

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

**EFEITOS DE GRADIENTES PERPENDICULARES NA AMPLIFICAÇÃO
DA RADIAÇÃO QUILOMÉTRICA DAS AURORAS[‡]**

JOEL PAVAN

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Porto Alegre

2007

[‡]Trabalho realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta etapa, em especial:

- À Professora Ruth, pela presença sempre vibrante;
- Ao Professor Ziebell, pela competência demonstrada na orientação deste trabalho.

O erudito soma, o sábio subtrai ...

(Desconhecido)

Resumo

A influência do caráter inhomogêneo da região-fonte na amplificação da Radiação Quilométrica das Auroras é investigada. Inicialmente é feita uma revisão de trabalhos relevantes publicados a respeito do mesmo tema geral, tanto os que concernem aos dados observacionais como os que concernem aos modelos teóricos e simulações numéricas. Esta revisão é precedida pelo estabelecimento de conceitos e definições pertinentes ao tema. São consideradas duas abordagens distintas na determinação da amplificação da radiação na região-fonte. A primeira considera o plasma localmente homogêneo, enquanto a segunda toma em conta, explicitamente, a contribuição dos gradientes dos parâmetros do plasma. A amplificação da radiação é determinada pela avaliação do tensor dielétrico do plasma e pela evolução da radiação através do estudo de traçado de raios. Os parâmetros do plasma são obtidos através de uma formulação autoconsistente que toma em conta uma queda de potencial elétrico ao longo das linhas de campo geomagnético. Utiliza-se um modelo de lâmina auroral em que o campo magnético ambiente é considerado localmente homogêneo. O modelo teórico subjacente adotado é o do maser de elétron-cíclotron. O principal resultado obtido revela uma diminuição na amplificação final por um fator em torno de três, quando os gradientes dos parâmetros do plasma são considerados explicitamente. Este resultado pode ter implicações na capacidade do maser de elétron-cíclotron em explicar os níveis de radiação mais elevados observados.

Palavras-chave:

Radiação Quilométrica das Auroras - amplificação - inhomogeneidades

Abstract

The influence from source region inhomogeneous character on amplification of Auroral Kilometric Radiation is investigated. Firstly, a review over relevant works published about the same general theme is made, concerning about observational data as well theoretical models and numerical simulations. This review is preceded by the establishment of definitions and concepts related to the theme. Two distinct approaches are considered in determining the amplification of radiation across the source region. First approach takes the plasma as locally homogeneous, while second approach account, explicitly, for gradients on plasma parameters. The amplification is obtained through evaluation of the dielectric tensor and the evolution of radiation through ray tracing. Plasma parameters are obtained using a self-consistent formulation which account for an electric potential drop along geomagnetic field lines. An auroral slab model is used where the ambient magnetic field is taken as locally homogeneous. The subjacent theoretical model adopted is the electron-cyclotron maser. The main result obtained reveals a reduction on final amplification by a factor about three, when plasma parameters gradients are explicitly accounted. This finding may have implications on capability of electron-cyclotron maser for explanation the most intense levels of radiation observed.

Keywords:

Auroral Kilometric Radiation - amplification - inhomogeneities

Lista de Figuras

2.1	À esquerda: Estrutura da magnetosfera [24]. À direita: Modelo de correntes [2].	17
2.2	À esquerda: Potencial, campo elétrico e densidade de carga [12]. À direita: Distribuição de elétrons e íons no espaço de fase [69].	18
3.1	À esquerda: Registros de ocorrência da AKR [43]. À direita: Linearidade entre campo elétrico e magnético (emissão eletromagnética) [43].	36
3.2	À esquerda: Espectro de potência da AKR [43]. À direita: Distribuição radial do fluxo de potência [43].	37
3.3	À esquerda: Distribuição de ocorrências em tempo local e distância radial [43]. À direita: Percentual de ocorrências em latitude magnética e distância radial [43].	38
3.4	À esquerda: Percentagem de ocorrência em latitude magnética e tempo local [43]. À direita: Correlação entre AKR e o índice AE [43].	38
3.5	Correlação da AKR com eventos de auroras [43].	39
3.6	À esquerda: Precipitação eletrônica [42]. À direita: Eficiência de conversão [42].	40
3.7	À esquerda: Perfil típico da cavidade auroral [18]. À direita: Razão entre as frequências de plasma e cíclotron eletrônicas na cavidade auroral [18].	42
3.8	Cavidade e subcavidades na região-fonte de AKR [70].	44
3.9	À esquerda: Conjunto de dados do FAST [52]. À direita: Respectiva estrutura de potencial inferida [52].	45
3.10	À esquerda: Conjunto de dados do FAST [30]. À direita: (a) Medida da AKR (b) Distribuição eletrônica [25].	47
3.11	Estrutura da região de corrente ascendente, onde evidenciam-se as dimensões características e a divisão da região de aceleração em alta e baixa altitude [32].	55
3.12	Perfil de densidade para $a = 1$ [21].	63
3.13	Aprisionamento da radiação proposto sobre um modelo de lâmina auroral, permitindo maior amplificação da AKR [80].	64

