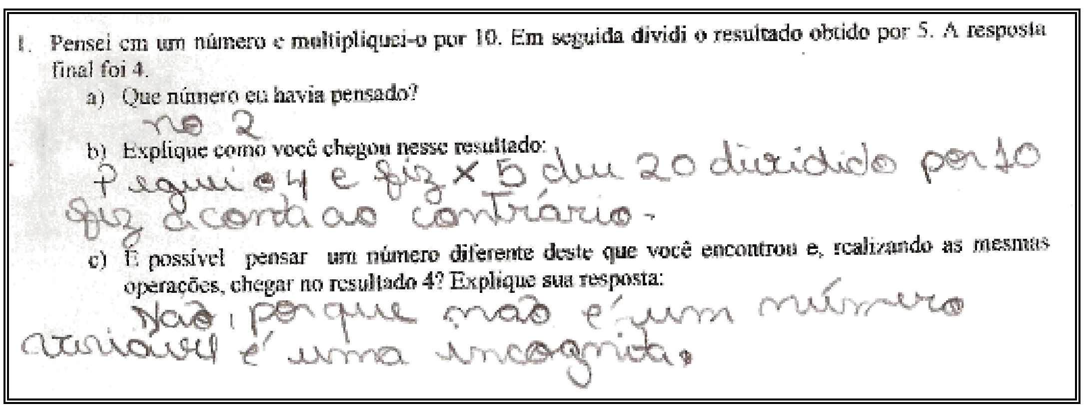

1. Pensei em um número e multipliquei-o por 10. Em seguida dividi o resultado obtido por 5. A resposta final foi 4.
   a) Que número eu havia pensado?
   nº 2
   b) Explique como você chegou nesse resultado:
   Peguei o 4 e fiz x 5 deu 20 dividido por 10 fiz a conta ao contrário.
   c) É possível pensar um número diferente deste que você encontrou e, realizando as mesmas operações, chegar no resultado 4? Explique sua resposta:
   Não, porque não é um número variável é uma incognita.

Figura 4.11 – Fase 1: teste – questão 1

Com relação ao item *c,* apenas dois alunos consideraram a possibilidade de existir outro valor que pudesse resultar em 4 com a realização das mesmas operações. Um dos alunos considerou outros valores e outras operações que resultavam em quatro, o que demonstrou uma interpretação não correta do item *c* desta questão. Enquanto o outro aluno alegou ser possível encontrar outro valor mas não soube explicar como ou qual o outro valor possível.

Dentre os alunos que responderam corretamente, alguns, como a aluna R (figura 4.11), justificaram sua resposta mostrando que se tratava de um valor incógnito e não variável; a maioria utilizou-se de explicações do tipo: “Tentei todos os números e não deu” (Aluno H).

### *4.2.2 Questão 2*

| Questão 2 |
|---|
| Quanto deve valer *x* para que esta afirmação esteja correta? $x - 5 = 15$ |

Quadro 4.2 – Fase 1: teste – questão 2

Na segunda questão (quadro 4.2), observamos um grande percentual de acertos (tabela 4.3).

| QUESTÃO 2 | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondida |
| 76,5% | 17,5% | 6% |

Tabela 4.3 – Fase 1: teste – questão 2

Algumas das respostas corretas foram justificadas pelo uso das operações inversas, como a resposta dada pelo aluno A (figura 4.12), outras por substituição, como podemos observar na resposta da aluna E (figura 4.13).

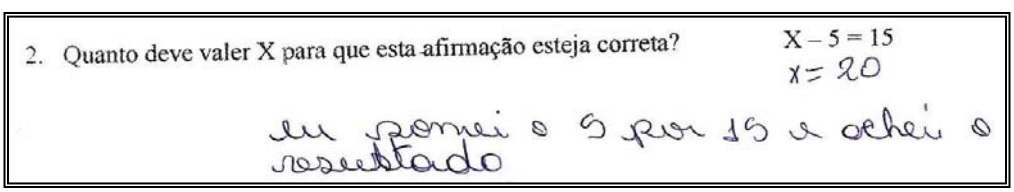

2. Quanto deve valer X para que esta afirmação esteja correta? X – 5 = 15
x= 20
eu somei o 5 por 15 e achei o resultado

Figura 4.12 – Fase 1: teste – questão 2a

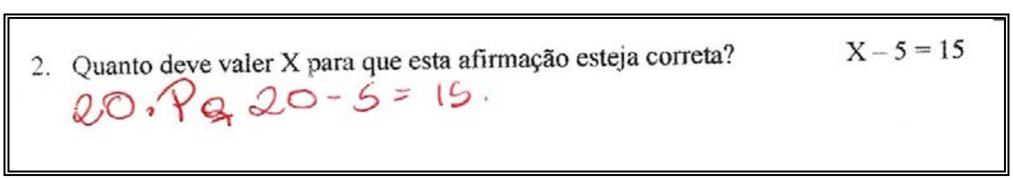

2. Quanto deve valer X para que esta afirmação esteja correta? X – 5 = 15
20. Pq 20-5=15.

Figura 4.13 – Fase 1: teste – questão 2b

### *4.2.3 Questão 3*

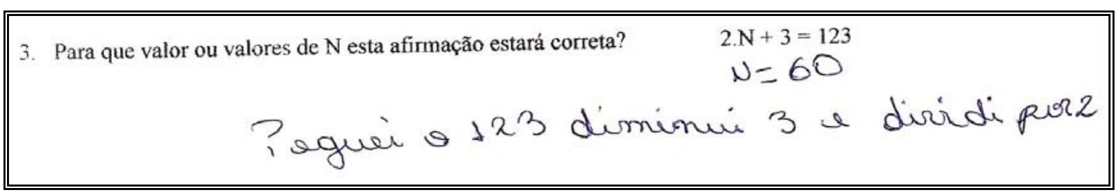
| |
|---|
| <u>Questão 3</u> |
| Para que valor ou valores de *n* esta afirmação estará correta? $2.n + 3 = 123$ |

Quadro 4.3 – Fase 1: teste – questão 3

Na questão 3 (quadro 4.3) ocorreu algo análogo ao que ocorreu com a questão 2, isto é, algumas das respostas dadas foram justificadas pelo uso das operações inversas, como a dada pelo aluno A (figura 4.14), outras, por substituição. No entanto o percentual de acertos foi menor nesta questão do que na anterior (tabela 4.4).

| QUESTÃO 3 | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondida |
| 41% | 35% | 24% |

Tabela 4.4 – Fase 1: teste – questão 3


3. Para que valor ou valores de N esta afirmação estará correta? 2.N + 3 = 123

N=60

Peguei o 123 diminui 3 e dividi por2

Figura 4.14 – Fase 1: teste – questão 3

Pudemos observar ao analisarmos as respostas dadas, que os alunos que se utilizaram das operações inversas acertaram a questão, enquanto poucos dos alunos que utilizaram substituições através de tentativas acertaram: alguns desistiram, outros não encontraram o resultado correto.

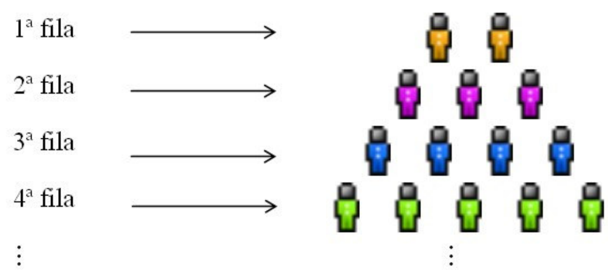
O modo mais utilizado pelos alunos para resolver a terceira questão foi a substituição de valores na equação, utilizando-se do método da tentativa. Poucos alunos resolveram a equação utilizando-se de outros métodos. Um desses poucos alunos que não se utilizaram da tentativa foi o aluno A, como podemos observar em sua resposta apresentada na figura 4.14.

### *4.2.4 Questão 4*

Com a questão 4 (quadro 4.4) nosso objetivo era analisar se os alunos perceberiam o uso da letra como uma generalização de processos aritméticos.

Questão 4

Em uma apresentação de dança, a professora de dança resolveu organizar os dançarinos em filas, da seguinte forma:




a) Quantos dançarinos estarão na 5ª fila?

b) Quantos dançarinos estarão na 10ª fila?

c) Existe uma regra para a formação das filas? Você pode escrevê-la?

d) Explique como chegou a essa regra de formação:

e) Qual fila terá exatamente 9 dançarinos?

f) É possível saber a fila se soubermos quantos dançarinos há nela? Explique:

Quadro 4.4 – Fase 1: teste – questão 4

Consideramos o percentual de acertos no item *a* bastante significativo, bem como as explicações dadas nos itens *c* e *d*. No entanto, constatamos que o percentual considerável de acertos no item *a* (tabela 4.5) não se manteve no item *b* (tabela 4.6), apesar da semelhança entre as indagações.

| QUESTÃO 4 – *item a* | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| 88% | 6% | 6% |

Tabela 4.5 – Fase 1: teste – questão 4 – item a

| QUESTÃO 4 – *item b* | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| 58% | 36% | 6% |

Tabela 4.6 – Fase 1: teste – questão 4 – item b

Talvez o fato do percentual de acertos obtido no item *a* não ter se mantido no item *b* tenha ocorrido devido à tendência em resolver as questões por meio de tentativas. Pensando dessa forma, no primeiro item o aluno poderia confirmar suas respostas através do próprio desenho contido no teste, desenhando a 5ª fila ou imaginando como a mesma seria, mas utilizando esse mesmo procedimento para o item *b*, o aluno poderia ter cometido algum erro, uma vez que teria que desenhar, ou imaginar, as dez filas.

Booth (2003) salienta que “há indícios consideráveis de que as crianças da escola elementar utilizam métodos informais para resolver problemas, e o mesmo também se constatou na escola secundária”. Tais métodos informais em aritmética, segundo a pesquisadora, pode ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer afirmações gerais em álgebra. “Se os alunos têm de aprender (e usar) os procedimentos mais formais, primeiro devem perceber a necessidade deles” (BOOTH, 2003, p. 35). Isso também se aplica à linguagem utilizada para expressar-se em matemática.

Observemos algumas respostas obtidas no item *c:*

“Começa com dois alunos e vai aumentando de 1 em 1 para cada fila” (Aluno A).

“Sim, é só contar um a  mais em cada fila” (Aluna I).

“Cada fila vai aumentando 1” (Aluno B).

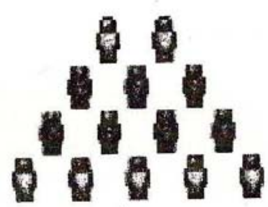
Nos exemplos acima citados, acreditamos que os alunos não sentiram a necessidade de expressar a generalização através de uma linguagem algébrica simbólica (com o uso de letras); foi suficiente, para eles, a expressão através da linguagem escrita. A sugestão de Booth é que os professores devem procurar meios de ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão do próprio procedimento formal. Tal sugestão vai ao encontro de nossos anseios com este trabalho. Entendemos que a possibilidade de confronto das respostas e justificações dadas pelos alunos acerca das situações-problema solucionadas nos pequenos grupos, bem como as intervenções e questionamentos da professora realizadas nos momentos de socialização e discussão com todos os alunos, sejam alguns dos meios que possibilitam a compreensão dos procedimentos formais envolvidos.

Através das respostas dadas para o item *c* e do exemplo apresentado na figura 4.15, observamos que os alunos perceberam a lei de formação da organização dos dançarinos, mas não expressaram esta lei usando linguagem simbólica.

Nos itens onde era solicitado que os alunos explicassem ou justificassem suas respostas, observamos justificativas pouco formais e sem a utilização de linguagem simbólica, as respostas da maioria dos alunos foram semelhantes às dadas pela aluna R na figura 4.15.

4. Em uma apresentação de dança, a professora de dança resolveu organizar os dançarinos em filas, da seguinte forma:

1ª fila →
2ª fila →
3ª fila →
4ª fila →
⋮



a) Quantos dançarinos estarão na 5ª fila? seis

b) Quantos dançarinos estarão na 10ª fila? onze

c) Existe uma regra para a formação das filas? Você pode escrevê-la? Sim, sempre conta um número a mais do que o que tá pedindo. Ex: 12 = 13

d) Explique como chegou a essa regra de formação: Contei os nºs de dançarin

e) Qual fila terá exatamente 9 dançarinos? a oitava

f) É possível saber a fila se soubermos quantos dançarinos há nela? Explique:
Sim, diminui um dançarino

Figura 4.15 – Fase 1: teste – questão 4

No item *e*, era solicitado que descobrissem a fila sabendo a quantidade de dançarinos nela contidos. Neste item o número de respostas corretas foi de 65% (tabela 4.7) e muitos alunos utilizaram-se de métodos informais para solucioná-lo.

| QUESTÃO 4 – item e | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| 65% | 29% | 6% |

Tabela 4.7 – Fase 1: teste – questão 4 – item e

Alguns alunos, no entanto, observaram que o número que designa a fila é sempre um a menos que o número de dançarinos nela contido, dessa forma chegaram à respostas semelhantes à apresentada na figura 4.15. Neste item as justificações dadas pelos alunos foram, na maioria, coerentes com as apresentadas no item *c*.

Algumas justificações apresentadas pelos alunos no último item da questão:

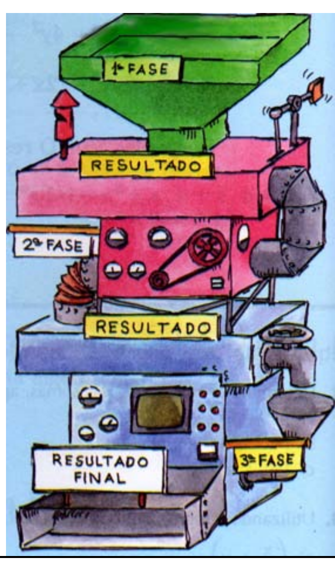
"Sim, porque o número da fila é o antecessor do número de dançarinos" (Aluno M).

"É só subtrair 1 do número de dançarinos" (Aluno O).

### *4.2.5 Questão 5*

Questão 5

Veja só esta máquina, ela trabalha em fases. Em cada fase há uma operação a ser feita:




**1ª fase:** multiplica por 10
**2ª fase:** soma 3
**3ª fase:** diminui 5

Figura retirada do livro: Matemática idéias e desafios, Sétima série, editora Saraiva, 2003, p. 64

a) Observe o que a máquina faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resultado final | | | | | | | | | |

b) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina? Qual?

c) Se n representa o "número de entrada", como poderíamos representar o resultado final da máquina?

d) O resultado final que iremos obter depende de alguma coisa? De quê?

e) Se o resultado final foi 98, qual o número que entrou na máquina?

f) Explique como você encontrou esse número:

Quadro 4.5 – Fase 1: teste – questão 5

Nossa expectativa com a questão 5 (quadro 4.5) era observar como os alunos percebiam a relação funcional e o uso da variável para esta função.

O percentual de acertos no primeiro item da quinta questão foi bastante significativo (tabela 4.8).

| QUESTÃO 5 – *item a* | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| 82% | 6% | 12% |

Tabela 4.8 – Fase 1: teste – questão 5 – item a

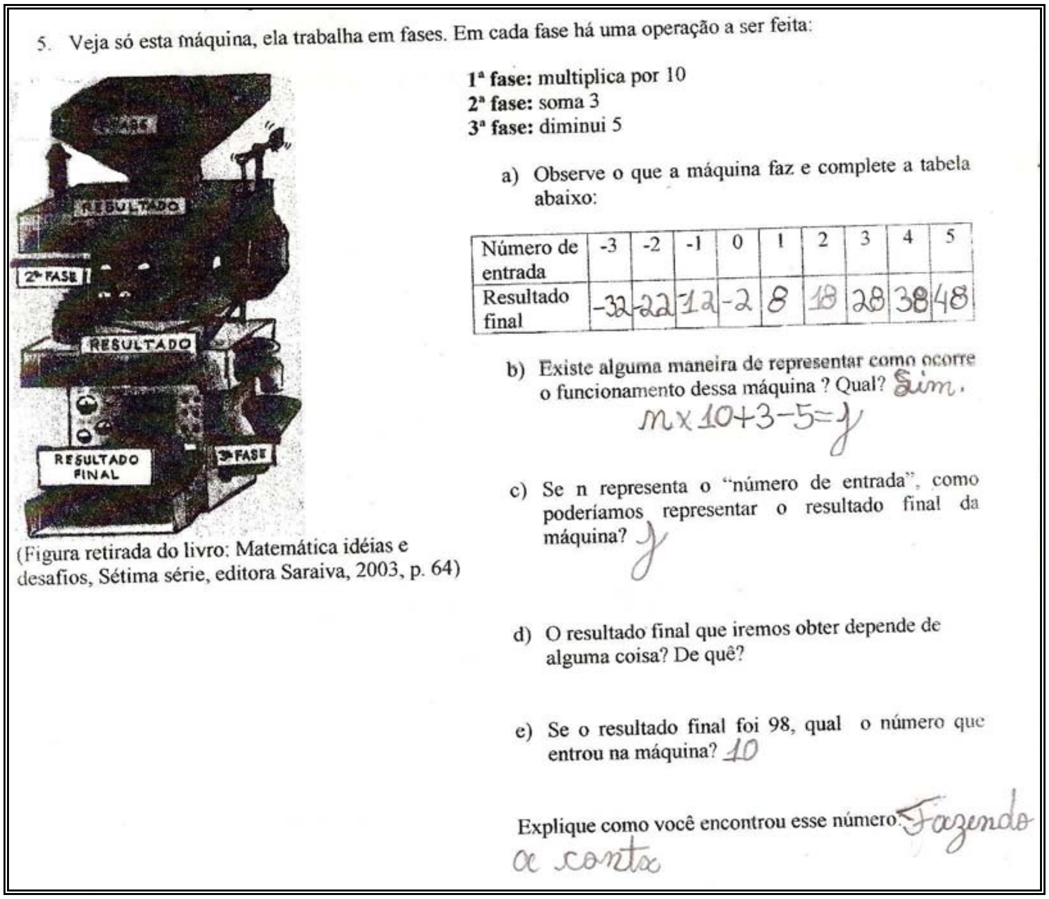
Percebemos, no segundo item da questão, o uso da linguagem simbólica por grande parte dos alunos. Algumas respostas bem interessantes:

"$n$ . 10 + 3 – 5 = $x$" (Aluno L).

"$n$ . 10 = $A$ + 3 = $b$ – 5 = $x$" (Aluno A).

Embora ambos os alunos tenham percebido a relação de dependência entre as variáveis, no primeiro exemplo, o aluno utiliza apenas duas variáveis, representando através de uma só fórmula o número de entrada e o de saída. Já o aluno A, procura simbolizar cada etapa realizada pela máquina. Embora o aluno A não esteja utilizando uma escrita simbólica correta (pois o sinal de igualdade está sendo utilizado por ele para demonstrar cada etapa do funcionamento da máquina), demonstra perceber como a relação de dependência ocorre.

Alguns alunos responderam o item *c* baseados no item anterior, como o aluno M (figura 4.16).




5. Veja só esta máquina, ela trabalha em fases. Em cada fase há uma operação a ser feita:

**1ª fase:** multiplica por 10
**2ª fase:** soma 3
**3ª fase:** diminui 5

a) Observe o que a máquina faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resultado final | -32 | -22 | -12 | -2 | 8 | 18 | 28 | 38 | 48 |

b) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina ? Qual? Sim. $n \times 10+3-5=y$

c) Se n representa o "número de entrada", como poderíamos representar o resultado final da máquina? y

d) O resultado final que iremos obter depende de alguma coisa? De quê?

e) Se o resultado final foi 98, qual o número que entrou na máquina? 10

Explique como você encontrou esse número: Fazendo a conta

(Figura retirada do livro: Matemática idéias e desafios, Sétima série, editora Saraiva, 2003, p. 64)

Figura 4.16 – Fase 1: teste – questão 5

O item *e* não teve um percentual tão significativo de acertos (tabela 4.9) como o primeiro item da mesma questão.

| QUESTÃO 5 – *item e* | | |
|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| 53% | 24% | 23% |

Tabela 4.9 – Fase 1: teste – questão 5 – item e

Creditamos esse resultado ao fato de que nem todos os alunos tinham familiaridade com o uso das operações inversas, o que observamos durante as aulas que precederam este teste. Podemos fazer esta afirmação com base nas maneiras apresentadas pelos alunos na resolução de equações. Alguns alunos ainda resolviam as equações de modo empírico, por tentativas fazendo verificações. Esse método dificulta a obtenção do resultado correto neste item devido à complexidade e à existência de várias operações envolvidas.

### *4.2.6 Questão 6*

Questão 6

Observe em quais situações o $x$ pode ter um **apenas um valor** ou **pode variar**, isto é, $x$ pode assumir vários valores. Em seguida, ligue cada expressão ao resultado de sua observação:

| | | |
|---|---|---|
| $3x + 4 = 10$ | ◆ | ◆ Apenas um valor |
| $2x + 10$ | ◆ | |
| $\frac{4x}{3} = 8$ | ◆ | |
| $x + 3 - 2 = 8$ | ◆ | |
| $x + 3 = y$ | ◆ | |
| $3 = x + 1$ | ◆ | ◆ Pode variar |
| $4x + 3 - 2 = m$ | ◆ | |
| $-5x = 10$ | ◆ | |
| $2x + 3x - 1$ | ◆ | |
| $p = \frac{x}{2}$ | ◆ | |

Quadro 4.6 – Fase 1: teste – questão 6

Nosso objetivo com a questão 6 (quadro 4.6) era observar se os alunos perceberiam os diferentes usos da letra numa escrita puramente simbólica. Surpreendeu-nos a percepção dos alunos, uma vez que nas questões anteriores e durante as aulas, a maioria deles não utilizava a linguagem simbólica para expressar suas hipóteses e conclusões. No entanto, nesta questão, onde a linguagem era apresentada de maneira abstrata e simbólica, a maioria dos alunos demonstrou ter uma certa familiaridade com a mesma e a compreensão de as letras poderem ser utilizadas em contextos algébricos diferentes: como incógnita ou como variável.

Na sexta questão, 64% dos alunos acertou seis ou mais itens (tabela 4.10).

| QUESTÃO 6 | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nenhum acerto | 1 acerto | 2 acertos | 3 acertos | 4 acertos | 5 acertos | 6 acertos | 7 acertos | 8 acertos | 9 acertos | 10 acertos |
| 12% | 12% | 0% | 0% | 6% | 6% | 12% | 17% | 6% | 17% | 12% |

Tabela 4.10 – Fase 1: teste – questão 6

A aluna R, que na maioria das questões deste teste e durante as aulas, pouco utilizou a linguagem algébrica simbólica, demonstrou destreza na compreensão e realização desta atividade (figura 4.17). Interpretamos tal fato como uma demonstração de que a linguagem utilizada no enunciado influencia na linguagem utilizada na resposta dada pelo aluno. O que estamos querendo dizer é que a necessidade da utilização de procedimentos formais e de uma linguagem algébrica mais simbólica na solução das atividades parece surgir apenas quando o enunciado da questão impõe tal linguagem, como na questão 6 por exemplo. Em situações onde o enunciado utiliza uma linguagem mais informal – por exemplo, nas demais questões deste teste – a tendência do aluno é utilizar um método de resolução e uma linguagem menos formal.

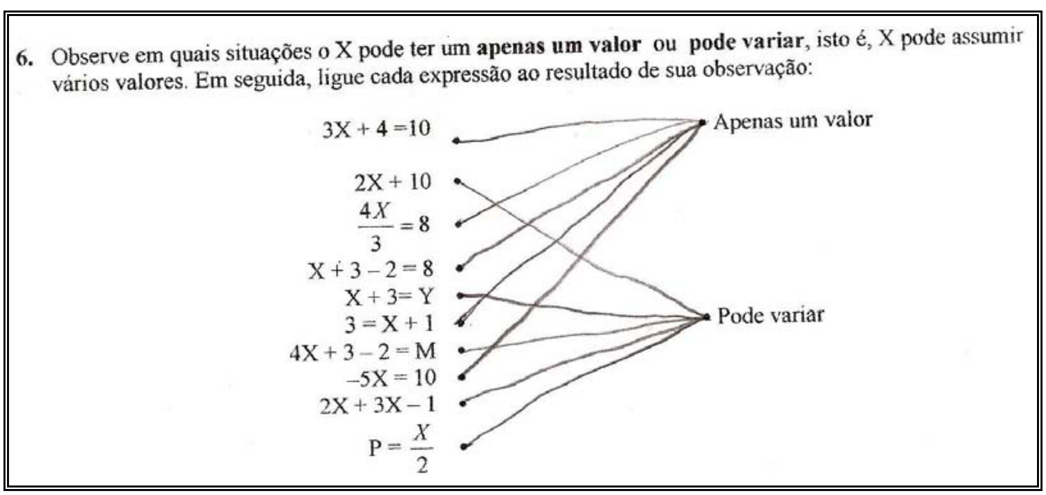



Figura 4.17 – Fase 1: teste – questão 6

Tendo em vista que a álgebra desenvolvida no final do Ensino Fundamental e no

Ensino Médio está relacionada à compreensão das variáveis, considerando esse conceito de variável como multifacetário e em concordância com a afirmação de que "as finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com concepções diferentes de álgebra que correspondem à importância relativa dadas aos diversos usos das variáveis" (USISKIN, 2003, p. 13), consideramos ter sido de suma importância este trabalho introdutório envolvendo os diferentes usos da letra em contextos algébricos.

Os alunos puderam realizar atividades onde a letra não era utilizada apenas para representar valores incógnitos mas, também, para representar generalizações aritméticas e relações funcionais. Desta forma, acreditamos que estivessem mais suscetíveis à compreensão da letra como um símbolo abstrato, utilizado nas operações com expressões algébricas, nosso enfoque neste trabalho.

#### *4.2.7 Desempenho individual dos alunos no teste da primeira fase*

Na tabela 4.11 podemos observar o desempenho individual dos alunos nesse primeiro teste.

| **Aluno(a)** | **Questão 1** | **Questão 2** | **Questão 3** | **Questão 4** | **Questão 5** | **Questão 6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aluno A | C | I | C | C | PC | C |
| Aluno B | C | C | I | C | PC | I |
| Aluno C | C | C | B | I | PC | PC |
| Aluna D | A aluna não estava presente no dia da avaliação | | | | | |
| Aluna E | B | C | B | C | I | PC |
| Aluna F | C | C | B | PC | PC | I |
| Aluno G | C | C | C | PC | PC | PC |
| Aluno H | I | C | C | PC | C | PC |
| Aluna I | C | C | I | C | PC | C |
| Aluna J | B | C | I | B | PC | C |
| Aluno L | C | I | I | PC | PC | PC |
| Aluno M | C | C | C | C | C | C |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aluno N | B | B | B | B | B | B |
| Aluno O | C | C | C | C | C | C |
| Aluna P | I | I | I | PC | PC | PC |
| Aluno Q | I | C | I | PC | B | B |
| Aluna R | C | C | C | C | C | C |
| Aluna S | I | C | C | C | C | C |

**Legenda[30]: C = correta, PC = parcialmente correta, I = incorreta, B = não respondida.**

Tabela 4.11 – Fase 1: teste – desempenho dos alunos

## 4.3 Aplicação das atividades da fase 2: observações e análises

Para a segunda fase de aplicação da proposta – que tratava do foco de nosso estudo – foram destinados 26 períodos (17 encontros), sendo 18 destes períodos de 50 minutos e 8 de 30 minutos cada.

Quanto ao desenvolvimento do trabalho, as atividades eram entregues uma de cada vez para os grupos, que discutiam a situação-problema apresentada e elaboravam hipóteses procurando validá-las. Após, cada grupo fazia uma exposição oral das suas idéias ao grande grupo (turma) e era realizada a sistematização e elaboração das conclusões do grande grupo em relação aos conceitos envolvidos. Para auxiliar na validação de suas hipóteses os grupos contavam com o uso de ferramentas, sendo uma delas o material manipulativo chamado pelos alunos de *pecinhas*.

Na primeira aula desta segunda fase, a professora apresentou o material manipulativo aos alunos, mas não estipulou com os mesmos as convenções sobre o uso das peças. Apenas propôs que o menor lado das figuras valesse uma unidade de medida (u.m.), o lado do quadrado vermelho valesse $x$ u.m e o lado do quadrado preto valesse $y$ u.m. Então, a professora propôs que cada grupo descobrisse a área de cada quadrilátero, partindo das

[30] Para fins de tabulação, nesta tabela, nas questões que contenham mais de um item, será considerada correta (C) a questão em que todos os seus itens forem respondidos corretamente; será considerada parcialmente correta (PC) a questão que apresentar mais da metade de seus itens respondidos corretamente e, incorreta (I) a questão que tiver menos da metade de seus itens respondidos corretamente.

combinações feitas para as medidas de lados.

Essa experiência foi bastante proveitosa, pois alguns alunos já não lembravam como calcular área de quadrados e retângulos.

Após cada grupo calcular a área de cada figura, foi solicitado aos integrantes dos grupos que fizessem um relatório da atividade no caderno, desenhando os quadrados e retângulos e anotando ao lado as áreas correspondentes. Em seguida, estipulou-se que o lado colorido de cada peça representaria a área dessa peça, portanto um valor positivo, e o verso de cada peça representaria o oposto desse valor, portanto um valor negativo.

Quando, ainda nesta aula, solicitados a representar as expressões numéricas com o material manipulativo, alguns alunos indagaram do porquê de ter que representar se era mais fácil apenas resolver a "continha".

Nosso objetivo com o uso do material manipulativo era que os alunos pudessem utilizá-lo como uma ferramenta auxiliar para estabelecer relações entre os conceitos algébricos e as atividades propostas. Mas, para que fosse utilizado para esta função, fazia-se necessário que primeiro os alunos conhecessem o material e seu "funcionamento". Sendo assim, justificamos a utilização deste na representação das expressões numéricas, objetos já conhecidos pelos alunos, por julgar que, assim, seria mais fácil para eles compreenderem o manuseio e a utilização do material que, futuramente, seria empregado como uma ferramenta auxiliar na compreensão das operações com expressões algébricas e suas propriedades. Portanto, a justificativa dada aos alunos pela professora, naquele momento, quanto ao porquê da utilização do material, foi de que seu uso era uma outra maneira de representar a expressão, e que, da mesma forma como havia mais de uma maneira de representar um cálculo (algoritmo, expressão e por escrito), a expressão também poderia ser representada com as peças do material.

### *4.3.1 Situação-problema 1*

No segundo encontro, os grupos receberam a situação-problema *1* (quadro 4.7).

Uma empresa de alimentos distribui seus produtos em cinco mercados da região. Um caminhão parte da empresa para fazer entregas em todos os cinco mercados. Sabe-se que:

− para ir da empresa até o primeiro mercado, o caminhão irá percorrer uma certa distância em quilômetros;

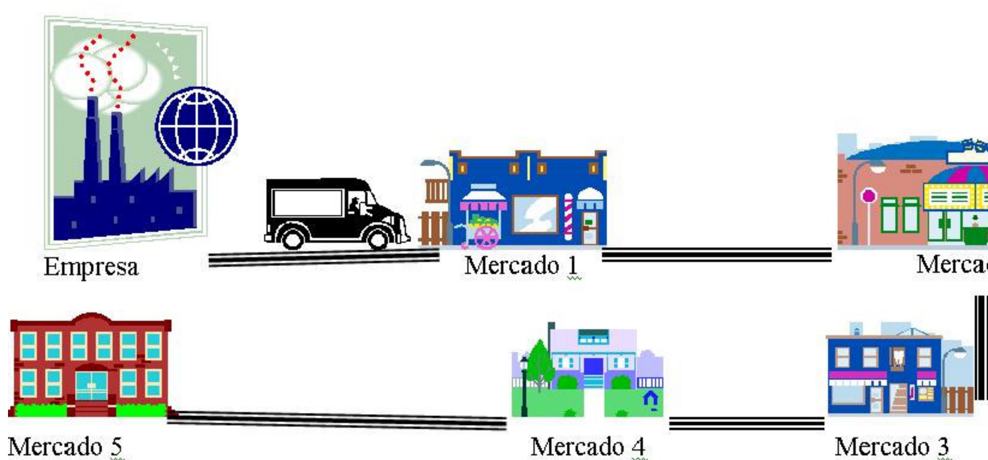
− para ir do primeiro mercado até o segundo, o caminhão irá percorrer 5 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

− para ir do segundo mercado até o terceiro, o caminhão irá percorrer 3 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

− para ir do terceiro para o quarto mercado, o caminhão irá percorrer 2 quilômetros a menos que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

− e, finalmente, do quarto mercado para o último, o caminhão irá percorrer o dobro do que percorreu para ir da empresa até o primeiro mercado.

Faça uma simulação da situação representando no esquema abaixo e responda as perguntas:




a) Como você poderia representar a distância total que o caminhão vai percorrer?

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

c) Se considerarmos a distância da empresa até o mercado 1 como sendo *x*, qual seria o valor de *x* se a distância total percorrida pelo caminhão foi de 15 km?

Quadro 4.7 – Fase 2: situação-problema 1

Os grupos não tiveram dificuldades na interpretação da situação proposta (quadro 4.7) como uma soma. Entretanto, no primeiro item – onde é dito que para ir da empresa até o primeiro mercado, o caminhão irá percorrer uma certa distância em quilômetros, mas esta certa distância não está especificada – dois grupos ficaram em dúvida se deveriam escolher um valor para ser a distância inicial ou se pensariam nela como um valor desconhecido e então usariam uma letra para representá-la. A princípio, os alunos destes grupos fizeram suposições sobre distâncias; por exemplo, pensaram que aquela “certa distância” poderia ser de 5 km, 1 km. Enfim, não houve aceitação, num primeiro momento, de que a tal “certa distância” era um valor desconhecido.

A professora então fez uma intervenção perguntando aos alunos se, nas aulas de matemática, estes sempre haviam trabalhado apenas com valores conhecidos. Uma aluna disse que já haviam trabalhado com valores variáveis e desconhecidos que eram as “letras”. Outro aluno comentou: “Ah! É verdade. A gente usava a letra quando não sabia o valor ou quando o valor podia mudar. Talvez dê pra gente usar aqui também” (aluno A).

Os grupos retornaram à situação-problema proposta, agora, pensando na “certa distância” não como um valor que deveria ser escolhido por eles, mas como uma incógnita e representando-a na forma que julgaram apropriada.

Observou-se que, quanto à representação no desenho esquemático, todos os grupos (inclusive os dois grupos citados, após a intervenção), representaram de maneira satisfatória a situação. No entanto, para as questões *a*, *b* e *c*, observam-se algumas respostas bastante interessantes:

- Respostas para o item *a*

– A distância percorrida foi de 15 km. (Aqui, os alunos do grupo pensaram que o percorrido seria 15 km pois esta é exatamente a sugestão dada no item c)

– $x + x + 5 + x + 3 + x - 2 + x + x.$

– $x + 5 + 3 - 2$. (Os alunos do grupo, após questionados, justificaram a resposta dada dizendo que o *x* era o valor desconhecido e então a distância percorrida era “um valor” desconhecido mais os valores conhecidos, no caso o 5, o 3 e o –2, ou seja, o *x* aqui está representando a soma de todos os *x* representados na questão).

- Respostas para o item *b*

– $x + x + 5 + x + 3 + x - 2 + x + x = J$. (O *J*, aqui, representa um número que seria o resultado final não conhecido; percebe-se aqui a necessidade de fechamento, isto é, não é admitido que uma expressão não possua *um* resultado).

– $x + 6 + x + x$. “Somei os números” (Aluno J). (Nesta resposta, os alunos consideram que valores numéricos podem ser somados/subtraídos, porém não é admitida a idéia de que as incógnitas seguem este mesmo padrão).

- Nenhum grupo respondeu o item *c* da questão.

Podemos perceber que os alunos não sentem a necessidade imediata de utilizar-se de expressões algébricas. Como visto, os alunos percebiam que não adiantava “colocar” valores para a tal “certa distância” que não era dada, pois cada grupo obteria um resultado diferente e não era isso que estava sendo solicitado. Porém, não foi imediata a percepção dos alunos de que aquela “certa distância” neste item era uma incógnita e de que como tal poderia ser representada por uma letra.

Outra observação bastante importante foi o fato de, mesmo os grupos tendo representado no esquema a distância percorrida pelo caminhão, também não foi tão simples perceberem que a distância total percorrida seria obtida somando-se as distâncias percorridas em cada parte da trajetória. Um dos grupos utilizou a distância que estava sendo exibida no item *c*. Dois grupos, depois de longas discussões, observaram que bastava somar cada “pedaço”, mas não conseguiam aceitar a hipótese de que tal soma não resultaria num valor específico (numérico) e então tentaram contornar a situação atribuindo uma incógnita para este valor. Observa-se fortemente a necessidade de fechamento, isto é, não é aceito que o resultado da expressão não seja um único valor. Essa necessidade de fechamento também foi evidenciada por Booth (2003, p. 26): “outros alunos parecem aceitar a possibilidade de uma resposta algébrica, mas inclinam-se a assumir que de qualquer maneira, o que se pretende é uma resposta de um ‘único termo’”. Esta necessidade de fechamento talvez tenha sua origem na aritmética, uma vez que:

> Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém é diferente. Na álgebra, o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral (BOOTH, 2003, p. 24)

Um dos grupos chegou a observar que poderiam somar os números, mas não sabiam o que fazer com as letras, então simplesmente repetiram-nas, a aluna R, integrante desse grupo, deu uma explicação oral: “A distância percorrida pelo caminhão é a soma das distâncias, então eu fiz $x$ mais $x + 5$ mais $x + 3$ mais $x - 2$ mais $x + x$ então dá para simplificar essa distância se eu juntar os números então vou ter $x + 6 + x + x + x + x$. Somei os números e as letras não dá para somar porque não sei quanto vale.”

Este exemplo é bem explicado pela constatação de Usiskin (1994) que nos diz que os alunos não estabelecem, necessariamente, inter-relações entre as operações aritméticas e algébricas. Conclui-se, portanto, que a passagem da aritmética para a álgebra não é imediata para o aluno.

Os alunos demonstraram a compreensão de algumas noções algébricas muito importantes envolvidas na situação-problema. Por exemplo, que havia um valor desconhecido na situação e que este não poderia ser representado numericamente. Porém, quando solicitado aos alunos que estes simplificassem a expressão algébrica obtida, houve uma resistência, pela maioria dos grupos, quanto à manipulação algébrica. Na verdade, os alunos sabiam o que poderia ser feito com os números, mas com as variáveis não. Assim, cada grupo tratou de solucionar esse impasse de forma bastante criativa, ou considerando o resultado uma outra incógnita, ou agrupando os números e representando a parte literal da mesma forma.

A utilização do material manipulativo, nesta abordagem didática, tem como principal característica proporcionar aos alunos um modo de verificarem as suas hipóteses, neste caso, com relação às operações de adição e subtração envolvendo expressões algébricas, servindo assim como uma ferramenta auxiliar, como já citado anteriormente.

Sendo assim, a professora sugeriu que utilizassem o material manipulativo para representar a expressão algébrica em questão. Durante a representação da expressão com o material manipulativo, esperava-se que os grupos tivessem dificuldades para perceber o modo mais simples de escrita da expressão algébrica mas, para nossa surpresa, não foi isso que aconteceu. Quase que imediatamente após representarem a expressão sugerida com o material, a maioria dos grupos percebeu que poderiam agrupar as peças do material pelo tamanho, ou seja, que a expressão sugerida pela professora também poderia ter como interpretação a representação feita com o material, e que ambas eram equivalentes a uma outra representação, onde bastava mudar a posição das peças. Daí para a interpretação e representação escrita formal foi apenas uma questão de associarem as peças às áreas correspondentes.

Apenas um grupo teve dificuldades de perceber que, por exemplo, a expressão $x + 1 + x + 3$ era equivalente a $2x + 4$. Embora tivessem agrupado as peças pelo atributo tamanho, a representação escrita final do grupo continuava sendo $x + x + 1 + 3$.

No momento da socialização das hipóteses, uma aluna de outro grupo explicitou o que foi pensado com relação à representação $2x + 4$. No grupo que não havia conseguido concluir que $x + 1 + x + 3$ era equivalente a $2x + 4$ houve um comentário: “Ah! Mas é claro, $x + x$ são dois retângulos $x$, então dá para escrever $2x$”. (o aluno G referia-se às áreas dos retângulos).

Uma das conclusões verbalizadas pelos grupos sobre simplificar a escrita da expressão de modo que a nova expressão continue tendo o mesmo valor da expressão inicial foi: “pode-se agrupar os que são de mesmo tamanho e escrever a quantidade que resta de cada tipo”.

O material estava sendo utilizado pelos grupos para verificar se as respostas dadas estavam corretas ou não. Surpreendeu-nos o fato dos grupos obterem a expressão $6x + 6$ como a forma simplificada para $x + x + 5 + x + 3 + x - 2 + x + x$, porém nenhum grupo utilizou a forma mais simplificada para responder o item *c* – se a distância total fosse de 15 km, qual seria a distância percorrida da empresa até o mercado 1. Os poucos grupos que responderam esta questão utilizaram-se do método de tentativa e erro.

Lins e Gimenez chamam a atenção para a utilização de material concreto como uma abordagem chamada por eles de “facilitadora”.

> Para “surpresa” das pesquisadoras, as crianças – embora achando o material concreto “útil” – não viam relação entre o que haviam feito no “concreto” e o que haviam feito no “formal”. [...] Acreditamos que a sugestão que fica é a de que talvez não haja mesmo a ligação entre o que aconteceu no trabalho “concreto” e o que aconteceu no trabalho com o “formal”; talvez sejam , simplesmente duas atividades distintas, com seus resultados localizados (1997, p. 107, grifo dos autores).

Consideramos que a abordagem proposta não se constituiu em uma “abordagem facilitadora” da álgebra, uma vez que o material não é o ponto de partida para a compreensão dos conceitos mas funciona simplesmente como uma “bengala” de apoio no momento de verificação das hipóteses propostas pelos alunos. Segundo Lins e Gimenez:

> As abordagens facilitadoras baseiam-se na idéia de que uma certa estrutura que é posta em jogo na manipulação de “concretos” é, depois, por um processo de abstração, transformada em “formal”. [...] Como conseqüência, o trabalho no concreto deve preceder *necessariamente* o trabalho no “formal” (1997, p. 108, grifo dos autores).

Durante as aulas, o *concreto* e o *formal* foram trabalhados ao mesmo tempo, como representações diferentes de uma mesma idéia.

A intenção foi a de utilizar o material manipulativo como uma maneira de se interpretar expressões algébricas (neste caso específico, expressões que na verdade são equivalentes). Por exemplo, na situação-problema 1, os alunos utilizaram-se do material para representar a expressão $x + x + 5 + x + 3 + x - 2 + x + x$ e verificar seu modo simplificado, mas o material não é uma simulação da situação-problema, pois a situação envolvia questões de distância enquanto o material associa adição e retirada de áreas à expressão. No entanto, sua utilização pode facilitar e auxiliar na compreensão da simplificação daquela expressão algébrica, desde que se considere que são duas atividades distintas, uma é o uso do material para representar a expressão e a outra é manipulação da própria expressão algébrica.

### *4.3.2 Situação-problema 2*

Joana está praticando caminhada. A cada dia ela caminha 3 km a mais que no dia anterior. Complete a tabela com informações sobre as caminhadas de Joana:

| Dias | Distância percorrida por Joana |
|---|---|
| 1º dia | |
| 2º dia | |
| 3º dia | |
| 4º dia | |
| 5º dia | |

a) Como poderíamos representar a distância total percorrida por Joana após os cinco dias?

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

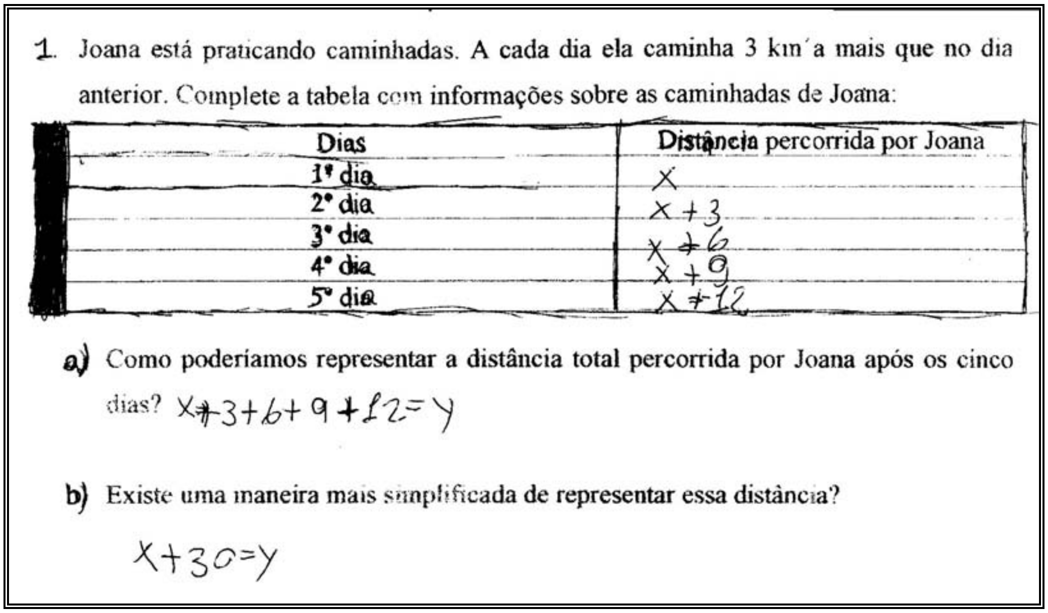
c) Se Joana percorreu um total de 35 km após os cinco dias de caminhada, quanto ela percorreu no primeiro dia? Explique como chegaram na resposta:

d) Se Joana percorreu um total de 41 km após os cinco dias de caminhada, quanto ela percorreu no primeiro dia? Explique como chegaram na resposta:

Quadro 4.8 – Fase 2: situação-problema 2

Quanto a esta situação-problema (quadro 4.8), os grupos tiveram alguma dificuldade para interpretar a situação. Após a interpretação, iniciou-se uma discussão nos grupos em relação a qual distância que Joana havia percorrido no primeiro dia. Para a maioria dos grupos ficou claro que a distância correspondente ao primeiro dia era uma incógnita, com exceção de um grupo que, mesmo com a intervenção da professora, ainda acreditava que Joana havia percorrido 3 Km no primeiro dia, embora a situação-problema não contivesse essa informação.