3.14	À esquerda: Taxa de crescimento como função da frequência [51]. À direita: Taxa de crescimento como função da densidade [51].	65
3.15	À esquerda: Distância de amplificação obtida com parâmetros arbitrários [51]. À direita: Distância de amplificação obtida com parâmetros fornecidos pelo modelo [51].	68
3.16	À esquerda: Taxa de crescimento [59]. À direita: Respectivas curvas de ressonância sobrepostas à distribuição eletrônica [59].	70
3.17	Espectrograma da AKR obtido pelo ISEE 1, mostrando as componentes discretas [19].	71
3.18	À esquerda: Ilustração dos sítios de ressonância [19]. À direita: Geração de multipletos em diferentes altitudes [19].	72
3.19	À esquerda: Refletores verticalmente convergentes [19]. À direita: Relação entre o índice de refração e o gradiente de densidade na borda [19].	74
3.20	À esquerda: Crescimento temporal [53]. À direita: Crescimento espacial [53].	75
3.21	À esquerda: Tempo de percurso para elétrons [13]. À direita: Tempo de percurso para íons [13].	76
3.22	À esquerda: Espectro de potência do campo elétrico paralelo [13]. À direita: Espectro de potência do campo elétrico perpendicular [13].	77
3.23	Possível forma da estrutura aceleradora auroral [13].	79
3.24	Geração da AKR com e sem ignição externa [20].	81
3.25	À esquerda: C-invertido, (a) estado inicial (b) estado final (c) média entre estados final e inicial [65]. À direita: Cone-de-perda, (a) estado inicial (b) estado final [65].	83
3.26	Simulação da formação e evolução de camadas-duplas [78].	88
3.27	Estrutura fina da AKR [78].	89
3.28	Estruturas de campo elétrico em pequena escala [78].	91
3.29	Dinâmica das vacâncias eletrônicas [78].	92
3.30	Emissão e absorção decorrentes das vacâncias eletrônicas [78].	93
3.31	Linhas de emissão e absorção medidas (com menor resolução que a figura 3.27) [78].	95

5.1	Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a frequência de oscilação (normalizada à frequência de cíclotron eletrônica), ombar. Valores utilizados: ombar=1,008; npari=0,16690; lar=500km; lar2=50km; b=0,5; delta=10 e z0=2,5R _T . Também para ombar=1,002; ombar=1,010 e ombar=1,012.	118
5.2	Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a componente paralela inicial do índice de refração, npari. Para npari=0,07069; npari=0,10690; npari=0,13690 e npari=0,16690. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.	119
5.3	Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a altitude inicial do raio, z0. Para z0=2,4R _T ; z0=2,5R _T ; z0=2,6R _T e z0=2,7R _T . Demais parâmetros como na Fig. 5.1.	120
5.4	Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a variação de densidade entre o centro e a borda da cavidade, delta. Para delta=7; delta=8; delta=9 e delta=10. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.	121
5.5	Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a largura da cavidade, lar. Para lar=200km; lar=300km; lar=400km e lar=500km. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.	122
5.6	Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a largura das subcavidades, lar2. Para lar2=50km; lar2=75km; lar2=100km e lar2=125km. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.	123
5.7	Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a magnitude das subinogeneidades, b. Para b=1; b=0,5; b=0,1 e b=0,01. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.	124
5.8	Acima: Dependência da trajetória do raio com a componente paralela inicial do índice de refração, npari. Abaixo: Dependência da contribuição específica de cada tipo de inogeneidade, densidade, temperatura e velocidade de deriva, com diferentes parâmetros (b=0,1). Demais parâmetros como na Fig. 5.1.	125

Sumário

1	Introdução	12
2	Conceitos e definições	15
2.1	Magnetosfera/Ionosfera	15
2.2	Tempestades e subtempestades magnéticas	16
2.3	Camadas-duplas	17
2.4	Propagação de ondas em plasmas	20
2.5	Modos de oscilação	22
2.6	Interação onda-partícula	27
2.7	Teorema de Poynting	28
2.8	Fator de amplificação	30
2.9	Espelhamento magnético	30
2.10	Traçado de raios	32
3	Caracterização da AKR e da região-fonte	34
3.1	Dados observacionais	35
3.2	Modelos teóricos e simulações numéricas	57
3.3	Panorama atual	85
3.3.1	Platô na distribuição eletrônica	85
3.3.2	Geração das camadas-duplas	87
3.3.3	Estrutura fina espectral	88
3.3.4	Vacâncias no espaço de fase	90
3.3.5	Radiação das vacâncias eletrônicas	91
3.4	Sumário	95
4	O tensor dielétrico	96
4.1	Plasma homogêneo	96

4.2	Plasma inhomogêneo	100
4.2.1	O tensor dielétrico efetivo para um plasma inhomogêneo	104
4.3	Adaptações	105
4.3.1	Relação de dispersão	105
4.3.2	Propagação no plano xz	106
4.3.3	Troca de variáveis	107
4.3.4	Função-modelo	109
4.3.5	Normalização	110
4.4	Expressões finais para o tensor dielétrico	110
5	Resultados e conclusões	113
A	Avaliação das componentes do tensor dielétrico	126
A.1	Avaliação de χ_{yz}	126
A.2	Avaliação de χ_{zz}	129
A.3	Propagação no plano xz : troca do índice de soma	130
A.3.1	Avaliação de χ_{yz}	131
A.3.2	Avaliação de χ_{zz}	132
A.4	Avaliação da integral $J(n, m, h, s; g_\alpha)$	133
A.4.1	O caso $g_\alpha = f_\alpha$	134
A.4.2	O caso $g_\alpha = (c/\omega)f'_\alpha$	135
A.4.3	Avaliação de $L_{ns}(j)$	141
A.4.4	Desenvolvimentos adicionais em $L_{ns}(j)$ e $J(n, m, h, s; g_\alpha)$	143
A.5	Operadores diferenciais aplicados à função distribuição modelo	151
A.6	Derivadas espaciais aplicadas à função distribuição modelo	152
A.7	Notação alternativa para as componentes χ_{ij}	153
A.7.1	Definição alternativa para a componente ε_{zz}	154
A.7.2	Caso particular: elétrons	156
A.8	Termo adicional na contribuição inhomogênea da componente χ_{yz}	161
A.9	Expansões úteis	162

Capítulo 1

Introdução

Observações locais de ondas eletromagnéticas e partículas de plasmas na magnetosfera¹ terrestre e no espaço interplanetário tornaram-se possíveis com o avanço da tecnologia de satélites no final dos anos 50 e início dos anos 60.

Muitas dessas observações são discutidas sob o abrangente tópico das relações solares-terrestres, que representam a influência do Sol e da atividade solar sobre a Terra e o ambiente terrestre. As auroras constituem um exemplo primordial dessas relações: podem ser facilmente detectadas no solo, mesmo sem instrumentação, e estão estreitamente correlacionadas à atividade solar.

Todavia, os grandes avanços na compreensão das relações solares-terrestres demandaram observações à bordo de foguetes e satélites: medidas de ondas eletromagnéticas e partículas na magnetosfera, ionosfera, espaço interplanetário e, especialmente, medidas de radiação eletromagnética com frequências indetectáveis a partir do solo.

Essa última característica é apresentada pela Radiação Quilométrica das Auroras ou AKR (acrônimo de "Auroral Kilometric Radiation"): uma das mais intensas emissões eletromagnéticas produzidas na magnetosfera terrestre e objeto de estudo do presente trabalho.