Foi observado pela professora que, ao completarem a tabela, a maioria dos grupos utilizou uma incógnita para o valor desconhecido (primeiro dia) acrescido dos quilômetros percorridos naquele dia (figuras 4.18 e 4.19).



1. Joana está praticando caminhadas. A cada dia ela caminha 3 km a mais que no dia anterior. Complete a tabela com informações sobre as caminhadas de Joana:

[redacted]

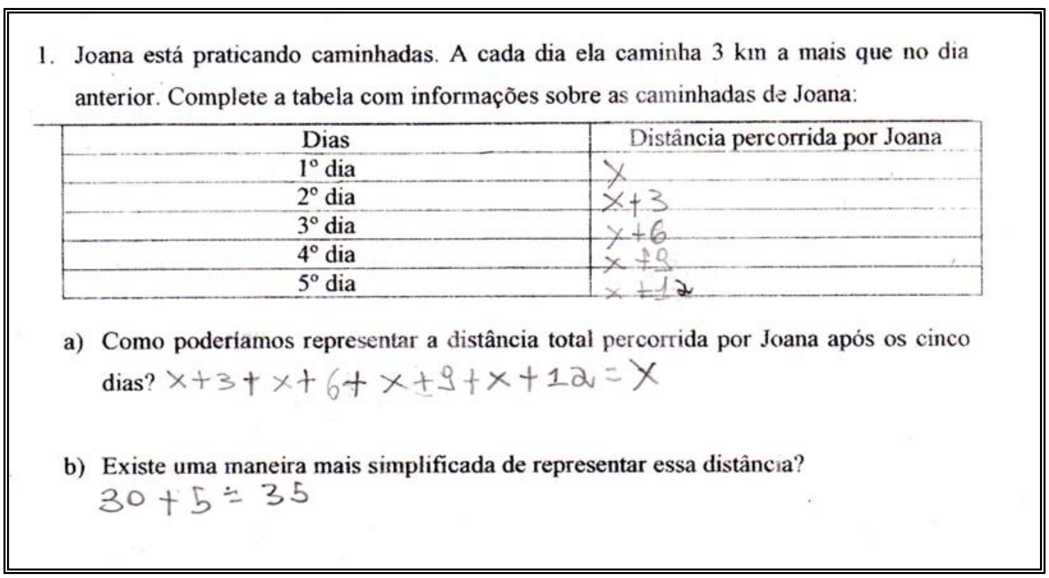
| Dias | Distância percorrida por Joana |
|---|---|
| 1º dia | x |
| 2º dia | x + 3 |
| 3º dia | x + 6 |
| 4º dia | x + 9 |
| 5º dia | x + 12 |

a) Como poderíamos representar a distância total percorrida por Joana após os cinco dias? x + 3 + 6 + 9 + 12 = y

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

x + 30 = y

Figura 4.18 – Fase 2: situação-problema 2 – grupo 4



1. Joana está praticando caminhadas. A cada dia ela caminha 3 km a mais que no dia anterior. Complete a tabela com informações sobre as caminhadas de Joana:

| Dias | Distância percorrida por Joana |
|---|---|
| 1º dia | x |
| 2º dia | x + 3 |
| 3º dia | x + 6 |
| 4º dia | x + 9 |
| 5º dia | x + 12 |

a) Como poderíamos representar a distância total percorrida por Joana após os cinco dias? x + 3 + x + 6 + x + 9 + x + 12 = x

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

30 + 5 = 35

Figura 4.19 – Fase 2: situação-problema 2 – grupo 2

Porém, o que se observa na segunda coluna da tabela não foi transposto para a resolução do item a; alguns grupos representaram a incógnita apenas uma vez (figura 4.18, item *a*) ou obtiveram como total percorrido também uma incógnita, representada pela mesma letra ou não (item *a* da figura 4.19).

No item *b* alguns grupos utilizaram-se do material manipulativo para confirmar suas hipóteses, porém alguns deram como resposta uma outra incógnita (figura 4.18) ou somaram a quantidade de peças ignorando a espécie (figura 4.19).

Nos demais itens, prevaleceu o método da tentativa para a resolução. Muitos grupos não tentaram validar suas respostas através de verificações ou uso de material manipulativo.

Na socialização em grande grupo, chamou bastante atenção a forte utilização do material para convencer os colegas quanto à resposta correta. Isso ficou muito evidente quando a professora indagou aos alunos sobre o item *b*, onde alguns grupos responderam ser a maneira mais simplificada "$5x + 30$" (correta); outros, "$x + 30$"; outros, "$5 + 30 = 35$"; outros ainda responderam "$x + 30 = y$". Ao serem questionados em grande grupo, cada grupo tentou justificar sua resposta. O grupo que dera a resposta correta buscou no material um modo para defesa de suas hipóteses. A aluna R, do referido grupo falou: "Estão vendo? São 5 retângulos laranja e 30 quadradinhos, então não pode ser a resposta 35 porque não posso somar pois são figuras diferentes (referia-se ao 30 + 5), também não pode ser $x + 30 = y$ porque o $y$ é representado pelo retângulo verde e se juntarmos os 5 laranjas e os 30 amarelos não vamos ter um verde como resposta."

A aluna R foi então questionada se a resposta poderia ser $35x$. De forma categórica a aluna R respondeu: "Não, porque são só 5 retângulos laranja e 30 quadradinhos amarelos, não tem como dar $35x$"(referindo-se a serem 35 retângulos laranjas).

Outro aspecto bastante saliente nas respostas dadas pelos grupos é a necessidade de fechamento, já observada na resolução da situação-problema 1. No entanto, acreditamos que a utilização do material manipulativo associado às discussões das atividades em grande grupo contribuiu para um avanço neste sentido. Observou-se que muitos dos alunos que, durante as atividades de grupo, demonstraram esta necessidade de fechamento nas expressões, ao ouvirem as justificativas da colega (comprovadas com material) começaram a perceber a possibilidade de uma resposta ser uma expressão e não um único valor numérico ou uma incógnita.

Quanto aos dois últimos itens da questão, na atividade de pequenos grupos surgiram dois tipos de respostas, porém nenhuma correta. Dois grupos pensaram que para encontrar a distância percorrida no primeiro dia, bastava dividir o total por 5, uma vez que eram 5 dias. Os outros grupos pensaram da seguinte forma: do total descontam-se os 30 km (valor numérico equivalente à soma dos acréscimos diários) e o que sobra é o que ela percorreu no primeiro dia. Fato interessante é o de que antes de comentarmos o tema em grande grupo, nenhum aluno buscou testar sua resposta, pareciam confiantes quanto ao resultado. Porém, com o confronto dos resultados diferentes surgiu a idéia de testá-los para ver qual estava correto, substituindo as respostas obtidas para a distância percorrida no primeiro dia e fazendo as sucessivas somas de 3 km para observar o total percorrido após o quinto dia. Os alunos ficaram surpresos ao verificar que nenhuma das respostas estava correta e então, juntamente com a professora, buscaram outras maneiras de solucionar o problema. As que sugiram foram: tentativa e erro e resolução da equação, esta última proposta pela professora.

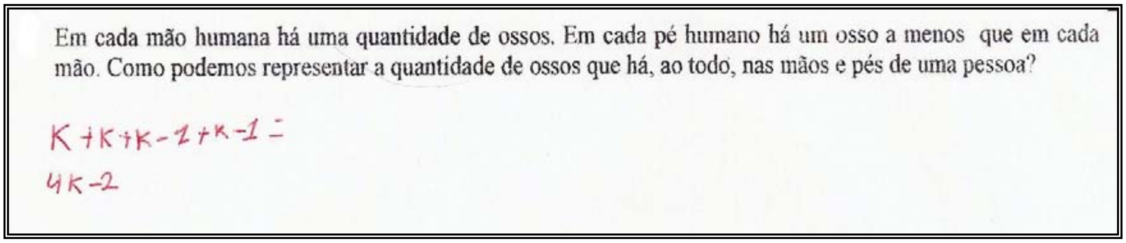
### *4.3.3 Situações-problema 3 e 4*

| |
|---|
| <u>Situação-problema 3</u>: |
| Em cada mão humana há uma quantidade de ossos. Em cada pé humano há um osso a menos que em cada mão. Como podemos representar a quantidade de ossos que há, ao todo, nas mãos e pés de uma pessoa? |

Quadro 4.9 – Fase 2: situação-problema 3

Na *situação-problema 3* (quadro 4.9) houve uma certa dificuldade inicial, da parte de alguns alunos, quanto à interpretação. Tal dificuldade foi superada pelos próprios grupos ao discutirem suas idéias. Vencida a dificuldade da interpretação (por parte de alguns), a etapa da representação algébrica foi quase que imediata.

Vemos na figura 4.20 a resposta dada pelo grupo 2.



Em cada mão humana há uma quantidade de ossos. Em cada pé humano há um osso a menos que em cada mão. Como podemos representar a quantidade de ossos que há, ao todo, nas mãos e pés de uma pessoa?

$K+K+K-1+K-1=$

$4K-2$

Figura 4.20 – Fase 2: situação-problema 3 – grupo 2

Não houve problemas quanto à interpretação na *situação-problema 4* (quadro 4.10).

| |
|---|
| Situação-problema 4:<br><br>Um grupo de seis pessoas vai almoçar num restaurante. Cada uma pede o prato do dia e uma sobremesa, exceto uma pessoa, a qual não pede sobremesa. Suponha que o prato do dia custe x reais e cada sobremesa custe 1 real.<br>a) Como você poderia representar a quantia total que este grupo de pessoas gastou no restaurante?<br>b) Supondo que elas tenham gasto ao todo 32 reais, então qual era o valor do prato do dia? |

Quadro 4.10 – Fase 2: situação-problema 4

No decorrer da resolução destas atividades (quadro 4.9 e 4.10) foi possível observar o quanto o trabalho inicial realizado na primeira fase desta pesquisa foi importante para a compreensão de novos conceitos algébricos. O trabalho realizado anteriormente tinha como objetivo diferenciar os diversos usos da letra em contextos algébricos: como incógnita, como variável funcional ou como generalização aritmética. De acordo com Trigueros e Ursini (2005), um uso aceitável da álgebra elementar requer uma compreensão adequada do uso de variável, conceito que é fundamental para o trabalho com tópicos matemáticos mais avançados. Isso, de fato, ficou bastante evidente durante a execução dessas atividades – situações-problema 3 e 4 – e de outras. Por exemplo, os alunos não se fixaram no uso de uma única letra para representar o valor desconhecido e mesmo quando se fez necessária a utilização do material manipulativo para a verificação das respostas dadas, os alunos utilizavam as peças associando as outras letras que estavam empregando às utilizadas no material (no caso *x* ou *y*). O que se está querendo dizer é que não importava a letra que estava sendo utilizada mas a idéia que a letra estava representando: um valor desconhecido. Portanto, não fazia diferença utilizar *x, y, z* ou qualquer outra letra.

Na quarta situação-problema (quadro 4.10), para responderem o item *a,* apenas dois grupos fizeram uso do material manipulativo, os demais já pensaram diretamente na resposta $6x + 5$. Atribuímos isso ao fato de, no enunciado, já estar estipulado que cada prato custava *x* reais. Essa informação induziu, de certa forma, à resposta correta. Chamou-nos atenção, quanto ao item *b*, o fato de praticamente todos os alunos encontrarem o resultado correto realizando operações inversas às do enunciado e não utilizando tentativas, isto é, tomaram o total gasto (no caso, 32 reais), diminuíram 5 (somatório do valor das sobremesas) e dividiram o restante por 6 (quantidade de pessoas que almoçaram). Um exemplo disso pode ser conferido na questão respondida pelo grupo 4 (figura 4.21).

Um grupo de seis pessoas vai almoçar num restaurante. Cada uma pede o prato do dia e uma sobremesa, exceto uma pessoa, a qual não pede sobremesa. Suponha que o prato do dia custe x reais e cada sobremesa custe 1 real.

a) Como você poderia representar a quantia total que este grupo de pessoas gastou no restaurante?

6 I + 5

b) Supondo que elas tenham gasto ao todo 32 reais, então qual era o valor do prato do dia?

O valor do prato do dia é R$ 4,50

$$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 5 \\ \hline 27 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 6 \\ -24 & 4,50 \\ \hline 030 & \end{array}$$

Figura 4.21 – Fase 2: situação-problema 4 – grupo 4

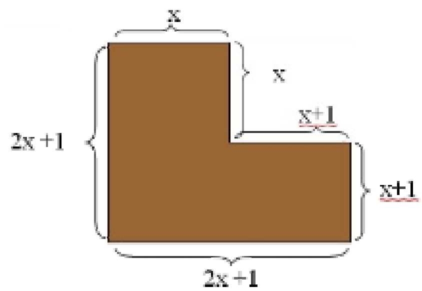
Neves (1995, p. 113) afirma que “um trabalho constante em torno da resolução de problemas poderá levar à necessidade de refinamento dos procedimentos utilizados.” Entendemos que isso é o que vem ocorrendo no decorrer das aulas evidenciando-se na resposta dada ao item *b* pela maioria dos alunos. Neves ainda afirma que também com um trabalho realizado “a partir de um contexto interno à matemática é possível apresentar aos alunos novas classes de equações que instigam uma ampliação dos procedimentos já conhecidos.” Entretanto, optamos por utilizar a resolução de problemas mais contextualizados, com situações do cotidiano, combinada à resolução de problemas de caráter mais interno à matemática.

Os alunos não utilizaram a expressão obtida no item *a* na resolução do item *b*, isto é não trataram esta questão como uma equação mas resolveram-na utilizando argumentos aritméticos. Uma de nossas pretensões é a de que, ao final deste trabalho, os alunos percebam que as operações realizadas na aritmética podem, de certa forma, ser consideradas particularidades das operações algébricas. Tal pretensão é corroborada pelas idéias de Vygotsky (1987, p. 180), que afirma que a álgebra livra o pensamento da criança da prisão das relações numéricas concretas e o eleva ao nível mais abstrato. E mais, que pelo aprendizado de álgebra, a criança passa a compreender as operações aritméticas como casos particulares de operações algébricas. Isso dá à criança uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada de suas operações com quantidades concretas.

### *4.3.4 Situação-problema 5*

Num primeiro momento, os alunos tiveram algumas dificuldades em perceber que o perímetro da figura seria encontrado através da soma de seus lados. Fez-se necessário a intervenção da professora com alguns questionamentos que propiciassem a lembrança de como se pode calcular o perímetro da referida figura (quadro 4.11).

1. Observe a figura abaixo:




a) Suponha que o x vale 5 centímetros, então qual seria o perímetro desta figura?

b) E se x valesse 8 centímetros?

c) Sempre poderemos achar um perímetro para a figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para x e calcular o perímetro?Justifique:

d) Podemos utilizar 1 centímetro para o valor de x? Justifique:

e) Complete a tabela :

| Valor atribuído ao x | Perímetro da figura |
|---|---|
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6,5 | |
| 7 | |
| 8,2 | |
| 9,4 | |
| | 86 |

f) É possível representar o perímetro dessa figura sem atribuir valores específicos para *x*? Como?

g) Existe uma maneira mais simplificada de representar esse perímetro?

Quadro 4.11 – Fase 2: situação-problema 5

Nos itens *a* e *b*, os alunos substituíam o valor do *x* e buscavam descobrir a medida de cada lado antes de somá-los para obter o perímetro.

Quanto ao item c, nenhum grupo de alunos considerou que não poderia haver valores negativos para *x*. Simplesmente afirmaram que *x* poderia assumir qualquer valor.

Para responder os dois últimos itens, os grupos, com exceção de um, recorreram ao auxílio do material manipulativo para confirmar suas hipóteses de que era necessário somar as parcelas envolvendo *x*.

Além da resolução da situação-problema 5, foram propostas pela professora, em determinado momento da aula, algumas expressões algébricas[31] e solicitado que os alunos apresentassem uma expressão equivalente para cada uma delas. No momento, observou-se que quando não havia o uso dos parênteses ou a operação era de adição, não houve dificuldades por parte dos alunos para representarem e simplificarem as expressões sugeridas. No entanto, na situação em que procurou-se efetuar uma subtração entre expressões algébricas, $(x^2 + 2x - 1) - (3x^2 - 5x + 3)$, a maioria dos alunos apenas usou a idéia de trocar o sinal para o termo $3x^2$, obtendo a simplificação $-2x^2 - 3x + 2$.

A professora indagou qual era o significado dos parênteses naquela situação. O aluno M falou que os parênteses serviam para indicar que eram dois grupos distintos, e que se estava diminuindo um do outro. Então, a professora sugeriu que utilizassem o material para representar e questionou: “Se estamos diminuindo um grupo do outro, está correto afirmar que apenas as peças que correspondem ao $3x^2$ devem ser viradas?”.

Após alguns instantes de silêncio o aluno A diz que não está correto porque se está diminuindo o grupo todo, então todas as peças depois do sinal de menos deveriam ser viradas.

A professora então solicitou que indicassem o novo resultado obtido.

A aluna R perguntou para a professora se o aluno A realmente estava correto, pois ela continuava achando que sua resposta estava correta (resposta em que considerava apenas o $3x^2$ na troca de sinal). A professora devolveu a pergunta ao grande grupo e estes tentaram explicar e convencer a colega de que o aluno A estava correto.

Então iniciou-se uma discussão quanto ao uso do parênteses, sobre quando usar ou quando não usar os parênteses. Alguns dos comentários da discussão foram:

“Se deve usar parênteses quando se está fazendo conta de menos” (Aluno M).

---

[31] As expressões apresentadas pela professora foram as seguintes:
$x^2 + 3x - 2 + 3x^2 - 5x + 4$
$(x^2 + x - 2) + (x^2 - 3x + 3)$
$(x^2 + 2x - 1) - (3x^2 - 5x + 3)$

“Eu acho que vamos usar parênteses quando vamos fazer contas com dois grupos diferentes. Como fizemos hoje na aula” (Aluno A).

“Acho que não precisa usar parênteses porque fica mais fácil” (Aluna R).

A discussão sobre o uso ou não dos parênteses foi bastante produtiva. Acreditamos que os alunos tenham compreendido o motivo do uso ou não do parênteses em algumas situações envolvendo expressões.

Cabe ressaltar que nenhum aluno fez alusões a aulas anteriores (de anos anteriores) em que os parênteses, em expressões numéricas, eram utilizados para estabelecer uma hierarquia de resolução. Ou seja, estavam produzindo um significado específico para o uso dos parênteses neste contexto – expressões algébricas – justificado ou não pelo uso do material manipulativo.

Quanto aos diferentes comentários sobre o uso ou não dos parênteses, a professora considerou melhor não interferir dando a sua versão sobre como e quando utilizar parênteses em expressões algébricas, pois um dos interesses era verificar como iriam proceder nas próximas situações onde tivessem que lidar com os parênteses. Acreditamos que dizer qual dos alunos estava correto ou simplesmente expor uma resposta para a questão levantada iria arrebatar a oportunidade dos alunos refletirem sobre o assunto e tal definição não seria significativa para os mesmos. Tornaria-se apenas mais uma regra a ser seguida nas aulas de matemática. Entretanto, se persistisse uma idéia equivocada quanto ao uso dos parênteses em operações com expressões algébricas, tornar-se-ia necessária uma intervenção mais sistematizada sobre o assunto. No momento, a professora limitou-se a fazer questionamentos que provocassem a reflexão sobre as afirmações que os alunos faziam.

Com relação à operação de adição entre expressões algébricas, conteúdo abordado nas situações-problema até aqui trabalhadas, algumas conclusões foram elaboradas pelos alunos. E, para estas conclusões, o uso do material manipulativo demonstrou-se benéfico.

Ficou evidente a dependência do material manipulativo na justificação dada pelos alunos quanto ao que deve ser levado em consideração se quisermos efetuar adições e subtrações de expressões algébricas. Algumas das respostas obtidas foram:

"Só podemos agrupar as peças que são do mesmo tamanho" (Aluno B).

"A gente tem que agrupar as peças que são do mesmo tipo, pode juntar a colorida com a virada mas tem que lembrar que uma virada anula uma colorida" (Aluno C).

Nenhum grupo considerou simplesmente as expressões algébricas, sempre associaram as mesmas com o material. Mesmo após o questionamento da professora, no qual era solicitado que se buscasse uma explicação sem o uso do material, ainda foi difícil para os alunos conceberem as expressões dissociadas do mesmo. Após a insistência da professora quanto ao não uso do material, a aluna R falou: "É preciso olhar se as letras são iguais porque cada peça representa uma variável diferente, então a gente só pode agrupar o que tem mesma letra."

A professora questionou os alunos sobre o que fazer com as tais "letras iguais" e a mesma aluna respondeu: "Bom, tem que ver se tem o sinal de mais ou de menos. Se tem sinal de mais com outro sinal de mais então se junta tudo e vê o resultado. Se tem um sinal de mais e um de menos então cada um de menos cancela um do de mais, daí faz este esquema e depois vê o que sobra."

Embora a estratégia da aluna estivesse coerente, o restante da turma pareceu não ter acompanhado o seu raciocínio.

De certa forma, a dependência do material manipulativo para a validação das afirmações feitas pelos alunos tem suas características benéficas, pelo menos nesta etapa de produção de conhecimentos. Conforme Lins e Gimenez (1997), o conhecimento ocorre quando o par crença-afirmação e justificação ocorrem, sendo crença-afirmação aquilo no qual o sujeito acredita como verdade, e a justificação o que garante, para este sujeito, que ele pode enunciar aquela crença-afirmação. O sujeito que produz o conhecimento acredita que alguém compartilha com ele suas justificações.

Em nosso caso específico, as crenças-afirmação são as conclusões apresentadas pela aluna R e o objeto utilizado para compartilhar e validar a justificação é a utilização do material manipulativo.

Para entender melhor este processo, um trecho dos mesmos autores, no qual procuram exemplificar os conceitos que propõem:

> Num *conhecimento* produzido, a *crença-afirmação* corresponde ao que é novo, ao passo que a *justificação* corresponde ao que é dado. *Justificações* estabelecem um vínculo entre *crenças-afirmações* e núcleos, que são um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais o significado está sendo produzido (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 144, grifo do autor).

Entendemos que o uso do material nas justificações apresentadas ocorreu porque os alunos atribuíram um determinado significado[32] para sua utilização, no qual era possível associá-lo a adições e subtrações. Neste momento, procuravam um significado para estas operações com expressões algébricas. A justificação, neste caso, era o significado conhecido e compartilhado por eles, a crença-afirmação é o novo significado que procuravam estabelecer.

A argumentação oral ainda não era considerada por todos como uma justificação. Ainda estava muito presente a necessidade de mostrar com o material que o argumento procede.

Acreditamos que esta dependência do material manipulativo seria atenuada com a produção de significado para as expressões algébricas. Na atividade com o material manipulativo, o objeto do conhecimento é o próprio material e, portanto, produziu-se um significado para o mesmo. Mas ao passarmos para o trabalho com as expressões algébricas, estas passam a ser os objetos principais e o objetivo é que o aluno produza significado para as mesmas. No entanto, essa produção não se dá de maneira imediata, há a necessidade de se estabelecer a possibilidade de transformações diretas de expressões algébricas como forma de

[32] Cabe ressaltar que fazemos aqui uso da definição dada por Lins e Gimenez (1997).em relação a significado, que foi apresentada na seção 2.5 deste trabalho.

gerar novas expressões equivalentes. Para cada expressão produzida produz-se uma justificação relacionada ao material manipulativo e outra relacionada à simples manipulação algébrica das expressões. A exploração das diferenças entre os dois modos de produzir significados é um fator importante para que ocorra a produção do novo conhecimento.

Com este objetivo foram propostas várias atividades nas quais os alunos utilizavam-se do material mas também deveriam pensar numa resposta equivalente sem o uso do material.

No quadro 4.12 temos exemplos destas atividades.

1) Represente, com o material, algumas expressões algébricas:

| | Resposta |
|---|---|
| $x + 1$ | |
| $2x + 3$ | |
| $x^2 + x + 1$ | |

2) Represente cada situação com material, mas também descubra uma maneira de representar a operação por escrito (sem a utilização de desenhos):

| | Resposta com desenho | Resposta escrita |
|---|---|---|
| O dobro de $x + 1$ | | |
| O triplo de $2x + 3$ | | |
| O triplo de $x^2 + x + 1$ | | |

3) Represente, com o material, a expressão algébrica equivalente a $2 \cdot (-4x + 3)$:

4) Como você realizaria esta operação sem o uso do material?

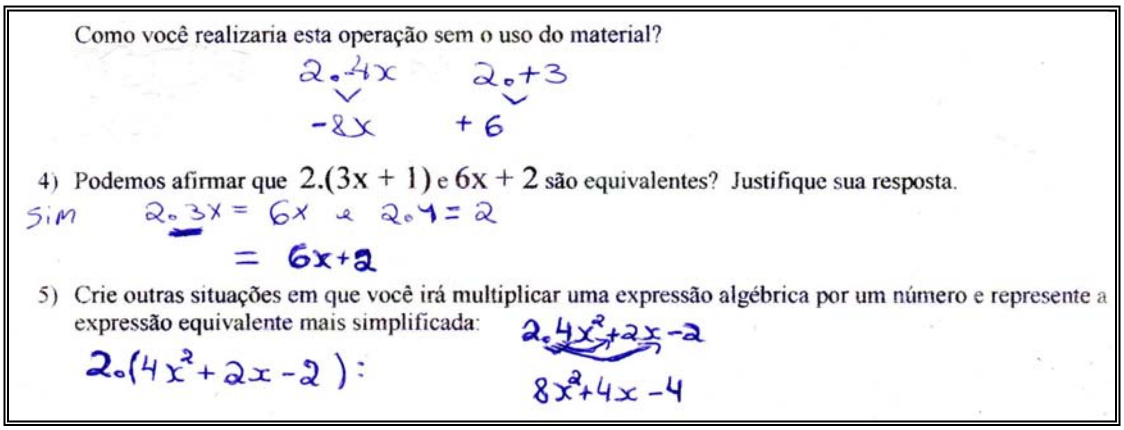
5) Podemos afirmar que $2 \cdot (3x + 1)$ e $6x + 2$ são equivalentes? Justifique sua resposta.

6) Crie outras situações em que ocorre a multiplicação de uma expressão algébrica por um número e represente a expressão equivalente mais simplificada:

Quadro 4.12 – Fase 2: atividades de aula

Ao propormos tais atividades (quadro 4.12), imaginamos que os alunos teriam certa dificuldade em compreender o conceito de dobro e triplo em expressões algébricas, mas para nossa surpresa, vários grupos davam primeiro a resposta algébrica e somente depois representavam a expressão com o material, e só o faziam por ser uma exigência da atividade. A impressão foi de que, para alguns alunos, já não seria mais necessário a justificação através do material manipulativo. Isso não ocorreu com todos os alunos, mas com os mais assíduos.

Alguns alunos buscaram suas justificativas somente em representações algébricas, como observamos nas figuras 4.22 e 4.23.


Como você realizaria esta operação sem o uso do material?

$2.-4x \quad 2.+3$

$-8x \quad +6$

4) Podemos afirmar que $2.(3x + 1)$ e $6x + 2$ são equivalentes? Justifique sua resposta.

sim $2.3x = 6x$ e $2.1 = 2$

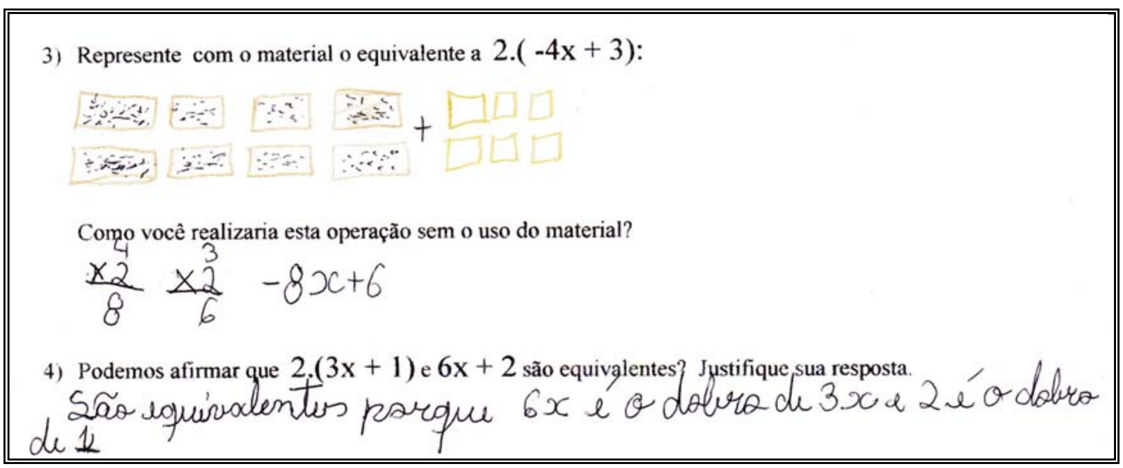
$= 6x+2$

5) Crie outras situações em que você irá multiplicar uma expressão algébrica por um número e represente a expressão equivalente mais simplificada:

$2.(4x^2+2x-2)$: $2.4x^2+2x-2$

$8x^2+4x-4$

Figura 4.22 – Fase 2: atividade de multiplicação – aluna I


3) Represente com o material o equivalente a $2.( -4x + 3)$:

Como você realizaria esta operação sem o uso do material?

$\frac{4 \times 2}{8} \quad \frac{3 \times 2}{6} \quad -8x+6$

4) Podemos afirmar que $2.(3x + 1)$ e $6x + 2$ são equivalentes? Justifique sua resposta.

São equivalentes porque 6x é o dobro de 3x e 2 é o dobro de 1

Figura 4.23 – Fase 2: atividade de multiplicação – aluno M

Observamos, a cada aula, o progresso dos alunos em relação à produção de significado para as operações com expressões algébricas e o desenvolvimento do pensamento algébrico e habilidades técnicas na manipulação das expressões. Creditamos parte desse mérito à forma como foi desenvolvido o trabalho, visando uma estrutura das atividades que proporcionasse ao aluno as seguintes condições:

> i) dada uma situação, produzir afirmações tidas como corretas, junto com *justificações* para sua enunciação;
> ii) com base nas expressões produzidas em (i), trabalhar *também* com transformações diretas dessas expressões. É evidentemente importante que se explicite que os dois modos de produzir significados são distintos (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 152–153, grifo do autor).

Nas atividades apresentadas nas figuras 4.22 e 4.23, notou-se que a maioria dos alunos produziu um significado para o trabalho com o material e também produziu um significado para a manipulação simbólica das expressões algébricas. Fica evidente o desenvolvimento do "pensar algebricamente" desses alunos pois tentam compreender e tratar as operações como tais, sem recorrer ao material manipulativo.

Cabe ressaltar que o ritmo desse processo de produção de significados certamente varia bastante de aluno para aluno. O interesse do aluno é um fator muito importante para que esse processo ocorra mais rapidamente. Mas, convém salientar que "é uma postura ingênua acreditar que a aprendizagem ocorre sempre que se desperta o interesse do aluno"(MOYSES, 1994). Pensamos que, além do interesse do aluno, outros fatores influenciam para que ocorra (ou não) o aprendizado, tais como as experiências anteriores que o aluno vivenciou, sua capacidade de concentração, sua predisposição para realizar as atividades, dentre outros.

Segundo Prates (2004, p. 93), a produção de conhecimento se dá através do pensar reflexivo e da atividade investigativa. Tal produção pode ser desencadeada a partir de desafios cognitivos impostos por situações-problema. Em suas palavras:

> Um processo de ensino que trabalhe dados, fatos e, claro, conceitos teóricos e modelos de análise de modo que o aluno possa ver a utilidade, a vitalidade de tais conhecimentos ao invés de apresentá-los como algo fixo, pronto e acabado, poderia estimular uma aprendizagem na perspectiva de uma educação ativa, reflexiva e investigativa, que se venha caracterizar, além disto, pela interação dialógica. Neste caso, as sugestões nascidas no processo investigativo são elaboradas e aprimoradas pelo diálogo referenciado na própria situação-problema.
> Diálogo assim entendido envolve interação entre sujeitos de um processo educativo, uma situação-problema sendo investigada, conceitos ou ferramentas de análise e explicação e critérios para construção de consensos fundamentados (PRATES, 2004, p. 93).

O sentido atribuído ao diálogo pelo autor parece ser o de uma instigação aos processos cognitivos de cada aluno respeitando sua individualidade, sua maneira de pensar e, simultaneamente, as construções coletivas que podem englobar construções cognitivas mais amplas. Nesse aspecto o educador também desempenha um papel essencial.

Relembrando Paulo Freire (1996, p. 29), "ensinar não se esgota no 'tratamento' do objeto ou do conteúdo, superficialmente feito, mas se alonga à produção das condições em que aprender criticamente é possível."

### *4.3.5 Introdução da multiplicação entre expressões algébricas*

O trabalho com a operação de multiplicação entre expressões algébricas iniciou-se com a retomada de como calcular a área de retângulos[33]. O esperado era que os alunos verbalizassem que todo retângulo possui duas medidas (lineares) – comprimento (base) e largura (altura) – e uma área, sendo que a área poderia ser calculada através da multiplicação das medidas (lineares) do retângulo. Entretanto apenas a aluna S verbalizou que para calcular a área do retângulo bastava multiplicar a base pela altura.

Foi realizado o cálculo da área de alguns retângulos cujas dimensões eram apenas numéricas. Em seguida a professora questionou sobre o que ocorreria com a área dos retângulos se mudássemos os números para variáveis (letras).

Alguns alunos responderam em conjunto: "É só multiplicar as letras."

Ao serem questionados quanto ao resultado que se obteria para a área de um retângulo cujas dimensões eram $x$ e $y$, os alunos responderam que seria $xy$ como o retângulo azul utilizado no material manipulativo. Entretanto, ao serem questionados sobre qual seria a área do retângulo de lados $x$ e $(x + 3)$ os alunos nada responderam.

A professora sugeriu que representassem a área do referido retângulo com o material

[33] Ver aula 8 do anexo C.

manipulativo mas, para que isso fosse possível, iriam fazer algumas combinações[34]. Convencionou-se que o resultado da multiplicação entre as expressões algébricas era equivalente à área do retângulo cujo comprimento era um dos termos da multiplicação e cuja largura era o outro termo, e que tal área seria obtida através da soma das áreas das figuras que compunham tal retângulo. Neste caso, a resposta da multiplicação $x \cdot (x + 3)$ poderia ser associada à área do retângulo de lados $x$ e $(x + 3)$ e, portanto seria equivalente a $x^2 + 3x$.

A professora sugeriu a multiplicação (x + 2) . (x + 3) e perguntou aos alunos como obter uma expressão equivalente mas que não contivesse multiplicação. A aluna R respondeu que dava para fazer como no anterior, bastava ver com as "pecinhas" qual era o retângulo que seria formado com um lado sendo x + 2 e o outro x + 3. Depois era só verificar, segundo ela, quais pecinhas encaixavam no retângulo e "juntar[35]" os resultados.

Acreditamos que as combinações feitas quanto ao uso do material manipulativo na representação de expressões algébricas equivalentes foram necessárias na medida em que se esperava que o material fosse um auxiliar na validação de hipóteses e resultados obtidos pelos alunos quanto à multiplicação.

Entretanto, os alunos assumiram tais combinações como se fossem "regras de um jogo de quebra-cabeça" (palavras da aluna S), no qual precisariam combinar a peça que indica a medida horizontal com a que indica a medida vertical. Observamos que não havia sido muito explorado o fato de que a composição do retângulo através do material manipulativo dadas suas dimensões estaria associada ao cálculo da área do retângulo que seria obtido com esta "regra" e, mais, que tal área seria equivalente à multiplicação das expressões algébricas que estavam representando as dimensões do retângulo.

Ao refletirmos sobre o significado produzido pelos alunos em comparação ao

[34] As combinações encontram-se detalhadas na aula 8 do anexo C.

[35] Ao dizer *juntar* a aluna referia-se à adição dos termos semelhantes. Em se tratando do material manipulativo, das áreas das figuras semelhantes.

significado que era esperado, pensamos que atribuímos demasiada atenção aos objetos (material manipulativo) e pouca atenção às relações que este proporcionaria aos alunos quando associado ao cálculo de áreas. Assim sendo, retomamos com os alunos, de outra forma – utilizando, além de argumentos verbais, a resolução de situações problemas que envolvessem a multiplicação entre expressões algébricas e discussões em grupo – o uso do material manipulativo para que não ficasse associado a um "jogo de quebra-cabeças", mas ao fato de servir como uma representação para a multiplicação entre expressões algébricas. Este episódio foi útil como um alerta para o trabalho referente à produção de significados para as expressões algébricas e as operações com as mesmas.

Nossa expectativa quanto à produção de significados para a multiplicação de expressões algébricas, num primeiro momento, era a de que os alunos se apropriassem de um significado que, neste caso, seria o cálculo de área de retângulos cujas dimensões fossem variáveis (ou incógnitas). Houve a produção de um significado para a utilização do material e também para a manipulação simbólica das expressões algébricas no cálculo de área. Os alunos inicialmente pensaram na multiplicação entre expressões algébricas com o uso do material como um jogo, no qual precisariam combinar a peça que indica a medida horizontal com a que indica a medida vertical. Porém, como já relatamos, este não era o significado esperado pela professora. Ficou evidente, neste caso, que apesar de professora e alunos compartilharem da mesma *crença-afirmação* (associar o material ao cálculo de áreas), as *justificações* da professora para que isso fosse possível eram diferentes das justificações dos alunos. Na concepção esperada, o que estava envolvido era a utilização da propriedade distributiva da multiplicação, enquanto para os alunos a justificação era a necessidade de colocar a peça adequada, que "encaixasse" nas medidas sugeridas.

Ao exemplificar a produção de significados para resolução de equações do 1º grau, Lins e Gimenez (1997) evidenciam as diferenças entre a produção de significados realizada pela professora e aquela realizada por seus alunos. Na situação, exemplificada pelos pesquisadores, a professora acreditava que a equação 3x + 10 = 100 poderia ser solucionada e suas justificações para que isso ocorresse era: podemos subtrair ou dividir pelo mesmo termo ambos os lados de uma equação, e a igualdade não se altera. Para seus alunos, no entanto, a mesma equação poderia ser solucionada, mas as justificações eram as seguintes: é como uma balança de dois pratos equilibrada, tirando 10 quilos de cada lado continua equilibrada e depois divido o restante em três partes iguais. Desta forma, se for indicada uma equação do tipo 3x + 100 = 10, os alunos desta professora já não irão considerar uma equação solucionável, pois suas justificações não servem para este caso. "Silenciosamente, cada personagem produzia significados diferentes para a mesma crença-afirmação" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 134).

Pode-se dizer, então, que a produção de significados envolve uma subjetividade. Lins e Gimenez, ao caracterizarem o que seria uma atividade algébrica, salientam a subjetividade da produção de significados:

> [...]é apenas na medida em que explicitamos um recorte do mundo, um interesse especial por afirmações para as quais *nós* produziríamos um certo tipo de significado, que se estabelecem fronteiras para a álgebra, e mesmo assim fronteiras bastante movediças, uma vez que esse recorte não é necessariamente o da matemática acadêmica, e, sim, *o da pessoa que examina uma atividade e classifica como algébrica ou não* (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 137–138, grifo do autor).

Portanto, é necessário levar em consideração que o significado de cada atividade depende de quem realiza a atividade e o mesmo é válido para a utilização de materiais.

### *4.3.6 Situação-problema 6*

Para a resolução desta situação (quadro 4.13), houve a necessidade de retomada dos conceitos de área e perímetro, o que foi feito oralmente com o auxílio verbal do grande grupo.

Um homem possui um terreno retangular cujo comprimento é o dobro da largura. Represente esse terreno através de desenho:

a) Suponha que o comprimento do terreno seja 20 metros, então qual seria o perímetro deste terreno? E a área deste terreno?

b) E se a largura fosse de 12 metros, qual seria o perímetro deste terreno? E a área deste terreno?

c) Sempre poderemos achar um valor para o perímetro e para a área do terreno? Justifique:

d) Complete a tabela :

| Comprimento do terreno (em metros) | Largura do terreno (em metros) | Perímetro do terreno (em metros) | Área do terreno (em metros quadrados) |
|---|---|---|---|
| | 8 | | |
| | 12,5 | | |
| 20 | | | |
| 66,5 | | | |
| | | 78 | |
| | | | 450 |

e) Escreva uma forma para representar o perímetro deste terreno, se considerarmos a largura do terreno como sendo x:

f) Existe uma maneira mais simplificada de representar esse perímetro?

g) Discuta com os colegas de seu grupo e escreva uma maneira de calcular a ÁREA desse terreno:

h) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa área?

i) Esse mesmo homem quer construir no fundo do terreno uma casa que tenha a mesma largura do terreno mas que tenha um comprimento de 6 metros. Represente esta situação e indique uma forma para representar a área construída do terreno (área da casa):

j) Para qualquer valor de x será possível construir a casa de acordo com as regras estipuladas em i)? Justifique sua resposta:

Quadro 4.13 – Fase 2: situação-problema 6

Todos os grupos responderam os itens *e, f, g, h*, referentes ao cálculo de área e perímetro do retângulo cujo comprimento é o dobro da largura. No entanto, nenhum grupo, nem por escrito, nem oralmente, respondeu os dois últimos itens.

Alguns alunos, no momento de justificarem como foi calculado o perímetro do terreno cujo comprimento é o dobro da largura, considerando a largura como sendo $x$, nem sequer utilizaram material manipulativo, apenas verbalizaram que o resultado seria a soma de tudo (dos lados). A aluna R pronunciou: "Tem $2x$ de comprimento. Então são $2x$ com $2x$ e, como a largura é $x$, tem que juntar $x$ e $x$. Juntando tudo dá $6x$."

Já para o cálculo da área houve a necessidade de utilização do material para a justificação e para efetuarem o próprio cálculo.

No momento de calcular a área da casa (quadro 4.13 – item *i*) houve discordâncias entre os grupos: três grupos consideravam que a área da casa seria $6x$, enquanto um dos grupos achava que era $6x^2$. Ao ser solicitado que cada grupo divergente justificasse sua resposta, o grupo que considerava a área igual a $6x$ justificou sua resposta utilizando o material manipulativo enquanto o grupo divergente não conseguiu justificar e acabou concordando com a resposta dos outros grupos.

A figura 4.24 mostra a justificativa dada pelo grupo que considerava a área como sendo $6x$:

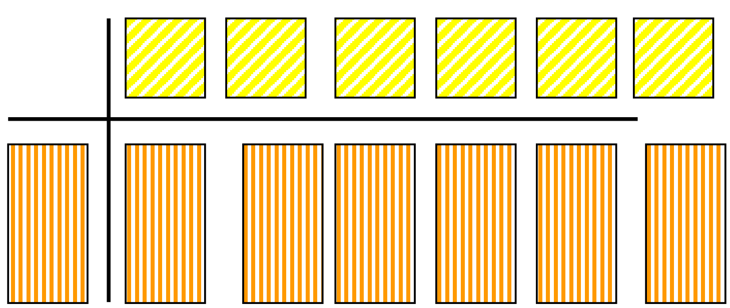


Figura 4.24 – Fase 2: justificação para área $6x$

No momento da discussão em grande grupo, o aluno L expôs seu raciocínio: "Acho que a casa vai ter largura $x$ e comprimento 6."

Os demais colegas do grupo, num primeiro momento, não concordaram com a colocação do aluno L. A professora então solicitou que o mesmo desenhasse no quadro a situação exposta.

Após o desenho e nova explicação de seu raciocínio os demais colegas da turma concordaram com ele.

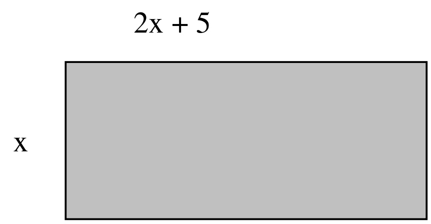
O significado produzido para o uso do material teve alterações, deixando de ser associado ao simples "encaixe" de peças para ser associado a uma forma de representar a multiplicação de expressões algébricas associadas ao cálculo de áreas de retângulos e de figuras compostas por retângulos. Isso ficou evidente na argumentação utilizada pelo aluno L no momento de justificar sua resposta para a área do terreno.

O uso do material manipulativo contribuiu também para a observação da propriedade distributiva, ainda que de modo indireto. Por exemplo: ao utilizar o material para justificar sua resposta, o aluno L, na verdade, utilizou-se da propriedade distributiva ao considerar 6 como sendo $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ e multiplicando cada parcela desta soma pelo $x$, obtendo assim $x + x + x + x + x + x = 6x$, que foi a resposta considerada correta.

Quanto ao último item, nenhum grupo concluiu que somente poderiam ser utilizados valores positivos para $x$. A resposta foi unânime: que poderiam utilizar qualquer valor, que sempre dá para multiplicar. Isso já era esperado devido ao modo como foi conduzido o trabalhado, uma vez que comprimentos são sempre valores positivos. Somente após a intervenção da professora concordaram que valores negativos ou nulos não poderiam ser utilizados porque estavam fazendo referência à área de um retângulo e, portanto, a medida $x$ não admitiria valores negativos.