O mecanismo de geração da AKR, conforme o entendimento consensual estabelecido, requer condições peculiares, mas não improváveis; tanto no que diz respeito a Terra, como no que diz respeito a outros objetos astrofísicos. De modo que, a compreensão dos processos envolvidos na geração da AKR, sobre os quais é possível obter informações na região-fonte, pode permitir a compreensão de fenômenos envolvendo objetos físicos distantes, dos quais a única fonte de informação é a radiação eletromagnética que emitem. Este fato constitui aqui a motivação para o estudo da AKR.

¹Termos e fatos citados neste capítulo são esclarecidos nos capítulos seguintes.

A nomenclatura evidencia propriedades da AKR: seu comprimento de onda é da ordem de quilômetros e sua manifestação está estreitamente associada aos eventos de auroras. Por sua vez, a região-fonte de AKR apresenta como característica relevante inomogeneidades diversas, e é este aspecto que constitui a ênfase abordada aqui.

O presente trabalho está largamente assentado sobre trabalhos anteriores desenvolvidos pelo Grupo de Física de Plasmas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Entre eles, destacam-se os estudos feitos por Caldela Filho[†] [16], publicados como Ref. [17]; Gaelzer [37], publicados como Refs. [38, 39]; e Cavalcanti [21], publicados como Ref. [22].

Em Caldela Filho et al. [17] é determinada uma forma geral para o tensor dielétrico de um plasma fracamente inomogêneo. O tensor dielétrico obtido, baseado na abordagem proposta por Beskin et al. (1987) [9], exhibe propriedades de simetria satisfatórias e é apresentado como o tensor dielétrico a ser utilizado para uma adequada descrição da troca de energia entre ondas eletromagnéticas e partículas carregadas em um plasma cujos parâmetros sejam fracamente inomogêneos, eliminando inconsistências presentes em formulações anteriores encontradas na literatura.

Em Gaelzer et al. (1992,1994) [38, 39] é desenvolvido e aplicado um modelo que toma em conta as dimensões finitas da região onde é gerada a AKR. Esses trabalhos consideram a evolução da radiação na região-fonte, o que é feito através de um estudo de traçado de raios ("Ray Tracing"), e que permite avaliar a amplificação da radiação à medida que se propaga em regiões do plasma com diferentes parâmetros, como temperatura e densidade. A determinação desses parâmetros é feita baseada no trabalho de Chiu e Schulz (1978) [23], onde é proposto um modelo autoconsistente para as distribuições de partículas ao longo das linhas de campo geomagnético, a partir das quais é possível obter os parâmetros de interesse. A consideração da finitude da região-fonte de AKR produziu como resultado níveis de amplificação superiores aos obtidos em trabalhos encontrados na literatura onde a região-fonte é tratada como sendo infinita. Em adição, a Ref. [37] apresenta uma excelente revisão de dados observacionais e modelos teóricos, conhecidos até o início dos anos 90.

Em Cavalcanti et al. (1996) [22] o modelo utilizado em Gaelzer et al. (1992,1994) é aprimorado pela consideração de "subinomegeneidades", respaldadas por dados observacionais, e da emissividade do plasma. A inclusão de ambos os aspectos na evolução da radiação através da região-fonte produziu aumento dos níveis de amplificação da AKR, em relação aos obtidos sem as respectivas inclusões; sendo que as subinomegeneidades apresentaram uma contribuição mais significativa para esse aumento do que a emissividade do plasma.

Nos estudos de Gaelzer e Cavalcanti, o traçado de raios é considerado sob a abordagem

localmente homogênea, ou seja, aos parâmetros do plasma são atribuídos valores que variam ponto a ponto, mas em cada ponto esses valores são determinados considerando o plasma como homogêneo.

Outra abordagem é possível ao tomar em conta, explicitamente, os gradientes dos parâmetros do plasma. Esta abordagem é implementada pelo presente trabalho, através da utilização do tensor dielétrico obtido por Caldela Filho, e sua particularização para o caso da AKR. É utilizado, ainda, o modelo autoconsistente para a determinação dos parâmetros da região-fonte, bem como os cálculos de traçado de raios, desenvolvidos por Gaelzer; e os perfis de parâmetros descrevendo subinogeneidades, desenvolvidos por Cavalcanti.

Aqui pretende-se determinar a importância da inclusão de inogeneidades explícitas na amplificação da AKR na região-fonte. Para tanto, organiza-se o estudo na forma seguinte.

No capítulo 2 são expostos conceitos e definições pertinentes à compreensão dos desenvolvimentos posteriores. A intenção não é a de tratar demoradamente cada tópico, mas, de forma axiomática, prover a informação necessária para que o trabalho seja razoavelmente "autocontido".

O capítulo 3 é dividido em três partes principais. A primeira parte faz uma revisão de dados observacionais obtidos por satélites, foguetes e mesmo medidas tomadas a partir do solo, que serviram de base para a compreensão dos processos envolvidos na geração da AKR. A apresentação segue uma *ordem cronológica*, de forma a evidenciar a evolução do conhecimento, bem como os erros e acertos, inerentes à investigação científica. A segunda parte *reinicia* a ordem cronológica, apresentando agora modelos teóricos propostos como explicação da AKR e simulações numéricas que procuram verificá-los. A terceira parte apresenta um panorama das descobertas recentes e do conhecimento atual, acerca da AKR.

No capítulo 4 são apresentados os desenvolvimentos matemáticos necessários para a determinação do tensor dielétrico para um plasma inogêneo, bem como uma discussão sobre a abordagem adequada a um plasma inogêneo. Ao final do capítulo constam as expressões finais obtidas para o tensor dielétrico, sendo que um maior detalhamento dos passos algébricos envolvidos é apresentado no Apêndice A.

Por fim, o capítulo 5 apresenta resultados e conclusões obtidas no presente trabalho.

Aspectos desenvolvidos no presente trabalho também integram um artigo aceito para publicação em periódico especializado [61].

Capítulo 2

Conceitos e definições

Este capítulo tem por objetivo apresentar conceitos e definições referentes ao texto ulterior. As descrições aqui pretendem ser sumárias, portanto, sem a intenção de esgotar os respectivos assuntos.

2.1 Magnetosfera/Ionosfera

- A *magnetosfera* é definida como a região espacial onde o movimento das partículas é governado pelo campo geomagnético ¹.
- A *ionosfera* apresenta uma extensão variável, iniciando aproximadamente à altitude de 70km [47] e se estendendo por algumas centenas de quilômetros, sendo freqüentemente descrita como a base da magnetosfera. Devido à sua elevada densidade e à existência de uma componente neutra significativa, a ionosfera não obedece à definição de magnetosfera. Ainda assim, é vital para a compreensão da magnetosfera por prover uma base altamente condutora com a qual pode ser explicado o acoplamento magnetosfera-ionosfera (M-I).
- A *magnetopausa* é definida pela região em que há equilíbrio entre a pressão cinética do vento solar e a pressão magnética do campo geomagnético. Ela divide dois regimes: plasma magnetosférico e plasma solar.
- A *plasmapausa* é a região que limita a plasmaesfera. A *plasmaesfera* constitui uma região de densidade acentuada de partículas, que se estende até uma altitude de 3 a 5 raios terrestres. A plasmapausa separa duas regiões de correntes distintas: correntes da plasmaesfera e da lâmina de plasma.

¹Esta definição pode ser estendida para o Sol ou outras estrelas e planetas [47].

- A *lâmina de plasma* delimita duas regiões com campos magnéticos opostos e se estende por dezenas de raios terrestres no sentido meio-dia/meia-noite.
- Do complexo *sistema de correntes* envolvendo a Terra, é relevante para a geração de AKR o circuito formado por: corrente da lâmina, correntes alinhadas e corrente do eletrojato auroral, que formam o circuito auroral e representam o acoplamento M-I.
- A perturbação magnética provocada pelo *eletrojato auroral* pode ser detectada no solo e seu registro constitui o chamado índice *AE* [24].

Alguns desses aspectos estão representados na figura 2.1.