### *4.3.7 Situação-problema 7*

Observe a figura abaixo:




a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa figura:

b) Existe uma expressão algébrica que representa a área da figura abaixo? Qual?

c) Suponha que o x vale 5 centímetros, então qual seria a área desta figura?

d) E se x valesse 8 centímetros?

e) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para x e calcular? Justifique:

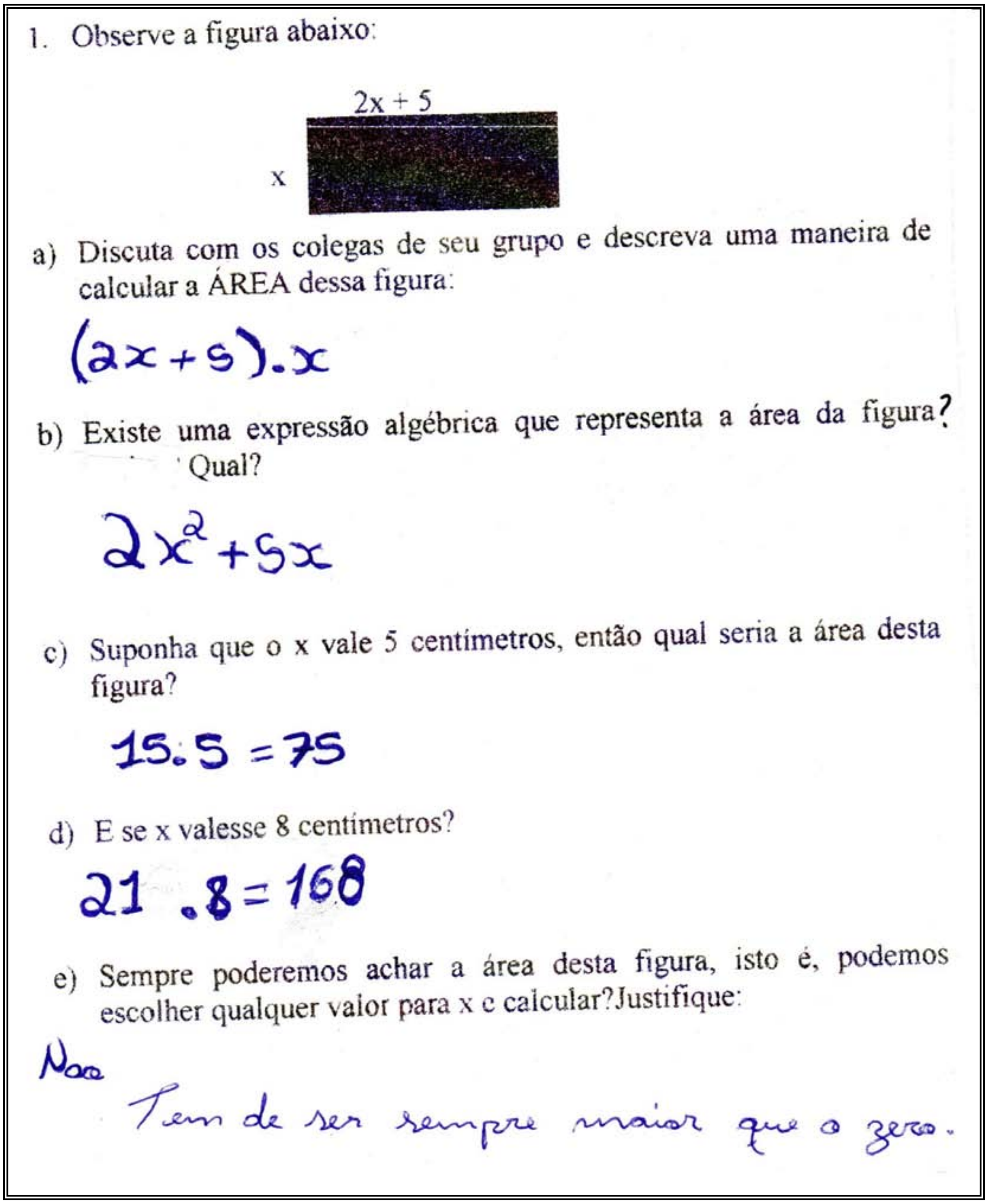
Quadro 4.14 – Fase 2: situação-problema 7

Quanto a esta atividade (quadro 4.14), pudemos observar que alguns alunos procuraram solucioná-la sem o auxílio do material manipulativo, usando a distributividade associada à memória visual do material. O aluno A, ao ser indagado sobre como estava resolvendo o item *b,* respondeu: "Sei que tenho que multiplicar o $x$ pelo $2x + 5$, então faço o $x$ com os dois $x$ que tem no comprimento, que vai dar dois quadrados[36] $x$. Depois faço o $x$ com os cinco[37], daí terei cinco vezes o $x$ que dá $5x$. Então a resposta é $2x^2 + 5x$."

Para exemplificar melhor, apresentamos a atividade realizada pelo aluno A na figura 4.25.

[36] O aluno referia-se ao quadrado cujo lado possui medida x e cuja área é $x^2$.

[37] Quando o aluno fala "os cinco", está se referindo aos quadradinhos de área 1, que no caso serão cinco. Embora não esteja manipulando o material, o aluno visualiza-o mentalmente, fazendo associação do mesmo com a operação que está realizando.



1. Observe a figura abaixo:

2x + 5

x

a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa figura:

$(2x+5).x$

b) Existe uma expressão algébrica que representa a área da figura? Qual?

$2x^2+5x$

c) Suponha que o x vale 5 centímetros, então qual seria a área desta figura?

$15.5 = 75$

d) E se x valesse 8 centímetros?

$21 \; .8 = 168$

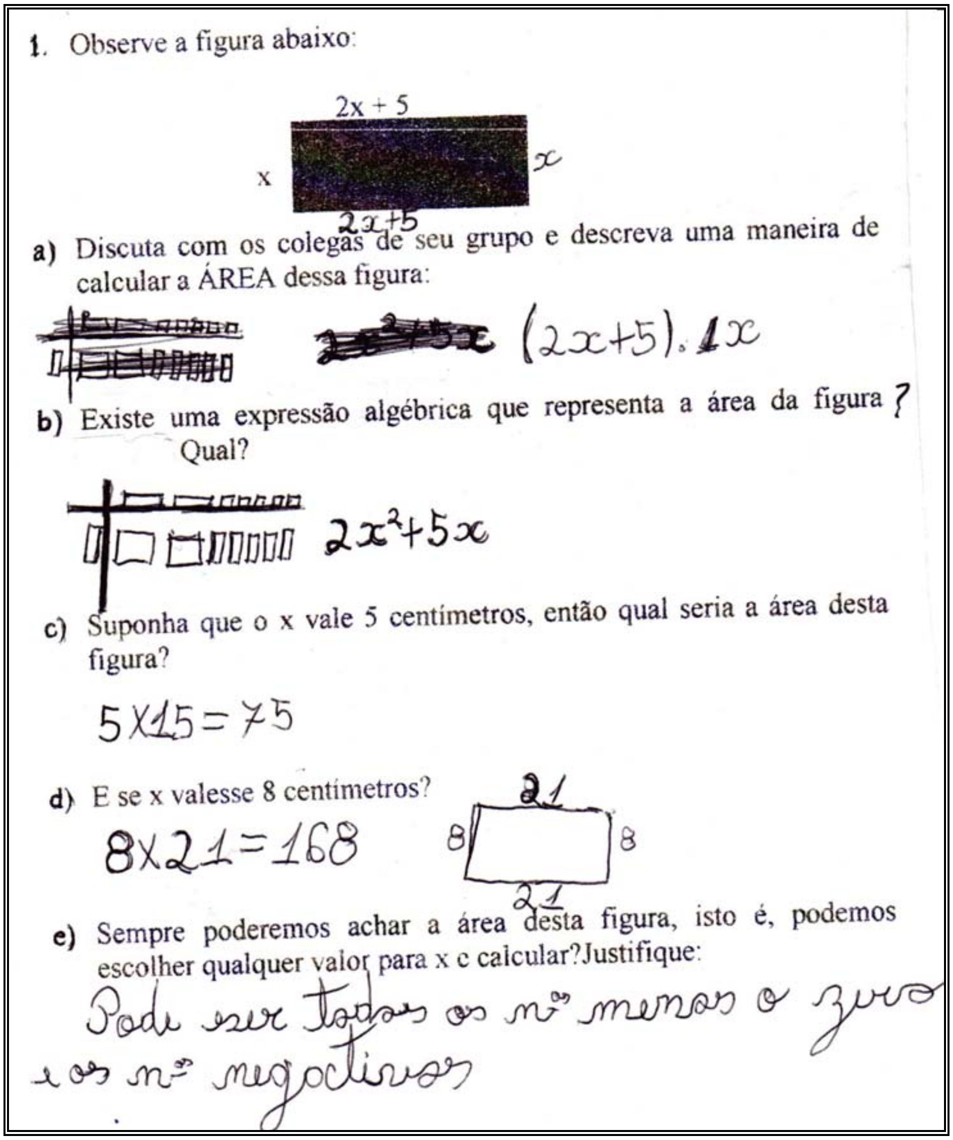
e) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para x e calcular? Justifique:

Nao

Tem de ser sempre maior que o zero.

Figura 4.25 – Fase 2: situação-problema 7 – aluno A

Porém, grande parte dos alunos, nesta atividade, utilizou o material para obter o resultado e não para validar suas hipóteses. Como se pode observar no fragmento da produção do aluno M (figura 4.26).



1. Observe a figura abaixo:

$2x + 5$

x $\quad$ $x$

$2x+5$

a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa figura:

$(2x+5).1x$

b) Existe uma expressão algébrica que representa a área da figura? Qual?

$2x^2+5x$

c) Suponha que o x vale 5 centímetros, então qual seria a área desta figura?

$5 \times 15 = 75$

d) E se x valesse 8 centímetros?

$8 \times 21 = 168$



e) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para x e calcular? Justifique:

Pode ser todos os nº menos o zero e os nº negativos

Figura 4.26 – Fase 2: situação-problema 7 – aluno M

Cabe ressaltar que nem sempre os alunos desenham a resposta obtida através da manipulação do material, como no exemplo acima. Mas utilizaram-se do mesmo antes de formular hipóteses, obtendo assim o resultado desejado.

Outro fato que chama a atenção é o modo como resolveram os itens *c* e *d*. Todos os alunos, sem exceção, utilizaram a figura inicial como parâmetro para responder e substituíram o valor do *x* nas expressões algébricas associadas aos lados do retângulo (figuras 4.25 e 4.26). Nenhum aluno substituiu o valor de *x* na expressão obtida no item *b*.

### *4.3.8 Situação-problema 8:*

Complete a tabela abaixo:

| Valor de a | Valor de b | Valor de c | a . (b + c) | a . b + c | a . b + a . c |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | | | |
| 2 | 1 | 3 | | | |
| 0 | 4 | 1 | | | |
| –1 | 8 | –2 | | | |
| 2 | –1 | 3 | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas três últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na quarta coluna e na última?

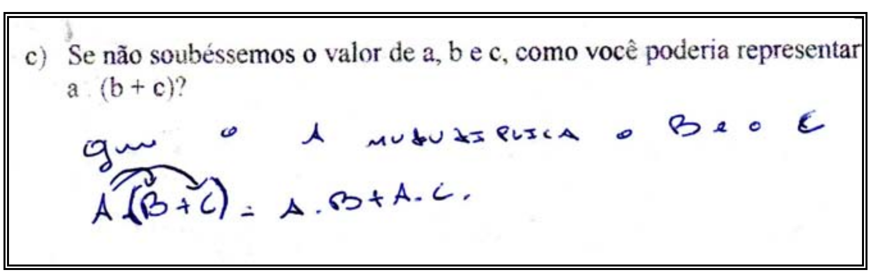
c) Se não soubéssemos o valor de a, b e c, como você poderia representar a . (b + c)?

Quadro 4.15 – Fase 2: situação-problema 8

Na resolução desta atividade (quadro 4.15) foi observado que os alunos respeitam a seguinte ordem de resolução: primeiro parênteses, multiplicações e adições. Pelo menos em cálculos que envolvam valores numéricos apenas, que era o caso da tabela.

Alguns alunos tentaram justificar a resposta no item que solicitava como representar a . (b + c).

A aluna F escreveu o que estava pensando e representou com flechas como ocorre a distributividade (figura 4.27).

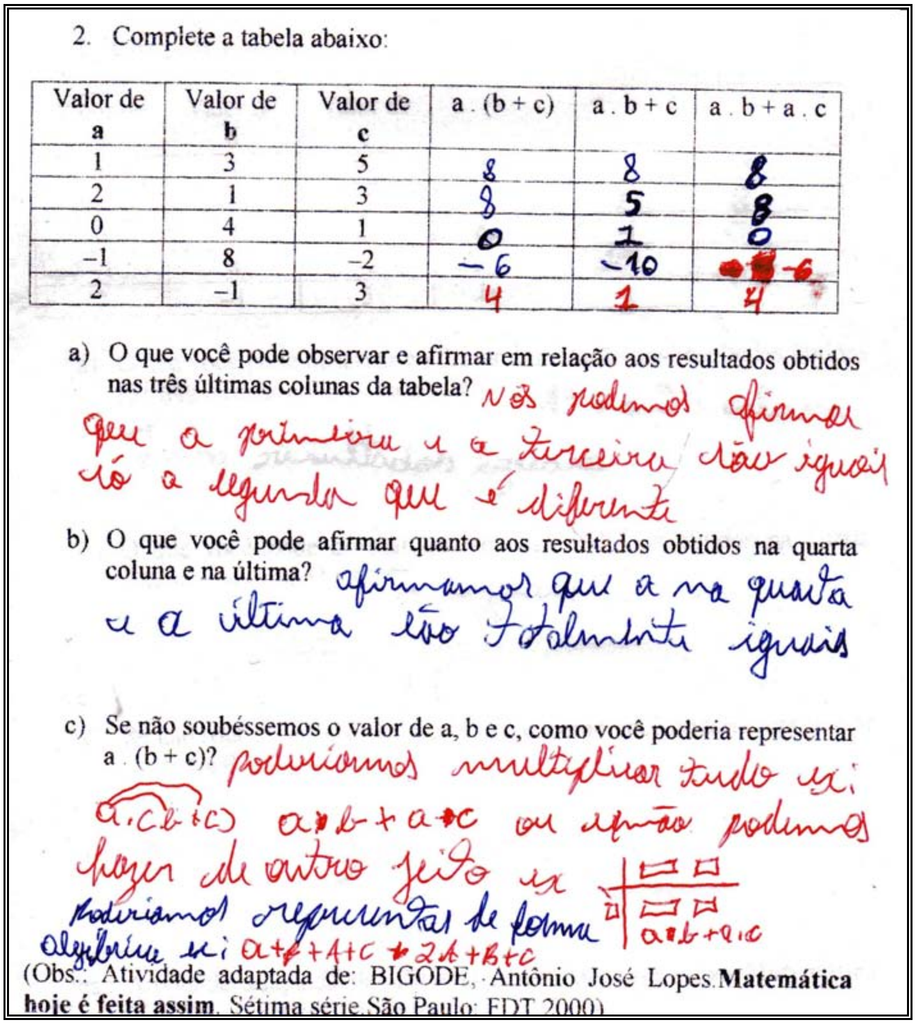

c) Se não soubéssemos o valor de a, b e c, como você poderia representar a . (b + c)?

que o A multiplica o B e o C

A(B+C) = A.B+A.C.

Figura 4.27 – Fase 2: situação-problema 8 – aluna F

Interessante a maneira como o aluno C e seu grupo representaram as expressões utilizando o material e procurando mostrar como se dá a distributividade (figura 4.28). Na resposta do item *c* podemos observar que a representação pelo material e a manipulação da expressão algébrica possuem significados diferentes para o aluno.



2. Complete a tabela abaixo:

| Valor de a | Valor de b | Valor de c | a . (b + c) | a . b + c | a . b + a . c |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 8 | 8 | 8 |
| 2 | 1 | 3 | 8 | 5 | 8 |
| 0 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| –1 | 8 | –2 | –6 | –10 | –6 |
| 2 | –1 | 3 | 4 | 1 | 4 |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas três últimas colunas da tabela? nós podemos afirmar que a primeira e a terceira são iguais só a segunda que é diferente

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na quarta coluna e na última? afirmamos que a na quarta e a última são totalmente iguais

c) Se não soubéssemos o valor de a, b e c, como você poderia representar a . (b + c)? poderíamos multiplicar tudo ex: a.(b+c) a.b + a.c ou então podemos fazer de outro jeito ex a.b+a.c podiriamos representar de forma algébrica ex: a+b+a+c = 2a+b+c

(Obs.: Atividade adaptada de: BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. Sétima série. São Paulo: FDT 2000)

Figura 4.28 – Fase 2: situação-problema 8 – grupo 2

Houve um avanço considerável na produção do significado para a propriedade distributiva da multiplicação. Os alunos perceberam o padrão existente na tabela e conseguiram formular e verbalizar algumas conclusões sobre a multiplicação de um fator por uma expressão algébrica. A frase escrita pela aluna F (figura 4.27) é um exemplo do que está sendo afirmado. Perceber que "o *a* multiplica o *b* e o *c*", sem que isto tenha sido questionado ou verbalizado pela professora é um indício de que o trabalho em grupo e os momentos de reflexões individuais, em pequenos grupos ou em grande grupo, têm proporcionado um aprendizado significativo.

Segundo Chalouh e Kieran (1996), a aritmética é orientada pela resposta, ou seja, ao resolver cálculos numéricos, há uma indução para a resposta. Neste sentido, o aluno, no decorrer de sua vida escolar, é induzido a pensar somente na resposta e não no processo desenvolvido para chegar na resposta. Porém o foco da linguagem algébrica não é a resposta mas sim o processo. Acreditamos que, da forma como trabalhamos, a maioria dos alunos conseguiu perceber esta diferenciação e evoluir em relação ao pensamento algébrico.

No entanto, nem todos os alunos se encontravam no mesmo nível de compreensão. Alguns já haviam produzido um significado para as operações com expressões algébricas dissociado do uso do material manipulativo, outros ainda não. Os alunos iam apresentando um crescimento ao contarem com o auxílio dos colegas no momento de resolverem alguma situação-problema. Estes tentavam justificar suas respostas aos colegas, explicando como raciocinaram. Os outros, por sua vez, iam compreendendo não só os conceitos algébricos envolvidos mas, também, os procedimentos utilizados para chegar à resposta. Essa experiência corrobora as afirmações de Vygotsky (1991), que salienta que o pensamento tem origem social, e forma-se e evolui com o contato social nas interações grupais. Nos processos de interações sociais criam-se os sistemas de signos (linguagem, escrita, sistema de números) e os instrumentos (objetos usados para transformar a natureza). A internalização dos sistemas de signos provoca transformações comportamentais e estabelece o elo de ligação entre as formas iniciais e avançadas do desenvolvimento cognitivo.

Além disso, a “troca” que ocorre entre os alunos é considerada essencial por Lins (1997; 2003), pois permite que o aluno verbalize suas justificações contribuindo para o aprendizado dos mesmos.

### *4.3.9 Situação-problema 9*

No primeiro momento da atividade (quadro 4.16) houve uma dúvida quanto à representação da casa, se a largura seria considerada na vertical ou na horizontal[38]. Foi consenso do grande grupo que a largura seria na horizontal e o comprimento na vertical.

| |
|---|
| João possuía uma casa retangular cuja largura era o triplo do comprimento. Suponha que o comprimento da casa de João fosse representado por *x*. Faça um desenho esquematizando as dimensões (largura e comprimento) da casa de João:<br>a) Represente a situação utilizando o material:<br><br><br>b) Qual a área da casa de João?______________________________<br>c) João resolveu ampliar sua casa. Ele ampliou 2 metros na largura e 1 metro no comprimento.<br>d) Represente as dimensões da nova casa de João:<br>e) Como você representaria a ação acima com o material?<br>f) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA a nova casa de João:<br>g) Existe uma expressão algébrica que representa essa área? Qual?<br>h) Suponha que o *x* vale 5 metros, então qual é a área da velha casa e da nova casa de João?<br>i) E se *x* valesse 6 metros?<br>j) Se a área da nova casa de João for de 70 metros quadrados, então qual será o valor de *x*? |

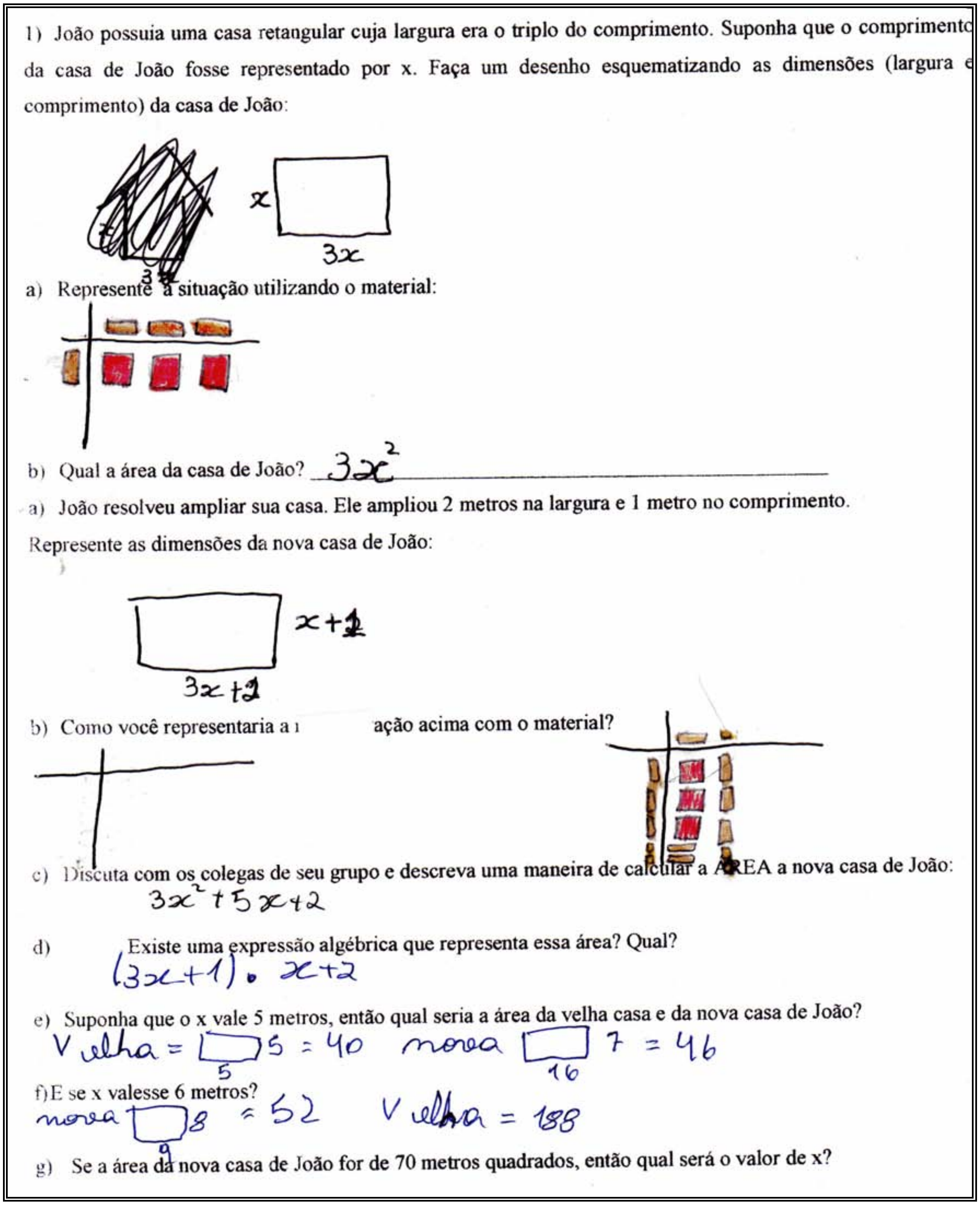
Quadro 4.16 – Fase 2: situação-problema 9

Ficou convencionado, oralmente, que a situação a ser representada com o material manipulativo no item *a* seria referente à área da casa do João e que no item *b* tal área deveria ser expressa por escrito, utilizando-se da linguagem algébrica simbólica.

Na segunda etapa desta atividade, onde a casa era ampliada em 2 metros na largura e 1 metro no comprimento, houve divergências quanto à interpretação e representação. Um grupo

[38] Nesta situação-problema optamos por utilizar a largura maior que o comprimento da casa, diferente do usual, pois as casas do loteamento, onde reside grande parte dos alunos, são construídas desta forma; sendo a frente (largura) maior que os fundos (comprimento).

de alunos acrescentou 2 ao $3x$ e 1 ao $x$, de modo que as dimensões da casa ficaram $3x + 2$ e $x + 1$ (figura 4.29).



1) João possuia uma casa retangular cuja largura era o triplo do comprimento. Suponha que o comprimento da casa de João fosse representado por x. Faça um desenho esquematizando as dimensões (largura e comprimento) da casa de João:

x
3x

a) Represente a situação utilizando o material:

b) Qual a área da casa de João? $3x^2$

a) João resolveu ampliar sua casa. Ele ampliou 2 metros na largura e 1 metro no comprimento.
Represente as dimensões da nova casa de João:

x+1
3x+2

b) Como você representaria a ... ação acima com o material?

c) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA a nova casa de João:
$3x^2 + 5x + 2$

d) Existe uma expressão algébrica que representa essa área? Qual?
$(3x+1) \cdot x+2$

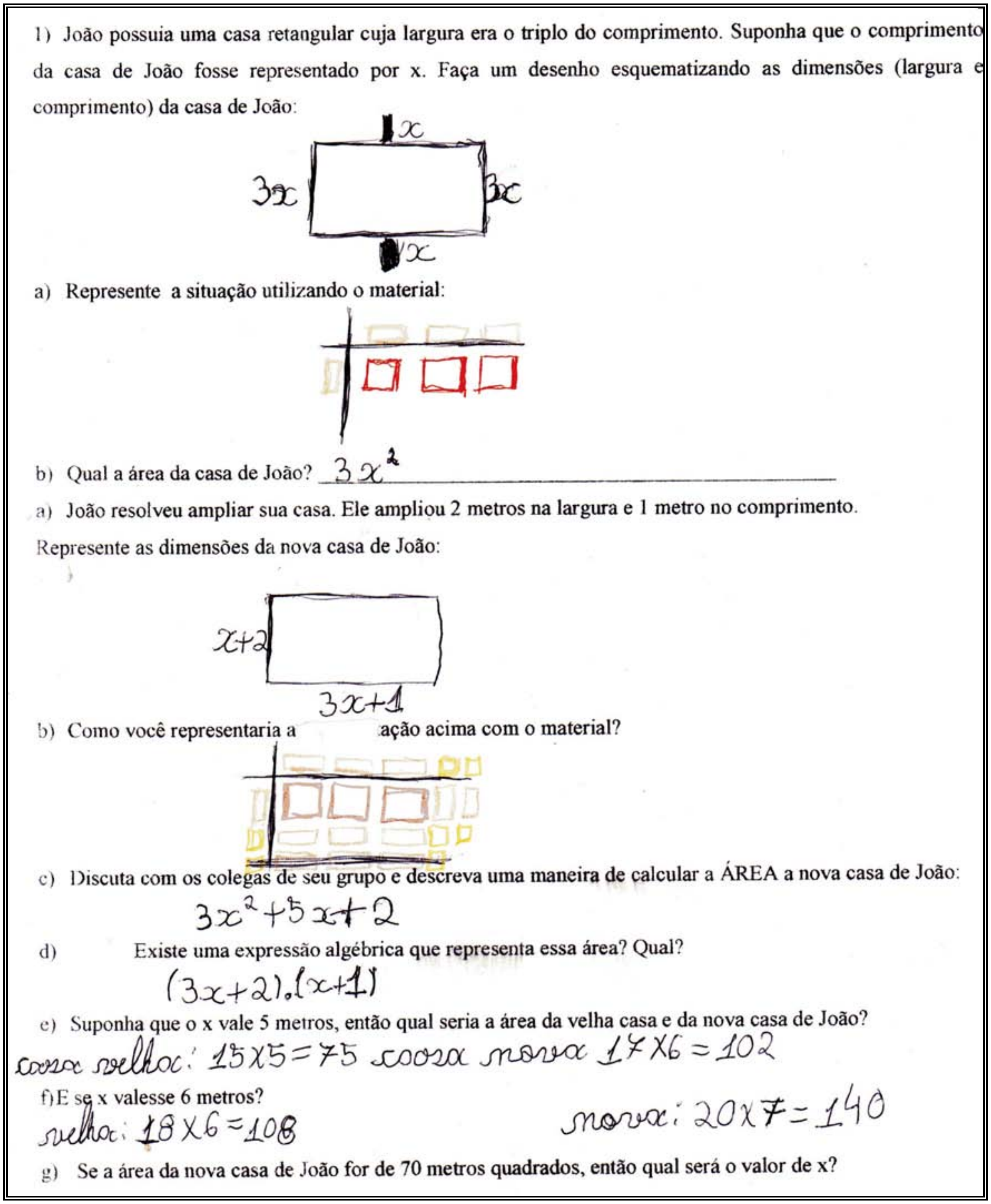
e) Suponha que o x vale 5 metros, então qual seria a área da velha casa e da nova casa de João?
Velha = 5 = 40 nova 7 = 46
5 16

f) E se x valesse 6 metros?
nova 8 = 52 Velha = 188
9

g) Se a área da nova casa de João for de 70 metros quadrados, então qual será o valor de x?

Figura 4.29 – Fase 2: situação-problema 9 – grupo 1

Outro grupo acrescentou 1 ao $3x$ e 2 ao $x$, então as dimensões ficaram $3x + 1$ e $x + 2$ (figura 4.30).



1) João possuia uma casa retangular cuja largura era o triplo do comprimento. Suponha que o comprimento da casa de João fosse representado por x. Faça um desenho esquematizando as dimensões (largura e comprimento) da casa de João:



a) Represente a situação utilizando o material:

b) Qual a área da casa de João? $3x^2$

a) João resolveu ampliar sua casa. Ele ampliou 2 metros na largura e 1 metro no comprimento.

Represente as dimensões da nova casa de João:



b) Como você representaria a ação acima com o material?

c) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA a nova casa de João:

$3x^2+5x+2$

d) Existe uma expressão algébrica que representa essa área? Qual?

$(3x+2).(x+1)$

e) Suponha que o x vale 5 metros, então qual seria a área da velha casa e da nova casa de João?

casa velha: 15X5=75 casa nova 17X6=102

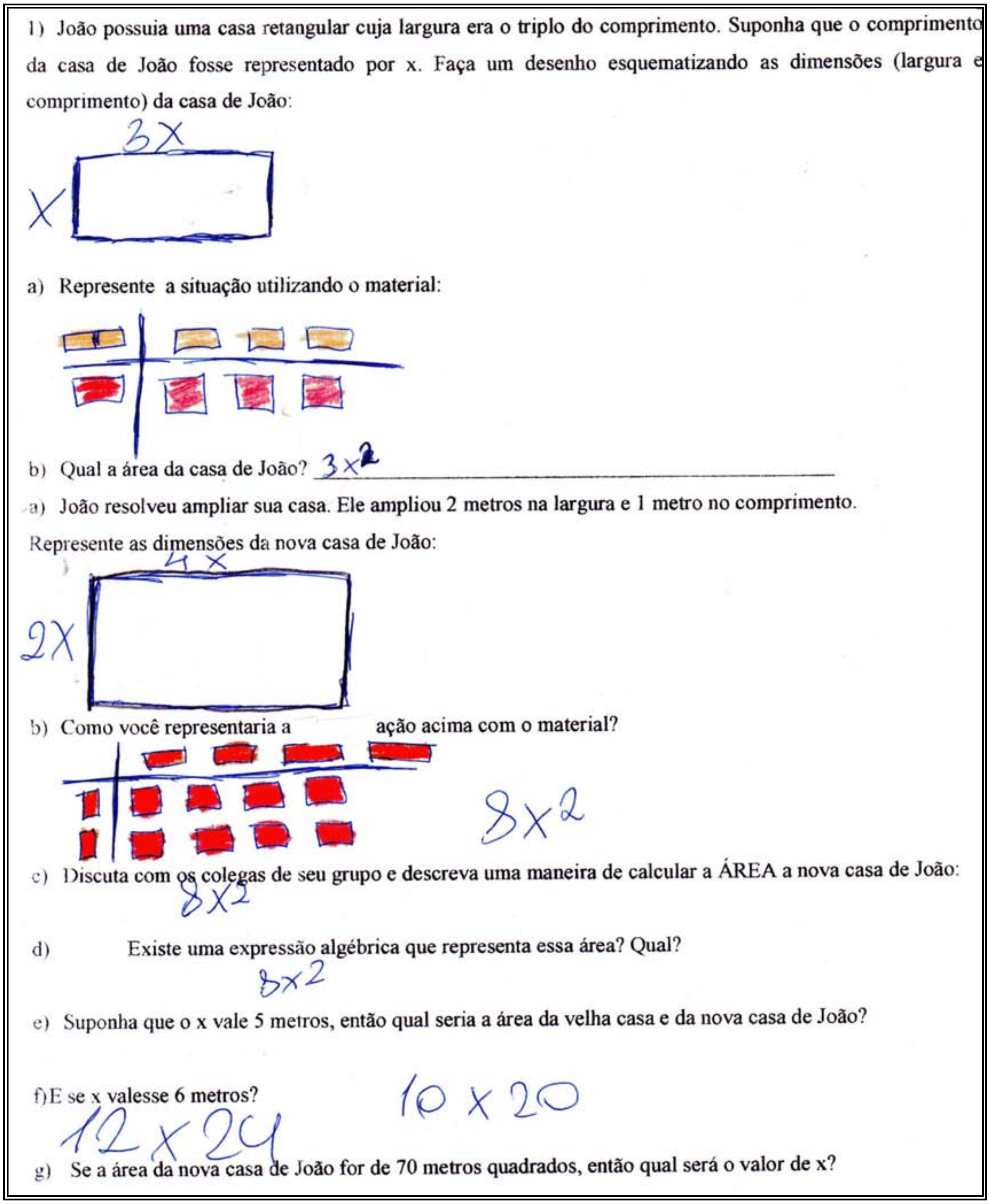
f) E se x valesse 6 metros?

velha: 18X6=108 nova: 20X7=140

g) Se a área da nova casa de João for de 70 metros quadrados, então qual será o valor de x?

Figura 4.30 – Fase 2: situação-problema 9 – grupo 2

Outro, ainda, considerou 2 metros como 2*x* e 1 metro como *x*, portanto as dimensões ficaram 4*x* e 2*x* (figura 4.31).



1) João possuia uma casa retangular cuja largura era o triplo do comprimento. Suponha que o comprimento da casa de João fosse representado por x. Faça um desenho esquematizando as dimensões (largura e comprimento) da casa de João:

3X

X

a) Represente a situação utilizando o material:

b) Qual a área da casa de João? $3x^2$

a) João resolveu ampliar sua casa. Ele ampliou 2 metros na largura e 1 metro no comprimento. Represente as dimensões da nova casa de João:

4 x

2X

b) Como você representaria a ação acima com o material?

$8x^2$

c) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA a nova casa de João:

$8x^2$

d) Existe uma expressão algébrica que representa essa área? Qual?

8x2

e) Suponha que o x vale 5 metros, então qual seria a área da velha casa e da nova casa de João?

f) E se x valesse 6 metros?

10 x 20

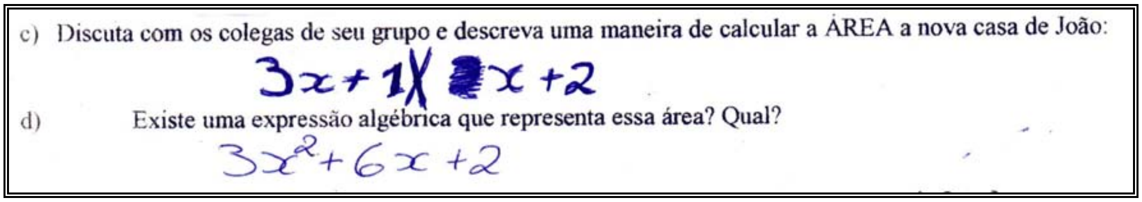
12 x 24

g) Se a área da nova casa de João for de 70 metros quadrados, então qual será o valor de x?

Figura 4.31 – Fase 2: situação-problema 9 – grupo 3

A professora optou por não interferir neste momento da atividade em grupo, uma vez que depois seriam discutidas todas as questões em grande grupo e as interpretações poderiam ser confrontadas e avaliadas pelos alunos.

Quanto ao uso dos parênteses no item *d,* convém salientar que o segundo grupo (figura 4.30) utilizou os parênteses corretamente, enquanto o primeiro grupo (figura 4.29) não utilizou parênteses no segundo termo da multiplicação e um aluno (aluno O) deste mesmo grupo não utilizou nenhum parênteses, como se pode ver (figura 4.32).


c) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA a nova casa de João:

$3x + 1 \times x + 2$

d) Existe uma expressão algébrica que representa essa área? Qual?

$3x^2 + 6x + 2$

Figura 4.32 – Fase 2: situação-problema 9 – aluno O

Outro fato observado durante a realização da atividade é o de que, quando é atribuído um valor à incógnita, os alunos substituem o mesmo nas expressões algébricas que representam as medidas de cada lado e não no resultado obtido a partir da sua multiplicação. Ou seja, os alunos substituem o valor nas expressões iniciais e calculam a área para as dimensões obtidas.

No momento da discussão em grande grupo, como era esperado, surgiu a polêmica quanto à ampliação da casa de João. Depois de muitos argumentos e contra-argumentos o grande grupo concordou que os dois metros deveriam ser acrescentados ao $3x$, pois a largura inicial era o triplo do comprimento (ou seja, $3x$) e os 2 metros estavam sendo acrescentados na largura. Portanto, as dimensões da nova casa de João deveriam ser $3x + 2$ e $x + 1$. Cada aluno anotou em seu caderno as dimensões antigas e novas da casa de João e todos ficaram com a tarefa de calcular novamente as referidas áreas.

Esta atividade foi bastante instigante no sentido de proporcionar aos alunos muitas reflexões, que vão desde a interpretação do que está escrito e sendo proposto, passando pela operação de multiplicação de expressões algébricas, pelo uso ou não dos parênteses, indo até a elaboração de estratégias para fazer o inverso – tendo a área, determinar a medida do lado do retângulo.

Quanto ao primeiro item da questão (quadro 4.16), os alunos puderam perceber, com a discussão em grande grupo, que é necessário ter atenção ao ler uma atividade que está sendo proposta, pois dependendo do modo como é interpretada poderemos obter um resultado apropriado ou não. O momento foi propício para a percepção de que há diferenças entre a linguagem escrita, a linguagem falada e a linguagem matemática, sendo esta última a que estavam utilizando para representar as situações-problema. A discussão também foi um ótimo exercício de argumentação para os grupos pois, no primeiro momento, cada grupo defendia seu ponto de vista e tentava justificá-lo. Não foi fácil para o grupo que havia feito a interpretação correta da situação convencer os demais.

Muito rica, também, foi a discussão quanto à utilização ou não dos parênteses. O aluno O disse que não havia a necessidade de utilizar parênteses porque quando usava o material para representar a multiplicação, não usavam parênteses. A aluna E argumentou que, como se tratava de dois grupos distintos que deveriam ser multiplicados, tinham que colocar parênteses, demonstrando que já havia produzido um significado para as expressões algébricas que não necessitava das justificações baseados no material manipulativo.

Quanto aos itens *e* e *f,* todos os alunos, sem exceção, utilizaram a figura inicial como parâmetro para responder e substituíram o valor de $x$ nas expressões algébricas associadas aos lados do retângulo, isso pode ser observado nos fragmentos acima (figuras 4.29, 4.30 e 4.31). Nenhum aluno substituiu o valor de $x$ na expressão obtida para a área. Durante a discussão, os alunos foram questionados sobre porque não substituíram o valor de $x$ na expressão que representava a área da figura. A aluna R respondeu: "É mais fácil trocar o $x$ no desenho porque não tem que fazer potência".

Tal resposta demonstra que a aluna havia pensado na possibilidade de substituir o valor na expressão que representa a área da casa, porém a hipótese foi abandonada por envolver cálculos considerados mais exigentes.

Gostaríamos de comentar, ainda, o último item da atividade (item *g*). Ao ser pensado este item, o objetivo não era que os alunos, necessariamente, respondessem corretamente qual o valor do *x*. A idéia era, justamente como ocorreu, que os alunos procurassem alternativas para solucioná-lo e que houvesse uma discussão sobre estas alternativas. Um dos grupos chegou ao resultado 17 metros para *x* (não correto), mas com uma explicação bem interessante: "A largura é o triplo do comprimento; então, se o comprimento é 17, a largura é 51. E 51 + 17 é 68. Como aumenta dois metros na largura, fica 68 + 2 que dá 70. Então o valor do *x* tem que ser 17" (aluno M).

A professora convidou todos a conferirem o resultado obtido pelo aluno M, substituindo o valor de *x* e calculando a área para verificar se o resultado seria 70 e, o resultado obtido não conferiu.

O raciocínio do aluno M não condiz com o cálculo da área, uma vez que utilizou a soma das supostas dimensões. Porém, demonstra que o aluno pensou sobre o problema e tentou solucioná-lo. Consideramos que é a partir do "pensar sobre" que podemos desenvolver nossa capacidade de pensar e, conseqüentemente, de aprender.

Em seu livro intitulado "A formação social da mente", Vygotsky (1984) comenta que o aprendizado é mais do que a aquisição de capacidade para pensar. O aprendizado é a aquisição de muitas capacidades especializadas para pensar sobre várias "coisas" relacionadas com o objeto do conhecimento.

Conforme Lins (1997), o aluno pode, inicialmente, produzir significados divergentes dos oficiais, no entanto, tais significados não devem ser tratados como erros, mas como uma forma de perceber como o aluno está *pensando sobre* álgebra.

Na décima segunda aula da fase 2 de nosso trabalho estava programada uma atividade em grande grupo e coordenada pela professora objetivando a percepção, pelos alunos, da propriedade distributiva da multiplicação em situações aritméticas e algébricas.

Na referida atividade[39], era proposto aos alunos que representassem, com o material

---

[39] A atividade proposta encontra-se na aula 12, anexo C deste trabalho.

manipulativo, a quantidade 12 e 15 e que descobrissem outra maneira de representar os mesmos valores mas utilizando a operação de adição.

Os alunos não tiveram dificuldades para perceber que o 12 poderia ser obtido através de uma soma de duas parcelas, tais como: 0 + 12, 1 + 11, 2 + 10, 3 + 9, 4 + 8, 5 + 7, 6 + 6, 7 + 5, 8 + 4, 9 + 3, 10 + 2 , 11 + 1, 12 + 0. De maneira análoga, procederam com o 15.

Ao serem questionados pela professora quanto às formas de representar 12 multiplicado por 15, a maneira tradicional surgiu imediatamente: 12 x 15.

A professora perguntou se havia como representar a multiplicação de 12 por 15 utilizando as somas obtidas.

A aluna I disse que havia aprendido na 4ª série que dava para multiplicar de outro jeito e foi ao quadro mostrar aos colegas.

Modo mostrado pela aluna I:

$$\begin{array}{rr} & 10 + 2 \\ \times & \underline{10 + 5} \\ & 50 + 10 \\ + & 100 + 20 \\ \hline & 100 + 70 + 10 = 180 \end{array}$$

A professora então questionou se só era possível fazer esse procedimento para a multiplicação quando uma das parcelas fosse 10 ou se essa idéia poderia ser utilizada com outras adições que haviam encontrado anteriormente e convidou os alunos a testarem outras possibilidades.

O aluno C, após testar em seu caderno, concluiu e socializou com o grande grupo que esse procedimento para a multiplicação poderia ser feito com qualquer das somas. Sua afirmação foi categórica: “Os números vão ser diferentes mas no final dá tudo na mesma.”

Para convencer os colegas foi até o quadro, a convite da professora, e mostrou dois exemplos:

$$\begin{array}{rr} & 6+6 \\ \times & \underline{9+6} \\ & 36+36 \\ + & 54+54 \\ \hline & 90+90=180 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 11+1 \\ \times & \underline{7+8} \\ & 88+8 \\ & 77+7 \\ \hline & 165+15=180 \end{array}$$

Os colegas pareceram convencidos de que a resposta seria sempre a mesma daquela obtida se multiplicassem direto 12 por 15.

Quando indagados se o mesmo aconteceria se utilizássemos letras ao invés de números, houve um silêncio geral na turma por alguns instantes. Após esses instantes de silêncio a aluna I comentou que achava que o procedimento também podia ser utilizado, pois as letras representam números que não são conhecidos ou que mudam, então se valesse para números tinha que valer para letras.

O aluno A contestou: "Mas como dar a resposta da conta de vezes se são só letras?"

A aluna I não respondeu a pergunta do aluno A e nenhum outro aluno o fez, nem a professora. Esta, (a professora) por acreditar que naquele momento uma intervenção influenciaria no conhecimento algébrico que estava sendo elaborado e, certamente, tal intervenção estaria podando a possibilidade de confronto entre as idéias apresentadas pelos alunos e excluiria a necessidade do grupo de resolver esse problema que surgiu. Pois, da mesma forma que Neves, pensamos que:

> A construção de um conhecimento algébrico na sala de aula exige, além da participação e da atividade dos alunos, uma confrontação entre os significados que eles atribuem aos objetos algébricos e suas necessidades de resolver problemas, visando uma articulação entre esses significados e os antigos conhecimentos dos alunos (NEVES, 1995, p. 128).

A afirmação da aluna I, embora nesta situação específica fosse correta, deve merecer atenção do professor. De fato, é verdade que a álgebra generaliza relações entre números, estabelecidas no domínio da aritmética, porém a álgebra não pode ser vista apenas como uma aritmética generalizada.

Por exemplo, é possível, em aritmética, resolver 2 . (3 + 5), somando-se 3 com cinco e após multiplicar por 2. Entretanto, em situações algébricas como 2 . ($x$ + $y$) a mesma idéia não seria aplicável pois não seria possível somar $x$ a $y$.

Essas particularidades da álgebra parecem ter sido observadas pelo aluno A: "Mas como dar a resposta da conta de vezes se são só letras?"

Lins (1994) sugere que a atividade algébrica não é conseqüência natural da aprendizagem da aritmética e que muitas e diferentes são as possibilidades de produção de conhecimento sobre a álgebra. Entretanto, em Lins e Gimenez (1997), o mesmo autor admite que seja possível conceber a generalização das operações aritméticas como *um* dos significados para a mesma.

É importante perceber que as tarefas trazidas para a aula são sempre transformadas pelos alunos, na medida em que eles criam significados próprios que dependem de seus objetivos e conhecimentos prévios. Neste trabalho, ao invés de enfatizar as tarefas em si e esperar que tenham um significado único e fixo, buscamos nos preocupar em gradualmente aproximar os significados criados pelos alunos àqueles pretendidos pela tarefa. Esta forma de olhar a atividade dos alunos requer uma nova forma de comunicação e aprendizagem na sala de aula. Nessa abordagem, o trabalho com situações-problema acrescido de discussões em grande grupo sobre as mesmas, tornou-se interessante por possibilitar esta forma de comunicação e aprendizagem.

A conjectura elaborada pelo aluno A referindo-se a como dar a resposta no caso de serem só letras ficou momentaneamente sem resposta do grupo. Com o objetivo dos alunos verificarem suas hipóteses referentes à multiplicação quando envolvesse apenas "letras", a professora propôs a situação-problema a seguir.

### *4.3.10 Situação-problema 10*

Complete a tabela abaixo:

| Valor de w | Valor de x | Valor de y | Valor de z | (w+x).(y+z) | w.(y+z)+x.(y+z) | w.y+x.z | w.y+w.z+x.y+x.z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | | | | |
| 2 | 4 | 0 | 3 | | | | |
| 3 | –1 | 4 | 1 | | | | |
| –1 | 5 | 8 | –2 | | | | |
| 2 | –2 | –1 | 3 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na quinta coluna, na sexta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de w, x,y e z, como você poderia representar (w + x) . (y + z)?

Quadro 4.17 – Fase 2: situação-problema 10

Durante a realização da atividade (quadro 4.17) observamos que, na sua maioria, os alunos mantiveram a hierarquia para a resolução de expressões numéricas quanto ao uso dos parênteses. Em geral, os alunos iniciaram resolvendo a operação contida nos parênteses, em seguida resolveram a multiplicação e somente depois a soma. No entanto, ocorreram várias respostas incorretas na tabela. Constatamos que várias destas respostas erradas se deram pela falta de atenção no momento da multiplicação dos números, pelo uso incorreto do sinal ou resultados não corretos para a multiplicação entre os números.

Quanto às respostas aos itens *a* e *b* (quadro 4.17), notamos que poucos alunos puderam concluir corretamente que a quinta, a sexta e a oitava coluna possuíam o mesmo resultado.

Fato compreensível, uma vez que a maioria dos grupos não obteve todas as respostas corretas para a tabela.

O aluno O comentou que a atividade era bastante cansativa pois tinham que fazer muitos cálculos.

Quanto ao item *c*, relatamos um fato bem interessante: um número significativo de alunos representou a multiplicação usando o algoritmo (o mesmo para números). Alguns destes colocaram o que seria para eles a resposta da multiplicação, outros deixaram apenas a representação:

$$\begin{array}{rr} & w + x \\ \times & \underline{y + z} \end{array}$$

No momento da discussão em grande grupo houve estranhamentos entre os grupos, pois em algumas situações o resultado não coincidia. Quando isso acontecia, a professora sugeria que se resolvesse no quadro para esclarecer as dúvidas.

Após a discussão (correção) dos valores obtidos na tabela, os alunos puderam observar que as respostas para $(w + x) . (y + z)$, $w . (y + z) + x . (y + z)$ e $w . y + w . z + x . y + x . z$ eram as mesmas.

A professora então sugeriu que se representasse $(w + x) . (y + z)$ com o material manipulativo. Ao socializarem as representações, a aluna S se ofereceu para explicar ao grande grupo sua resposta, desenhando no quadro e verbalizando suas conclusões: “Bom, eu pensei que tinha que encontrar uma peça com medida *w* de um lado e *y* do outro, então a peça seria a *wy*. A mesma idéia eu usei para as outras. A peça de lados *w* e *z* encaixa aqui (apontou para a figura representando *wz*). A peça com lados *x* e *y* aqui e a outra seria a *xz*. Então $(w + x) . (y + z)$ é igual a $w . y + w . z + x . y + x . z$.”

A figura 4.33 exemplifica a representação feita pela aluna.

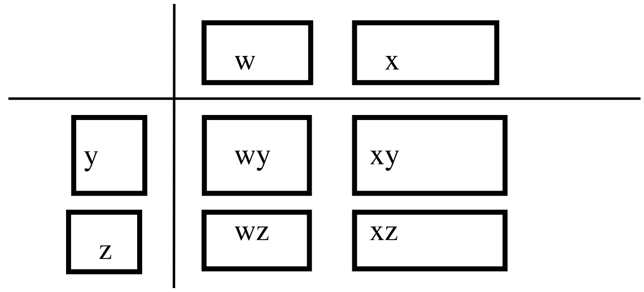



Figura 4.33 – Fase 2: representação para multiplicação com material – aluna S

A professora então perguntou se era possível visualizar a mesma resposta no algoritmo que muitos grupos usaram na representação (item *c*).

A aluna J disse que sim, era só usar as letras como tinham feito com os números na aula passada.

A professora solicitou que a mesma mostrasse no quadro o que estava querendo dizer. A representação feita pela aluna foi semelhante à apresentada na figura 4.34.

$$
\begin{array}{rr}
 & w + x \\
\times & \underline{y + z} \\
 & zw + zx \\
 \multicolumn{2}{l}{\quad yw + yx} \\
\hline
 \multicolumn{2}{l}{yw + yx + zw + zx}
\end{array}
$$

Figura 4.34 – Fase 2: representação para multiplicação com algoritmo – aluna J

Enquanto a aluna ia escrevendo os resultados ia verbalizando: "*z* com *x* dá *zx*, *z* com *w* dá *zw*, *y* com *x* dá *yx*, *y* com *w* dá *yw*. Daí fica *yw* + *yx* + *zw* + *zx*."

Um aspecto merecedor de comentário é o fato dos alunos não obterem resultados corretos para as expressões numéricas, apesar de respeitarem a hierarquia de operações para a resolução das mesmas. Uma possível justificativa seria a falta de atenção ao resolver as expressões, talvez devido à quantidade de expressões solicitadas (fato lembrado pelo aluno O), mas também cabe ressaltar a dificuldade que alguns alunos apresentam ao trabalhar com operações envolvendo números positivos e negativos – na utilização das propriedades e regras envolvidas. Seria interessante, numa próxima atividade similar, reduzir a quantidade de cálculos sem, com isso, prejudicar a observação de ocorrências de padrão e permitir a elaboração de conclusões, pelos alunos. Quanto à questão do uso das regras de sinais em operações com números positivos e negativos, concluímos que deveríamos ter feito um trabalho inicial, similar ao realizado com os usos da letra, com a finalidade de proporcionar aos alunos um momento de retomada, revisão dos significados produzidos anteriormente ou uma nova produção de significados para as operações com números positivos e negativos.

Um outro aspecto observado é a forma utilizada pelos alunos para a representação de *(w + x) . (y + z). P*ode-se perceber que a afirmação da aluna I na situação anterior ficou compreendida pela maioria dos alunos como verdadeira. Ficou evidente que, para os alunos, a propriedade distributiva pode ser utilizada tanto em expressões numéricas quanto algébricas.

A aceitação dessa afirmação pôde ser confirmada nas atividades respondidas pelos alunos, como a atividade representada no quadro 4.18.

| |
|---|
| Utilizando o que já estudamos, indique a expressão algébrica equivalente a : |
| a) $(x + 2) . (x + 5) =$ |
| b) $(2x + 3) . (x + 1) =$ |
| c) $(x + 1) . ( x + 3) =$ |
| d) $(y + 1) . ( y + 1) =$ |
| e) $(3x + 2) . (4x + 1) =$ |
| f) $(x +1) . (x – 1) =$ |

Quadro 4.18 – Fase 2: atividade de aula – multiplicação

Nesta atividade (quadro 4.18), bem formal, cabe ressaltar que pouquíssimos alunos (três na verdade) quiseram utilizar-se do material para verificar os resultados. Vários alunos tentaram resolver a atividade utilizando o modo sugerido pela aluna I na aula anterior (uso do algoritmo). E outros buscavam a solução apenas mentalizando como seria se fosse representada com o material, mas sem fazer uso concreto do mesmo.

No último item aparece, propositalmente, uma multiplicação entre expressões algébricas, na qual o segundo fator apresenta uma subtração. Cabe lembrar que, neste trabalho as subtrações são entendidas como adições de uma parcela com o oposto da outra. Nenhum aluno respondeu corretamente o item, alguns simplesmente ignoraram o sinal de menos, outros o consideraram apenas na multiplicação de 1 por – 1, como podemos ver na figura 4.35.

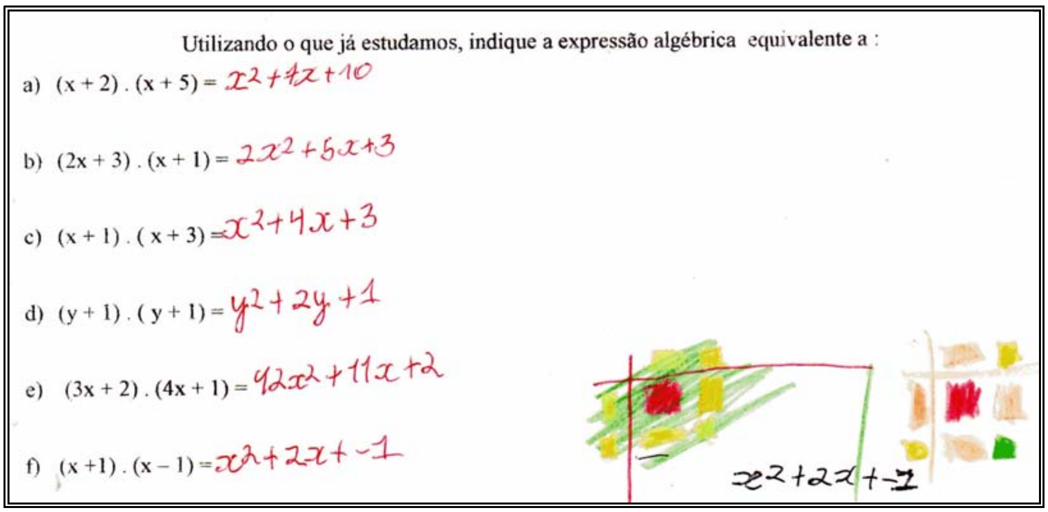



Figura 4.35 – Fase 2: atividades sobre multiplicação – aluno C

No entanto, duas alunas representaram corretamente a situação com o material, embora a resposta escrita não fosse coerente com essa representação (figura 4.36).

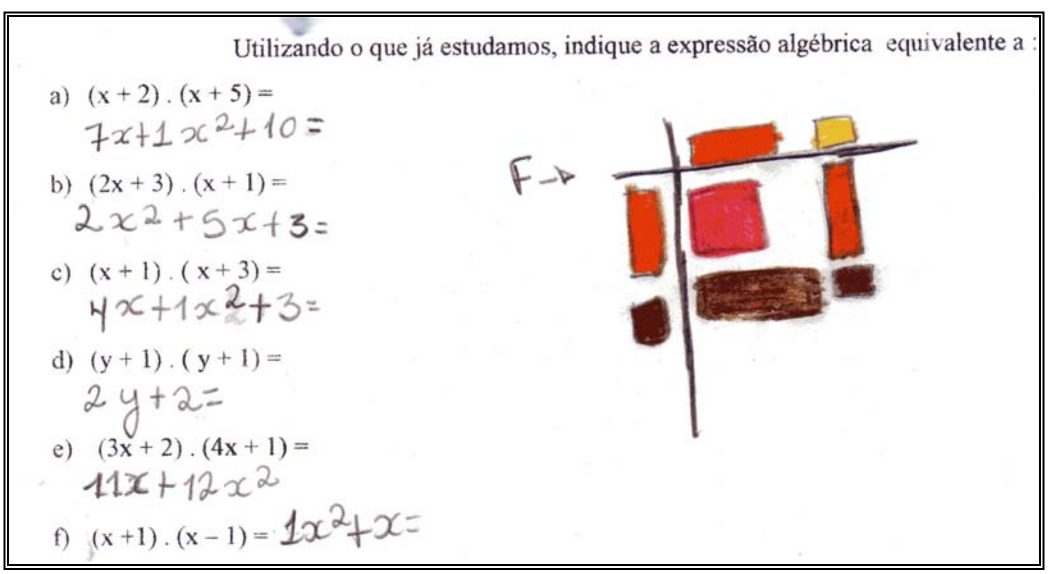



Figura 4.36 – Fase 2: atividades sobre multiplicação – aluna J

Após a resolução da atividade foi realizada a correção no quadro de cada item da questão, sendo cada grupo responsável por um item da questão (figura 4.37), com exceção do item *f*.

Figura 4.37 – Fase 2: aluna realizando correção no quadro

Para a correção do item *f*, por haver muitas divergências entre os grupos e como nenhum grupo o havia respondido corretamente usando a linguagem simbólica, a professora solicitou que um integrante de cada grupo mostrasse no quadro, com o auxílio do material e de fita adesiva, a representação encontrada para (x + 1) . (x – 1). Discutiu-se em grande grupo o significado e a representação da operação envolvida na presença do sinal de menos e como ele seria representado com o material.  Alguns alunos sentiram a necessidade de confirmar a representação individualmente ou em pequenos grupos (figura 4.38). Após a discussão, concluiu-se que a melhor representação com o material havia sido a da aluna J (figura 4.36), pois contemplava a regra do uso do material (indicar a troca de sinal virando a peça).

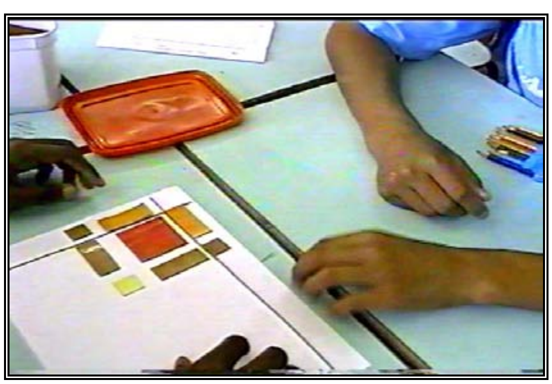


Figura 4.38 – Fase 2: alunos verificando representação de negativo multiplicado por negativo com material manipulativo

Ficou evidente, durante a socialização das respostas dadas pelos grupos, a preocupação dos alunos em serem coerentes com as regras já estipuladas para a utilização do material (trocar o sinal indica "virar" a peça). Com a representação pelo material não foi difícil para os alunos perceberem que negativo com negativo geraria positivo. Entretanto, tal idéia ainda não estava presente na representação puramente algébrica.

Com o objetivo de que esta idéia pudesse também ser assumida para a representação algébrica, a professora apresentou diversificadas representações para a operação de multiplicação entre expressões algébricas: com material, método grade, algoritmo da multiplicação e usando a distributividade. Tal procedimento está em concordância com Henri Picciotto e Anita Wah (1993) que afirmam que as diferentes formas de representação de um tema podem facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos.

Assim, os alunos puderam confirmar as hipóteses da aluna I – o algoritmo da multiplicação utilizado para números também poderia ser utilizado para expressões algébricas – comparando os resultados obtidos com o uso do algoritmo e com o uso do material manipulativo (figura 4.39).

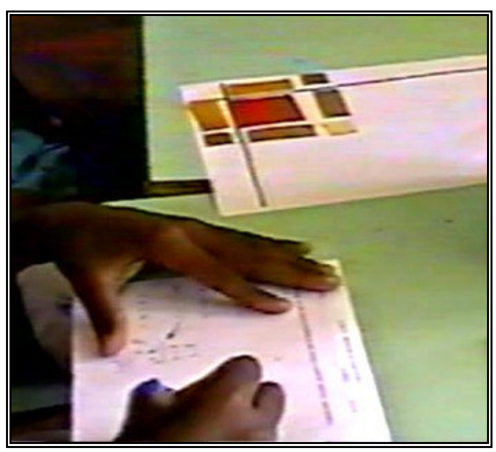


Figura 4.39 – Fase 2: comparando o uso do algoritmo com o uso do material manipulativo

No decorrer da próxima atividade (quadro 4.19) e atividades subseqüentes observamos que alguns alunos escolheram a representação com o uso do material manipulativo e depois passaram para a representação com o uso do algoritmo. Fato comum ocorrido foi o de alunos que não haviam compreendido o procedimento do algoritmo perguntando e sendo atendidos pelos alunos que já haviam se familiarizado com o novo modo de representar as expressões algébricas.

No quadro 4.19 temos a atividade sugerida pela professora após a exposição de diferentes representações.

| |
|---|
| Utilizando uma das maneiras estudadas na aula, indique a expressão algébrica equivalente:<br>a) (x + 2) . (x + 5) =<br>b) (2x + 3) . (x – 1) =<br>c) (x + 1) . ( x – 1) =<br>d) (x + 1) . ( x + 1) =<br>e) (x –1) . ( x – 1) =<br>f) (3x – 2) . (4x – 1) = |

Quadro 4.19 – Fase 2: atividade de aula – multiplicação envolvendo termos negativos

Os alunos estavam, realmente, envolvidos com a atividade e com a possibilidade de explicar para os outros colegas que ainda não haviam se apropriado da “nova” maneira de representar a operação. Em determinados momentos da aula, não havia grupos mas um único grupo com colegas trocando informações, explicações, discutindo sobre os resultados obtidos, produzindo e compartilhando o conhecimento[40].

Esse envolvimento pode ser observado nas atividades realizadas durante as aulas apresentadas nas figuras 4.40 e 4.41.

Novamente, evidenciamos a necessidade que os alunos possuem de compartilhar suas crenças-afirmações e justificações, conforme salienta Lins (1997).

[40] A palavra conhecimento é utilizada aqui com o mesmo significado apresentado por Lins (1997). Para ele, conhecimento é um par: crença-afirmação e justificação.

Figura 4.40 – Fase 2: atividades realizadas no grupo 2

Figura 4.41 – Fase 2: atividades realizadas no grupo 3

O aluno G comentou com o aluno M: “Esse jeito é mais rápido que o outro, mas tem que ter cuidado pra não se enganar nas contas”.

Chamou a atenção o fato do aluno M fazer uso da representação pelo algoritmo e ter dúvidas quanto à correção do resultado obtido. No entanto, tal aluno não quis confirmar seu resultado com o material manipulativo (já conhecido por ele) mas solicitou à professora que dissesse se estava correto ou não. Esta, por sua vez, solicitou que ele usasse o material para confirmar suas hipóteses. Mesmo não contente com a solicitação da professora, o aluno M utilizou-se do material manipulativo para verificar sua resposta. Tal evento ocorreu também com outros alunos.

Em correções realizadas no quadro pelos próprios alunos, como as exemplificadas na figura 4.42, alguns perceberam que haviam esquecido alguns termos ou se “enganado” com os sinais (em geral, aqueles que utilizaram a representação por algoritmo). Tais fatos propiciaram uma discussão sobre o melhor modo de representar as operações (com o material ou com o uso do algoritmo).

Figura 4.42 – Fase 2: correção realizada no quadro

A aluna I disse que para ela era mais fácil o algoritmo apesar de, às vezes, não acertar os sinais. Segundo ela, isso ocorre (erros envolvendo sinais) porque não está prestando muita atenção. No entanto, acreditamos que o fato de utilizar as regras de sinais, na adição e multiplicação, de forma inadequada não seja apenas uma questão de falta de atenção desta aluna e de outros que também "esquecem o sinal" ou o usam de forma incorreta, mas um indício de que tais regras não foram bem compreendidas por esses alunos.

O aluno A disse que com o material não precisa "pensar", é só completar o retângulo, mas que isso às vezes é "chato", quando é preciso usar muitas peças.

Aproveitando a discussão, a professora comentou sobre uma outra forma de representação para a multiplicação de expressões algébricas, usando a distributividade, como no exemplo:

$$(x+3)\ .\ (x+2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

Dois dos alunos presentes gostaram do "novo" jeito. Um deles foi o aluno G, que justificou-se declarando que o novo jeito ocupava menos espaço no caderno.

A aluna J, defensora da representação pelo algoritmo, comentou que era parecido com o "da continha" mas que achava mais fácil de se "perder" nas contas. Então preferia ficar com o que ela já conhecia (algoritmo).

Um avanço a ser destacado é o fato de que os alunos, na sua maioria, produzem significados para a multiplicação de expressões algébricas e conseguem perceber que há diferentes modos de representar e obter um resultado para a multiplicação de tais expressões. Restaria agora investir mais no desenvolvimento de habilidades técnicas, visto que os alunos já perceberam que a utilização do material, embora produza uma representação adequada para a multiplicação, tem seus inconvenientes, sendo um deles o tempo despendido.

Lins (1997, p. 135) salienta que, no momento em que os alunos são capazes de produzir diferentes significados para determinado assunto (no caso expressões) e que compreendem que as transformações diretas de expressões constituem uma forma de se produzir novas expressões equivalentes, há duas possíveis direções a serem seguidas: buscar estabelecer que as maneiras de produzir significados são diferentes ou buscar explorar algumas possibilidades "técnicas" das transformações diretas. Acreditamos que a segunda opção fosse mais adequada no momento.

Aproveitando o momento de discussão sobre o uso ou não do algoritmo, a professora indagou como poderiam obter uma expressão para a multiplicação de $x$ por $x^2$

Após um longo silêncio, o aluno A comentou: "Acho que vai ser $x^3$." Todos ficaram esperando a justificativa do aluno A e, como essa não foi verbalizada, a professora solicitou que ele dissesse como havia pensado na resposta. O aluno então expôs que quando multiplicavam $x$ por $x$ o resultado era $x^2$, então se multiplicassem $x$ por $x^2$ deveria ser $x^3$ porque seria $x.x.x.$ e $x.x.x$ é igual a $x^3$.

A professora então questionou se essa idéia era válida para $x.x^3$. e para $x.x^4$. A resposta do aluno A foi sim e a justificativa foi: $x.x^3 = x.x.x.x = x^4$. e $x.x^4 = x.x.x.x.x = x^5$.

A partir das justificativas dadas pelo aluno A, a professora expôs aos alunos outros exemplos de multiplicações envolvendo expoentes maiores que dois[41]. Entretanto, não se enunciou nenhuma regra em relação aos expoentes na multiplicação entre expressões algébricas.

Em seguida, foram propostas algumas atividades envolvendo multiplicações com expoentes maiores que dois para serem realizadas e discutidas nos grupos. Alguns exemplos de atividades solicitadas aos alunos:

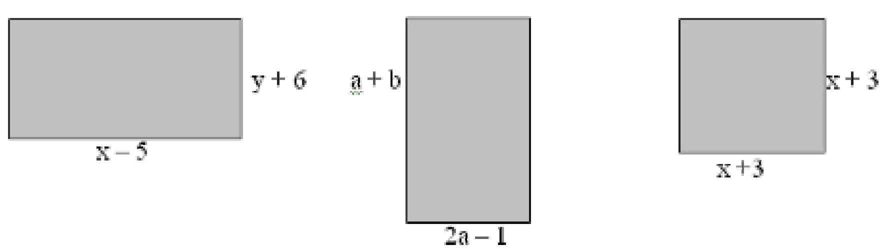
Realize as multiplicações:

a) $2x^2 . x^3 =$
b) $x^2 . x^3 . x^5 =$
c) $5a^2 . a^3 =$
d) $2x . (x^2 + x^3) =$
e) $-4z . (z + 2z^3) =$

Quadro 4.20 – Exemplo de atividade proposta para multiplicação

### *4.3.11 Situação-problema 11*

Qual a expressão algébrica que representa a área dos retângulos abaixo?




Quadro 4.21 – Fase 2: situação-problema 11

Foi sugerido pela professora que os alunos procurassem resolver a atividade (quadro 4.21) sem o uso do material manipulativo, tendo em vista que um dos objetivos, no momento,

[41] Exemplos de multiplicações apresentadas pela professora:
$x^2.x^3 = (x.x).(x.x.x) = x.x.x.x.x = x^5$
$x^5.x^3. = (x.x.x.x.x).(x.x.x) = x.x.x.x.x.x.x.x = x^8$
$a^3.a^2. = (a.a.a).(a.a) = a.a.a.a.a = a^5$

era o de dar maior ênfase aos procedimentos técnicos, tais como o uso do algoritmo ou da distributividade. Alguns alunos, apesar de resolverem através do algoritmo, ainda sentiram a necessidade de confirmar suas respostas com o material manipulativo. Uma dessas situações está exemplificada na seqüência de fotos a seguir (figuras 4.43, 4.44 e 4.45), onde os alunos do grupo iniciam a resolução pelo algoritmo mas recorrem ao material para validar a resposta.

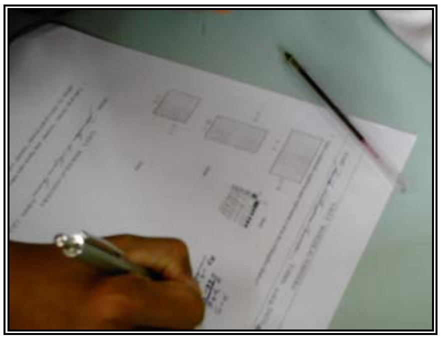


Figura 4.43 – Fase 2: situação-problema 11 – atividades realizadas em aula (1º momento)

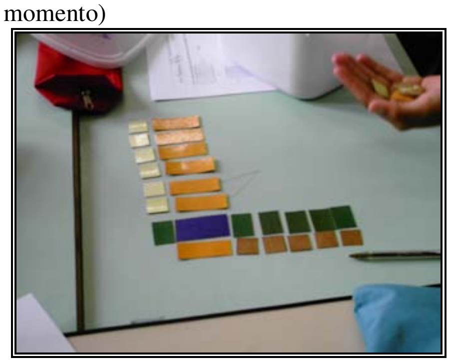


Figura 4.44 – Fase 2: situação-problema 11 – atividades realizadas em aula (2º momento)

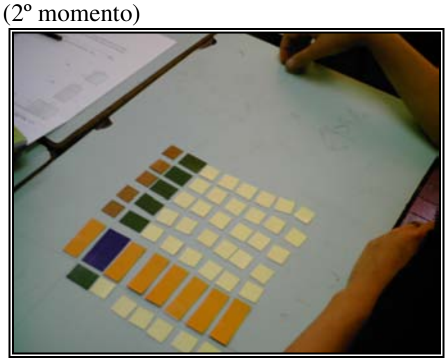


Figura 4.45 – Fase 2: situação-problema 11 – atividades realizadas em aula (3º momento)

No decorrer da atividade foi possível observar que a propriedade distributiva foi compreendida por quase todos os alunos, bem como a observação de que a área destes retângulos também pode ser representada através da multiplicação de expressões algébricas. No entanto, nem todos os alunos obtiveram a mesma resposta para as áreas. Uns porque, em algum momento da multiplicação, confundiram-se com os sinais ou não compreenderam as regras envolvidas, como se pode ver na figura 4.46.

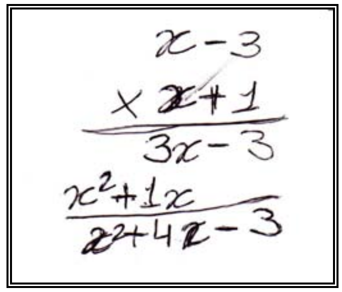


Figura 4.46 – Fase 2: situação-problema 11 – aluno B

Outros, como o aluno G, cometeram alguns deslizes na multiplicação merecedores de revisão e discussão em grande grupo por envolver propriedades referentes ao uso de sinais na multiplicação (figura 4.47).

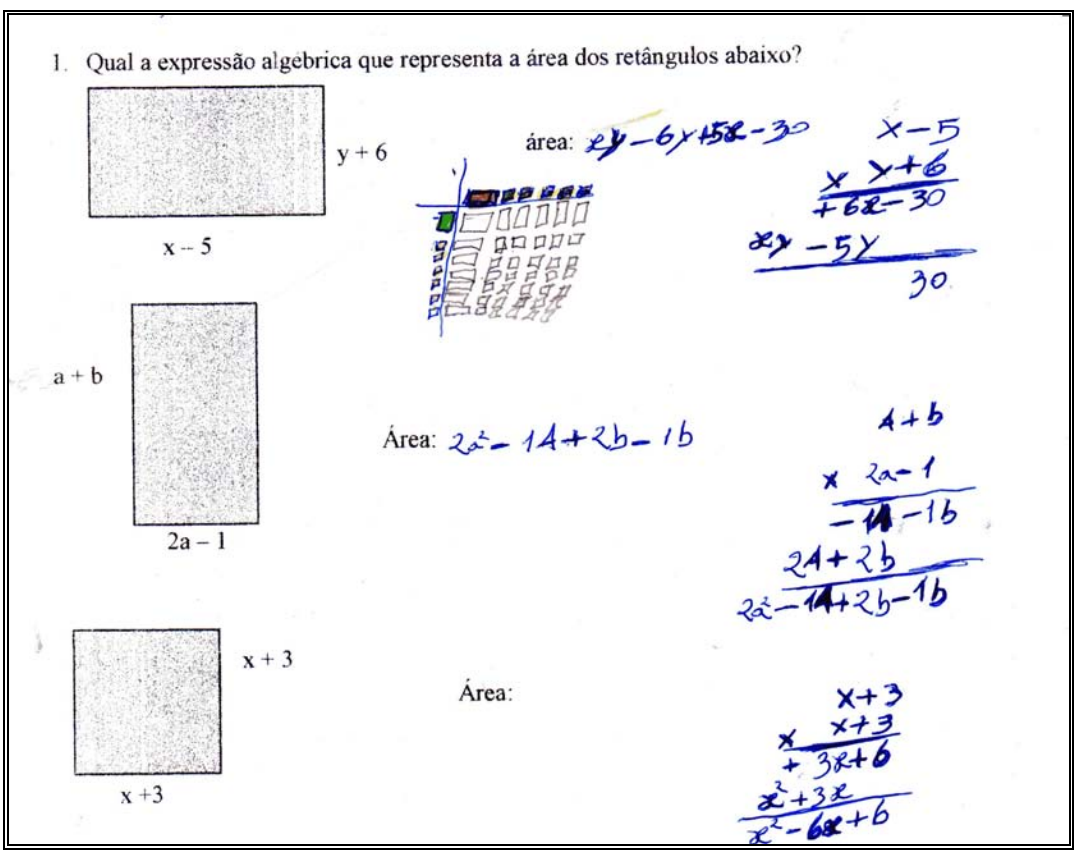
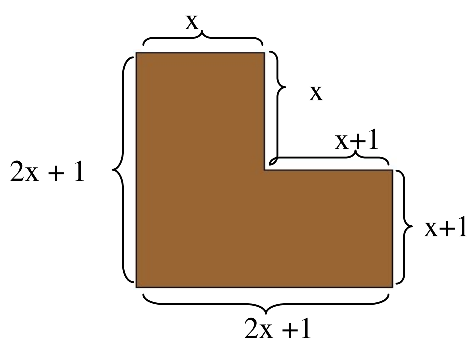



Figura 4.47 – Fase 2: situação-problema 11 – aluno G

### *4.3.12 Situações-problema 12 e 13*

A figura abaixo representa as dimensões planas de uma sala.




a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa sala:

b) Suponha que o x vale 5 metros, então qual seria a área da sala?

c) E se x valesse 8 metros?

d) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para x e calcular?Justifique:

e) Podemos utilizar 1 metro para o valor de x? Justifique:

f) Complete a tabela :

| Valor atribuído ao x | Área da figura |
|---|---|
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6,5 | |
| 7 | |
| | 86 |

g) É possível representar a área dessa figura sem atribuir valores específicos para x? Como?

h) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa área? Qual?

Quadro 4.22 – Fase 2: situações-problema 12

Nesta atividade nosso principal objetivo era verificar quais as estratégias que os alunos estabeleceriam para o cálculo da área e não o resultado em si.

Ao ser proposta a atividade 12 (quadro 4.22), os alunos comentaram que já a haviam realizado (de fato, haviam realizado atividade semelhante, porém na ocasião o enfoque era cálculo de perímetro e, agora, de área). Ao serem solicitados a ler com atenção o que pedia a atividade, os alunos perceberam que nesta deveria ser calculada a área.

O aluno O logo percebeu que a figura não era um retângulo e comentou: “A gente não sabe calcular a área desse negócio. Isso não é um retângulo.”

A professora indagou se só é possível calcular área de retângulos. A aluna R respondeu que não, que era possível calcular área de outras figuras, mas que não seria do mesmo jeito que se estava calculando: base x altura.

Então a professora sugeriu que descobrissem uma maneira para calcular a área daquela figura, já que o que sabiam não se aplicava.

Cada grupo discutiu a proposta da professora. Um aluno perguntou se dava para dividir a figura. A professora respondeu que deveriam achar uma maneira de calcular a área e que essa maneira poderia envolver a decomposição da figura, se o grupo assim achasse necessário.

Todos os grupos optaram pela decomposição da figura, obtendo retângulos e assim utilizar a multiplicação para o cálculo da área.

Alguns grupos dividiram a figura na horizontal (figura 4.48), outros na vertical (figura 4.49), mas o procedimento adotado foi o mesmo para todos os grupos: decompor a figura, calcular a área de cada retângulo e somar os resultados. Como podemos observar nos exemplos (figuras 4.48 e 4.49).

Cabe ressaltar que para a resolução dos demais itens os alunos não utilizaram a resposta obtida no item *a* (expressão para a área), mas substituíram o valor de $x$ diretamente na figura e calcularam novamente a área. Este fato pode ser constatado na atividade exemplificada na figura 4.49. Esse procedimento já havia ocorrido em tarefas anteriores.

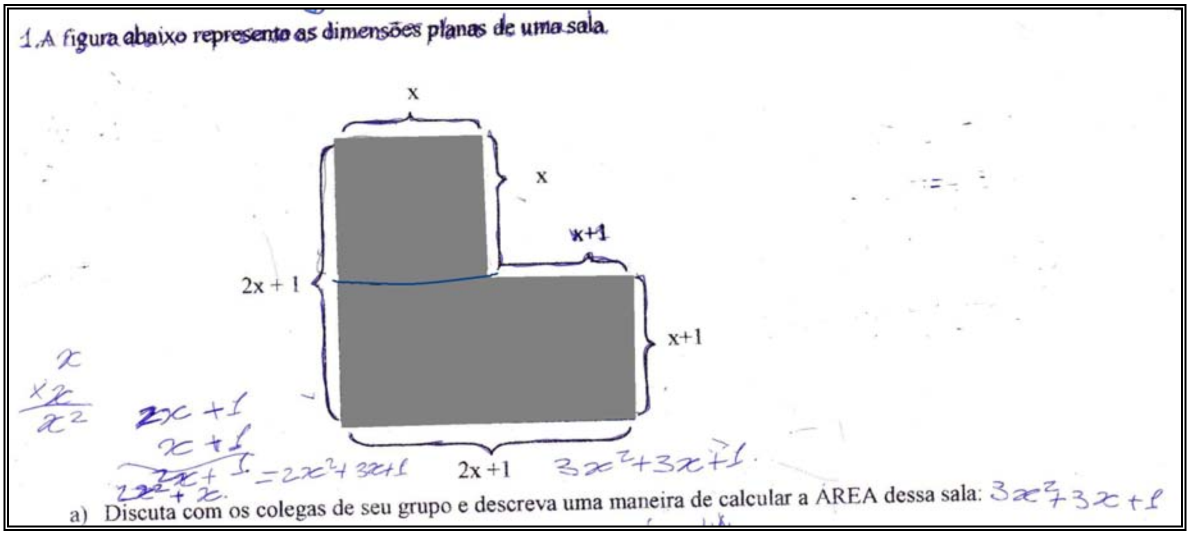



Figura 4.48 – Fase 2: situação-problema 12 – grupo 4

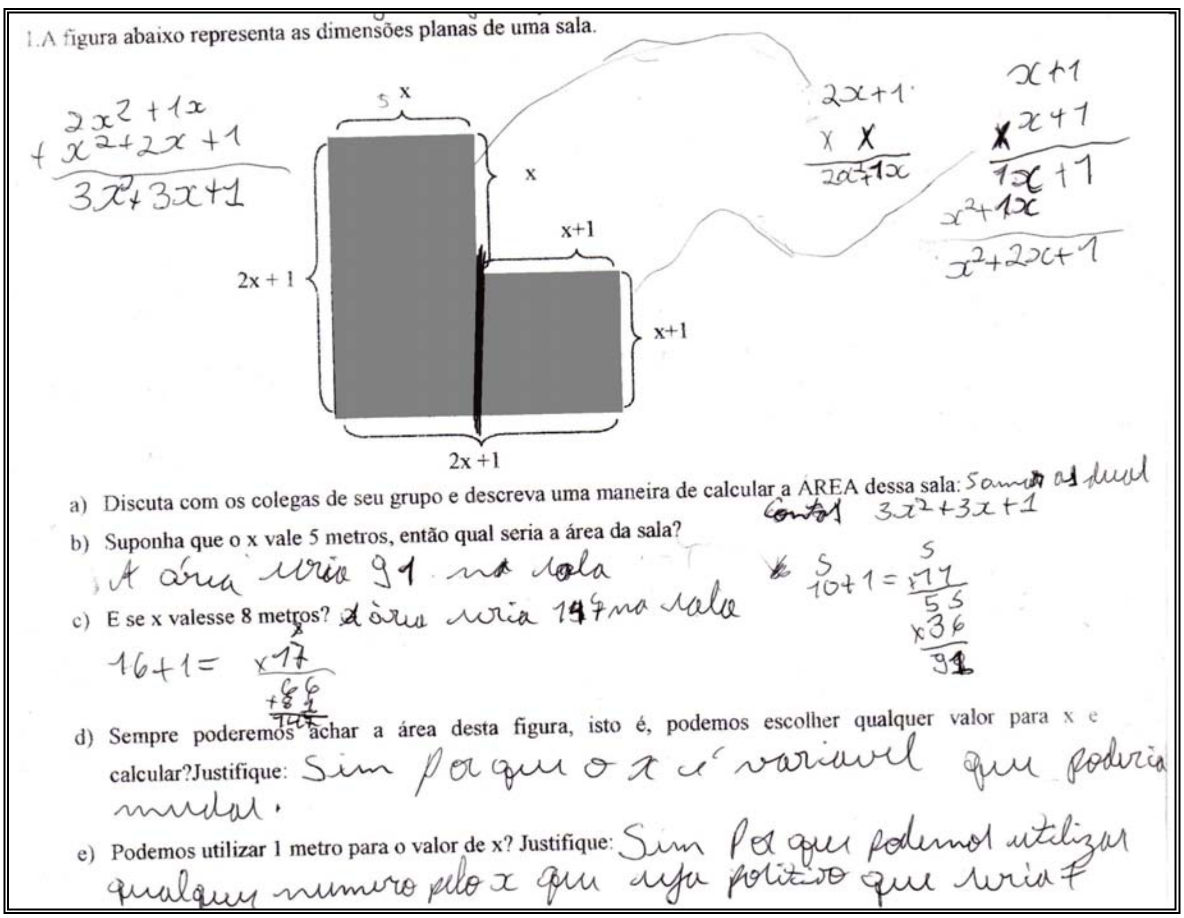



Figura 4.49 – Fase 2: situação-problema 12 – grupo 2

Na discussão em grande grupo pudemos aproveitar as diferentes possibilidades encontradas para solucionar a questão e explorar o fato de que a área final obtida era a mesma para todos os grupos, mesmo dividindo de formas diferentes (vertical ou horizontal) e realizando a operação de multiplicação entre expressões diferentes.

| |
|---|
| Cada grupo deverá "inventar" uma figura cujos lados sejam expressões algébricas para que os colegas dos outros grupos possam encontrar a área da mesma.<br><br>Observação: O grupo que está propondo a figura deverá saber a resposta para o problema que lançou pois terá que corrigir, posteriormente, as respostas dadas pelos colegas. |

Quadro 4.23 – Fase 2: situações-problema 13

Quanto à situação-problema 13 (quadro 4.23), chama a atenção o fato de todos os grupos terem utilizado o retângulo ou o quadrado como figura "inventada". Tal fato talvez tenha ocorrido pela facilidade do cálculo de área de tal figura, uma vez que já estão familiarizados com ela e que a atividade incluía o requisito de terem que saber a resposta para corrigir. Ao ser indagada sobre o porquê da escolha do quadrado a aluna S respondeu que tinha escolhido porque já sabia a resposta e quando o outro grupo respondesse poderia dizer se estava correto ou não. Este pensamento talvez tenha motivado a maioria dos grupos na "invenção" da figura da referida questão.

### *4.3.13 Situações-problema 14 e 15*

Com as atividades propostas (quadro 4.24), a intenção era que os alunos percebessem que determinadas potências, no caso os quadrados da soma e da diferença, também podem ser obtidos através da regra $(x + y)^2 = x^2 + 2 . x . y + y^2$ ou pela aplicação da distributividade $(x + y)^2 = (x + y) . (x + y) = x^2 + x . y + x . y + y^2 = x^2 + 2 . x . y + y^2$ e que as mesmas noções podem ser utilizadas para o caso $(x – y)^2$.

Situação-problema 14

Complete a tabela abaixo:

| Valor de x | Valor de y | $(x + y)^2$ | $x^2 + y^2$ | $x \cdot (x+ y) + y \cdot (x + y)$ | $x^2 + 2.x.y + y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | 3 | | | | |
| – 2 | – 6 | | | | |
| 0 | 2 | | | | |
| 1 | 8 | | | | |
| 2 | –1 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na terceira coluna, na quinta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de x e y, como você poderia representar $(x + y)^2$?

Situação-problema 15

Complete a tabela abaixo:

| Valor de x | Valor de y | $(x – y)^2$ | $x^2 – y^2$ | $x \cdot (x – y) – y \cdot (x – y)$ | $x^2 –2.x.y + y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | |
| 2 | 6 | | | | |
| 3 | 0 | | | | |
| –1 | 8 | | | | |
| 2 | –1 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na terceira coluna, na quinta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de x e y, como você poderia representar $(x – y)^2$?

Quadro 4.24 – Fase 2: situações-problema 14 e 15

Antes da resolução das atividades pelos grupos (quadro 4.24), foi realizada uma revisão sobre potenciação. Alguns alunos comentaram que já haviam aprendido a potenciação em anos anteriores, outros disseram desconhecer tal operação. A potenciação foi abordada como produto de fatores iguais, sendo esses fatores números ou expressões algébricas.

Após a realização das atividades, onde observaram que as operações realizadas na terceira coluna produziam resultados iguais aos da última coluna, a potenciação continuou a ser interpretada pelos alunos como produto de fatores iguais. Havia a expectativa da professora com relação à percepção de que é possível utilizar a convenção $(x + y)^2 = x^2 + 2 . x . y + y^2$ para os produtos notáveis. Apesar de tal expectativa não ter sido contemplada, cabe ressaltar que houve a compreensão por parte dos alunos de que $(x + y)^2 = (x + y) . (x + y) = x^2 + 2 . x . y + y^2$. Ou seja, houve a produção de um significado, por parte dos alunos, para a operação solicitada e isso já foi bastante satisfatório para uma aula apenas. Por já estarmos habituados à utilização das técnicas algébricas, pareceu-nos que através da atividade proposta os alunos observariam a igualdade entre $(x + y)^2$ e $x^2 + 2 . x . y + y^2$ e, que a partir daí, poderiam utilizar a regra "quadrado do primeiro somado com o dobro do primeiro pelo segundo, somado ao quadrado do segundo" para a resolução de outros quadrados. Contudo, apesar dos alunos perceberem tal igualdade, a mesma não tinha para eles o mesmo significado que para nós e, continuaram a tratar $(x + y)^2$ como $(x + y) . (x + y)$. Refletindo melhor, observamos que o significado produzido por eles era o mais coerente com o trabalho que vinha sendo desenvolvido, uma vez que não privilegia "regras" e técnicas mas a compreensão dos conceitos envolvidos nas operações e, neste caso, o objetivo foi certamente alcançado.

### 4.4 Teste fase 2: Expressões algébricas – Operações.

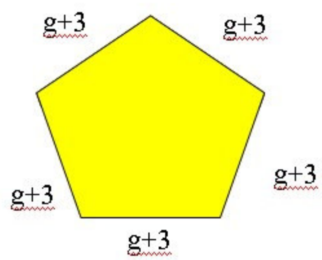
Com a finalidade de complementar a avaliação da aprendizagem dos alunos no que se refere à compreensão das operações básicas (adição, subtração, multiplicação) entre expressões algébricas e suas respectivas propriedades foi realizado um teste individual no último encontro.

Semelhante ao teste realizado na primeira fase deste trabalho e mesmo sendo todo o trabalho da segunda fase realizado em grupos, optamos por não realizar o teste em grupo com a finalidade de observar a aprendizagem de forma mais individualizada.

A seguir serão apresentados os percentuais de acertos, erros e questões não respondidas da avaliação, seguidos de alguns comentários referentes às respostas dadas acompanhados de exemplos.

### *4.4.1 Questão 1*

1) Como você representaria o perímetro desta figura?




Se a letra g vale 10 centímetros, então qual será o perímetro da figura acima? ________

Quadro 4.25 – Fase 2: teste – questão 1

Nesta questão (quadro 4.25) houve um percentual considerável de acertos, como podemos observar na tabela 4.12.

| QUESTÃO 1 | | | |
|---|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas parcialmente corretas | Respostas incorretas | Não respondida |
| 67% | 11% | 17% | 5% |

Tabela 4.12 – Fase 2: teste – questão 1

Chama a atenção o fato de alguns alunos considerarem para o cálculo do perímetro a expressão algébrica resultante da soma da medida dos lados, como a resposta dada pelo aluno C (figura 4.50), enquanto outros substituíram o valor da variável diretamente na figura e repetiram o cálculo do perímetro com os valores numéricos, como a aluna E (figura 4.51).