2.2 Tempestades e subtempestades magnéticas

Tempestades e subtempestades magnéticas são perturbações no campo geomagnético. Uma das formas de ocorrência é através da precipitação de partículas da lâmina de plasma. O processo envolvido é classicamente explicado através do conceito de reconexão de linhas magnéticas [4, 33]. Embora o conceito de reconexão seja amplamente usado nas áreas de física magnetosférica e solar, a física envolvida no processo ainda está sob debate; algumas vezes sendo até mesmo questionado se o processo de reconexão realmente existe [47]. Outro mecanismo é sugerido por Akasofu e Corrick (1980) [2], [5, 3], como segue. O modelo é composto de correntes distintas: corrente da lâmina, corrente da magnetopausa, corrente do eletrojato auroral e correntes alinhadas ao campo magnético, como ilustra a figura 2.1. Considera-se que a corrente da magnetopausa é produzida pelo vento solar e alimenta as demais.

Este modelo é capaz de responder tanto por uma dirupção repentina e intensa da lâmina de plasma, uma vez que o sistema de correntes da cauda pode ser intensificado até que se forme a corrente alinhada, como também pelo aumento do fluxo de corrente alinhada concomitante à intensificação do vento solar, cuja ocorrência é verificada observacionalmente.

Três fases podem ser identificadas durante uma tempestade/subtempestade magnética:

- *inicial*: energia do vento solar é acumulada na cauda geomagnética;
- *principal*: a energia acumulada é liberada, com precipitação de partículas;
- *restabelecimento*: retomada da configuração original de campos e partículas.

As tempestades magnéticas têm duração típica de 1 a 5 dias, enquanto as subtempestades magnéticas, tipicamente, têm duração de 1 a 3 horas, maior intensidade e são mais freqüentes.

A caracterização desses fenômenos é relativamente complexa, de modo que as relações entre tempestades magnéticas e subtempestades magnéticas podem ser controversas [48]. Cabe notar que o aumento da corrente na cauda até a formação das correntes alinhadas é consistente com a condição de Bohm para a formação de camadas-duplas fortes (relação (2.2)).

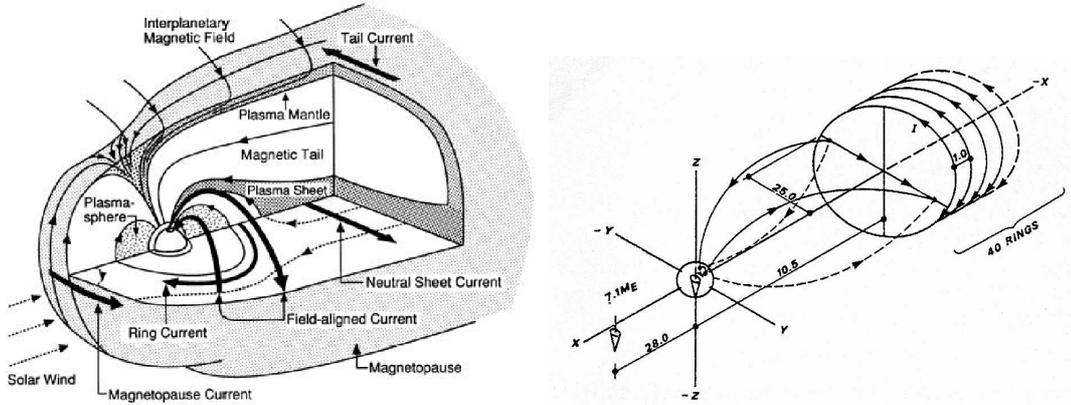


Figura 2.1: À esquerda: Estrutura da magnetosfera [24]. À direita: Modelo de correntes [2].

2.3 Camadas-duplas

Uma vez que elétrons e íons energéticos são frequentemente observados em plasmas, é importante entender o mecanismo capaz de criar e manter campos elétricos em plasmas. Um desses é o mecanismo conhecido como camada-dupla ("double-layer"), o qual é de natureza eletrostática, já que numa camada-dupla o campo elétrico é localizado entre duas camadas dotadas de carga elétrica. Se um campo magnético está presente, ele pode, em princípio, estar arbitrariamente direcionado, mas o caso mais simples com $\vec{E} \parallel \vec{B}$ é o mais comumente discutido. A definição e a nomenclatura a esse respeito não são consistentemente utilizadas na literatura [40].