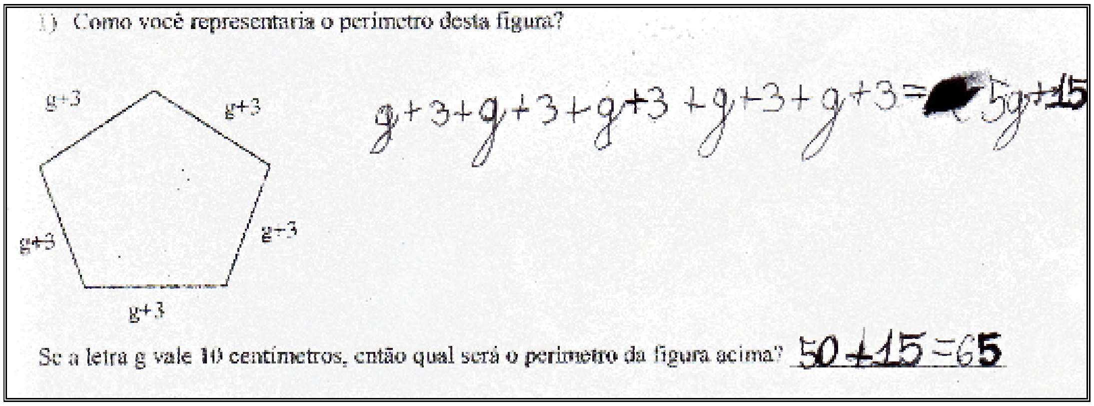



Figura 4.50 – Fase 2: teste – questão 1a

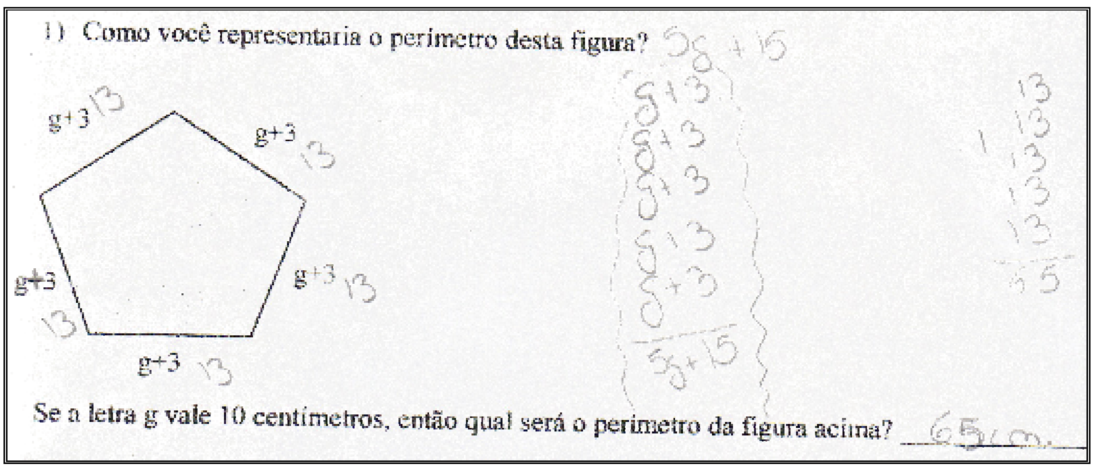



Figura 4.51 – Fase 2: teste – questão 1b

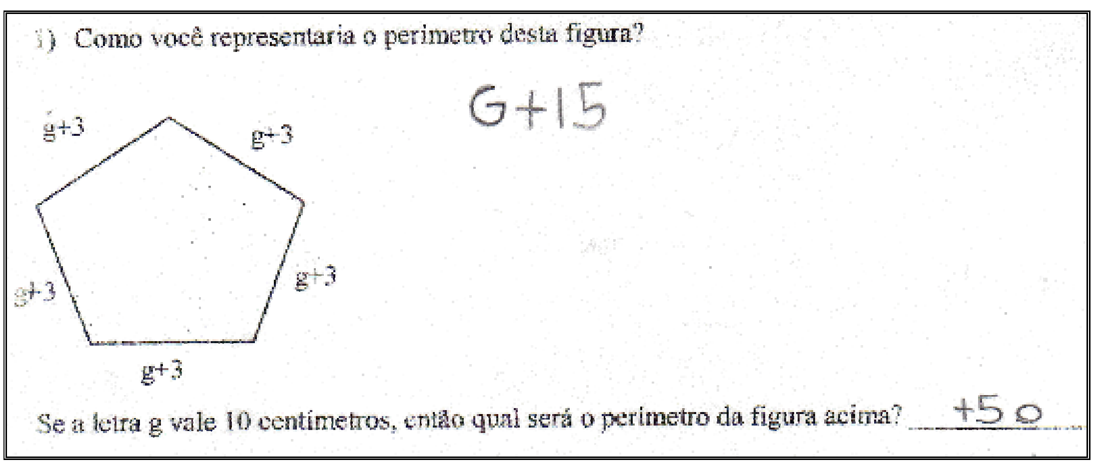
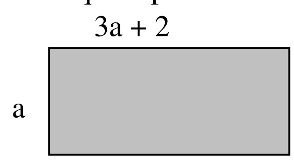



Figura 4.52 – Fase 2: teste – questão 1c

As respostas erradas foram semelhantes ao exemplo apresentado na figura 4.52, resposta do aluno B, onde a letra foi interpretada como um valor desconhecido. O aluno B, ao ser questionado quanto à resposta dada, respondeu que ao somar cinco “coisas” que ele não sabia o valor resultava em algo que ele não sabia o valor. Essa foi a justificativa dada pelo aluno para a soma dos *g*’s resultar em um *g*. Quanto ao item b, o aluno interpretou a questão apenas para o valor desconhecido, ou seja, como o g vale 10 e são cinco, então o resultado será 50, ignorando as 15 unidades somadas a 5*g*.

### *4.4.2 Questões 2, 3 e 4*

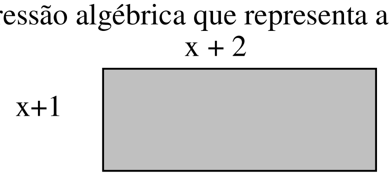
2) Qual a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo?




Expressão algébrica: ____________________________________

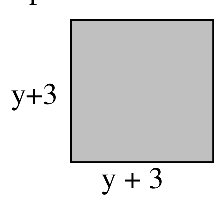
Se **a** valer 5, qual será a área da figura? ________________________

3) Qual a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo?




Expressão algébrica: ____________________________________

4) Qual a expressão algébrica que representa a área do quadrado abaixo?




Expressão algébrica: __________________________

Há uma outra expressão algébrica que represente essa área?Qual?

Quadro 4.26 – Fase 2: teste – questões 2, 3 e 4

Nas questões 2, 3 e 4 (quadro 4.26) observamos um considerável percentual de acertos, como podemos constatar nas tabelas 4.13, 4.14 e 4.15.

| QUESTÃO 2 | | | |
|---|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas parcialmente corretas | Respostas incorretas | Não respondida |
| 61% | 17% | 17% | 5% |

Tabela 4.13 – Fase 2: teste – questão 2

| QUESTÃO 3 | | | |
|---|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas parcialmente corretas | Respostas incorretas | Não respondida |
| 73% | 5% | 17% | 5% |

Tabela 4.14 – Fase 2: teste – questão 3

| QUESTÃO 4 | | | |
|---|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas parcialmente corretas | Respostas incorretas | Não respondida |
| 73% | 5% | 17% | 5% |

Tabela 4.15 – Fase 2: teste – questão 4

Também é possível perceber que os alunos utilizaram duas estratégias diferentes para a solução destas questões: o uso do material manipulativo ou o algoritmo da multiplicação, sendo a segunda estratégia a mais utilizada e a que provocou algumas respostas incorretas às questões. Convém ressaltar que nenhum aluno se utilizou apenas da estratégia que utilizava a representação pelo material manipulativo.

Alguns alunos iniciaram a resolução utilizando-se da representação pelo material e nas questões seguintes começaram a fazer uso do algoritmo (figura 4.53).

A explicação dada pela aluna S ao ser questionada sobre a troca de estratégia foi que se perdia muito tempo desenhando e pintando para mostrar o resultado.

Observamos que no momento da utilização do algoritmo a aluna representou $y^2$ como sendo $2y$, porém ao escrever a expressão no local indicado para a resposta, a mesma escreveu de forma correta (figura 4.53). Observamos que a aluna ainda não tinha familiaridade com o algoritmo, o que ocasionou duas escritas diferenciadas (uma para o algoritmo e a outra, dada como resposta,  a que a aluna previu pelo conhecimento elaborado através da representação pelo material).

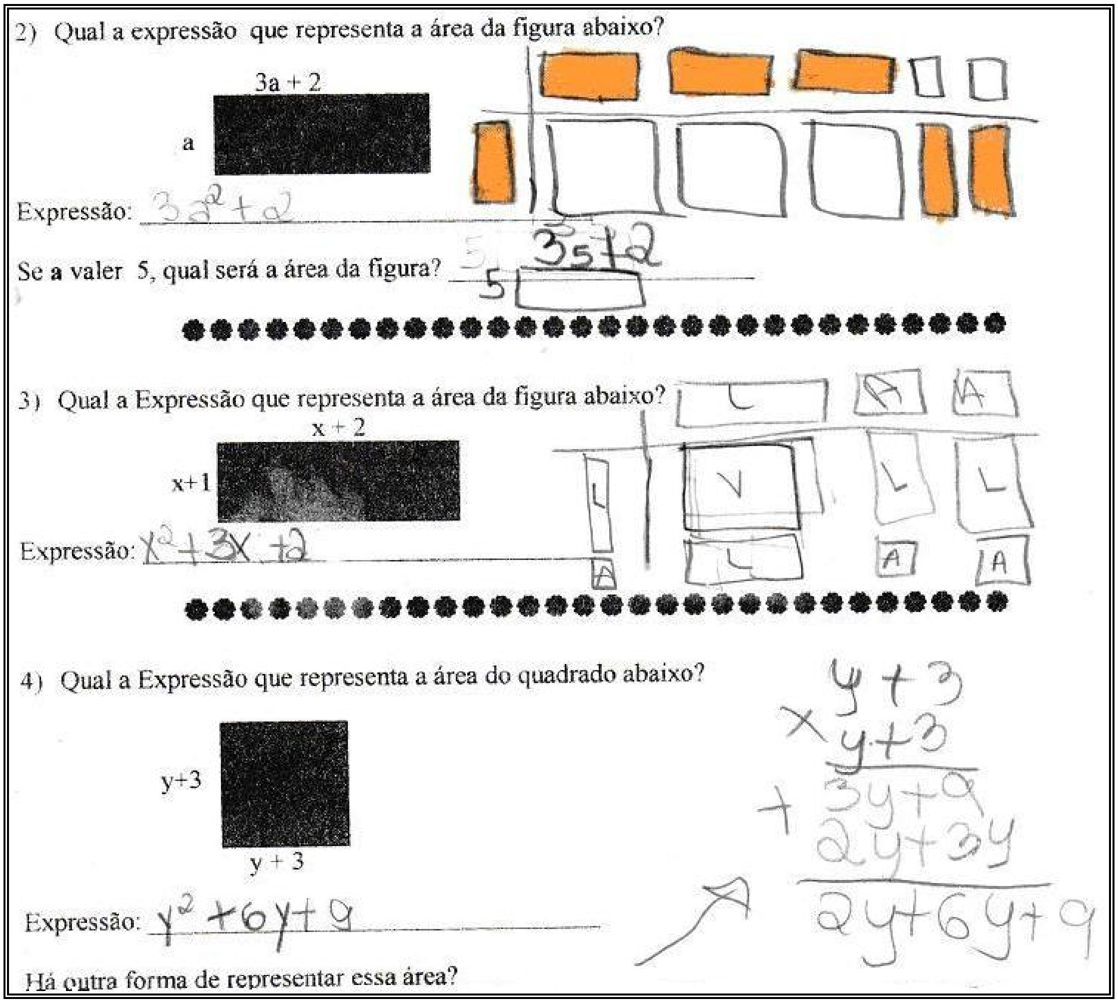
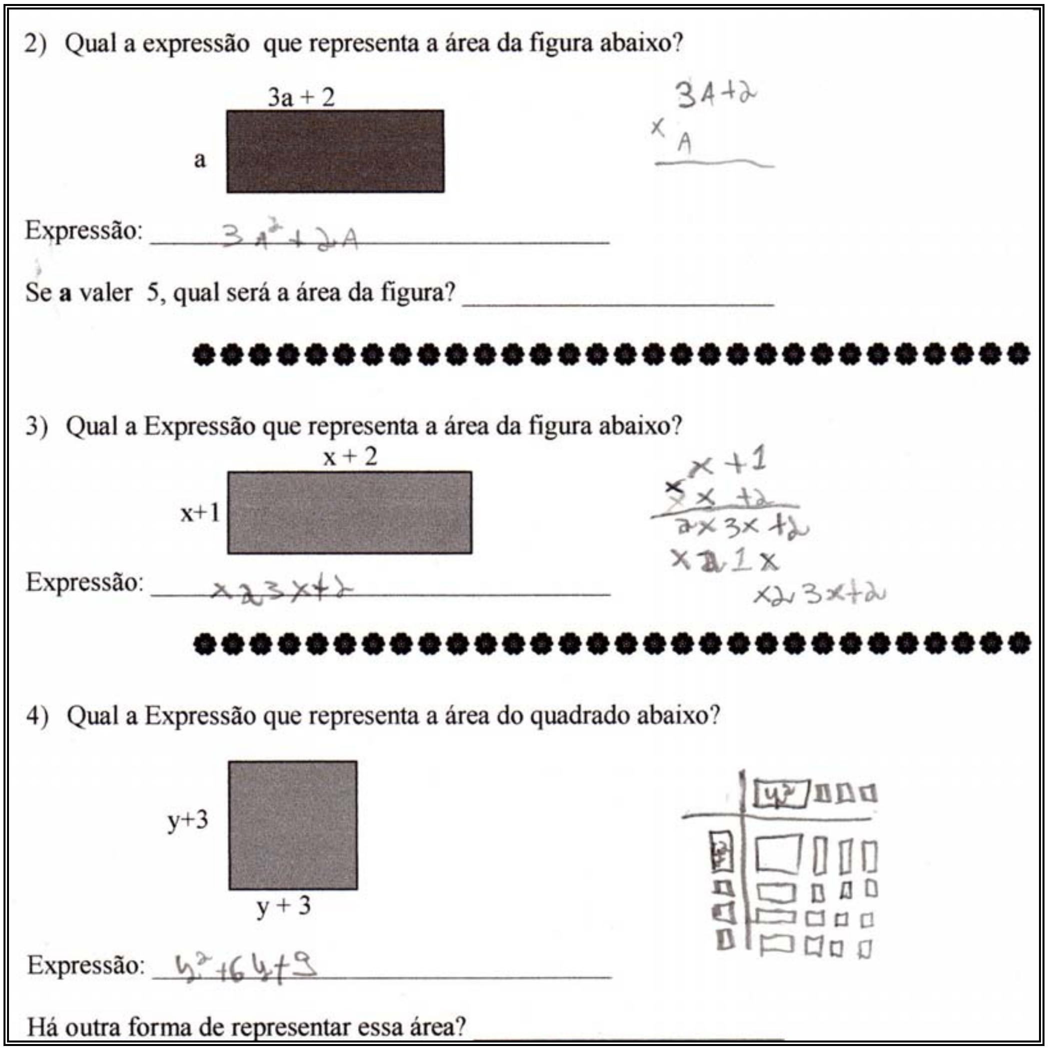



Figura 4.53– Fase 2: teste – questões 2 a 4

Outros, no entanto fizeram o contrário, iniciaram utilizando o algoritmo e na questão 3 passaram a usar o material (figura 4.54). O aluno L explicou sua mudança de estratégia observando que ele estava familiarizado com o uso da variável $x$ e com a variável $y$ ele ainda não se sentia seguro, então resolveu usar o material para confirmar se a resposta dele estava correta.

Na questão 3 (figura 4.54), o aluno L não utilizou o sinal referente ao $3x$ .

Interpretamos tal fato como um esquecimento do aluno uma vez que nas demais questões o mesmo utilizou os sinais de forma coerente.


2) Qual a expressão que representa a área da figura abaixo?

3a + 2

a

3A+2
x A

Expressão: 3A²+2A

Se a valer 5, qual será a área da figura? ____________

3) Qual a Expressão que representa a área da figura abaixo?

x + 2

x+1

x+1
x x+2
2x 3x +2
x 2 1 x
x2 3x+2

Expressão: x2 3x+2

4) Qual a Expressão que representa a área do quadrado abaixo?

y+3

y + 3

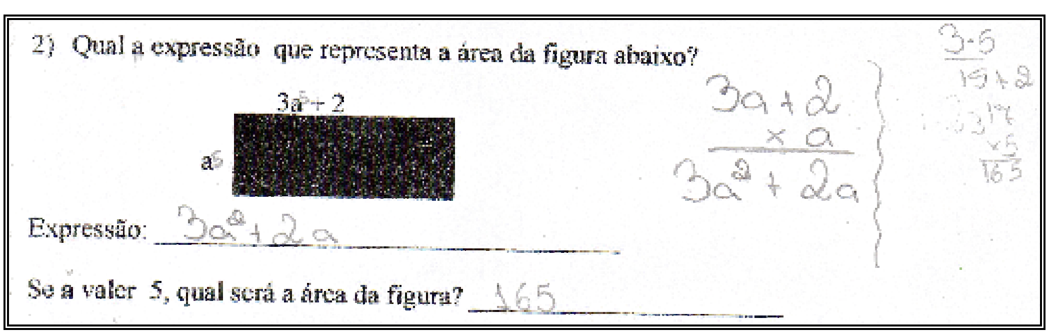
y²

Expressão: y²+6y+9

Há outra forma de representar essa área? ____________

Figura 4.54 – Fase 2: teste – questões 2 a 4

Outros ainda, só utilizaram-se do algoritmo, como o aluno G (figuras 4.55 e 4.56).


2) Qual a expressão que representa a área da figura abaixo?

3a + 2

a

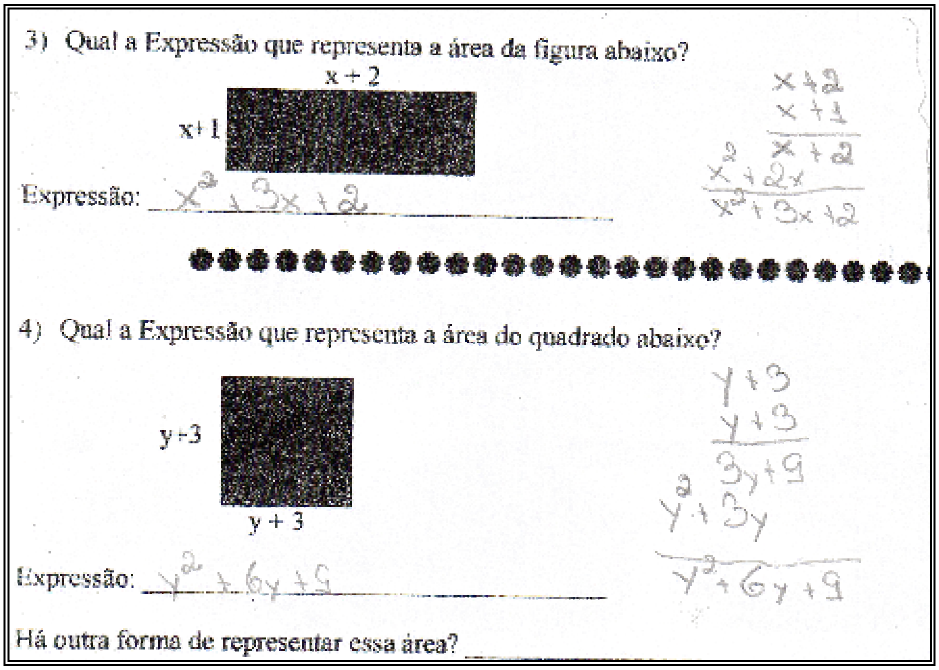
3a + 2
x a
3a² + 2a

3·5
15+2
17
x5
165

Expressão: 3a²+2a

Se a valer 5, qual será a área da figura? 165

Figura 4.55 – Fase 2: teste – questão 2


3) Qual a Expressão que representa a área da figura abaixo?

$x + 2$

$x + 1$

Expressão: $x^2 + 3x + 2$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+1 \\ \hline x+2 \\ x^2+2x \\ \hline x^2+3x+2 \end{array}$$

4) Qual a Expressão que representa a área do quadrado abaixo?

$y + 3$

$y + 3$

Expressão: $y^2 + 6y + 9$

$$\begin{array}{r} y+3 \\ y+3 \\ \hline 3y+9 \\ y^2+3y \\ \hline y^2+6y+9 \end{array}$$

Há outra forma de representar essa área? ____________

Figura 4.56 – Fase 2: teste – questões 3 e 4

### *4.4.3 Questão 5*

| |
|---|
| 5) Existe uma forma mais simples de escrever esta expressão algébrica? Se sim, qual? <br> $x \,.\, (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$ |

Quadro 4.27 – Fase 2: teste – questão 5

Quanto à quinta questão (quadro 4.27), a maioria dos alunos (66%), conforme as três primeiras colunas da tabela 4.16, considerou existir uma expressão algébrica equivalente e mais simplificada para escrever a expressão em questão.

| QUESTÃO 5 | | | |
|---|---|---|---|
| Respostas corretas | Respostas parcialmente corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| 34% | 27% | 5% | 34% |

Tabela 4.16 – Fase 2: teste – questão 5

As expressões sugeridas foram variadas. Muitos utilizaram a usual, como a aluna R, na qual os alunos resolvem a multiplicação, usando a propriedade distributiva e depois agrupam os termos semelhantes (figura 4.57).

5) Existe uma forma mais simples de escrever esta expressão algébrica? Se sim, qual?

$$x \,.\, (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$$

$2x^2+x^2-1x+x^2+2x+1$

$4x^2+3x+1$

Figura 4.57 – Fase 2: teste – questão 5a

Alguns, como o aluno C, agruparam os semelhantes que estão nos parênteses, em seguida multiplicaram usando a distributividade e agruparam novamente os termos semelhantes (figura 4.58).

5) Existe uma forma mais simples de escrever esta expressão algébrica? Se sim, qual? Sim Juntar as mesmas operações

$$x \,.\, (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$$

$x.(3x-1)+(x+1).(x+1)$

$3x^2-x+x^2+2x+1$ É igual a $4x^2+1x+1$

Figura 4.58 – Fase 2: teste – questão 5b

Outras expressões, também corretas e equivalentes foram utilizadas, como as apresentadas pelo aluno G (figuras 4.59) e pela aluna I (figura 4.60).

5) Existe uma forma mais simples de escrever esta expressão algébrica? Se sim, qual?

$$x \,.\, (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$$

$x.(3x+1) + (x+1).(x+1)$

Figura 4.59 – Fase 2: teste – questão 5c

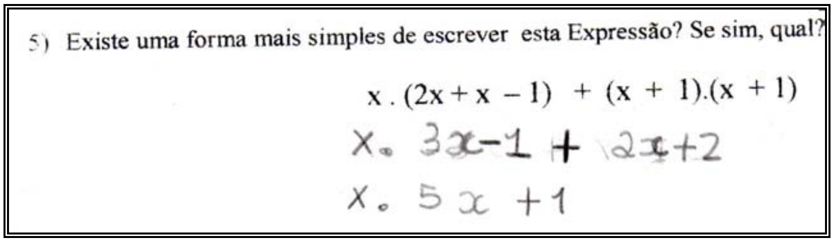
5) Existe uma forma mais simples de escrever esta expressão algébrica? Se sim, qual?

$$x \,.\, (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$$

$x.(2x+x-1)+(x+1)^2$

Figura 4.60 – Fase 2: teste – questão 5d

No entanto, pode-se observar algumas expressões, que são dadas como equivalentes pelos alunos, mas na verdade não o são. No exemplo a seguir, é possível observar que o aluno A não considerou os parênteses nem a ordem hierárquica das operações na resolução, além de considerar a segunda multiplicação como uma adição (figura 4.61).


5) Existe uma forma mais simples de escrever esta Expressão? Se sim, qual?

$x \,.\, (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$

$x .\ 3x - 1 + 2x + 2$

$x .\ 5x + 1$

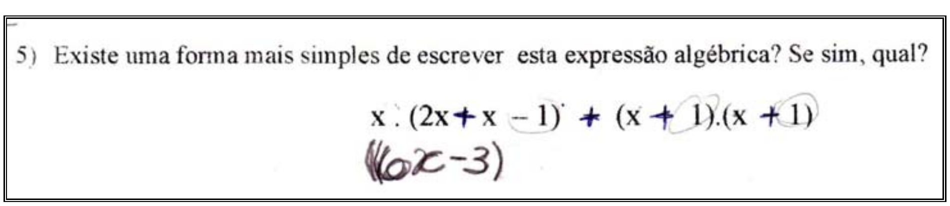
Figura 4.61 – Fase 2: teste – questão 5e

Booth (2003) já salientava que algumas idéias aritméticas mal compreendidas podem influenciar no desempenho algébrico dos alunos. O uso dos parênteses é uma dessas idéias, outra é a utilização da regra dos sinais nas operações envolvendo números ou expressões algébricas.

> As crianças geralmente não usam parênteses porque acham que a seqüência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados. Além disso, muitos alunos acham que o valor de uma expressão permanece inalterado mesmo quando se muda a ordem dos cálculos (BOOTH, 2003, p. 33).

No exemplo da figura 4.61 presencia-se uma confusão destas duas noções. O aluno ignorou a utilização dos parênteses, além de realizar a operação de adição antes da multiplicação, ou seja, para ele a ordem dos cálculos não importa para obter o resultado.

Estes mesmos elementos são também evidenciados no exemplo abaixo (figura 4.62). Embora a expressão obtida seja diferente da anterior, pode ser observado que o aluno também ignora a utilização dos parênteses e a ordem dos cálculos. No caso a seguir, o aluno L simplesmente adicionou os termos semelhantes e os valores numéricos, ignorando por completo as operações de multiplicação e subtração e o uso dos parênteses.


5) Existe uma forma mais simples de escrever esta expressão algébrica? Se sim, qual?

$x \,.\, (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$

$(6x - 3)$

Figura 4.62 – Fase 2: teste – questão 5f

### *4.4.4 Questão 6*

A questão 6 (quadro 4.28) na verdade contém vários itens, alguns envolvendo apenas valores numéricos, outros envolvendo adição de expressões algébricas e outros, multiplicação e ainda potenciação.

Houve um grande índice de itens não respondidos na última questão devido ao tempo, que para muitos não foi suficiente.

6) Resolva as operações indicadas:

| | |
|---|---|
| a) $3 + 8 - 15 + 9 =$ | g) $2x + 3y - 5x + 9 + y + 6x - 5y - 5=$ |
| b) $5.(4 + 7) =$ | h) $-3x.(2x + 5x^2) =$ |
| c) $(x + 2).(x + 3) =$ | i) $(8 - 5)^2 =$ |
| d) $(2x + 4).(5 + 3x) =$ | j) $(3 - c)^2 =$ |
| e) $(x + 4).(x + y) =$ | l) $(y + c)^2 =$ |
| f) $(x - 1).(x + 3) =$ | m) $(y - 5).(y - 6) =$ |

Quadro 4.28 – Fase 2: teste – questão 6

Na tabela 4.17, observamos os percentuais de acertos, erros e não respondidos referentes a cada item da questão 6.

| Itens da questão | QUESTÃO 6 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Respostas corretas | Respostas parcialmente corretas | Respostas incorretas | Não respondido |
| Item a | 44% | 0% | 44% | 12% |
| Item b | 78% | 0% | 11% | 11% |
| Item c | 73% | 5% | 17% | 5% |
| Item d | 61% | 5% | 17% | 17% |
| Item e | 56% | 5% | 11% | 28% |
| Item f | 61% | 5% | 17% | 17% |
| Item g | 23% | 5% | 44% | 28% |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Item h | 17% | 11% | 34% | 38% |
| Item i | 50% | 5% | 28% | 17% |
| Item j | 28% | 11% | 33% | 28% |
| Item l | 50% | 11% | 11% | 28% |
| Item m | 44% | 17% | 11% | 28% |

Tabela 4.17 – Fase 2: teste – questão 6

A análise dos itens da questão 6 será realizada em blocos. No primeiro momento serão analisadas as questões numéricas (itens *a* e *b*), em seguida as que envolvem somente adição e subtração de expressões (item *g*) e, por último, as que envolvem multiplicações e potenciação (demais itens da questão).

Quanto às questões numéricas, serão apresentados alguns exemplos e posteriormente os comentários.

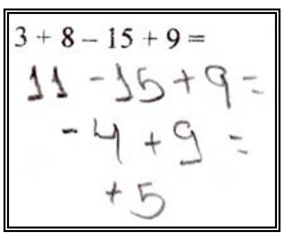



Figura 4.63 – Fase 2: teste – questão 6(item a)

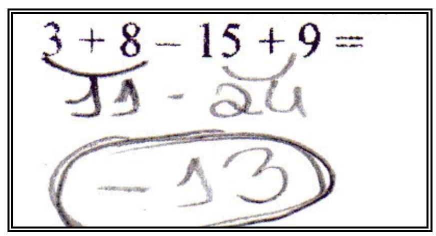
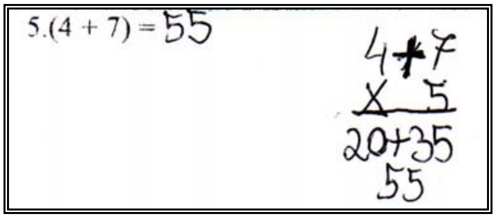



Figura 4.64 – Fase 2: teste – questão 6(item a)

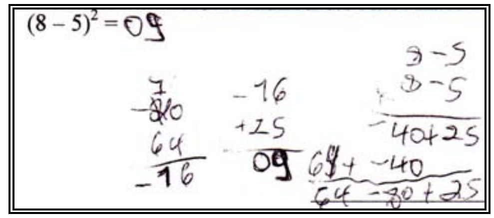
A primeira questão (figuras 4.63 e 4.64) teve um percentual de acertos de 44% e 44% de respostas incorretas (tabela 4.17). Fato curioso, uma vez que só envolvia procedimentos aritméticos e operações de adição entre inteiros.

Um aspecto evidenciado é o uso da propriedade distributiva na resolução das expressões numéricas. Tal utilização ocorreu por grande parte dos alunos como o aluno M (figura 4.65) e o aluno C (figura 4.66), em alguns casos ignorando os sinais, o que produziu um resultado numérico final incorreto, como o aluno H (figura 4.67).



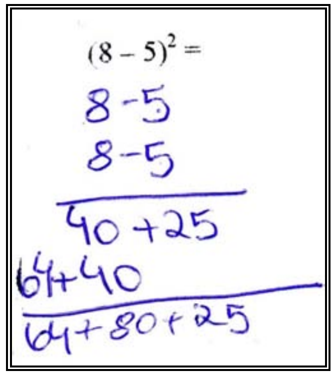
$5.(4+7) = 55$

Figura 4.65 – Fase 2: teste – questão 6 (item b)



$(8-5)^2 = 09$

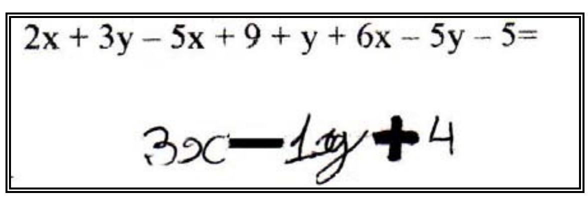
Figura 4.66 – Fase 2: teste – questão 6 (item *i*)



$(8-5)^2 =$

Figura 4.67 – Fase 2: teste – questão 6 (item *i)*

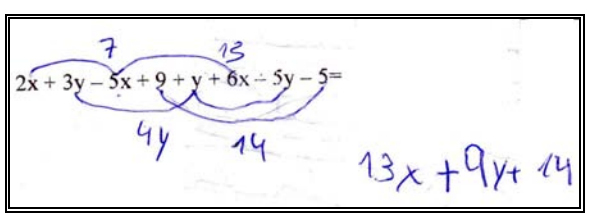
Na questão referente à adição de expressões algébricas (item *g*), exemplificada pela resposta do aluno M na figuras 4.68 e pela resposta da aluna J na figura 4.69, identifica-se novamente que alguns alunos ignoram a presença do sinal de menos como observamos na figura 4.69, onde a aluna simplesmente adicionou os coeficientes sem observar o sinal de menos em alguns deles. Este item da questão 6 teve um percentual de acerto de 23% e de respostas incorretas 44%. Um percentual de 28% dos alunos deixou esta questão em branco (tabela 4.17).



$2x + 3y - 5x + 9 + y + 6x - 5y - 5 =$

$3x - 1y + 4$

Figura 4.68 – Fase 2: teste – questão 6 (item *g*)



$2x + 3y - 5x + 9 + y + 6x - 5y - 5 =$

$13x + 9y + 14$

Figura 4.69 – Fase 2: teste – questão 6 (item *g*)

Dos itens referentes às expressões algébricas, os que envolviam multiplicação (itens *c,d,e,f)*, como os apresentados nas figuras 4.70 (resposta dada pelo aluno M) e 4.71 (resposta dada pelo B), foram os de maior percentual de acertos (ver tabela 4.17).

A maioria dos alunos utilizou-se do algoritmo da multiplicação e da propriedade distributiva para a resolução da atividade. Apenas o aluno B utilizou o material manipulativo para justificar suas respostas, embora nem todas ele tenha respondido corretamente, como podemos observar na figura 4.71.

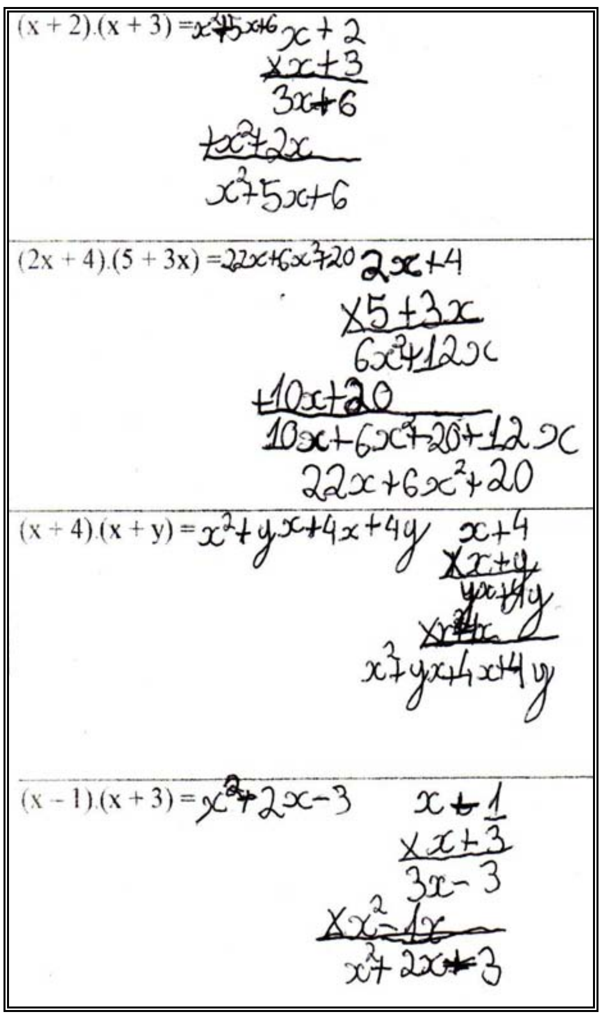



Figura 4.70 – Fase 2: teste – questão 6 (itens *c,d,e,f*)

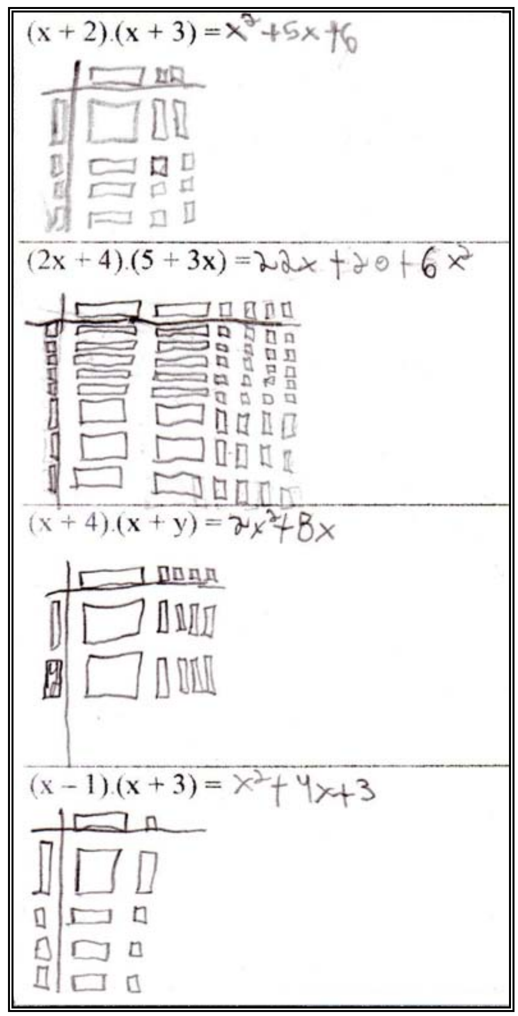



Figura 4.71 – Fase 2: teste – questão 6 (itens *c,d,e,f*)

Quanto às respostas incorretas – como nos dois últimos itens apresentado na figura 4.71 – os erros observados foram decorrentes da não consideração ou do uso inapropriado dos sinais na operação de multiplicação ou, ainda, do resultado não correto da multiplicação entre valores numéricos. O mesmo é notado nos itens que envolvem potenciação. Parece que todos os alunos percebem a potenciação como o produto de fatores iguais, de forma análoga ao aluno M (figura 4.72) – uma mesma expressão algébrica (ou numérica). No item *j*, em que aparece na expressão um sinal de menos, houve um percentual de 28% de acerto contra 50% no item *l* onde este sinal não aparece.

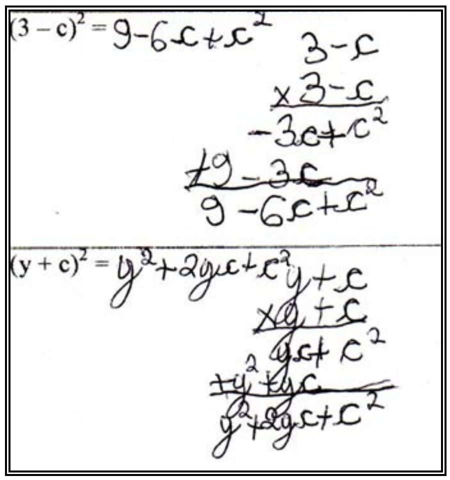


Figura 4.72 – Fase 2: teste – questão 6 (itens *j* e *l*)

Nas questões com respostas incorretas (33% no item com sinal negativo e 11% no outro), os erros cometidos foram referentes à utilização do sinal, exemplificadas pelas respostas do aluno C (figura 4.73) e da aluna D (figura 4.74).

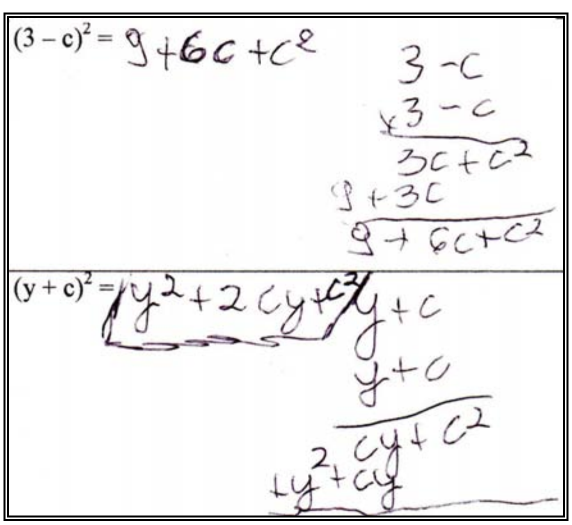


Figura 4.73 – Fase 2: teste – questão 6 (itens j e l)

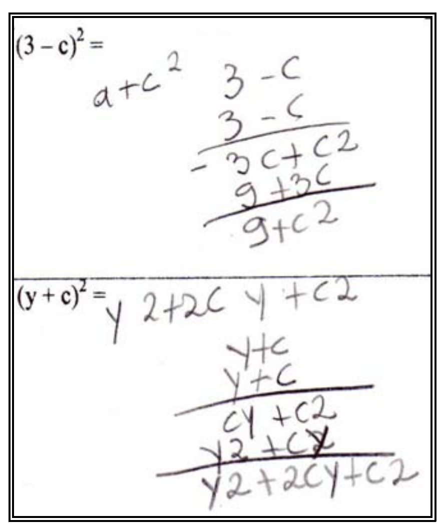


Figura 4.74 – Fase 2: teste – questão 6 (itens j e l)

Ou, ainda, o erro foi resultante de uma multiplicação numérica não correta, como o cometido pela aluna F (figura 4.75), onde 3 multiplicado por 3 resultou, incorretamente, em seis.

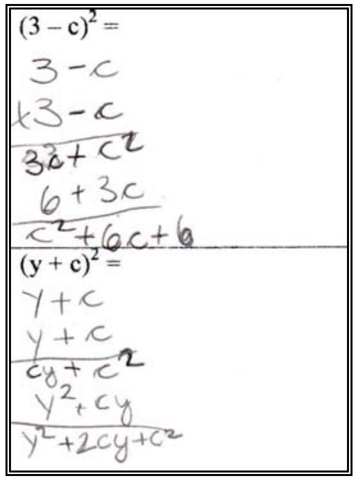



Figura 4.75 – Fase 2: teste – questão 6 (itens j e l)

### *4.4.5 Desempenho individual dos alunos no teste da segunda fase*

Nas tabelas 4.18 e 4.19 podemos observar o desempenho individual dos alunos no referido teste.

| **Aluno(a)** | **Questão 1** | **Questão 2** | **Questão 3** | **Questão 4** | **Questão 5** |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluno A | I | I | I | I | PC |
| Aluno B | I | C | C | C | B |
| Aluno C | C | C | C | C | C |
| Aluna D | C | PC | C | C | PC |
| Aluna E | C | C | C | C | C |
| Aluna F | C | C | C | C | PC |
| Aluno G | C | C | C | C | C |
| Aluno H | C | C | C | C | C |
| Aluna I | PC | C | C | C | C |
| Aluna J | C | C | C | C | B |
| Aluno L | C | PC | I | I | I |
| Aluno M | C | C | C | C | C |
| Aluno N | I | I | I | B | B |
| Aluno O | C | C | C | C | B |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Aluna P | C | C | I | C | PC |
| Aluno Q | PC | PC | C | I | B |
| Aluna R | C | I | I | I | PC |
| Aluna S | PC | I | C | C | B |

**Legenda[42]: C = correta, PC = parcialmente correta, I = incorreta, B = não respondida**

Tabela 4.18 – Fase 2: teste – desempenho dos alunos nas questões 1 a 5

| **Aluno(a)** | **Questão 6** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Item a | Item b | Item c | Item d | Item e | Item f | Item g | Item h | Item i | Item j | Item l | Item m |
| Aluno A | C | I | I | I | PC | I | I | I | I | PC | PC | C |
| Aluno B | C | C | C | C | C | C | B | B | I | B | B | B |
| Aluno C | C | C | C | C | C | C | C | PC | C | C | C | C |
| Aluna D | I | C | C | C | I | C | I | PC | C | I | C | C |
| Aluna E | C | C | PC | C | C | C | I | I | I | I | I | I |
| Aluna F | I | C | C | PC | C | C | I | I | PC | PC | PC | I |
| Aluno G | C | C | C | B | B | I | B | B | B | B | B | B |
| Aluno H | I | C | C | C | C | PC | C | C | C | C | C | PC |
| Aluna I | B | B | C | I | B | B | B | B | B | B | B | B |
| Aluna J | I | C | C | C | C | C | I | C | C | I | I | C |
| Aluno L | I | C | C | I | I | I | I | I | I | I | C | PC |
| Aluno M | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C | C |
| Aluno N | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B |
| Aluno O | C | C | C | C | C | C | PC | I | C | C | C | C |
| Aluna P | I | C | C | C | B | C | I | I | C | I | C | C |
| Aluno Q | I | I | I | B | B | B | B | B | C | B | B | B |
| Aluna R | C | C | I | C | C | C | C | B | I | C | C | C |
| Aluna S | I | C | C | C | C | C | I | B | C | I | C | PC |

**Legenda[43]: C = correta, PC = parcialmente correta, I = incorreta, B = não respondidas**

Tabela 4.19 – Fase 2: teste – desempenho dos alunos na questão 6

[42] Para fins de tabulação, nesta tabela 4.18, nas questões 2 e 4, por conterem mais de um item, foi considerada correta (C) a questão em que todos os seus itens foram respondidos corretamente; considerada parcialmente correta (PC) a questão em que apenas o primeiro item foi respondido corretamente, e incorreta (I) quando os dois itens não estavam corretos.

Para a questão 5, foi considerado correto (C) quando o aluno escreveu uma expressão equivalente à apresentada; parcialmente correto (PC) se o aluno escreveu uma expressão que fosse em parte equivalente à apresentada na questão e, incorreto (I) se a expressão dada pelo aluno não apresentava equivalência alguma com a do enunciado.

[43] Em cada item desta questão, para fins de tabulação, consideramos parcialmente correto (PC) o item cuja resposta apresentava incorreções em apenas um dos termos (seja por questões do uso do sinal ou por respostas numéricas erradas decorrentes de multiplicações equivocadas).

## 4.5 Elementos de análise do trabalho desenvolvido

Uma de nossas preocupações iniciais era o desenvolvimento de uma proposta didática no sentido de propiciar que os alunos produzissem significados para as operações realizadas com expressões algébricas e que desenvolvessem a capacidade de pensar algebricamente.

Ao analisarmos as respostas dadas pelos alunos na última avaliação e nas tarefas de aula pudemos verificar a compreensão de alguns conceitos algébricos construídos e utilizados por eles, tais como a concepção de que na adição com expressões algébricas só podem ser agrupados termos semelhantes, a compreensão e uso da propriedade distributiva da multiplicação e a percepção da potenciação como a multiplicação sucessiva de uma mesma expressão algébrica ou numérica. Observamos também avanços quanto ao uso das letras, quanto ao uso da linguagem simbólica, avanços na interpretação e na representação de situação problemas utilizando linguagem algébrica, na construção de critérios e procedimentos para decidir sobre a validade de uma hipótese e na qualidade das justificações elaboradas, além do desenvolvimento de habilidades matemáticas como comparação, observações, indução, dedução, analogia, estimativa e utilização dos conceitos e procedimentos matemáticos já conhecidos.

Houve um grande índice de itens não respondidos, principalmente na última questão. Creditamos este fato ao tempo destinado para a realização do teste, que para muitos alunos não foi suficiente.

O percentual de respostas incorretas nos testes individuais, no entanto, faz refletir quanto ao processo de aprendizagem com relação à compreensão de algumas noções e propriedades aritméticas que não foram estruturadas por alguns alunos. Dizemos isto baseados nos tipos de erros cometidos em grande parte das questões da avaliação e em atividades realizadas no decorrer desta prática – erros, na maioria, decorrentes de multiplicações numéricas incorretas ou da utilização equivocada da regra de sinais em operações com números positivos e negativos.

Acreditamos que deveríamos ter revisado tais propriedades e operações com valores numéricos antes do trabalho com expressões algébricas e, se fosse o caso, ter proporcionado aos alunos atividades que possibilitassem aos mesmos uma reconstrução destes conhecimentos. Uma vez que já sabíamos, pelos apontamentos de Booth (2003) que

> [...] a álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a aritmética generalizada. E nisso está a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro, que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado. Neste caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra, não são tanto de álgebra propriamente dita, mas, de problemas em aritmética que não foram corrigidos (p. 32-33).

Convém ressaltar, no entanto, que acreditamos que nem o desenvolvimento e a construção do pensamento aritmético nem o desenvolvimento e a construção do pensamento algébrico ocorrem num prazo curto de tempo ou apenas por uma intervenção pedagógica. Entretanto, um trabalho inicial efetivo – de revisão – com as operações aritméticas e o uso dos sinais poderia ter auxiliado na construção de concepções corretas a esse respeito, contribuindo para um melhor desempenho desses alunos em álgebra.

Entretanto, muitos outros aspectos foram observados durante o desenvolvimento deste trabalho, os quais não haviam sido previstos como objetivos deste estudo mas que também são merecedores de destaque. Alguns desses aspectos observados são: o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem, na formulação de hipóteses e nas argumentações; a qualidade das discussões realizadas nas aulas; o processo de produção de significados para as operações entre expressões algébricas e conseqüentemente de conhecimento; a cooperatividade entre os alunos e a possibilidade de todos exporem seus "pensamentos algébricos" sem a preocupação com a correção e precisão dos mesmos, o que proporcionou um crescimento da auto-estima dos alunos por serem valorizados pelos colegas devido às suas contribuições.

Para tanto, o envolvimento de quase todos alunos no processo foi um fator decisivo.

Tal envolvimento só não foi total devido a dois alunos, um que raramente envolvia-se com as atividades das aulas – seu envolvimento restringiu-se a uma aula na qual solicitou explicações à professora – e outro que se envolvia parcialmente nas tarefas, realizando algumas e apenas copiando outras. Temos consciência de que seria utópico acreditar que a metodologia utilizada iria atingir de forma igual a todos os alunos. De acordo com as idéias de Krutetskii (1976 apud CAZORLA 2004), a prontidão ou a capacidade de realizar com sucesso uma atividade ou tarefa depende da habilidade do indivíduo, que é uma condição necessária, porém não suficiente. Para que haja sucesso na aprendizagem são ainda necessárias outras condições psicológicas, tais como a atitude frente à atividade, os traços de personalidade, bem como os conhecimentos, destrezas e hábitos do aprendiz, sendo que estes três últimos, segundo o autor, são adquiridos, enquanto que as habilidades são desenvolvidas. Pensamos que a intervenção escolhida por nós não tenha sido a mais adequada para esses dois alunos que não se envolveram com a proposta.

Apesar de não termos atingido a todos os alunos e não termos evidenciado um alto percentual de acertos em todas as questões dos testes individuais, ressaltamos que as habilidades desenvolvidas durante as aulas e a produção de significado para as operações com expressões algébricas e suas propriedades, enfoque de nossa pesquisa, foram muito significativas, o que nos permite afirmar que nossos objetivos – quanto ao desenvolvimento de um ensino que promova a produção de significados para os procedimentos algébricos no Ensino Fundamental – foram atingidos.

## CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, visando a compreensão das operações entre expressões algébricas e suas propriedades.

Retomando os estudos preliminares, constatamos que os problemas relativos ao ensino e aprendizagem da álgebra estão relacionados com a forma como é concebida, abordada e apresentada, isto é, com o modo como se ensina e como os alunos a compreendem, envolvendo os aspectos de abstração, de significação e de contexto. Relacionadas a estes aspectos, levantamos a principal questão e as hipóteses da pesquisa. Como questão de pesquisa, tínhamos: é possível desenvolver um ensino que promova a produção de significados para os procedimentos algébricos no Ensino Fundamental?

Por meio dessa questão, procuramos averiguar a hipótese de que isso é possível através de um trabalho que procurasse promover a produção de significado para a atividade algébrica, centrado na resolução de problemas e numa aprendizagem cooperativa, fazendo uso de material manipulativo.

Analisando o desenvolvimento dos alunos durante a aplicação da proposta didática e os resultados apresentados, avaliamos que a metodologia adotada contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento de seu pensamento algébrico.

Percebemos que nas primeiras atividades os alunos tiveram muitas dificuldades para escrever as respostas e justificativas por eles encontradas sem antes perguntar à professora se estavam corretas ou não. Com o transcorrer das aulas, notamos na maioria dos alunos o desenvolvimento de autonomia, pois procuravam escrever e discutir com os colegas do grupo os resultados encontrados, sem ficar esperando pela professora.

Notamos que o desenvolvimento dessa autonomia foi favorecido pelo tipo de atividades propostas e pela forma como estas foram conduzidas, instigando ao levantamento de conjecturas e justificações para as soluções encontradas pelos alunos (nos pequenos e no grande grupo).

Consideramos que os alunos avançaram no processo de produção de significados para as operações entre expressões algébricas e que houve progresso no conhecimento matemático, bem como em suas atitudes e autonomia no sentido de observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar suas respostas.

Além disso, a cooperatividade e a possibilidade de todos exporem seus pensamentos algébricos sem a preocupação com sua correção e precisão favoreceram a auto-estima dos alunos. Pudemos observar tais benefícios através da sua participação. No início do trabalho, essa participação era cerceada pela preocupação com a correção do que estavam expondo. Com o passar das aulas, vimos que o "medo de errar" não estava tão presente, na verdade se observava no modo como eles agiam que o mais importante era contribuir com suas idéias para que houvesse uma melhor compreensão do assunto estudado; o aluno ou aluna que "já havia compreendido" fazia questão de explicar para os demais colegas, justificando suas conjecturas verbalmente ou através do material manipulativo.

Lembramos que uma de nossas questões levantadas no primeiro capítulo era: materiais manipulativos podem auxiliar na compreensão de conceitos algébricos?

De fato, o uso do material manipulativo mostrou-se bastante favorável à compreensão dos conceitos algébricos trabalhados, da maneira como foi pensada a sua utilização – como um auxiliar na confirmação das hipóteses elaboradas pelos alunos – sendo considerado pelos alunos como uma das formas de representação para expressões algébricas (associada ao cálculo de áreas). Isso ficou muito evidente nas argumentações utilizadas para convencer os colegas sobre as respostas das situações problemas.

Entretanto, cabe ao professor cuidar para que as discussões sobre a legitimidade ou não das operações não se encerrem com a justificativa dada pelo uso do material manipulativo, mas pelos significados e conhecimentos que vão sendo produzidos e internalizados[44] propiciando a compreensão e a generalização do uso das propriedades envolvidas nas operações entre expressões algébricas, inclusive na sua representação simbólica e sem a dependência do material manipulativo.

Observamos no decorrer das aulas que as representações com o uso do material manipulativo iam sendo substituídos por representações mentais e, posteriormente, por representações em escrita algébrica simbólica. Segundo Vygostsky (1984; 1991), representações mentais são identificadas como relações de generalidade. Neste caso, essas representações estariam baseadas na associação da área com as expressões numéricas e algébricas**.** De acordo com esse mesmo autor, tais representações são necessárias no processo de internalização.

As falas e produções escritas dos alunos, ao longo das tarefas, indicaram que os significados atribuídos às letras e às operações com expressões algébricas através da representação pelo material manipulativo eram gradualmente internalizados, permitindo a produção de novos significados para a utilização das letras e operações com expressões algébricas e suas propriedades.

Nessa produção de significados, em contextos algébricos, reconhecemos a grande contribuição da primeira etapa deste trabalho envolvendo os diferentes usos da letra (como incógnita, como generalização, como variável funcional). Essa etapa foi fundamental para o trabalho posterior com as operações entre expressões algébricas e suas propriedades, onde a letra não mais representava um valor incógnito ou variável, mas passava a ser utilizada como

[44] As palavras internalizado e internalização estão sendo usadas aqui com o mesmo sentido atribuído por Vygotsky (1984; 1991). Segundo ele, no desenvolvimento de cada indivíduo, ocorrem duas mudanças qualitativas: o processo de internalização e o desenvolvimento de sistemas simbólicos. Ambos são essenciais para o desenvolvimento dos processos mentais superiores e mostram a importância das relações sociais entre os indivíduos na construção dos processos psicológicos. Vygotsky afirma que os signos, na sua forma mais elementar, podem aparecer como marcas externas favorecendo um suporte concreto para a ação do homem no mundo. Ao longo do processo de desenvolvimento, o indivíduo deixa de necessitar de marcas externas e passa a utilizar signos internos, ou seja, os objetos do mundo real são substituídos por representações mentais. Isso é o que ele considera um processo de internalização. O processo de internalização seria um mecanismo que transforma marcas externas em processos internos de mediação.

um *símbolo* para representação de uma entidade numérica – com o qual poderiam operar sem recorrer a substituições por valores numéricos. Nessas operações, necessariamente faziam uso de propriedades tais como a comutatividade e a distributividade da multiplicação em relação à soma.

Quanto às diferentes representações utilizadas para operações com expressões algébricas (como o uso do material, uso do algoritmo, uso da propriedade distributiva – no caso da multiplicação), pudemos observar que a maioria dos alunos não apresentou dificuldades persistentes na compreensão e aplicação dessas diferentes representações e na percepção de que cada uma tinha um significado diferente. Faziam a conversão do registro figural (material manipulativo) para o registro simbólico, e utilizavam contextos diferentes para simbolizar uma situação, isto é, utilizavam os conceitos de área, sugeridos pelo material manipulativo, para resolver atividades com linguagem estritamente simbólicas.

No transcorrer das tarefas percebemos uma crescente familiaridade dos alunos com os elementos e processos utilizados na obtenção de expressões equivalentes – uso do material e o uso do algoritmo – em expressões numéricas e algébricas.

Ressaltamos que, num momento inicial, alguns alunos apresentaram uma significação diferente da esperada para a utilização do material manipulativo na representação da operação de multiplicação entre expressões algébricas. Inicialmente a significação era a de um “jogo” onde era necessário “encaixar” as peças para formar o retângulo e só depois a significação passou a estar associada a expressões algébricas equivalentes, onde o produto das expressões seria dado pela soma das áreas das figuras que compunham o retângulo.

Com relação a possíveis questionamentos quanto à validade de um investimento no uso de um material que possui regras para sua utilização, acreditamos que os alunos da Escola Básica, mesmo tendo um pensamento genérico relativamente desenvolvido, em muitos momentos necessitam de materiais manipuláveis para confirmarem suas hipóteses ou para convencerem seu colega de que sua hipótese está correta.

Pensamos que a utilização de determinadas propriedades nas operações com números não envolve, necessariamente, a compreensão dessas propriedades nem da generalização desses conceitos. Além disso, a experiência de operações com expressões numéricas não é suficiente para a construção das estratégias necessárias nas operações com expressões algébricas. A álgebra generaliza relações entre números, estabelecidas no domínio da aritmética, porém a álgebra não pode ser vista apenas como uma aritmética generalizada. Por exemplo, é possível, em aritmética, resolver (2 + 6) . (3 + 5), somando-se 2 com 6 e 3 com 5 e após multiplicar os resultados. Entretanto, em situações algébricas como (w + z) . $(x + y)$ a mesma idéia não seria aplicável pois não seria possível somar a mesma idéia não seria aplicável pois não seria possível expressar cada uma das somas através de um único termo.

Acreditamos que o uso do material tenha uma contribuição importante para a produção de significados e até mesmo para a compreensão de algumas regras e propriedades utilizadas nas operações com expressões algébricas, tais como: a necessidade de que os termos sejam semelhantes para a realização de adições ou subtrações entre eles, a propriedade distributiva da multiplicação, a idéia de que a fatoração pode ser obtida realizando o caminho inverso do realizado na multiplicação.

Verificamos, em algumas situações, que a trajetória percorrida por nossos alunos em busca da significação para as operações entre expressões algébricas não ocorreu, necessariamente, de forma linear. Podemos citar como exemplo a situação relatada no quarto capítulo, na seção 4.3.11, em que o grupo iniciou a tarefa buscando resolvê-la com o uso do algoritmo mas, no surgimento de alguma dificuldade para escrever a expressão algébrica equivalente, voltou a manipular o material na tentativa de encontrar ou verificar o resultado.

Este trabalho mostrou-se especialmente importante por ter sido realizado em uma escola pública, de periferia, onde os alunos e seus pais não têm familiaridade com ambientes acadêmicos nem acesso a muitos recursos que outras crianças, de outros meios sociais e culturais, têm. Comprovamos que, mesmo sendo provenientes de um ambiente cultural onde a álgebra não está explicitamente presente, esses alunos aprendem álgebra, são capazes de formular conjecturas buscando justificá-las, aprimoram sua linguagem matemática, produzem significados para as atividades algébricas, compreendem operações e propriedades, desenvolvendo seu pensamento algébrico e suas habilidades matemáticas.

Tecemos algumas críticas com relação a algumas atividades propostas no trabalho.

A primeira delas refere-se à situação-problema 1 da segunda etapa, onde são envolvidas incógnitas que representam *comprimentos* e as regras para a utilização do material foram estabelecidas em cima do conceito de *área*. Consideramos que isso talvez tenha se tornado um complicador, pois os alunos ainda estavam se adaptando às regras para o uso do material manipulativo envolvendo área e tiveram que estabelecer relações para resolver um problema envolvendo comprimentos. Acreditamos que, para esta etapa, seria mais apropriado colocar, como primeira situação-problema, uma situação que envolvesse incógnitas associadas a áreas.

Em algumas situações-problema da segunda etapa procuramos explorar condições para existência das áreas e comprimentos propostos, além das limitações para as situações apresentadas. Uma dessas condições exploradas foi a possibilidade das variáveis não poderem assumir valores negativos uma vez que os contextos eram de medidas de comprimento ou de área. Porém, em alguns casos, poderíamos ter aproveitado melhor as discussões e levantado outras questões sobre as limitações para esses valores – por exemplo, na situação-problema 6, poderíamos ter explorado melhor as limitações da casa a ser construída, que no caso eram as dimensões do terreno.

Na situação-problema 9 da segunda etapa – onde optamos por utilizar a largura maior que o comprimento da casa, diferentemente do usual – a interpretação do enunciado foi objeto de discussão entre os alunos. Apesar da discussão ter sido produtiva, avaliamos que o enunciado proporcionou dúvida entre os alunos quanto às justificações, uma vez que os resultados foram completamente diferentes enquanto as justificações estavam coerentes.

Vale salientar que, em nosso papel de professor, nossos questionamentos foram importantes em todas as fases do desenvolvimento desse trabalho mas, nos momentos de socialização com toda a turma das respostas obtidas por cada grupo, foram essenciais. Principalmente no momento em que o aluno escrevia e justificava suas hipóteses em linguagem natural e depois tentava descrevê-las na linguagem algébrica simbólica; aos poucos, nossos questionamentos iam contribuindo para que os alunos fossem se desprendendo da linguagem natural e escrevendo suas conclusões por meio da linguagem algébrica simbólica.

Essas confirmações nos levam a responder um outro questionamento apresentado: que preocupações devemos ter, enquanto educadores, com a abordagem das operações com expressões algébricas e suas propriedades no Ensino Fundamental, de forma a promover a compreensão das operações realizadas e não apenas manipulação simbólica ?

Nossa experiência com essa pesquisa indica que são importantes algumas preocupações por parte do professor ao propor uma abordagem pedagógica com esses propósitos:

◆ primar pelo engajamento do aluno em atividades que inter-relacionem diferentes aspectos da álgebra associadas à resolução de problemas e não somente manipulações mecânicas de expressões algébricas;

◆ propor situações em que o aluno possa investigar, conjecturar e elaborar justificações, tanto em contextos numéricos e algébricos, como em representações geométricas, identificando suas estruturas para que possa descrevê-los simbolicamente;

◆ encaminhar as atividades por meio de questionamentos que ajudem o aluno ou o grupo a perceber caminhos que o levem à resolução do problema tendo o cuidado de não expor ao aluno como cada situação pode ser resolvida ou o resultado esperado da atividade;

- proporcionar aos alunos momentos – orais e escritos – em que os mesmos possam apresentar as diferentes respostas encontradas, para que possam ser discutidas e corrigidas por toda a classe;
- realizar uma revisão das operações com números;
- ter alguns cuidados quanto à utilização do material manipulativo.

Acreditamos, com base na experiência realizada, que antes da implementação da segunda fase da proposta, é oportuno que seja aplicado um teste diagnóstico ou realizada uma revisão das operações com números, em especial quanto ao uso dos sinais, pois a compreensão da utilização do sinal de menos na adição e multiplicação é importante no momento das comparações das respostas e justificações dadas pelos alunos para as respostas obtidas. Também sugerimos que sejam retomados os conceitos de área, uma vez que o uso do material manipulativo baseia-se nesses conceitos.

Pensamos que o material manipulativo trará melhores resultados se usado como *um* objeto que possa ser manipulado com a finalidade de promover compreensão ou auxiliar na resolução das atividades propostas e não como *único* objeto com esta finalidade. Salientamos, no entanto, que alguns cuidados precisam ser considerados pelo professor que pretende utilizar, em suas aulas, o material manipulativo apresentado nesse trabalho. Como apresentamos no capítulo 3, as regras estabelecidas para o uso do material na representação de multiplicações entre expressões algébricas parte do conhecimento de que a área do retângulo pode ser obtida através da multiplicação de suas dimensões, ficando convencionado que, com o material, a área do retângulo cujo comprimento é um dos termos da multiplicação e cuja largura é o outro termo seria obtida através da soma das áreas das figuras que compõem tal retângulo. Sugerimos o uso das próprias peças do material para delimitar as dimensões do retângulo. Entretanto, deve ficar claro para o aluno que o que está sendo considerado na delimitação é o comprimento (medida do lado) da peça utilizada e não sua área, para evitar que o mesmo fique com a idéia de que estamos obtendo área como resultado da multiplicação de áreas.

Esta proposta foi planejada para ser implementada numa turma do segundo ano do terceiro ciclo (equivalente à 7ª série) do Ensino Fundamental da Escola Municipal Wenceslau Fontoura, no município de Porto Alegre. Foram considerados: nossa experiência docente no Ensino Fundamental, os pressupostos teóricos apresentados no segundo capítulo desta dissertação e as propostas pedagógicas para a rede municipal de ensino, bem como os recursos disponíveis, as aprendizagens anteriores e as características da turma selecionada. Entretanto, consideramos que a mesma seqüência de atividades poderá ser implementada em turmas do Ensino Fundamental de outras escolas, observando-se as sugestões apresentadas acima e realizando-se as adaptações que se fizerem necessárias, tais como adequação dos enunciados das atividades para a realidade dos alunos, o acréscimo de atividades, redução ou ampliação do tempo de implementação, dentre outras.

Consideramos importante mencionar, ainda, algumas implicações da realização deste trabalho em nosso desenvolvimento profissional. A expressão “desenvolvimento profissional” é aqui empregada conforme Ponte (1995), no sentido de que a capacitação do professor para o exercício da sua atividade profissional é um processo que envolve múltiplas etapas e que, em última análise, está sempre incompleto.

Primeiro, gostaríamos de ressaltar que a possibilidade de assumir iniciativas, desenvolver projetos, avaliar nosso trabalho, ligar a prática com a teoria, trata-se de uma experiência que envolve novas aprendizagens e novas práticas profissionais mas, sobretudo, uma nova atitude profissional: a de nos assumirmos como principais protagonistas do nosso processo de formação e desenvolvimento profissional.

Acreditamos que a investigação, a curiosidade, o pensamento organizado aliados à vontade de resolver os problemas são ingredientes essenciais para o progresso em qualquer domínio da atividade humana. Nossa experiência nos coloca em condições de perceber a importância da pesquisa no desenvolvimento profissional do professor: ao nos propormos a realizar uma prática diferenciada da que vínhamos efetuando e que pudesse trazer contribuições para outros professores, buscamos leituras de embasamento teórico para nossas inquietações referentes à abordagem de conteúdos algébricos. Além disso, através das análises das respostas dadas pelos alunos – orais e escritas – pudemos perceber o quanto eles têm a nos informar, ao formularem hipóteses, ao argumentarem as respostas, ao interagirem ou ao demonstrarem pelas suas verbalizações ou estratégias que estão compreendendo e produzindo conhecimento algébrico. Considero de fundamental importância todo o processo deste trabalho para o meu desenvolvimento profissional.

Gostaríamos de salientar, ainda, que encarar a formação profissional como um processo marcado pela atividade investigativa é uma responsabilidade fundamental de cada professor, mas também das instituições onde realizou ou realiza sua formação e das instituições onde atua profissionalmente.

Finalmente, afirmamos que desenvolver este trabalho nos trouxe satisfação como educadores. Os estudos que desenvolvemos, em todo o processo de elaboração e implementação da pesquisa, nos levaram a concluir que podemos ser também pesquisadores, e contribuir não só para o progresso de nossa atuação em sala de aula, mas também fornecer alguns subsídios que possam contribuir para a melhoria do ensino de tópicos da matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

AMARO, Vera; SIEBIGER, Paulo (Orgs.).**Cartilha princípios da escola cidadã**. Porto Alegre : SMED/POA, 1996.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. Sétima série. São Paulo: FDT, 2000.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003, p. 23-37.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino fundamental.** Documento introdutório: versão preliminar. Brasília : MEC, 1995.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª série), Matemática.** Brasília: MEC / SEF, 1998.

______. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais, Ensino Médio.** Brasília: MEC / SEF, 2000.

BÚRIGO, Elisabete Z. A introdução do movimento da matemática moderna em São Paulo. In: Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. Dissertação (Mestrado). Porto Alegre: UFRGS, 1989.

CAZORLA, I.M., **Habilidades matemáticas segundo Krutetskii**. Disponível em <http://www.uesc.br/arbelos/arquivo/sm/2002/cm.07.html>,acessado em janeiro de 2007.

CASTRO, Monica Rabello de. **Educação algébrica e resolução de problemas.** Boletim : Salto para o futuro/TV Escola, 05/05 a 09/05 de 2003. Disponível em <www.tvebrasil.com.br/salto>, acessado em dezembro de 2006.

CHALOUH, Louise; KIERAN, Carolyn. **Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra.** Research Ideas for the classroom midde grades Mathematics. Kluwer Academic, 1996.

CHERVEL, André. **História das disciplinas escolares: as reflexões sobre um campo de pesquisa**. Teoria&Educação, Porto Alegre, n.2, 1990. p. 177-229.
DANTE, Luiz Roberto. **Matemática é tudo**. Oitava série, Ensino Fundamental. São Paulo:Ática, 2002.

ECKHARDT, Carmen Avani; SANTOS, Cleuza Iara Campello dos. **A matemática nas escolas por ciclos de formação:uma reflexão histórica do processo**. Educação Matemática em revista-RS, SBEM/RS, ano VI, n.6, 2004. p. 67-79.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática pensar e descobrir: o + novo**. Sétima série. São Paulo: FDT, 2002.

GOLDENBERG, M. **– A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais.3.ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

ISOLANI, Clélia Maria Martins; et al. **Matemática e interação**. Sétima série, Ensino Fundamental.Curitiba: Módulo,1999.

KÜCHEMANN, Dietmar.E. Álgebra. In: Hart, K.M. (ed). John Murray .**Children's Understanding of Mathematics: 11 – 16**. London: John Murray, 1981, p. 102-119.

LARA, Isabel.C.M de; **Jogando com a matemática de 5ª a 8ª série.** São Paulo: Rêspel, 2003.

LINS, Rômulo Campos. **Álgebra.** Revista Nova Escola. Ed. 166, outubro de 2003. Disponível em: <http://novaescola.abril.com.br/index.htm?ed/166_out03/html/algebra>, acessado em 10 de setembro de 2006.

______. **O modelo teórico dos campos semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico**. Rev. Dynamis, v.1 nº.7, 1994a, p. 29-39.

______. **Álgebra e pensamento algébrico na sala de aula.** Educação Matemática em revista, SBEM/RS, ano II, n.2, 1994b, p. 26-31.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação:abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MEIRA, Luciano. **Significados e modelagem na atividade algébrica**. In: Educação algébrica e resolução de problemas. Boletim: Salto para o futuro/TV Escola, 05/05 a 09/05 de 2003. Disponível em <www.tvebrasil.com.br/salto>, acessado em agosto de 2006.

MÜLLER, Iraci. **Tendências atuais de Educação Matemática**. Unopar Cient., Ciênc. Hum. Educ. Londrina, v. 1, n. 1, 2000, p. 133-144.

NEVES, Paulo S. de O. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da Álgebra.** Dissertação (Mestrado).São Paulo: Faculdade de Educação, USP, 1995.

PRATES, Ellen Marques de Oliveira Rocha; **O dialogo investigativo e a aprendizagem significativa** . Dissertação (mestrado), Campinas: FE/ UNICAMP, 2004.

PICCIOTTO, Henri. **Algebra Manipulatives**: Comparison and History . Disponível em <http://www.picciotto.org/math-ed/manipulatives/alg-manip.html>, acessado em janeiro de 2006.

PICCIOTTO, Henri ; WAH, Anita. **A New Algebra: Tools, Themes, Concepts.** Journal of Mathematical Behavior, v.12, nº1, Março 1993. Disponível em: <http://www.picciotto.org/math-ed/new-algebra/new-algebra.html>, acessado em outubro de 2006.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PONTE, João Pedro da. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: Ponte, J. P.; Monteiro, C.; Maia, M.; Serrazina, L.; Loureiro C. (Eds.). **Desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Que formação?** Lisboa: SPCE, 1995.

RIBEIRO, Alessandro J.; **Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 2001.

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE PORTO ALEGRE (SMED). Escola Cidadã: Cadernos pedagógicos nº 9. Porto Alegre, SMED/POA, 1996.

SOCAS, Martín M**. Iniciación al álgebra**. — Madrid : Síntesis, 1996 .

TRIGUEROS, María; URSINI, Sonia. Integración de los distintos usos de la variable.In: V CIBEM - Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 2005, Porto. **Actas V CIBEM**. 2005. 1 CD-ROM.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003, p. 9-22.

VERGNAUD, Gérard. **Multiplicative conceptual field: what and why**? In Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994, p. 41-59.

**______. Multiplicative structures**. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc., 1983, p.127-174.

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

______. **The collected works of L. S. Vygotsky**, vol.1, Problems of general psychology incluindo Thinking and speech. RIEBER, R & CARTON, A (org). trad. N. Nimick. New York: Plenim Press, 1987.

VYGOTSKY, Lev S.; LEONTIEV, Alexis; LURIA, Alexandre R. **Psicologia e pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento**. São Paulo: Moraes, 1991.

WHEELER, David. Backwards and Forwards: Reflections on different approaches to Algebra. In: BERDNARZ, Nadine; KIERAN, Carolyn; LEE, Lesley. **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching.** Ed. Kluwer Academic: Dordrecht, Holanda, 1996, p. 317–325.

# ANEXOS

## ANEXO A: Informações sobre gênero e idade dos alunos

INFORMAÇÕES SOBRE GÊNERO E IDADE DOS ALUNOS

| **Aluno** | **Sexo** | **Idade** |
|---|---|---|
| Aluno A | Masculino | 15 anos |
| Aluno B | Masculino | 14 anos |
| Aluno C | Masculino | 15 anos |
| Aluna D | Feminino | 14 anos |
| Aluna E | Feminino | 13 anos |
| Aluna F | Feminino | 14 anos |
| Aluno G | Masculino | 14 anos |
| Aluno H | Masculino | 16 anos |
| Aluna I | Feminino | 14 anos |
| Aluna J | Feminino | 14 anos |
| Aluno L | Masculino | 15 anos |
| Aluno M | Masculino | 13 anos |
| Aluno N | Masculino | 16 anos |
| Aluno O | Masculino | 15 anos |
| Aluna P | Feminino | 14 anos |
| Aluno Q | Masculino | 15 anos |
| Aluna R | Feminino | 15 anos |
| Aluna S | Feminino | 14 anos |

## ANEXO B: Proposta de trabalho – fase 1

**PROPOSTA DE TRABALHO – FASE 1**

**Diferentes usos da variável**

### AULA 1

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) evidencie os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

4) perceba o uso da variável como uma incógnita, cujo valor pode ser descoberto.

**Procedimentos**

1º momento:

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- A cada grupo será oferecida uma situação-problema diferente da situação-problema dos outros grupos.

Para resolver as situações-problema, o grupo deverá levar em conta algumas etapas:

- discutir estratégias para a resolução;
- encontrar uma solução para o problema;
- testar essa solução;
- escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

- Ao término da resolução da primeira situação-problema o grupo receberá uma outra, de modo que todos os grupos tenham a oportunidade de resolver todas as situações propostas.

- Após todos os grupos resolverem todas as situações, será feita uma discussão em grande grupo relacionando os conceitos e aprendizagens ocorridas com a resolução das atividades propostas.

*Atividades propostas aos grupos*

| |
|---|
| Situação-problema 1:<br><br>Caio recebeu seu salário do mês. Seu patrão lhe deu 24 notas, algumas são de R$ 50,00 outras de R$ 5,00 totalizando o valor de seu salário que é de R$ 525,00. Quantas notas de R$ 50,00 e quantas notas de R$ 5,00 Caio recebeu de seu patrão?<br><br>a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:<br><br>b) Como essa situação poderia ser representada? |
| Situação-problema 2:<br><br>A soma de dois números consecutivos é 95. Que números são estes?<br><br>a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:<br><br>b) Como podemos representar a soma de quaisquer dois números consecutivos? |
| Situação-problema 3:<br><br>Achar três números pares consecutivos cuja a soma seja 57.<br><br>a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:<br><br>b) Como podemos representar a soma de quaisquer três números pares consecutivos? |
| Situação-problema 4:<br><br>Pensei em um número e multipliquei-o por 13. Em seguida dividi o resultado obtido por 25. A resposta final foi 65. Que número eu havia pensado?<br><br>a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:<br><br>b) Como podemos representar os cálculos efetuados? |

## AULA 2

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) evidencie os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

4) perceba o uso da variável como uma incógnita, cujo valor pode ser descoberto;

5) busque formas de representar as situações utilizando linguagem matemática (simbólica);

6) Observe que as questões podem ser solucionadas por tentativas, desfazendo operações ou pela propriedade da igualdade de dois termos.

**Procedimentos**

1º momento:

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- A cada grupo será oferecida uma situação-problema diferente da situação-problema dos outros grupos.

Para resolver as situações-problema, o grupo deverá levar em conta algumas etapas:

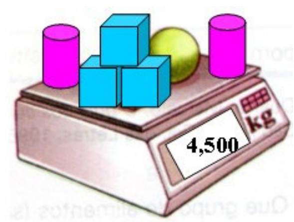
- discutir estratégias para a resolução;
- encontrar uma solução para o problema;
- testar essa solução;
- escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

- Ao término da resolução da primeira situação-problema o grupo receberá uma outra, de modo que todos os grupos tenham a oportunidade de resolver todas as situações propostas.
- Após todos os grupos resolverem todas as situações, será feita uma discussão em grande grupo relacionando os conceitos e aprendizagens ocorridas com a resolução das atividades propostas.

*Atividades propostas aos grupos*

<u>Situação-problema 5</u>:

Observe a balança abaixo. Se cada cubo pesa 0,750 quilogramas e a bola pesa 0,630 quilogramas. Qual é o peso de cada cilindro?

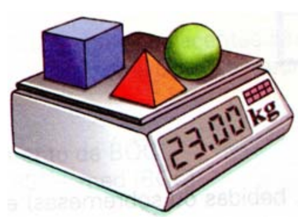



a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:

b) Descreva uma forma de representar o peso de cada cilindro se soubermos o peso de cada cubo e da bola:

<u>Situação-problema 6</u>:

Observe a balança abaixo. Se o cubo pesa 12 quilogramas e a bola pesa 4 quilogramas. Qual é o peso da pirâmide?



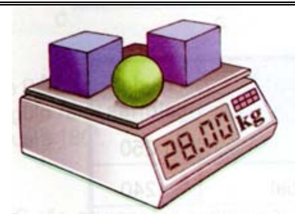

a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:

b) Descreva uma forma de representar o peso da pirâmide se soubermos o peso do cubo e da bola:

(Obs.: Figura extraída de:GIOVANNI,José Ruy. **Matemática pensar e descobrir: o + novo**. Sexta série.São Paulo: FDT,2002, p. 187).

<u>Situação-problema 7</u>:

Observe a balança abaixo. Se a bola pesa 4 quilogramas. Qual é o peso de cada cubo?



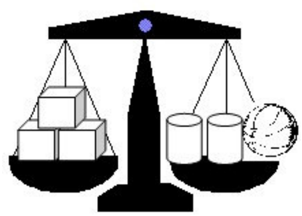

a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:

b) Descreva uma forma de representar o peso do cubo se soubermos o peso da bola:

(Obs.: Figura extraída de:GIOVANNI,José Ruy. **Matemática pensar e descobrir: o + novo**. Sexta série.São Paulo: FDT,2002, p. 187)

Situação-problema 8:

A balança da figura está equilibrada. Cada cubo pesa 750 gramas e a bola pesa 630 gramas. Qual é o peso de cada cilindro?



a) Explique como seu grupo resolveu esse problema:

b) Descreva uma forma de representar o peso de cada cilindro se soubermos o peso de cada cubo e da bola:

## AULA 3

### Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) evidencie os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

4) perceba o uso da variável como uma generalização;

5) busque formas de representar as situações utilizando linguagem matemática (simbólica);

6) perceba generalidades a partir de seqüências de figuras;

7) consiga traduzir e generalizar a situação proposta.

### Procedimentos

<u>1º momento:</u>

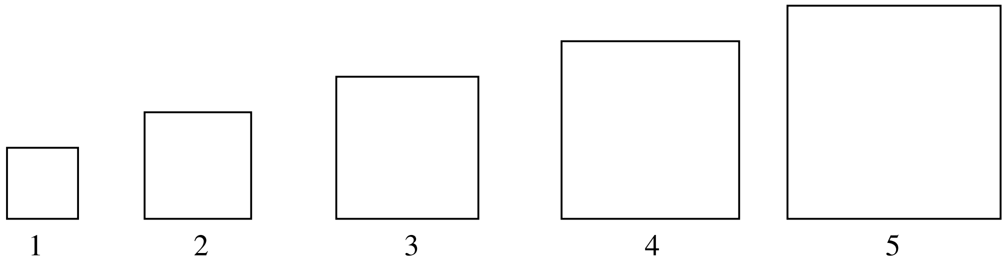
- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- Será apresentado, aos grupos de alunos, uma situação-problema que está descrita abaixo.

Para resolvê-la, o grupo deverá considerar algumas etapas:

- discutir estratégias para a resolução;
- encontrar uma solução para o problema;
- testar essa solução ;
- escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

<u>Situação-problema 9</u>:

Observe a seqüência de quadrados, cujas medidas estão numa mesma unidade:




a) Qual a medida do lado dos próximos dois quadrados dessa seqüência?

b) Complete a tabela abaixo:

| Medida do lado do quadrado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área do quadrado | | | | | | | |

c) Qual seria a área de um quadrado se seu lado medisse 10 unidades de medida?

d) E se o lado medisse 50 unidades de medida?

e) Observando os números da tabela descubra uma regra para calcular a área do quadrado se souber a medida do seu lado:

f) É possível um quadrado com 64 unidades de área? Justifique sua resposta:

g) E com 144 unidades de área?

h) É possível um quadrado com 105 unidades de área? Justifique sua resposta:

i) É possível saber a medida do lado do quadrado sabendo sua área? Explique como:

<u>2º momento:</u>

- Após todos os grupos solucionarem a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.

## AULA 4

### Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) evidencie os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

4) perceba o uso da variável como uma generalização;

5) perceba generalidades a partir de seqüências de figuras;

6) consiga traduzir e generalizar a situação proposta, observando que há uma mudança de quadros, do geométrico para o aritmético e deste para o algébrico;

7) busque formas de representar as situações utilizando linguagem matemática (simbólica).

### Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- Será apresentado, aos grupos de alunos, uma situação-problema que está descrita abaixo.

Para resolvê-la, o grupo deverá considerar algumas etapas:

− discutir estratégias para a resolução;

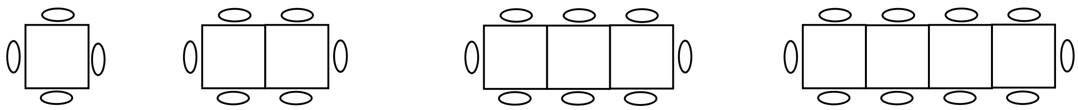
− encontrar uma solução para o problema;

− testar essa solução ;

− escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

<u>Situação-problema 10</u>:

Ao organizar uma festa de 15 anos, houve uma discussão sobre como organizar as mesas para acomodar os convidados. As mesas eram quadradas e foram testadas algumas maneiras de colocá-las. As figuras abaixo representam a vista superior da disposição de cadeiras em volta de mesas:



a) Como seria a disposição das cadeiras se tivéssemos 5 mesas enfileiradas? Desenhe:

b) Supondo que a organização das mesas continuassem sendo enfileiradas, conforme as acima, complete a tabela:

| Quantidade de mesas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade de cadeiras | | | | | | | | | |

c) Descreva uma forma de obter o número de cadeiras a serem colocadas em volta das mesas se soubermos a quantidade de mesas que estarão dispostas como o sugerido acima?

d) Quantas cadeiras seriam necessárias se fossem colocadas 15 mesas enfileiradas?

e) Existirá um número máximo de mesas que poderão ser enfileiradas? Justifique?

f) Quantas mesas seriam necessárias enfileira para acomodar 42 cadeiras?

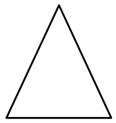
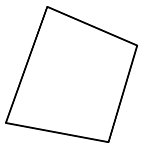
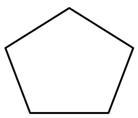
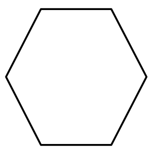
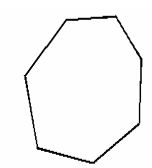
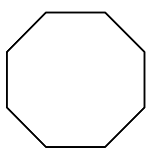
g) Qual a menor quantidade de mesas dispostas em uma única fila seriam necessárias para acomodar 318 cadeiras?

h) É possível saber a quantidade de mesas que devem ser enfileiradas se soubermos a quantidade de cadeiras que estarão dispostas? Explique como:

(Obs.: Adaptação de atividade contida em: ISOLANI, Clélia Maria Martins; et al. **Matemática e interação**. Sétima série, Ensino Fundamental.Curitiba: Módulo,1999, p. 68)

Situação-problema 11:

Para determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer, podemos decompor os polígonos em triângulos, pois sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Complete a tabela abaixo:

| POLÍGONO | NOME | Nº DE LADOS | Nº DE TRIÂNGULOS QUE SÃO FORMADOS | SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS INTERNOS |
|---|---|---|---|---|
|  | triângulo | | | |
|  | quadrilátero | | | |
|  | pentágono | | | |
|  | hexágono | | | |
|  | heptágono | | | |
|  | octógono | | | |

a) Em quantos triângulos podemos decompor um polígono com 10 lados?

b) E se um polígono tiver 15 lados?

c) Descreva uma maneira de saber em quantos triângulos podemos decompor um polígono se soubermos a quantidade de lados deste polígono:

d) É possível saber o número de lados do polígono se soubermos o número de triângulos que se formam? Explique:

e) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 10 lados?

f) E de um polígono de 12 lados?

g) Descreva uma maneira de saber a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono se soubermos a quantidade de lados que ele possui:

h) É possível termos um polígono cuja soma de seus ângulos internos seja de 600º? Explique:

i) É possível saber o número de lados do polígono se soubermos a soma dos ângulos internos do polígono? Explique:

(Obs.: Adaptação de atividade contida em: ISOLANI, Clélia Maria Martins; et al. **Matemática e interação**. Sétima série, Ensino Fundamental.Curitiba: Módulo,1999, p. 131)

2º momento:

- Após todos os grupos solucionarem cada situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.

## AULA 5

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para a resolução do problema proposto;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar a tarefa proposta;

3) evidencie os procedimentos utilizados na solução da situação proposta;

4) perceba generalidades a partir de seqüências de figuras;

5) consiga traduzir e generalizar a situação proposta, observando que há uma mudança de quadros, do geométrico para o aritmético e deste para o algébrico;

**Procedimentos**

1º momento:

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- Será apresentado, aos grupos de alunos, uma situação-problema que está descrita abaixo.

Para resolvê-la, o grupo deverá considerar algumas etapas:

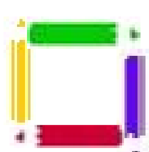
– discutir estratégias para a resolução;

– encontrar uma solução para o problema e testar essa solução ;

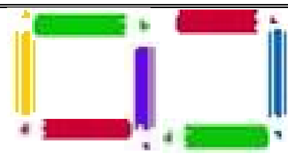
– escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

Situação-problema 12:

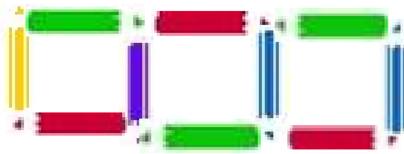
Luís ganhou uma caixa cheia de lápis de cores, todos novos. Resolveu "brincar" com seus lápis. Primeiro organizou 4 lápis de modo a construir um quadrado, como você vê na figura abaixo:



Depois resolveu ampliar sua construção de modo a formar dois quadrados:



Três quadrados e assim por diante:



a) Quantos lápis ele irá utilizar para fazer quatro quadrados nessa seqüência?

b) Complete a tabela abaixo:

| Quantidade de quadrados formados | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantidade de lápis utilizados | | | | | | | |

c) Quantos lápis ele seriam utilizados para fazer 10 quadrados?

d) Observando os números da tabela descubra uma regra para sabermos a quantidade de lápis utilizados se soubermos quantos quadrados queremos formar:

e) É possível formar 50 quadrados? Justifique sua resposta:

f) Quantos quadrados consigo formar com 25 lápis de cores?

g) É possível saber a quantidade de quadrados formados sabendo a quantidade de lápis utilizados? Explique como:

2º momento:

- Após todos os grupos solucionarem a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.

# AULA 6

## Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) evidencie os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

4) analise as regularidades numéricas a partir de dados organizados nas tabelas;

5) identifique a relação existente entre o número de entrada e o resultado final.

## Procedimentos

1º momento:

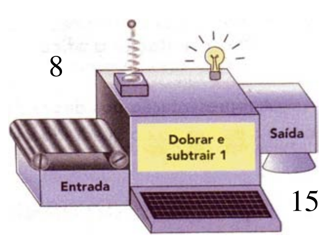
- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- Será apresentado, aos grupos de alunos, as situações-problema descritas abaixo.

Para resolvê-las, o grupo deverá considerar algumas etapas:

- discutir estratégias para a resolução;
- encontrar uma solução para o problema;
- testar essa solução ;
- escrever uma explicação de como foi resolvido o problema.

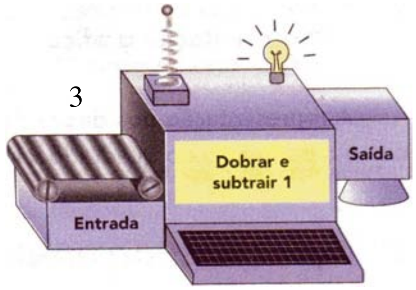
Situação-problema 13:

A professora de matemática bolou uma máquina interessante. Ela está programada para dobrar o número de entrada e subtrair uma unidade do resultado. Por exemplo, se colocarmos o número 8 na entrada obteremos o número 15 na saída.

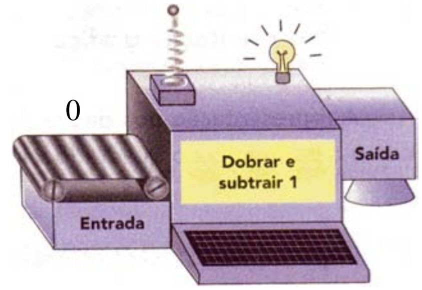


a) Escreva, em cada máquina, qual será o número de saída:

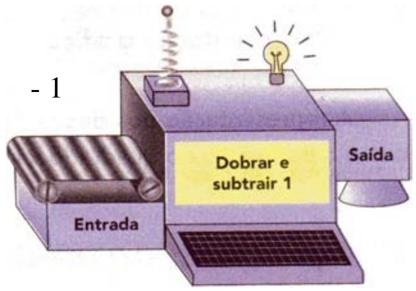
3




0




- 1




b) Complete a tabela abaixo utilizando a máquina:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de saída | | | | | | | | | | | |

c) O que podemos afirmar sobre o “número de saída” relacionado ao “número de entrada”?

d) Descreva como podemos saber o “número de saída” a partir do “número de entrada”:

e) Se x representa o “número de entrada”, como poderíamos representar o que “sai” da máquina?

f) A profª não olhou o número que “entrou” na máquina, mas o “número de saída” é 19, você saberia dizer qual foi o número que “entrou” na máquina?

g) Que procedimentos você teve para chegar ao resultado no item anterior?