Aqui uma camada-dupla é definida como consistindo de duas camadas iguais, mas com cargas opostas; essencialmente paralelas, mas não necessariamente planas. O potencial, campo elétrico e densidade de carga espacial variam qualitativamente no interior da camada-dupla como mostrado na figura 2.2. Se o potencial não variar monotonicamente ao longo de toda a camada-dupla, mas contiver alguns máximos e mínimos, ainda pode-se chamar camada-dupla, embora estritamente isso constitua mais de uma camada-dupla.

As três seguintes condições devem ser preenchidas por uma camada-dupla:

1. A queda de potencial ϕ deve obedecer à relação $|\phi| \gtrsim \kappa T/e$, onde T é a temperatura

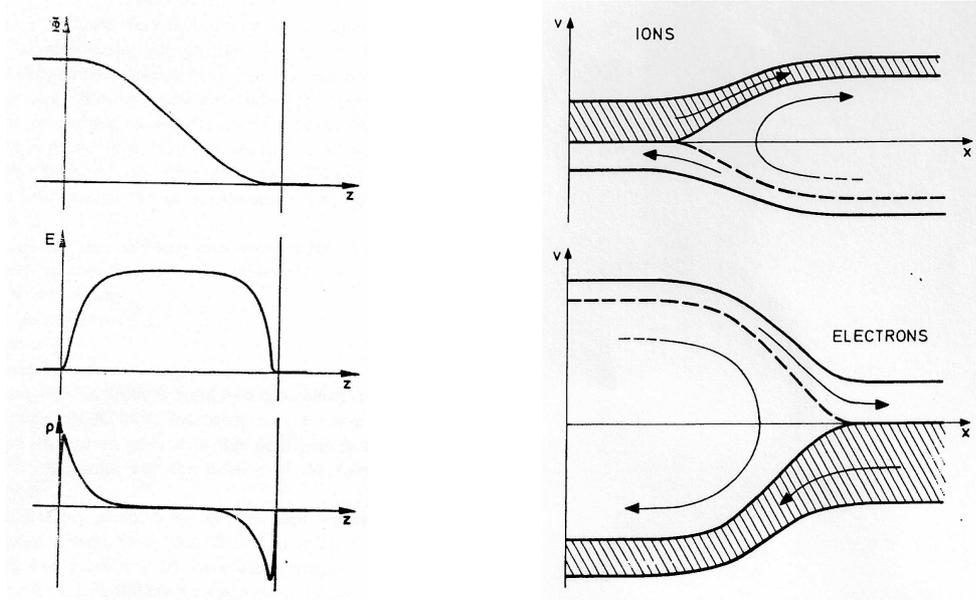


Figura 2.2: À esquerda: Potencial, campo elétrico e densidade de carga [12]. À direita: Distribuição de elétrons e íons no espaço de fase [69].

do plasma mais frio que envolve a camada-dupla, κ é a constante de Boltzmann e e o módulo da carga elétrica elementar;

2. O campo elétrico é muito mais forte no interior da camada-dupla que no exterior, de forma que as cargas positivas e negativas, integradas, essencialmente se cancelam;
3. A quase-neutralidade é localmente violada em ambas as camadas de carga elétrica.

Em adição, uma condição típica, mas não estritamente necessária, é de que o livre caminho médio colisional seja muito maior que a espessura da camada-dupla. Evidências experimentais, bem como teóricas, indicam que enquanto as colisões desempenharem um papel importante, não são formadas camadas-duplas. Em termos da condição 1, uma camada-dupla é dita forte se $e|\phi| \gg \kappa T$. Se, por exemplo, $e|\phi|/\kappa T < 10$, a camada-dupla é dita fraca.

Em Bernstein et al. (1957) [8] é demonstrada a existência de uma classe ilimitada de soluções da equação de Vlasov (4.1) (soluções BGK) contendo estruturas de potencial estacionárias com as condições 1-3 preenchidas. Verifica-se que distribuições de potencial essencialmente arbitrárias podem ser construídas se um número adequado de partículas aprisionadas for adicionado aos poços de potencial.