(Obs.: Adaptação de atividade contida em: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática é tudo**. Oitava série, Ensino Fundamental. São Paulo:Ática,2002, p. 158)

Situação-problema 14:

Bruno, aluno da professora de matemática, gostou da idéia de máquina que transforma número e inventou essa outra máquina:


a) Observe o que a máquina de Bruno faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de saída | | | | | | | | | | | |

b) O que podemos afirmar sobre o "número de saída" relacionado ao "número de entrada"?

c) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina ? Qual?

d) Se *x* representa o "número de entrada", como poderíamos representar o que "sai" da máquina?

e) Tente completar esta tabela:

| Número de entrada | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Número de saída | 23 | 11 | - 13 | 32 |

f) Que procedimentos você teve para chegar aos resultado desta tabela?

(Obs.: Adaptação de atividade contida em: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática é tudo**. Oitava série, Ensino Fundamental. São Paulo:Ática,2002, p. 158)

Situação-problema 15:

Agora é sua vez, invente uma máquina que transforme números:

a) Como funciona sua máquina?

b) Se *x* representa o "número de entrada", como poderíamos representar o que "sai" da máquina?

2º momento:

- Após todos os grupos solucionarem a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.

## AULA 7

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) evidencie os procedimentos utilizados na solução das situações propostas;

4) analise as regularidades numéricas a partir de dados organizados nas tabelas;

5) identifique e represente a relação existente entre o número de entrada e o resultado final;

6) perceba que a ordem das máquinas altera o resultado final.

**Procedimentos**

<u>1º momento:</u>

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- Será apresentado, aos grupos de alunos, uma situação-problema que está descrita abaixo.

Para resolvê-la, o grupo deverá considerar algumas etapas:

- discutir estratégias para a resolução;
- encontrar uma solução para o problema;
- testar essa solução ;
- escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

<u>Situação-problema 16</u>:

Sabendo que uma determinada máquina, o número de entrada está representado pelo x e segue a seguinte regra $3x + 2$, desenhe esta máquina e explique como ocorre seu funcionamento:

a) Complete a tabela abaixo utilizando esta máquina:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de saída | | | | | | | | | | | |

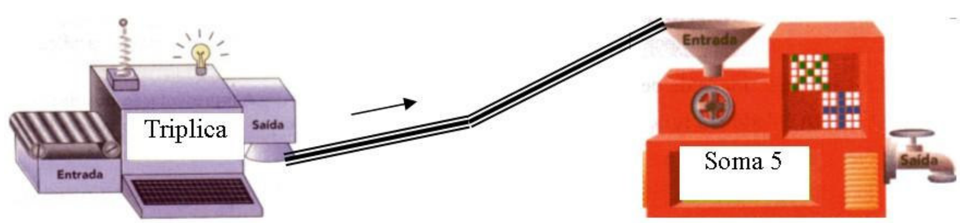
b) Qual deverá ser o número de entrada para que o número de saída seja 47?

c) Se você souber o número de saída da máquina, é possível descobrir o número de entrada? Como?

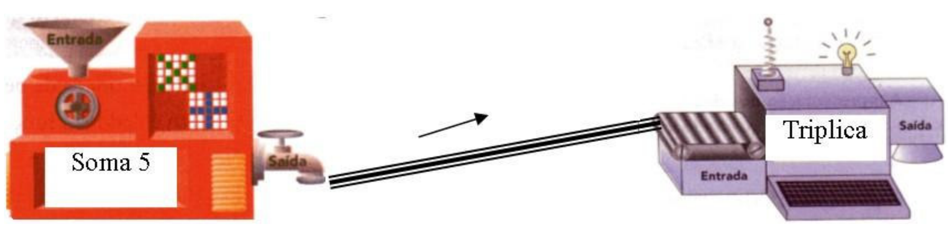
<u>Situação-problema 17</u>:

Gostando da idéia de máquinas, um aluno da turma resolveu fazer uma experiência maluca, usar duas máquinas e verificar o que aconteceria com os números após passarem por elas em diferentes posições:

Posição 1




Posição 2




a) Se colocarmos o número 2 na primeira máquina da posição 1 e na primeira máquina da posição 2, o número que sairá depois da segunda máquina será o mesmo para as duas posições?

b) Complete as tabelas:

Posição 1

| Número de entrada | Número de saída |
|---|---|
| -1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |

Posição 2

| Número de entrada | Número de saída |
|---|---|
| -1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |

c) Faça a experiência com outros números e escreva suas conclusões:

d) Descreva uma regra para indicar o “número de saída” para as máquinas da posição 1.

e) Agora, descreva uma regra para as máquinas que estão na posição 2:

<u>2º momento:</u>

- Após todos os grupos solucionarem a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.

# AULA 8

**Objetivos e  expectativas**

Que o aluno:

1) Responda as questões propostas evidenciando os conceitos estudados durante o período de implementação da proposta didática

**Procedimentos**

1º momento:

- Tendo em vista uma avaliação do trabalho realizado seja proposto aos alunos a seguintes questões de avaliação (descritas abaixo).Tais questões serão respondidas individualmente.

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Nome: _____________________________________________ Turma: __________ Data: ________

Questão 1

Pensei em um número e multipliquei-o por 10. Em seguida dividi o resultado obtido por 5. A resposta final foi 4.

a) Que número eu havia pensado?

b) Explique como você chegou nesse resultado:

c) É possível pensar um número diferente deste que você encontrou e, realizando as mesmas operações, chegar no resultado 4? Explique sua resposta:

Questão 2

Quanto deve valer x para que esta afirmação esteja correta? $x - 5 = 15$

Questão 3

Para que valor ou valores de n esta afirmação estará correta? $2.n + 3 = 123$

## Questão 4

Em uma apresentação de dança, a professora de dança resolveu organizar os dançarinos em filas, da seguinte forma:

1ª fila ⟶
2ª fila ⟶
3ª fila ⟶
4ª fila ⟶
⋮

a) Quantos dançarinos estarão na 5ª fila?

b) Quantos dançarinos estarão na 10ª fila?

c) Existe uma regra para a formação das filas? Você pode escrevê-la?

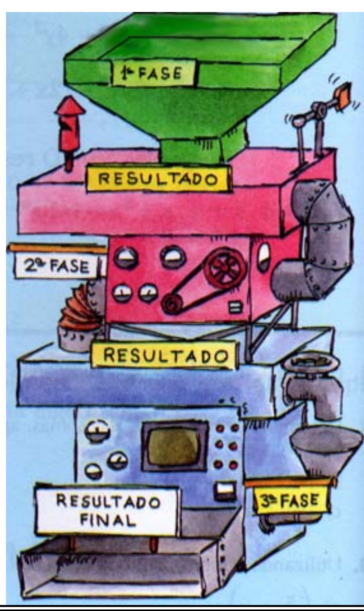
d) Explique como chegou a essa regra de formação:

e) Qual fila terá exatamente 9 dançarinos?

f) É possível saber a fila se soubermos quantos dançarinos há nela? Explique:

## Questão 5

Veja só esta máquina, ela trabalha em fases. Em cada fase há uma operação a ser feita:




**1ª fase:** multiplica por 10
**2ª fase:** soma 3
**3ª fase:** diminui 5

Figura retirada do livro: Matemática idéias e desafios, Sétima série, editora Saraiva, 2003, p. 64

a) Observe o que a máquina faz e complete a tabela abaixo:

| Número de entrada | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resultado final | | | | | | | | | |

b) Existe alguma maneira de representar como ocorre o funcionamento dessa máquina ? Qual?

c) Se n representa o "número de entrada", como poderíamos representar o resultado final da máquina?

d) O resultado final que iremos obter depende de alguma coisa? De quê?

e) Se o resultado final foi 98, qual o número que entrou na máquina?

f) Explique como você encontrou esse número:

Questão 6

Observe em quais situações o $x$ pode ter um **apenas um valor** ou **pode variar**, isto é, $x$ pode assumir vários valores. Em seguida, ligue cada expressão ao resultado de sua observação:

| | |
|---|---|
| $3x + 4 = 10$ ◆ | ◆ Apenas um valor |
| $2x + 10$ ◆ | |
| $\frac{4x}{3} = 8$ ◆ | |
| $x + 3 - 2 = 8$ ◆ | |
| $x + 3 = y$ ◆ | |
| $3 = x + 1$ ◆ | ◆ Pode variar |
| $4x + 3 - 2 = m$ ◆ | |
| $-5x = 10$ ◆ | |
| $2x + 3x - 1$ ◆ | |
| $p = \frac{x}{2}$ ◆ | |

## ANEXO C: Proposta de trabalho – fase 2

**PROPOSTA DE TRABALHO – FASE 2**

**Expressões algébricas – Operações**

### AULA 1

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) Se aproprie do material manipulativo, que será utilizado em futuras aulas como auxiliar na resolução de problemas e outras atividades propostas, compreendendo as combinações feitas quanto à sua utilização.

**Procedimentos**

1º momento:

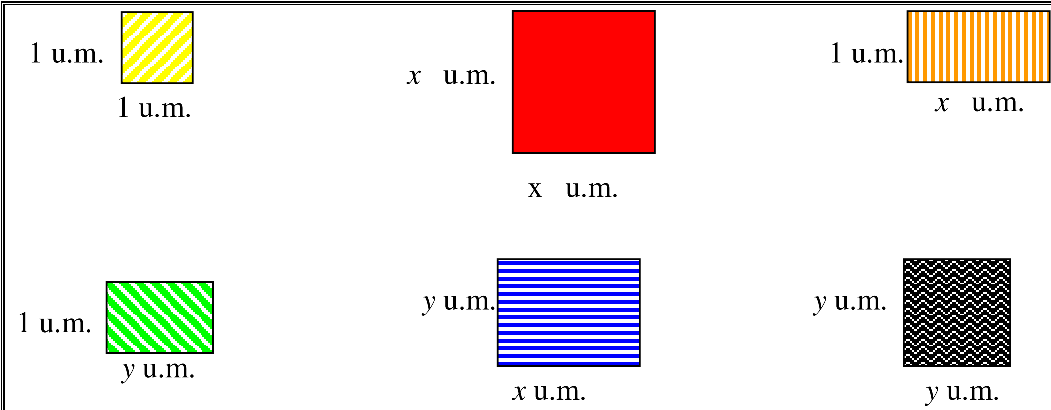
- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- A professora apresentará aos alunos o material manipulativo e combinará com os alunos algumas regras para a utilização do mesmo.

*Regras para utilização do material manipulativo*

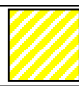
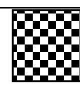
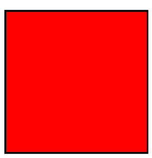
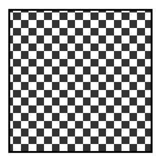
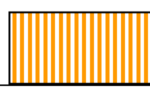
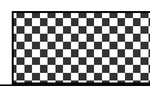
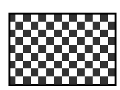
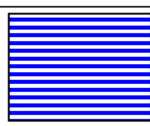
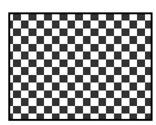
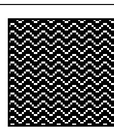
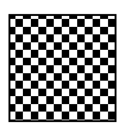
1) Todo o trabalho será realizado utilizando-se a área dos retângulos e quadrados em função da medida de seus lados (pré-estabelecidos).

2) Convenções para utilizar o material.

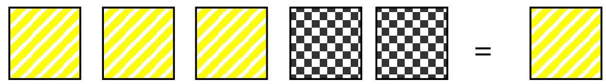
a) o quadrado menor (amarelo) será a unidade de área, tendo como medida do lado 1 u.m., o quadrado maior (vermelho) terá como medida do lado $x$ u.m., o retângulo laranja, terá altura 1 u.m e comprimento $x$ u.m., o retângulo verde terá altura 1 u.m e comprimento y u.m., o retângulo azul terá altura y u.m e comprimento $x$ u.m. e om quadrado médio (preto) terá como medida do lado y u.m. Portanto, o quadrado menor terá área 1, o maior terá área $x^2$ e o retângulo terá área $x$, e assim por diante.




c) O lado colorido será utilizado para a representação de valores positivos correspondentes às áreas dos quadriláteros e o verso de cada peça será utilizado para representar o oposto desse valor, portanto um valor negativo. Portanto o sinal de menos na frente de um número ou expressão indica seu oposto, por exemplo, – (+ 1) indica o oposto de + 1, ou seja, – 1. Podemos observar essa convenção no quadro abaixo:

| | |
|---|---|
|  Representa 1 |  Representa –1 |
|  Representa $x^2$ |  Representa $-x^2$ |
|  Representa $x$ |  Representa $-x$ |
|  Representa $y$ |  Representa $-y$ |
|  Representa $xy$ |  Representa $-xy$ |
|  Representa $y^2$ |  Representa $-y^2$ |

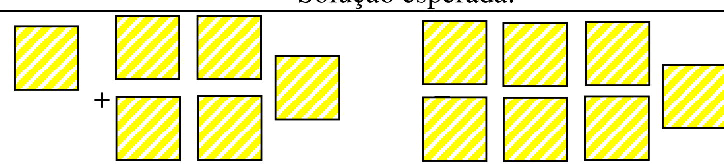
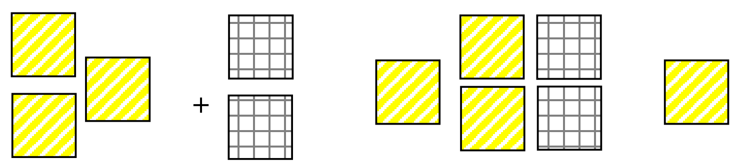
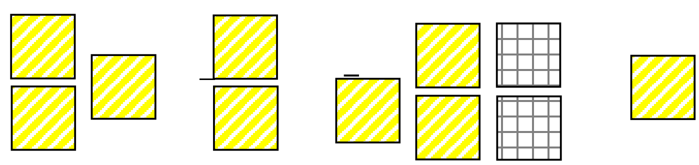
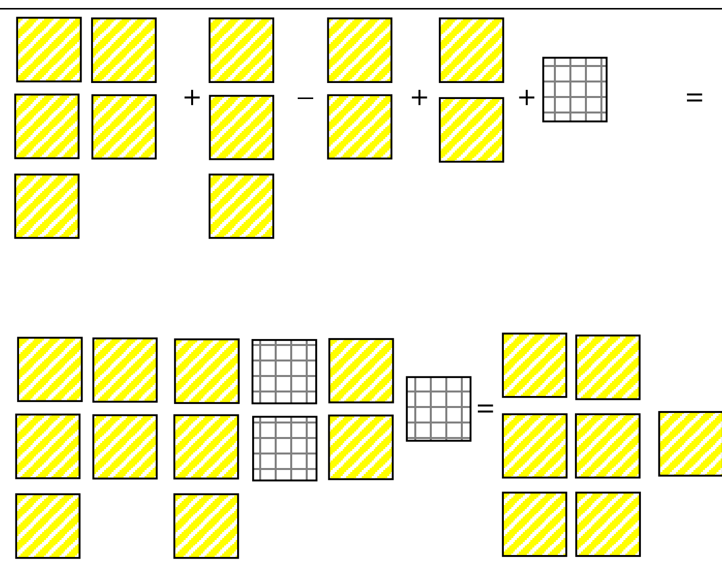
c) Cada positivo anula um negativo da mesma espécie, isto é, cada peça colorida anula uma virada da mesma espécie. Isso significa que a subtração entre dois números ou duas expressões, com o uso do material, é considerado como a adição do primeiro(a) com o oposto do segundo(a). Por isso toda vez que surgir o sinal de menos indicando uma subtração, o mesmo é interpretado pelo aluno como a adição com o oposto. Por exemplo 3 – 5 é 3 + (–5).

Exemplo: 

- Em seguida, a professora proporá que representem algumas situações numéricas e algébricas com o material:

*Situações solicitadas*

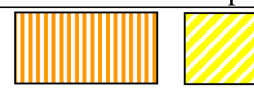
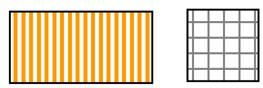
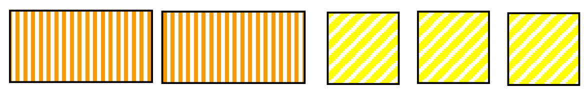
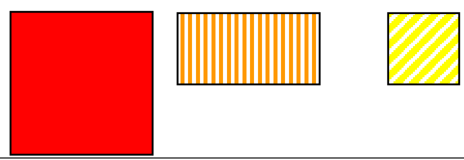
1) Represente as operações com o material e escreva o resultado:

| | Solução esperada: |
|---|---|
| a) 2 + 5 = |  |
| b) 3 + (– 2) = |  |
| c) 3 – 2 = |  |
| d)5 + 3 – 2 + 2 + (–1) = |  |

2) Utilizando o material, mostre que:

| | |
|---|---|
| a) 8 + (– 3) = 5 | d) 3 – (– 2) = 5 |
| b) – 4 + 5 = 1 | e) 8 + (– 6 + 2) = 4 |
| c) 2 – 8 = – 6 | f) (– 3 + 2 – 1) + (2 – 4) = – 4 |

3) Sugerir aos alunos que representem, com o material:

| | Resposta esperada |
|---|---|
| x + 1 |  |
| x – 1 |  |
| 2x + 3 |  |
| $x^2 + x + 1$ |  |

## AULA 2

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) observe a necessidade da utilização de expressões algébricas na resolução de algumas situações-problema propostas e sinta-se motivado a aprender tais conceitos;

2) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

3) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

4) observe que a adição e subtração de expressões algébricas podem simplificar (no sentido de minimizar a quantidade de cálculos) e auxiliar na resolução de algumas situações do cotidiano;

5) elabore algumas conclusões no que se refere a adição e subtração de expressões algébricas.

**Procedimentos**

<u>1º momento:</u>

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- Será apresentado, aos grupos de alunos, uma situação-problema que está descrita abaixo.

Para resolvê-la, o grupo deverá considerar algumas etapas:

- discutir estratégias para a resolução;
- encontrar uma solução para o problema;
- testar essa solução (poderá ser utilizado, caso os alunos julguem necessário, o material manipulativo apresentado na aula anterior e que estará à disposição dos alunos);
- escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

*Descrição da situação-problema*

Situação-problema 1:

Uma empresa de alimentos distribui seus produtos em cinco mercados da região. Um caminhão parte da empresa para fazer entregas em todos os cinco mercados. Sabe-se que:

– para ir da empresa até o primeiro mercado, o caminhão irá percorrer uma certa distância em quilômetros;

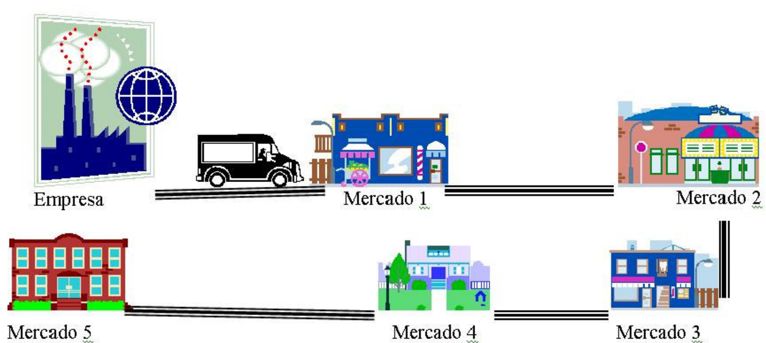
– para ir do primeiro mercado até o segundo, o caminhão irá percorrer 5 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– para ir do segundo mercado até o terceiro, o caminhão irá percorrer 3 quilômetros a mais que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– para ir do terceiro para o quarto mercado, o caminhão irá percorrer 2 quilômetros a menos que a distância entre a empresa e o primeiro mercado;

– e, finalmente, do quarto mercado para o último, o caminhão irá percorrer o dobro do que percorreu para ir da empresa até o primeiro mercado.

Faça uma simulação da situação representando no esquema abaixo e responda as perguntas:




a) Como você poderia representar a distância total que o caminhão vai percorrer?

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

c) Se considerarmos a distância da empresa até o mercado 1 como sendo $x$, qual seria o valor de $x$ se a distância total percorrida pelo caminhão foi de 15 km?

2º momento:

- Após todos os grupos solucionarem a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.

# AULA 3

## Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) observe a necessidade da utilização de expressões algébricas na resolução de algumas situações-problema propostas e sinta-se motivado a aprender tais conceitos;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) observe que a adição e subtração de expressões algébricas podem simplificar (no sentido de minimizar a quantidade de cálculos) e auxiliar na resolução de algumas situações do cotidiano;

4) elabore algumas conclusões no que se refere à adição e subtração de expressões algébricas.

## Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- A professora proporá que os alunos representem algumas expressões numéricas e algébricas com o material.
- Após cada representação, a professora questionará se há uma expressão equivalente mais simplificada.

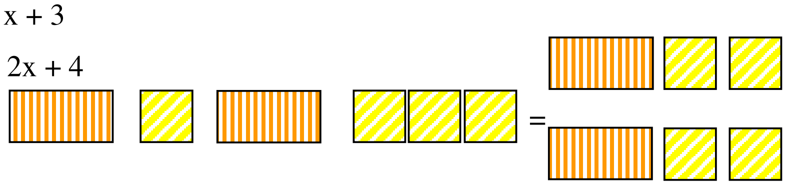
*Alguns exemplos de situações solicitadas*

1) Represente as operações com o material e escreva o resultado:

Expressão: x + 1 + x + 3

Resposta esperada: 2x + 4

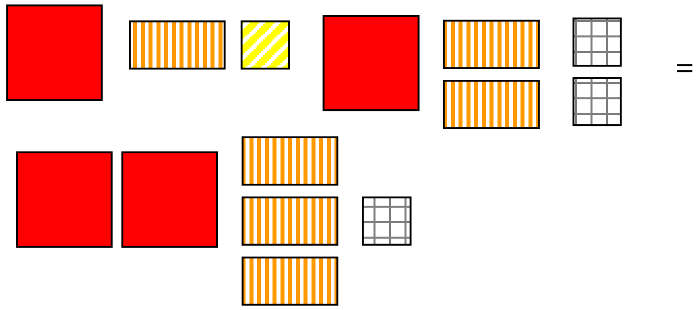
Com o material:



Expressão: $x^2 + x + 1 + x^2 + 2x - 2$

Resposta esperada: $2x^2 + 3x - 1$

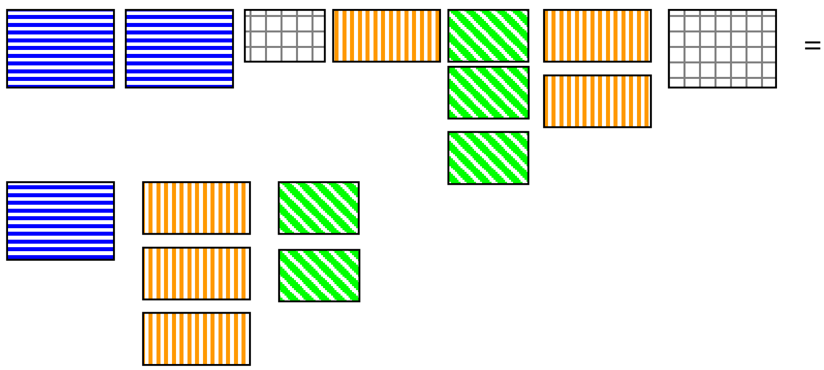
Com o material:



Expressão: $xy + xy - y + x + 3y + 2x - xy$

Resposta esperada: $xy + 3x + 2y$

Com o material:



<u>2º momento:</u>

- A professora irá questionar os alunos em relação à expressão inicial e à obtida após a manipulação do material. Os alunos irão comentar suas observações em grande grupo e as mesmas serão anotadas no quadro pela professora. Em seguida, os alunos irão analisar as observações anotadas no quadro e, com a ajuda da professora irão resumi-las e anotá-las no caderno.

<u>3º momento:</u>

- Será entregue a cada aluno a mesma situação-problema da aula anterior.
- Após todos solucionarem a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.
- Em seguida, cada aluno deverá anotar em seu caderno, o que, na sua opinião, aprendeu durante a aula.

# AULA 4

## Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para solucionar as situações propostas;
2) observe a existência da operação de adição e subtração entre expressões algébricas;
3) observe que o material manipulativo na verdade não tem como objetivo fazer uma simulação da situação-problema mas pode servir como um auxiliar na validação das hipóteses;
4) observe que a adição e subtração de expressões algébricas podem simplificar (no sentido de minimizar a quantidade de cálculos) e auxiliar na resolução de algumas situações o cotidiano;
5) elabore algumas conclusões no que se refere à adição e subtração de expressões algébricas.

## Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- A turma será dividida em grupos (os mesmos da aula anterior).
- Serão apresentados, aos grupos de alunos, situações-problema descritas abaixo.
- Para resolvê-las, o grupo deverá considerar algumas etapas:

– discutir estratégias para a resolução;

– encontrar uma solução para o problema estudado;

– testar essa solução (poderá ser utilizado, caso os alunos julguem necessário, o material manipulativo apresentado na aula anterior e que estará a disposição dos alunos);

– escrever uma explicação de como foi resolvido o problema.

*Descrição das situações-problema*

Situação-problema 2:

Joana está praticando caminhada. A cada dia ela caminha 3 km a mais que no dia anterior. Complete a tabela com informações sobre as caminhadas de Joana:

| Dias | Distância percorrida por Joana |
|---|---|
| 1º dia | |
| 2º dia | |
| 3º dia | |
| 4º dia | |
| 5º dia | |

a) Como poderíamos representar a distância total percorrida por Joana após os cinco dias?

b) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa distância?

c) Se Joana percorreu um total de 35 km após os cinco dias de caminhada, quanto ela percorreu primeiro dia? Explique como chegaram na resposta:

d) Se Joana percorreu um total de 41 km após os cinco dias de caminhada, quanto ela percorreu primeiro dia? Explique como chegaram na resposta:

Situação-problema 3:

Em cada mão humana há uma quantidade de ossos. Em cada pé humano há um osso a menos que em cada mão. Como podemos representar a quantidade de ossos que há, ao todo, nas mãos e pés de uma pessoa?

(Obs.: Adaptação de atividade contida em:GIOVANNI,José Ruy.**Matemática pensar e descobrir: o + novo**. Sétima série.São Paulo: FDT,2002, p. 133)

Situação-problema 4:

Um grupo de seis pessoas vai almoçar num restaurante. Cada uma pede o prato do dia e uma sobremesa, exceto uma pessoa, a qual não pede sobremesa. Suponha que o prato do dia custe $x$ reais e cada sobremesa custe 1 real.

a) Como você poderia representar a quantia total que este grupo de pessoas gastou no restaurante?

b) Supondo que elas tenham gasto ao todo 32 reais, então qual era o valor do prato do dia?

2º momento:

- Após todos os grupos resolverem cada situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.
- A professora sugerirá que os alunos representem cada situação-problema de maneira algébrica.

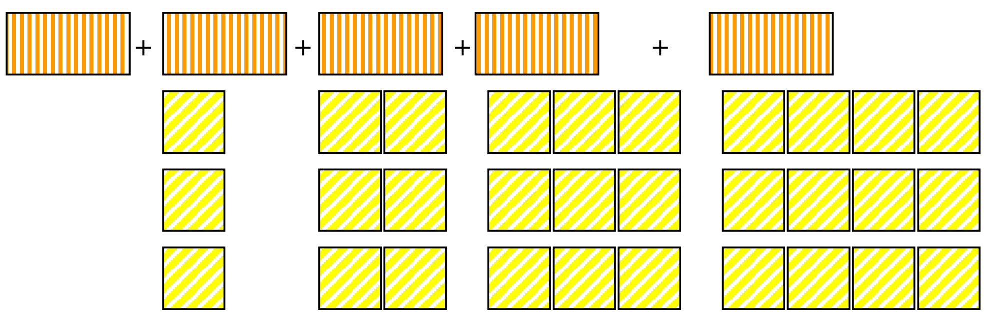
3º momento:

- Após os grupos terem discutido todas as situações-problema, a professora sugerirá a seguinte situação:

1) Utilizando o material manipulativo, como podemos mostrar :

*x + (x + 3) + (x + 3 + 3) + (x + 3 + 3 + 3) + (x + 3 + 3 + 3 + 3)*

Solução esperada:



- A professora questionará se existem semelhanças ou diferenças entre as duas situações apresentadas: problema e a representação de x + (x + 3) + (x + 3 + 3) + (x + 3 + 3 + 3) + (x + 3 + 3 + 3 + 3).

4º momento:

- Os alunos irão elaborar, em grande grupo, algumas hipóteses de como ocorre a adição e subtração de expressões algébricas. Estas hipóteses serão anotadas no caderno para futuras conclusões.
- Após, ocorrerá a sistematização dos conceitos evidenciados nas situações-problema e na representação. Tal sistematização será ainda informal (com a linguagem dos próprios alunos).

## AULA 5

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) observe a necessidade da utilização do cálculo literal na resolução de algumas situações-problema propostas e sinta-se motivado a aprender tais conceitos;

2) desenvolva diferentes estratégias para a resolução dos problemas propostos;

3) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

4) observe que a adição e subtração de expressões algébricas podem simplificar (no sentido de minimizar a quantidade de cálculos) e auxiliar na resolução de algumas situações do cotidiano;

5) observe a utilização ou não dos parênteses e suas implicações nas operações de adição e subtração de expressões algébricas.

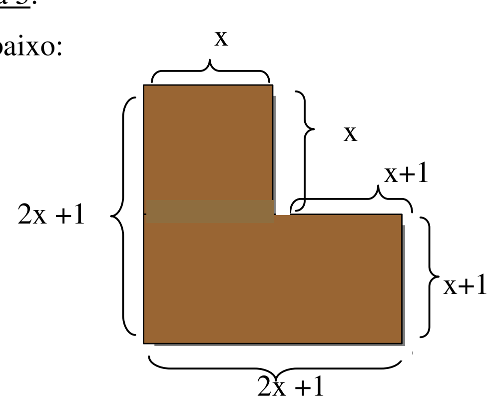
**Procedimentos**

<u>1º momento:</u>

- A turma será dividida, novamente, em grupos com no máximo 4 alunos cada, aos quais será apresentada a seguinte situação-problema :

<u>Situação-problema 5</u>:

Observe a figura abaixo:




a) Suponha que o *x* vale 5 centímetros, então qual seria o perímetro desta figura?

b) E se *x* valesse 8 centímetros?

c) Sempre poderemos achar um perímetro para a figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para *x* e calcular o perímetro?Justifique:

d) Podemos utilizar 1 centímetro para o valor de x? Justifique:

e) Complete a tabela :

| Valor atribuído ao x | Perímetro da figura |
|---|---|
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6,5 | |
| 7 | |
| 8,2 | |
| 9,4 | |
| | 86 |

f) É possível representar o perímetro dessa figura sem atribuir valores específicos para x? Como?

g) Existe uma maneira mais simplificada de representar esse perímetro?

- Durante a resolução da situação pelos grupos, a professora retomará alguns conceitos de geometria (área x perímetro) em cada grupo. Tal retomada se dará através de questionamentos feitos pela professora aos integrantes do grupo.

<u>2º momento:</u>

- Após todos os grupos resolverem a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.
- Obs.: Durante a socialização, a professora irá propor que os alunos representem a expressão algébrica obtida no problema, com o material manipulativo com a finalidade de validar a expressão simplificada obtida.

<u>3º momento:</u>

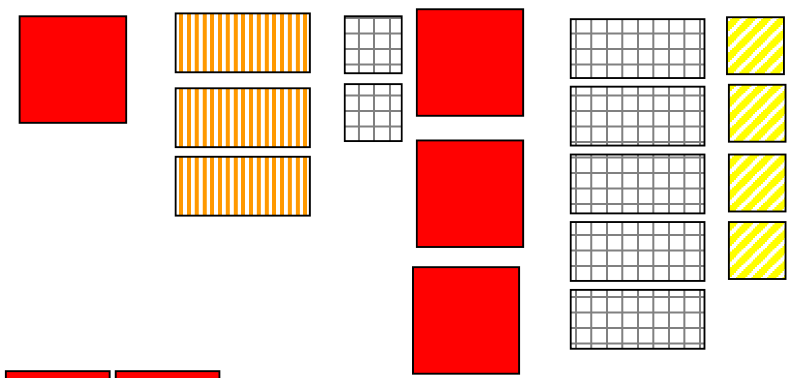
- A professora irá sugerir algumas atividades que deverão ser realizadas com o auxílio do material manipulativo e registradas no caderno.

Durante a atividade a professora questionará sobre a utilização ou não dos parênteses, o que significa a utilização destes e como proceder quanto ao sinal negativo na frente dos parênteses, lembrando que na utilização do material manipulativo o sinal negativo significa “virar” a peça.

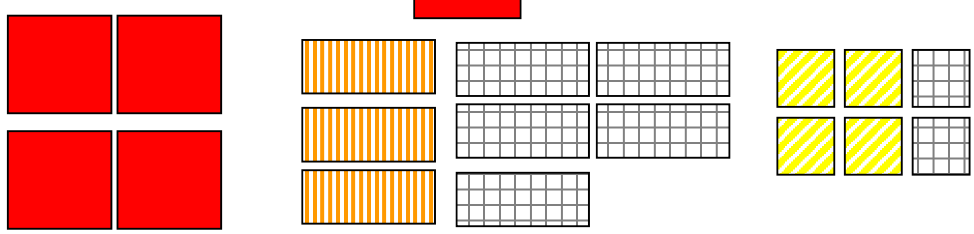
Exemplos de situações que serão solicitadas:

1) Utilizando o material, como poderíamos representar a expressão algébrica $x^2 + 3x - 2 + 3x^2 - 5x + 4$ de maneira mais simplificada?

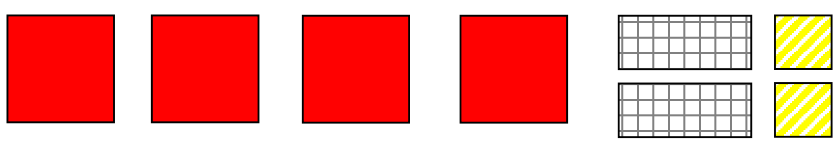
Solução esperada:



=



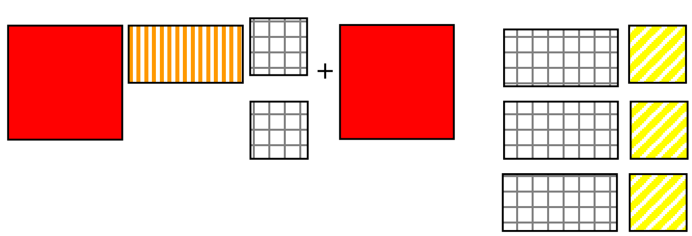
=



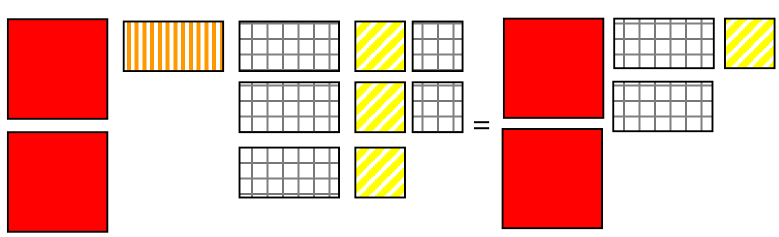
$= 4x^2 - 2x + 2$

2) Represente de forma mais simples a expressão $(x^2 + x - 2) + (x^2 - 3x + 3)$:

Solução esperada:



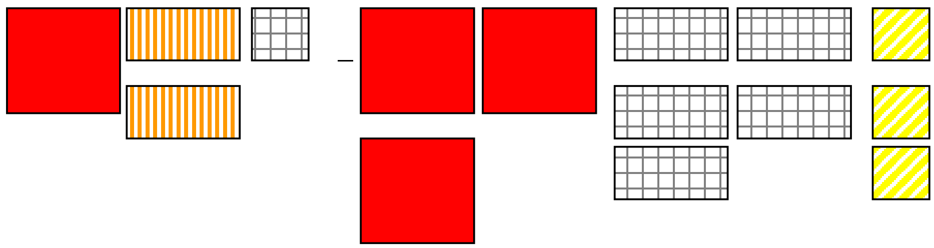
=



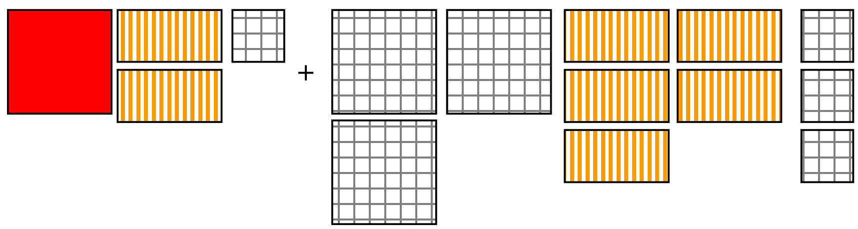
$= 2x^2 - 2x + 1$

3) Escreva uma expressão equivalente a $(x^2 + 2x - 1) - (3x^2 - 5x + 3)$,mas escrita de forma mais simples:

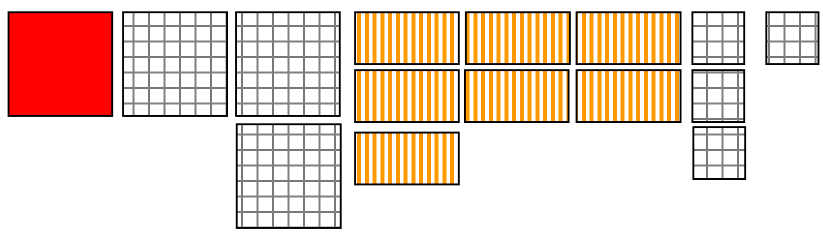
Solução esperada:



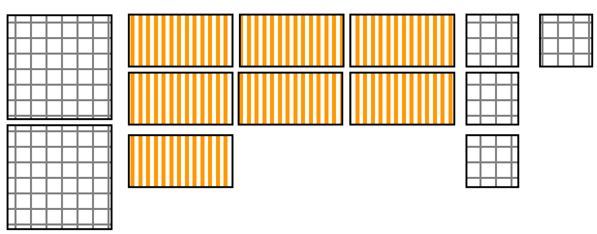
=



=



=



$= -2x^2 + 7x - 4$

---

4) Cada aluno deverá retirar da caixa uma quantidade de peças do material manipulativo (sem escolhê-las) e organizá-las (livremente) sobre a classe. Após, deverá representá-las, no caderno, de dois modos: primeiro do modo como estão organizadas sobre a classe (representar com desenho e forma algébrica) e em seguida da forma mais simplificada possível.

---

Tarefa para casa

Sem a utilização do material manipulativo, verifique o modo simplificado de escrever as expressões:

a) $(3x^2 + 2x - 2) + (5x^2 - 3x + 13)$

b) $(5x^2 - x + 82) - (x^2 - 3x + 3)$

## AULA 6

### Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

2) compreenda os conceitos envolvidos na adição e subtração de expressões algébricas;

3) perceba que as noções algébricas estudadas não são exclusivas às letras utilizadas na convenção do material manipulativo;

4) saiba realizar operações de adição e subtração de expressões algébricas com e sem o auxílio do material manipulativo.

### Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- Será feita a correção da atividade proposta para casa (da aula anterior).

Obs.: Caso haja dificuldades, a professora sugerirá o uso do material manipulativo.

<u>2º momento:</u>

- A professora fará o seguinte questionamento:

– É possível simplificar $(3a^2 + 2z - 2c) + (5a^2 - 3z + 13c)$?

- Os alunos irão lançar suas hipóteses que serão discutidas em grande grupo.
- Em seguida, a professora irá questionar o que deve ser levado em consideração se quisermos efetuar adições e subtrações em expressões que possuem números e letras (expressões algébricas).
- As idéias dos alunos serão anotadas no quadro e em seguida discutidas e validadas ou não pelo grande grupo.
- Após todas as situações propostas serem discutidas, ocorrerá a formalização dos conceitos evidenciados nas situações-problema – no caso, adição e subtração de expressões algébricas.

Nesta etapa, os alunos deverão comparar as hipóteses, anteriormente elaboradas por eles (aulas anteriores), com as conclusões da aula de hoje. As formalizações construídas serão anotadas no caderno.

3º momento:

- A professora proporá a seguinte atividade:

Utilizando o que vimos na aula de hoje, simplifique as expressões abaixo:

a) $(3x^2 + 2x - 1) + (-2x^2 + 4x + 2) =$

b) $(3x^2 - 3) - (6x^2 - 4) =$

c) $(2z - yz + 5z) - (-z + 3yz + 2z) =$

d) $(2de - 2bc + 5b) - (-bc - de + 2b) =$

e) $(3a - 2b + c) + (-6a - b - 2c) + (2a + 3b - c) =$

f) $(2a - 3ab + 5b) - (-a - ab + 2b) =$

g) $(3t^2 - u) - (6t^2 - 5u) =$

4º momento:

- As atividades serão corrigidas no quadro pelos alunos.

## AULA 7

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para solucionar as situações propostas;

2) observe as noções algébricas evidenciadas nas situações, no caso, a operação de multiplicação de expressões algébricas por um número inteiro;

3) perceba a existência e ocorrência da propriedade da distributividade da multiplicação em relação à soma;

4) utilize o material manipulativo observando as combinações feitas quanto à sua utilização.

**Procedimentos**

<u>1º momento:</u>

- A professora proporá aos alunos a seguinte situação:

Em dois vidros graduados a professora colocará certa quantidade de água em cada um deles e indagará quanto de água haveria se os dois recipientes fossem juntados. Após a resposta a professora colocará, num terceiro recipiente graduado, a quantidade de água equivalente à água contida nos dois vidros.

Em seguida, a professora questionará o que aconteceria com a quantidade de água em cada vidro se ela resolvesse dobrá-la (qual seria a nova quantidade).

Indagará qual seria a quantidade do terceiro recipiente se ela resolvesse dobrar seu conteúdo.

Feito isso, a professora lançará questionamentos do tipo:

– A quantidade dos três recipientes foi dobrada. Seria correto afirmar que no terceiro recipiente agora há a mesma quantidade de água que nos dois vidros juntos? (os alunos expõem suas hipóteses)

– Como ficaria a representação dessa situação numericamente?

– Vamos confirmar as hipóteses? (a professora despeja a quantidade de água contida nos dois vidros em um quarto recipiente semelhante ao terceiro e coloca, terceiro e quarto recipiente, lado a lado para a comparação).

– O que poderíamos afirmar quanto ao fato de dobrarmos a quantidade toda de uma vez ou se dobrarmos as quantidades separadamente e depois juntarmos?

2º momento:

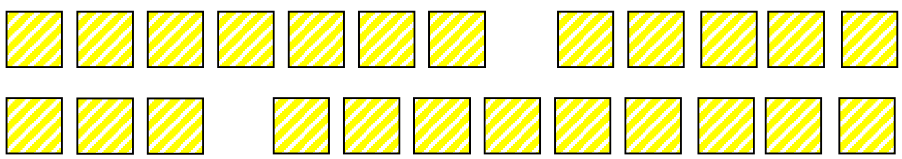
- Sugerir aos alunos a seguinte situação:

| |
|---|
| Tenho doze[45] pirulitos separados nestas duas latas. Quantos pirulitos podem ter em cada lata?<br>Quais as possibilidades? |

- Cada grupo deverá representar as possibilidades encontradas usando a notação que julgar apropriada (desenho, numérica,...).

Após, a professora sugerirá que representem as possibilidades utilizando o material (fichas):

*Exemplos de respostas que se espera:*



A professora então questionará se tais representações poderiam ser numéricas. E se a resposta for positiva, de que forma isso poderia ser feito.

*Exemplos de respostas esperadas: 7 + 5    3 + 9*

Novo questionamento: E se tivéssemos o dobro desta quantidade de pirulitos, quantos pirulitos teríamos?

Como poderíamos representar o dobro da quantidade de pirulitos numericamente?

*Resposta esperada: 2 . 12 = 24*

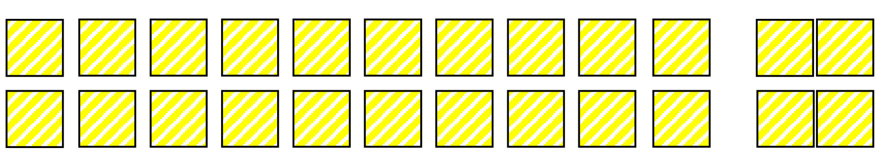
É possível pensar no dobro da quantidade de pirulitos se estes estiverem representados em dois grupos? Como por exemplo, é possível representar o dobro quando 12 está representado como 7 + 5? Como?

*(Espera-se que os alunos discutam nos grupos e tragam suas conclusões ao grande grupo argumentando-as)*

Se 12 for representado como 10 + 2 então seu dobro pode ser representado como 2 . 12, mas também pode ser representado como 2 . (10 + 2)?

Neste último caso, como poderíamos representar com o material?

*Resposta esperada*:



[45] A quantidade de pirulitos será equivalente à quantidade de alunos presentes em aula no dia. A quantidade 12 é apenas um exemplo.

Como representar numericamente esta situação?

*Resposta esperada:* $2 \cdot 10 + 2 \cdot 2 = 20 + 4 = 24$

Será entregue a cada aluno a quantidade de pirulitos correspondente, no caso, dois para cada.

3º momento:

*Multiplicação de expressões algébricas por um número com material*

*Exemplo de atividades que serão desenvolvidas com os alunos*

1) Sugerir aos alunos que representem, com o material, algumas expressões algébricas:

| | Resposta |
|---|---|
| $x + 1$ | |
| $2x + 3$ | |
| $x^2 + x + 1$ | |

2) Realizar questionamentos e sugerir que os alunos representem cada situação com material mas que também descubra uma maneira de representar a operação por escrito (sem a utilização de desenhos):

| | Resposta com desenho | Resposta escrita |
|---|---|---|
| O dobro de $x + 1$ | | |
| O triplo de $2x + 3$ | | |
| O triplo de $x^2 + x + 1$ | | |

3) Solicitar aos alunos que representem, com o material, a expressão equivalente a $2 \cdot (-4x + 3)$:

Questionar como ele realizaria esta operação sem o uso do material?

4) Questionar aos alunos se poderíamos afirmar que $2 \cdot (3x + 1)$ e $6x + 2$ são equivalentes? Solicitar que justifiquem sua resposta.

5) Pedir aos alunos que criem outras situações em que ocorre a multiplicação de uma expressão algébrica por um número e representem a expressão equivalente mais simplificada:

## AULA 8

### Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) perceba que uma interpretação para o produto de expressões algébricas pode ser a área de retângulos cujos lados são as próprias expressões algébricas;

2) seja capaz de se apropriar do material manipulativo, compreendendo as combinações feitas quanto à sua utilização para a representação de área de retângulos;

trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de representar as multiplicações propostas.

### Procedimentos

<u>1º momento:</u>

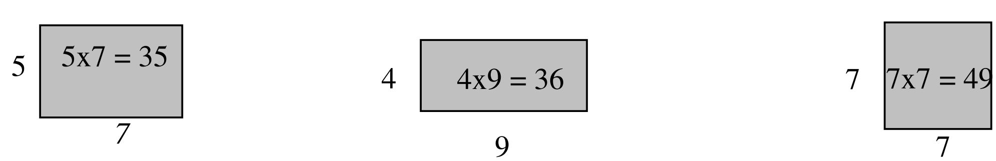
- Serão feitas algumas combinações com os alunos quanto ao uso do material manipulativo para sua utilização como auxiliar no estudo de multiplicação entre expressões algébricas.

*Introdução de uma nova regra para a utilização do material manipulativo:*

- A professora irá questionar os alunos quanto ao cálculo de área de retângulos de forma que estes evidenciem seus conhecimentos prévios.

Espera-se que seja evidenciado que todo retângulo tem comprimento (base), largura (altura) e área. O comprimento e a largura são as medidas dos lados do retângulo tomadas em uma determinada unidade. A área é dada pela quantidade de quadrados de lado unitário (segundo essa unidade) necessários para cobrir o retângulo.

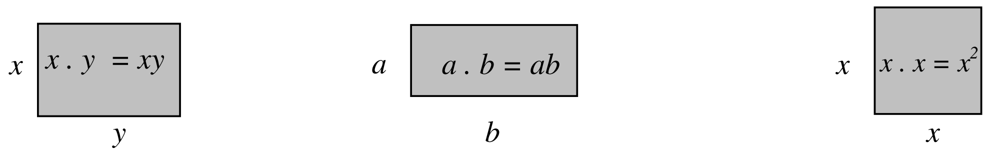
- A professora, com o auxílio oral dos alunos escreverá alguns exemplos para visualização do que fora sugerido pelos alunos quanto ao cálculo de área de retângulos quando estes possuem dimensões conhecidas.



- A professora irá questionar:

– Agora, se mudarmos os números para variáveis algébricas (letras) o que obteremos?

Exemplos:




– E se quisermos verificar a área de um retângulo cujos lados são $x$ e $(x + 2)$, como devemos fazer?

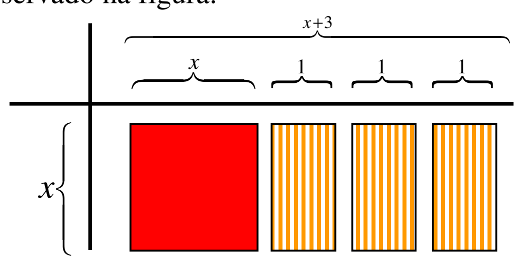
(Resposta dos alunos)

Espera-se que os alunos identifiquem a necessidade da utilização da multiplicação das expressões algébricas.

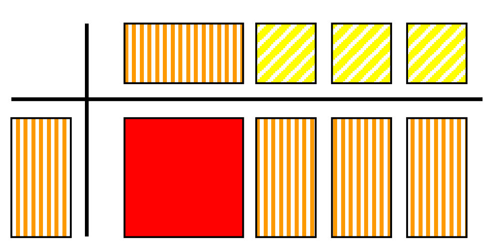
- A professora então irá propor uma situação em que se observe a área de um retângulo de lados $x$ e $(x + 2)$ com a utilização do material manipulativo.

Partindo do conhecimento de que a área do retângulo pode ser obtida através da multiplicação de suas dimensões, convencionou-se, com o material, que a área do retângulo cujo comprimento é um dos termos da multiplicação e cuja largura é o outro termo será obtida através da soma das áreas das figuras que compõem tal retângulo.

Por exemplo, o retângulo cujas dimensões são $x + 3$ e $x$ possui uma área igual a $x^2 + 3x$ como pode ser observado na figura.




Para facilitar a formação do retângulo e a visualização de suas dimensões podem-se utilizar as próprias peças do material para marcar as medidas dos seus lados. Entretanto, deve ficar claro para os alunos que o que está sendo considerado é o comprimento (medida do lado) das peças utilizadas na marcação e não sua área. Dessa forma:



Neste caso, a resposta da multiplicação $x$ . $(x + 3)$, que é equivalente à área do retângulo de lados $x$ e $(x + 3)$, será $x^2 + 3x$.

- A professora volta a questionar:

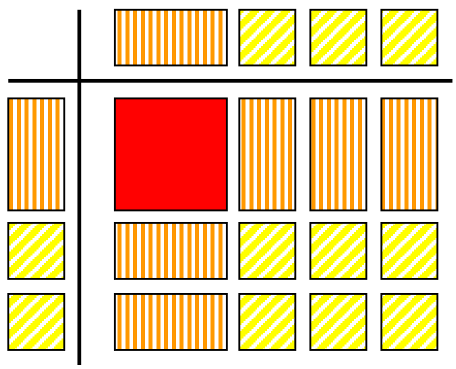
– E se quisermos verificar a área de um retângulo cujos lados são $(x + 3)$ e $(x + 2)$, como devemos fazer?

(Resposta dos alunos)

- A professora então irá propor outra situação, na qual se observe a área de um retângulo de lados (x + 3) e (x + 2) com a utilização do material manipulativo.

Para isso, usaremos a mesma convenção anterior. Por exemplo, para multiplicarmos $(x + 3)$ . $(x + 2)$ basta considerar a área do retângulo que tem como um dos lados $(x + 3)$ e como o outro lado $(x + 2)$.

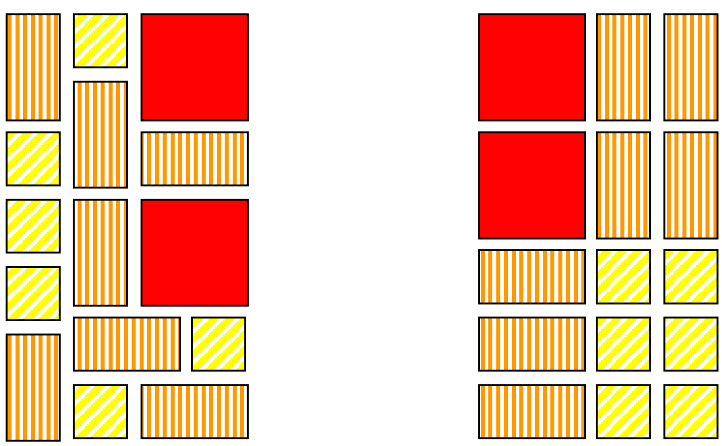
Observe o desenho:



A resposta da multiplicação será equivalente à área do retângulo, neste caso, $x^2 + 5x + 6$.

Porém deve-se considerar alguns detalhes quanto à disposição das peças para formar o retângulo.

Observe:



Os dois são retângulos feitos com a mesma quantidade de peças, mas o retângulo da direita está mais organizado. Esta organização deve ser levada em consideração.

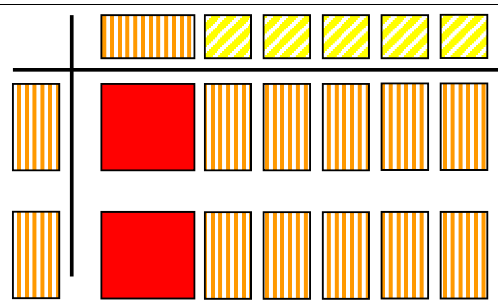
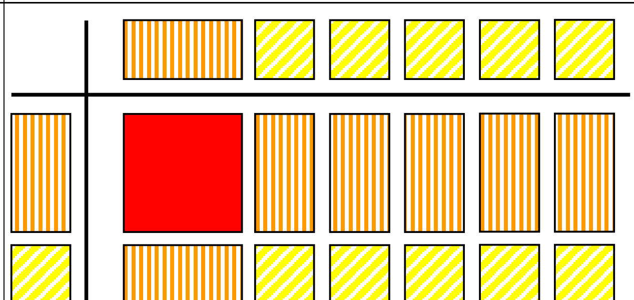
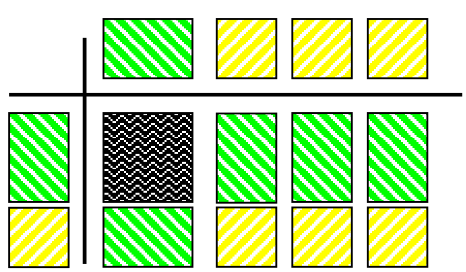
São regras para a construção dos retângulos:

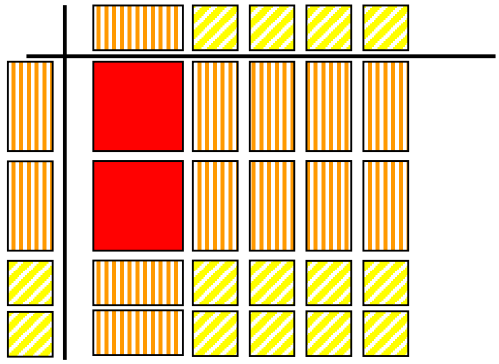
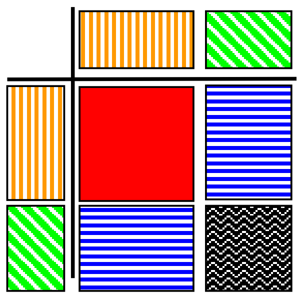
1. Para que duas figuras sejam justapostas, os lados contíguos devem ter a mesma medida.
2. O lado do quadrado grande não pode tocar o lado do quadrado pequeno.
3. Quadrados pequenos devem estar sempre juntos e quadrados grandes também.

<u>2º momento:</u>

- A professora proporá que os alunos representem algumas situações envolvendo multiplicação de expressões algébricas com o material manipulativo.

São exemplos de multiplicações solicitadas pela professora:

| | Resposta esperada |
|---|---|
| $2x.(x+4)$ |  $= 2x^2 + 8x$ |
| $(x+1).(x+5)$ |  $= x^2 + 6x + 5$ |
| $(y+3).(y+1)$ |  $= y^2 + 4y + 3$ |

| | |
|---|---|
| $(2x + 2).(x + 4)$ |  $= 2x^2 + 10x + 8$ |
| $(x + y).(x + y)$ |  $= x^2 + 2xy + y^2$ |

<u>3º momento:</u>

- A professora solicitará que os alunos anotem no caderno as representações e os resultados obtidos.

# AULA 9

## Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para solucionar as situações propostas;

2) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação(ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas;

3) observe que o material manipulativo não é uma simulação da situação-problema em si, mas pode servir como um auxiliar na validação das hipóteses referentes à representação da situação-problema através de uma expressão algébrica;

4) observe que a multiplicação de expressões algébricas pode simplificar (no sentido de minimizar a quantidade de cálculos) e auxiliar na resolução de algumas situações-problema;

5) perceba que uma interpretação para a multiplicação de expressões algébricas pode ser o cálculo da área de retângulos cujos lados são associados às expressões algébricas;

6) perceba que as regras para a utilização do material manipulativo, no que se refere à multiplicação de expressões algébricas, não são aleatórias, mas que estão associadas ao cálculo de áreas de retângulos e de figuras compostas por retângulos;

7) elabore algumas conclusões no que se refere à multiplicação de expressões algébricas utilizadas nesta aula, a saber, que o resultado da multiplicação das expressões algébricas pode ser associado à soma das áreas dos retângulos que compõem o retângulo cujos lados são associados às expressões algébricas envolvidas;

8) perceba que a operação envolvida no cálculo do perímetro do retângulo é a adição e no cálculo da área é multiplicação de expressões algébricas.

9) perceba a propriedade distributiva da multiplicação evidenciada na manipulação do material, com o objetivo de resolver as multiplicações de expressões algébricas nas situações-problema propostas.

## Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- A turma será dividida em grupos (escolha dos alunos).

- Serão apresentados, aos grupos de alunos, as situações-problema descritas abaixo.

Obs.: Para resolvê-las, o grupo deverá considerar algumas etapas:

- discutir estratégias para a resolução;
- encontrar uma solução para cada problema;
- testar essa solução (poderá ser utilizado, caso os alunos julguem necessário, o material manipulativo que estará a disposição dos alunos);
- escrever uma explicação de como foi resolvido o problema;

Situação-problema 6:

Um homem possui um terreno retangular cujo comprimento é o dobro da largura. Represente esse terreno através de desenho:

a) Suponha que o comprimento do terreno seja 20 metros, então qual seria o perímetro deste terreno? E a área deste terreno?

b) E se a largura fosse de 12 metros, qual seria o perímetro deste terreno? E a área deste terreno?

c) Sempre poderemos achar um valor para o perímetro e para a área do terreno? Justifique:

d) Complete a tabela :

| Comprimento do terreno (em metros) | Largura do terreno (em metros) | Perímetro do terreno (em metros) | Área do terreno (em metros quadrados) |
|---|---|---|---|
| | 8 | | |
| | 12,5 | | |
| 20 | | | |
| 66,5 | | | |
| | | 78 | |
| | | | 450 |

e) Escreva uma forma para representar o perímetro deste terreno, se considerarmos a largura do terreno como sendo x:

f) Existe uma maneira mais simplificada de representar esse perímetro?

g) Discuta com os colegas de seu grupo e escreva uma maneira de calcular a ÁREA desse terreno:

h) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa área?

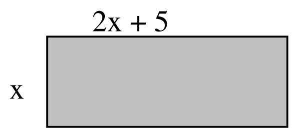
i) Esse mesmo homem quer construir no fundo do terreno uma casa que tenha a mesma largura do terreno mas que tenha um comprimento de 6 metros. Represente esta situação e indique uma forma para representar a área construída do terreno (área da casa):

j) Para qualquer valor de *x* será possível construir a casa de acordo com as regras estipuladas em i)? Justifique sua resposta:

---

Situação-problema 7:

Observe a figura abaixo:




a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa figura:

b) Existe uma expressão algébrica que representa a área da figura abaixo? Qual?

c) Suponha que o *x* vale 5 centímetros, então qual seria a área desta figura?

d) E se *x* valesse 8 centímetros?

e) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para *x* e calcular?Justifique:

---

Situação-problema 8:

Complete a tabela abaixo:

| Valor de a | Valor de b | Valor de c | a . (b + c) | a . b + c | a . b + a . c |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | | | |
| 2 | 1 | 3 | | | |
| 0 | 4 | 1 | | | |
| –1 | 8 | –2 | | | |
| 2 | –1 | 3 | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas três últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na quarta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de *a, b* e *c*, como você poderia representar a . (b + c)?

(Obs.: Atividade adaptada de: BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. Sétima série.São Paulo: FDT, 2000).

<u>2º momento:</u>

- Após todos os grupos solucionarem cada situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.
- A professora fará alguns questionamentos com a intenção de que os alunos percebam como ocorre a operação de multiplicação entre duas expressões algébricas, tendo a primeira um único termo.

*Exemplos de questionamentos feitos pela professora:*

| |
|---|
| Quanto ao problema 1<br>– Como podemos representar o perímetro do terreno usando uma expressão algébrica, considerando *x* a largura do terreno?<br>– E como podemos representar a área deste terreno usando uma expressão algébrica?<br>– É possível representar esta situação de área com o material (manipulativo)?<br>– E como iríamos representar a área da casa construída no terreno? É possível representar com este material?<br>– Como você representaria essa área, da maneira mais simplificada possível, sem o uso do material?<br>– E a área não construída, é possível representar por uma expressão algébrica? Como?<br>– Como você representaria essa área, da maneira mais simplificada possível, sem o uso do material? |
| Quanto ao problema 2<br>– Como podemos representar a área desta figura usando uma expressão algébrica?<br>– É possível representar esta situação de área com o material (manipulativo)? O que precisamos levar em consideração para que isso seja possível?<br>– Como você representaria essa área, da maneira mais simplificada possível, sem o uso do material?<br>– Poderíamos utilizar outras letras para representar as situações? Dê exemplos: |
| Quanto ao problema 3<br>– Há alguma regularidade que você pode observar em relação aos resultados das três últimas colunas?<br>– Como poderíamos representar a . (b + c) de outra forma? |

<u>3º momento:</u>

- Após, ocorrerá a sistematização dos conceitos evidenciados nas situações-problema e nos questionamentos, no caso, multiplicação de expressões algébricas por um número e multiplicação de expressões algébricas por um monômio.

Nesta etapa, os alunos irão comparar as hipóteses, anteriormente elaboradas por eles, com as evidenciadas durante os questionamentos da professora. As sistematizações feitas serão anotadas no caderno.

- Num segundo momento, a professora irá solicitar que os alunos verbalizem o que pensam sobre o que o material manipulativo representa na operação de multiplicação de expressões algébricas, procurando perceber o que tal operação significa para eles (se está associada ao cálculo de área, por exemplo). Também serão discutidas as regras de utilização do material para a multiplicação, para que estas não sejam aplicadas de forma mecânica mas que, ao serem utilizadas, fique evidente para os alunos o motivo de terem sido estabelecidas.

## AULA 10

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) desenvolva estratégias para solucionar a atividade proposta;

2) compreenda e utilize a propriedade distributiva da multiplicação para solucionar as atividades;

3) observe que o material manipulativo pode servir como um auxiliar na validação das hipóteses;

4) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação de hipóteses com a finalidade de solucionar a tarefa proposta.

**Procedimentos**

<u>1º momento:</u>

- A professora proporá aos alunos a seguinte situação:

– Possuo esta caixa, dentro dela há uma quantidade de latas e dentro de cada lata uma certa quantidade de pirulitos. Todas as latas possuem a mesma quantidade de pirulitos. Como posso representar a quantidade total de pirulitos?

*Resposta esperada:* Espera-se que os alunos observem que essa situação envolve o produto de duas grandezas, que pode ser representado pela multiplicação de duas incógnitas – exemplo: $x \cdot y$, onde $x$ representa o número de latas e $y$ o número de pirulitos em cada lata.

– Se eu retirar uma das latas da caixa, como posso representar a quantidade total de pirulitos?

*Resposta esperada*: $(x - 1) \cdot y$, onde $x$ representa o número de latas e $y$ o número de pirulitos em cada lata.

– Se eu retirar três latas da caixa, como posso representar a quantidade total de pirulitos?

*Resposta esperada*: $(x - 3) \cdot y$, onde $x$ representa o número de latas e $y$ o número de pirulitos em cada lata.

– Vamos representar estas situações no caderno procurando escrever essas multiplicações de outra maneira equivalente a esta?

*Respostas esperadas*: $(x - 1) \cdot y = xy - 1y$

$(x - 3) \cdot y = xy - 3y$

– Se eu acrescentar uma lata na caixa com a mesma quantidade de pirulitos que cada lata da caixa possui, como poderei representar a quantidade total de pirulitos?

*Resposta esperada*: $(x + 1) \cdot y$, onde *x* representa o número de latas e *y* o número de pirulitos em cada lata.

<u>2º momento</u>

- A professora proporá a atividade abaixo, que deverá ser solucionada levando-se em consideração as etapas:
  - discutir estratégias para a resolução;
  - encontrar uma solução para o problema;
  - testar essa solução (poderá ser utilizado, caso os alunos julguem necessário, o material manipulativo que estará à disposição dos alunos).

*Atividade proposta*

1) Utilizando o que vimos nas últimas aulas, escreva as expressões equivalentes a cada uma das expressões abaixo:

a) $3 \cdot (3x^2 + 2x) =$

b) $5 \cdot (2x^2 + 4x + 2) =$

c) $x \cdot (3a + 2b + c) =$

d) $2 \cdot (6a + b + 2c) =$

e) $b \cdot (2a + 3b + c) =$

f) $3 \cdot (3x^2 + 3) =$

g) $2x \cdot (6x + 4) =$

# AULA 11

**Objetivos e  expectativas**

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para solucionar a situação proposta;

2) compreenda as noções algébricas evidenciadas nas situações, no caso a operação de multiplicação de expressões algébricas e a propriedade distributiva;

trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação(ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas.

**Procedimentos**

1º momento:

- A turma será dividida em grupos .
- Será apresentada, aos grupos de alunos, a situação-problema descrita abaixo:

Situação-problema 9:

João possuía uma casa retangular cuja largura era o triplo do comprimento. Suponha que o comprimento da casa de João fosse representado por $x$. Faça um desenho esquematizando as dimensões (largura e comprimento) da casa de João:

a) Represente a situação utilizando o material:

b) Qual a área da casa de João? ______________________________________________

c) João resolveu ampliar sua casa. Ele ampliou 2 metros na largura e 1 metro no comprimento.

d) Represente as dimensões da nova casa de João:

e) Como você representaria a ação acima com o material?

f) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA a nova casa de João:

g) Existe uma expressão algébrica que representa essa área? Qual?

h) Suponha que o $x$ vale 5 metros, então qual é a área da velha casa e da nova casa de

João?

i) E se x valesse 6 metros?

j) Se a área da nova casa de João for de 70 metros quadrados, então qual será o valor de *x*?

- Para resolvê-la, o grupo deverá considerar algumas etapas:
  - discutir estratégias para a resolução;
  - encontrar uma solução para o problema;
  - escrever uma explicação de como foi resolvido o problema.

2º momento:

- Após todos os grupos trabalharem com a situação-problema, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas, avaliadas e validadas (ou não) pelo grande grupo.
- A professora sugerirá que os alunos representem a situação-problema de maneira algébrica (como representar a área da figura) e que formulem hipóteses sobre como poderia ser calculada a área se não soubéssemos o valor de x, ou seja, de forma genérica.
- As hipóteses dos alunos serão discutidas em grande grupo e anotadas por eles para posterior validação (ou não) das mesmas.

## AULA 12

### Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para solucionar as situações propostas;

2) compreenda as noções evidenciadas nas situações, no caso a operação de multiplicação de expressões algébricas e a propriedade distributiva na multiplicação;

3) observe a existência e a ocorrência da propriedade distributiva na multiplicação de números e perceba que a mesma pode ser utilizada em cálculo literal;

4) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar as tarefas propostas.

### Procedimentos

1º momento:

- A turma será dividida em grupos com no máximo 4 alunos cada. A escolha dos integrantes do grupo será a critério dos alunos (por afinidades).
- A professora retomará oralmente a situação-problema da aula anterior fazendo a representação no quadro e proporá aos alunos que calculem novamente a área do retângulo para x = 3 e representem esse cálculo passo a passo, ou seja, evidenciando todos os procedimentos numéricos.

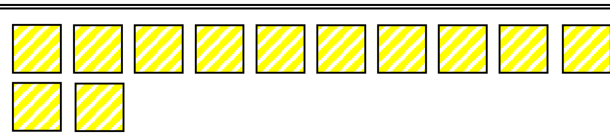
Exemplo: $(x + 1) . (3x + 2) = (3 + 1) . (3 . 3 + 2) = 4 . 11 = 44$

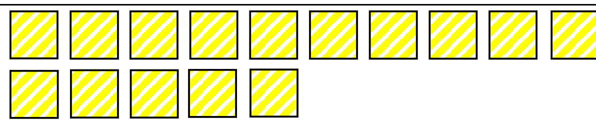
2º momento:

- A Professora proporá algumas situações numéricas para serem representadas com o material manipulativo :

*Exemplos de atividades que serão desenvolvidas com os alunos*

1) Sugerir aos alunos que representem, com o material:

| | |
|---|---|
| 12 |  |

| | |
|---|---|
| | Questionamentos:<br>– Vimos em aulas anteriores que existe outras forma de representar o 12, numericamente, utilizando a operação de adição. Cite uma outra maneira de representar o 12? (*Exemplo de resposta que pode ser sugerida: 10 + 2)* |
| 15 | <br>Questionamentos:<br>– Existe outra forma de representar o 15, numericamente, utilizando a operação de adição?<br>– Cite algumas maneiras:<br>(*Exemplo de resposta que pode ser sugerida: 10 + 5)* |
| 12<br>multiplicado<br>por<br>15 | – Como representar essa situação numericamente?<br>*Resposta esperada*: 12 x 15<br>– Qual será o resultado?<br>– Existe outra forma de representar este resultado, numericamente, utilizando uma das representações anteriores?<br>*(Exemplo de resposta que pode ser sugerida: 12.(10 + 5) ou (10 + 2) . (10 + 5)*<br>– Como poderíamos fazer o cálculo se a multiplicação fosse representada assim: (10 + 2) . (10 + 5) sem adicionar as parcelas?<br>*(os alunos sugerem maneiras de calcular e as mesmas são anotadas no quadro e analisadas por toda a turma que irá validar ou não as maneiras propostas)*<br>– O resultado obtido para (10 + 2) . (10 + 5) tem que ser o mesmo que 12 x 15? Por que? |

- Professora solicitará outras situações numéricas de modo que os alunos percebam a propriedade distributiva entre os números multiplicados.
- Questionamento: Será que esta mesma idéia que utilizamos para os números será válida se utilizarmos letras?

*(Os alunos expressarão suas opiniões em relação à pergunta. A professora deverá ter o cuidado de não validar nenhuma das hipóteses lançadas pelos alunos pois, futuramente, os mesmos poderão fazê-lo)*

- Em seguida, será proposta a seguinte atividade:

Situação-problema 10:

Complete a tabela abaixo:

| Valor de w | Valor de x | Valor de y | Valor de z | **(w+x).(y+z)** | **w.(y+z)+x.(y+z)** | **w.y+x.z** | **w.y+w.z+x.y+x.z** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | | | | |
| 2 | 4 | 0 | 3 | | | | |
| 3 | –1 | 4 | 1 | | | | |
| –1 | 5 | 8 | –2 | | | | |
| 2 | –2 | –1 | 3 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na quinta coluna, na sexta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de *w, x,y* e *z*, como você poderia representar (w + x) . (y + z)?

(Obs.: Atividade adaptada de: BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. Sétima série.São Paulo: FDT, 2000).

- Após todos os grupos resolverem a atividade, será feita a socialização das respostas, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas e analisadas pelo grande grupo. Em seguida serão esboçadas algumas conclusões referentes à propriedade distributiva e sua contribuição na multiplicação de expressões algébricas (sem necessariamente utilizar esta nomenclatura).
- As conclusões serão anotadas no caderno bem como um breve resumo da formalização do assunto, ainda utilizando o vocabulário do aluno.

## AULA 13

**Objetivos e expectativas**

Que o aluno:

1) utilize-se dos conceitos apresentados na aula para solucionar as situação propostas;

2) elabore estratégias para a multiplicação com negativos (na primeira atividade da aula, item *f*);

3) estabeleça princípios para a multiplicação de expressões algébricas envolvendo negativos e para a utilização do material manipulativo com esta mesma finalidade;

4) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, formulação, comparação e validação de hipóteses com a finalidade de solucionar a tarefa proposta;

5) utilize-se de seus conhecimentos geométricos, algébricos e de utilização do material manipulativo.

**Procedimentos**

<u>1º momento:</u>

- A professora proporá aos grupos de alunos algumas atividades :

1. Utilizando o que já estudamos, indique a expressão algébrica equivalente a :

a) $(x + 2) . (x + 5) =$

b) $(2x + 3) . (x + 1) =$

c) $(x + 1) . ( x + 3) =$

d) $(y + 1) . ( y + 1) =$

e) $(3x + 2) . (4x + 1) =$

f) $(x +1) . (x – 1) =$

- Para responder os itens, os alunos poderão fazer uso do material manipulativo a fim de representar a figura e observar a área.
- Após todos os grupos resolverem a atividade, será feita a socialização, em grande grupo, na qual as respostas dadas serão discutidas e avaliadas pelo grande grupo.

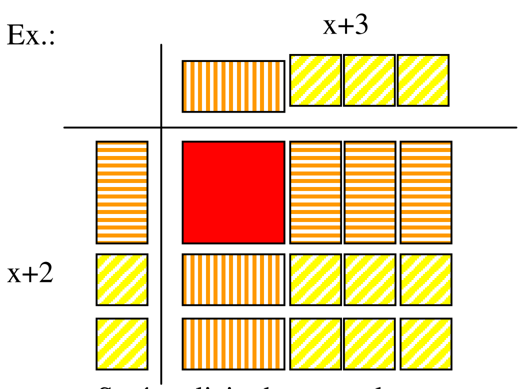
Obs.: Uma discussão importante que será lançada pela professora no momento da socialização é a da multiplicação de negativos (como no item *f*).

<u>2º momento:</u>

- Os grupos irão elaborar hipóteses sobre como multiplicar expressões algébricas quando estas possuem termos negativos.
- A professora solicitará que tais hipóteses sejam pensadas e representadas com o material manipulativo.
- A professora proporá uma discussão sobre multiplicação de expressões algébricas e explicará aos alunos que existem várias representações para a multiplicação entre expressões algébricas[46].
- O primeiro caso já é conhecido, então apenas irão relembrar:

*Utilizando o material manipulativo*: associa-se o resultado à soma das áreas dos retângulos que compõe o retângulo cujos lados são as expressões algébricas dadas.

Ex.:




- Será solicitado aos alunos que representem com o material a multiplicação $(x + 2) . (x – 1)$.

Obs.: Inicialmente a professora não fará nenhum comentário sobre o que fazer com o termo negativo.

- Após os grupos fazerem a representação (a seu modo), serão socializadas as maneiras encontradas e então será ressaltado que quando a multiplicação envolver valores negativos ou variáveis precedidas do sinal negativo é necessário que se leve em consideração, além da formação do retângulo, a regra de que o negativo indica "virar" a peça.
- Também será lembrado, pela professora, como ocorre a multiplicação de números

---

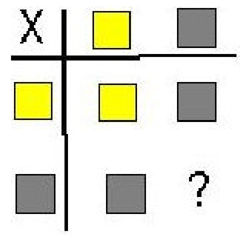
[46] Segundo **Donna Roberts (2006)**, há quatro métodos para efetuar-se a multiplicação entre expressões algébricas.São eles:

a) Método usando material: Associa o resultado à área do retângulo formado cujos lados são os binômios dados. Usa-se o material concreto.
b) Método da grade: para multiplicar binômios por esse método coloca-se um binômio no topo da grade (separando cada elemento) e o outro no lado. Então, multiplica-se os elementos das linhas com os elementos das colunas.
c) Método vertical: que consiste na utilização do algoritmo convencional para multiplicação.
d) Método **"FOIL"** (multiply **F**irst **O**uter **I**nner **L**ast), que nada mais é senão a utilização da propriedade distributiva.

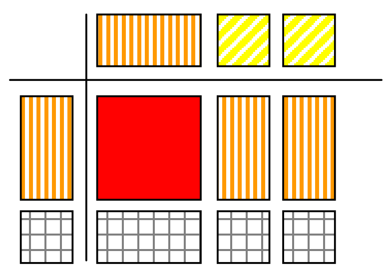
inteiros.

– Relembrando a multiplicação de inteiros, temos que 1 x 1 significa uma vez 1 que é 1; e 1 x (–1) significa uma vez (–1), que é (–1). Ao ir lembrando, a professora irá fazendo a representação com o material manipulativo (no quadro).

Assim sendo, com o uso do material, podemos observar que (–1) . (–1) terá que ser + 1, pois iremos virar a peça que já está virada.

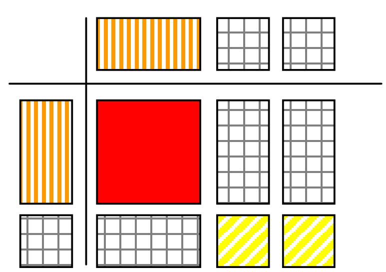



Então, para fazermos (x + 2) . (x – 1) usando a representação do material, teríamos que lembrar que na linha ou coluna da peça que indica o termo negativo as peças deverão ser "viradas", ou seja, teremos que "virar" as peças que serão o resultado da multiplicação pela peça negativa. Por exemplo:



Teríamos então que: $(x + 2) . (x – 1) = x^2 + 2x – x – 2 = x^2 + x – 2$

No caso do negativo com negativo, podemos tomar como exemplo: (x – 2) . (x – 1).



Teríamos então que: $(x – 2) . (x – 1) = x^2 – 2x – x + 2 = x^2 – 3x + 2$

Neste caso teríamos que "virar" o que estava virado e, portanto, obteremos o positivo.

- A professora proporá aos grupos de alunos a atividade:

1. Utilizando uma das maneiras estudadas na aula, indique a expressão algébrica equivalente:

   a) $(x + 2) . (x + 5) =$
   b) $(2x + 3) . (x - 1) =$
   c) $(x + 1) . ( x - 1) =$
   d) $(x + 1) . ( x + 1) =$
   e) $(x -1) . ( x - 1) =$
   f) $(3x - 2) . (4x - 1) =$

Observação: Para resolver a atividade ficará a critério dos alunos o uso do material manipulativo ou não.

# AULA 14

## Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) observe a existência de diferentes interpretações para a operação de multiplicação entre expressões algébricas e que faça uso de, pelo menos, uma delas para a resolução de tal operação nas atividades propostas;

2) desenvolva diferentes estratégias para solucionar as situações propostas;

3) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, formulação, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de solucionar a tarefa proposta;

4) utilize-se de seus conhecimentos geométricos e algébricos.

## Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- A professora irá retomar, oralmente, a aula anterior relembrando as combinações referentes à multiplicação de expressões algébricas envolvendo sinais ou termos negativos, bem como a representação da mesma utilizando material manipulativo.
- Em seguida, será trabalhada uma outra representação dada para a multiplicação de expressões algébricas: *o método da grade*.

A professora irá explicar que este modo utilizado para multiplicar expressões algébricas é bem semelhante ao do material manipulativo, porém não usa o material, apenas a "idéia" dele.

Para multiplicar duas expressões algébricas, por exemplo (x + 3) por (x + 2), coloca-se a primeira expressão no topo da grade (separando cada elemento) e a outra no lado. Então, multiplicam-se os elementos das linhas pelos elementos das colunas.

Então teríamos (x + 3) . (x + 2) representado por

| | x | 3 |
|---|---|---|
| 2 | 2x | 6 |
| x | (x)(x) | 3x |

Assim, a resposta obtida será: (x) . (x) + 2x + 3x + 6 = $x^2$ + 2x + 3x + 6 = $x^2$ + 5x + 6

<u>2º momento:</u>

- A professora irá retomar, oralmente, o algoritmo da multiplicação de números.
- Em seguida a professora questionará se o mesmo poderia ser feito com as expressões algébricas. Assim sendo, o próximo método a ser trabalhado com os alunos é o *método vertical*: que consiste na utilização do algoritmo convencional para multiplicação.

Por exemplo, para efetuarmos (x + 3) . (x + 2), faríamos uso do algoritmo da multiplicação, já conhecido e utilizado pelos alunos para realizar operações com números.

$$\begin{array}{rr} & x + 3 \\ \times & \underline{x + 2} \\ & 2x + 6 \\ + & \underline{x^2 + 3x \phantom{+ 6}} \\ & x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

Cabe aqui ressaltar aos alunos que os termos semelhantes devem estar alinhados para podermos efetuar as adições e subtrações mais facilmente.

<u>3º momento:</u>

- A professora comentará sobre o algoritmo visto e comentará que existe uma outra representação ainda. Será então trabalhado com os alunos o método conhecido como "FOIL" (multiply **F**irst **O**uter **I**nner **L**ast), que nada mais é senão a utilização da propriedade distributiva, tal método será denominado em sala "método distributivo".

Será ressaltado que cada termo da primeira expressão algébrica deverá multiplicar cada um dos termos da segunda expressão algébrica. Como no exemplo:

$$(x+3) \quad (x+2) \qquad = \ x^2 + 2x + 3x + 6 \ = \ x^2 + 5x + 6$$

<u>4º momento:</u>

- Serão propostas algumas multiplicações envolvendo expressões algébricas que serão resolvidas, com a utilização dos dois métodos, em grande grupo, juntamente com a professora, e os resultados serão anotados no quadro (pela professora) e registrado no caderno pelos alunos.

Exemplos de multiplicações sugeridas:

Utilizando uma das maneiras estudadas na aula, indique a expressão algébrica equivalente:

a) $(x + 2) . (x + 5) =$

b) $(2x + 3) . (x - 1) =$

c) $(x + 1) . ( x - 1) =$

d) $(x + 1) . ( x + 1) =$

e) $(x -1) . ( x - 1) =$

f) $(3x - 2) . (4x - 1) =$

## AULA 15

### Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) desenvolva diferentes estratégias para solucionar as situações propostas;

2) utilize-se de seus conhecimentos geométricos e algébricos;

3) perceba os conceitos algébricos evidenciados pelas situações-problema, no caso, a operação de multiplicação de expressões algébricas, conceito de área e perímetro de retângulos e a propriedade distributiva.

4) perceba que, no caso da segunda situação proposta, não é possível apenas multiplicar duas expressões algébricas para obter a área da figura em questão;

5) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação (ou não) de hipóteses com a finalidade de representar as operações propostas.

### Procedimentos

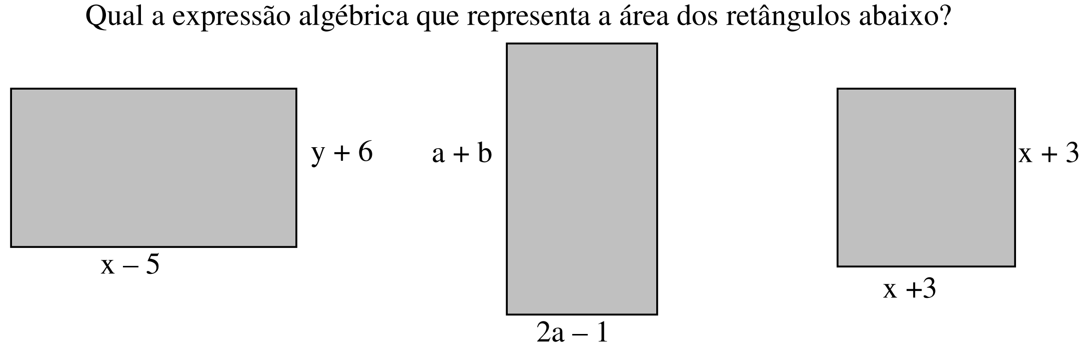
1º momento:

- Serão propostas as atividades descritas abaixo.

Para a solução das mesmas, os alunos deverão utilizar algum dos modos de resolução de multiplicação de expressões algébricas apresentados nas aulas anteriores.

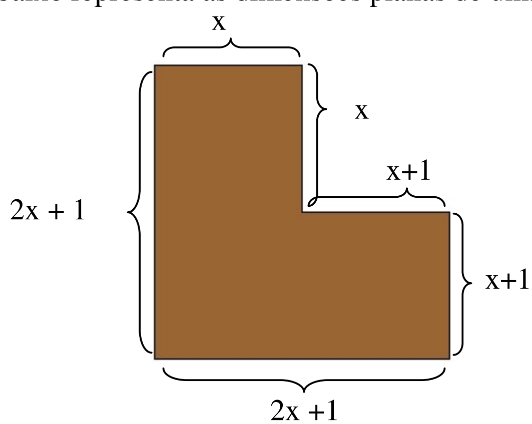
Situação-problema 11:

Qual a expressão algébrica que representa a área dos retângulos abaixo?



Situação-problema 12:

A figura abaixo representa as dimensões planas de uma sala.




a) Discuta com os colegas de seu grupo e descreva uma maneira de calcular a ÁREA dessa sala:

b) Suponha que o *x* vale 5 metros, então qual seria a área da sala?

c) E se *x* valesse 8 metros?

d) Sempre poderemos achar a área desta figura, isto é, podemos escolher qualquer valor para *x* e calcular?Justifique:

e) Podemos utilizar 1 metro para o valor de *x*? Justifique:

f) Complete a tabela :

| Valor atribuído ao x | Área da figura |
|---|---|
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6,5 | |
| 7 | |
| | 86 |

g) É possível representar a área dessa figura sem atribuir valores específicos para x? Como?

h) Existe uma maneira mais simplificada de representar essa área? Qual?

Observação: Nesta atividade o principal objetivo é verificar quais as estratégias os alunos estabelecem para o cálculo da área e não o resultado em si.

<u>Situação-problema 13</u>:

Cada grupo deverá “inventar” uma figura cujos lados sejam expressões algébricas para que os colegas dos outros grupos possam encontrar a área da mesma.

Observação: O grupo que está propondo a figura deverá saber a resposta para o problema que lançou pois terá que corrigir, posteriormente, as respostas dadas pelos colegas.

- Após todos resolverem a situação-problema proposta pelos grupos, o grupo proponente irá recolher e corrigir a atividade do grupo que resolveu.

# AULA 16

## Objetivos e expectativas

Que o aluno:

1) compreenda os conceitos envolvidos nas atividades, a saber, potenciação de expressões algébricas;

2) perceba a potenciação como produto de fatores iguais, sendo esses fatores números ou expressões algébricas;

3) trabalhe em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação de hipóteses.

## Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- A professora indagará aos alunos:

– Qual o significado de $5^2$?

– O que significa $x^2$?

– E a expressão algébrica $(x + y)^2$?

(Obs.: Espera-se que os alunos identifiquem a operação potenciação como produto de fatores iguais, por ser um conceito já estudado em anos anteriores. Por exemplo, que $5^2 = 5 . 5$; que $x^2 = x . x$ e que $(x + y)^2 = (x + y)^2 \cdot (x + y)^2$).

Caso os alunos não percebam a potenciação como produto de fatores iguais, a professora irá fazer novos questionamentos, como por exemplo: “Como posso calcular $5^2$? Se eu tiver uma quadrado de lado 5, como calcularei sua área?”

- Após, serão propostas as atividades descritas abaixo.

Para a solução das mesmas, os alunos deverão utilizar algum dos modos de resolução de multiplicação de expressões algébricas apresentados nas últimas aulas.

<u>Situação-problema 14</u>:

Complete a tabela abaixo:

| Valor de x | Valor de y | $(x + y)^2$ | $x^2 + y^2$ | $x . (x+ y) + y. (x + y)$ | $x^2 +2.x.y + y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | 3 | | | | |
| – 2 | – 6 | | | | |
| 0 | 2 | | | | |
| 1 | 8 | | | | |
| 2 | –1 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na terceira coluna, na quinta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de x e y, como você poderia representar (x + y)2?

(Obs.: Atividade adaptada de: BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita** assim. Sétima série.São Paulo: FDT, 2000)

Situação-problema 15:

Complete a tabela abaixo:

| Valor de x | Valor de y | $(x - y)^2$ | $x^2 - y^2$ | $x . (x - y) - y. (x - y)$ | $x^2 - 2.x.y + y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | |
| 2 | 6 | | | | |
| 3 | 0 | | | | |
| –1 | 8 | | | | |
| 2 | –1 | | | | |

a) O que você pode observar e afirmar em relação aos resultados obtidos nas quatro últimas colunas da tabela?

b) O que você pode afirmar quanto aos resultados obtidos na terceira coluna, na quinta coluna e na última?

c) Se não soubéssemos o valor de *x* e *y*, como você poderia representar $(x - y)^2$?

(Obs.: Atividade adaptada de: BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim**. Sétima série.São Paulo: FDT, 2000)

Situação-problema 16:

Existe uma forma mais simples de escrever este polinômio? Se sim, qual?

$$x \ . \ (x + 3x - 2) + x^2 + (x + 1) . (x - 2)$$

- A correção das atividades propostas será realizada no quadro pelos alunos.

# AULA 17

## Objetivos e  expectativas

Que o aluno:

1) Responda as questões propostas evidenciando os conceitos estudados durante o período de implementação da proposta didática

## Procedimentos

<u>1º momento:</u>

- Tendo em vista uma avaliação do trabalho realizado seja proposto aos alunos a seguintes questões de avaliação (descritas abaixo).

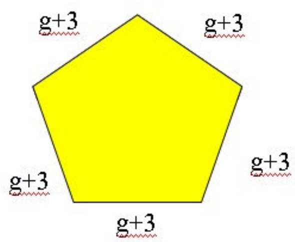
Tais questões serão respondidas individualmente. Caso julgue necessário, o aluno poderá fazer uso do material manipulativo que estará disponível na sala de aula.

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Nome: ______________________________________________ Turma: __________ Data: ________

_____________________________________________________________________________________

1) Como você representaria o perímetro desta figura?



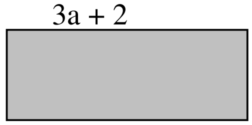

Se a letra g vale 10 centímetros, então qual será o perímetro da figura acima?

_____________________________________________________________________________________

2) Qual a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo?

3a + 2

a



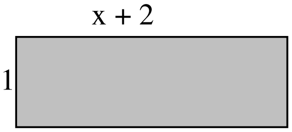
Expressão algébrica: ______________________________________

Se **a** valer  5, qual será a área da figura? _________________________

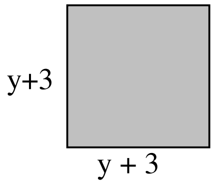
3) Qual a expressão algébrica que representa a área da figura abaixo?

x + 2

Expressão algébrica: _____________________ x+1



4) Qual a expressão algébrica que representa a área do quadrado abaixo?




Expressão algébrica: ___________________________

Há uma outra expressão algébrica que represente essa área?Qual?

---

5) Existe uma forma mais simples de escrever este expressão algébrica? Se sim, qual?

$$x\ .\ (2x + x - 1) + (x + 1).(x + 1)$$

---

6) Resolva as operações indicadas:

| | |
|---|---|
| a) $3 + 8 - 15 + 9 =$ | g) $2x + 3y - 5x + 9 + y + 6x - 5y - 5=$ |
| b) $5.(4 + 7) =$ | h) $-3x\ .(2x + 5x^2) =$ |
| c) $(x + 2).(x + 3) =$ | i) $(8 - 5)^2 =$ |
| d) $(2x + 4).(5 + 3x) =$ | j) $(3 - c)^2 =$ |
| e) $(x + 4).(x + y) =$ | l) $(y + c)^2 =$ |
| f) $(x - 1).(x + 3) =$ | m) $(y - 5).(y - 6) =$ |