As partículas associadas à variação do potencial na camada-dupla podem ser convenientemente divididas em quatro classes: elétrons e íons livres e aprisionados (ou refletidos), como mostrado na figura 2.2. Em princípio, uma camada-dupla pode ser mantida com um número

de classes de partículas menor que quatro. Usualmente, as quatro classes de partículas são requeridas. Assim, uma condição necessária para a existência de uma camada-dupla é que as populações aprisionadas de elétrons e íons possam ser mantidas. Isto pode ser feito pelo menos de três maneiras distintas:

- poços de potencial eletrostáticos;
- espelhos magnéticos;
- colisões, causando retroespalhamento.

Em adição, camadas-duplas fortes devem atender a duas condições [12]:

Condição de Langmuir para a existência de camadas-duplas:

$$\frac{n_e u_{de}}{n_i u_{di}} = \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

onde $n_{e,i}$, $m_{e,i}$ e $u_{de,di}$ são a densidade, massa e velocidade média de deriva de elétrons e íons, respectivamente. A condição de Langmuir implica que há uma corrente não-nula através da camada-dupla. Esta condição é válida somente para camadas-duplas fortes. Deve-se notar que se a condição de Langmuir não puder ser satisfeita no referencial do laboratório, a camada-dupla pode mover-se com uma velocidade adequada, tal que, no referencial da camada-dupla, a condição seja satisfeita.

Condição de Bohm para a existência de camadas-duplas²:

$$j_c = ne\sqrt{2\kappa T_e/m_e}, \quad (2.2)$$

onde n é a densidade eletrônica. Esta condição representa uma corrente crítica, abaixo da qual uma camada-dupla não pode ser mantida. Esta condição é válida somente para camadas-duplas fortes. De fato, j_c representa a densidade de corrente através de uma camada-dupla forte, uma vez que ela também é a densidade máxima de corrente que o plasma envolvendo a camada-dupla é capaz de prover. Assim, se a fonte de corrente tende a estabelecer uma corrente mais intensa, a camada-dupla irá aumentar sua queda de potencial ou a seção transversal do canal de corrente será aumentada no plasma, se possível.

Uma vez que a corrente crítica j_c é também a corrente máxima que um plasma normal pode carregar, ela deve representar um limite de instabilidade. Várias instabilidades produzidas por correntes são conhecidas, com diferentes correntes limiarias. A instabilidade de Buneman [46] possui o limiar correto e, portanto, é um possível agente causador da camada-dupla.

²Estritamente, esta é a condição *derivada* da condição de Bohm.

Particularmente por ser de natureza eletrostática, como a camada-dupla. Isto não significa que ondas eletrostáticas devem ser necessariamente observadas junto às camadas-duplas. Elas devem estar presentes durante a formação, mas uma vez estabelecida a camada-dupla, deixam de ser necessárias. De fato, a camada-dupla provavelmente representa o resultado final de um processo iniciado por alguma instabilidade. Demonstra-se que um gradiente com intensidade arbitrária se desenvolve na posição onde uma instabilidade eletrostática se estabeleceu. Nesse ponto ocorre separação de cargas, de maneira que a camada-dupla pode ser formada. A teoria BGK mostra que há um equilíbrio para as camadas-duplas, de modo que ondas de instabilidade não são necessárias para mantê-las.

As camadas-duplas constituem um assunto vasto [12, 68, 14, 69]. Dificuldades teóricas e experimentais são encontradas na explicação dos mecanismos de formação e manutenção. Em Newman et al. (2001) [57] é colocada uma questão indicativa dos desafios inerentes ao assunto. É questionado se o causador primário das camadas-duplas na região auroral seria uma queda de potencial ou uma corrente elétrica. Em plasmas de laboratório, as camadas-duplas são usualmente criadas através da imposição externa de uma diferença de potencial ao longo do campo magnético ambiente. Na região auroral, sob consideração, é mais provável que o plasma inicialmente carregue uma corrente, devida a processos de larga escala, e que esta corrente cause a formação de uma camada-dupla no local de alguma inhomogeneidade, com a queda de potencial resultante sendo um *efeito* em vez de *causa* da camada-dupla.

2.4 Propagação de ondas em plasmas

As propriedades dielétricas de um plasma podem ser descritas por um tensor dielétrico. Este tensor representa a resposta do meio a um estímulo eletromagnético e, portanto, tem importância fundamental na determinação dos modos de oscilação suportados pelo meio, bem como de sua capacidade em absorver ou amplificar energia eletromagnética.

No estudo da propagação de ondas em plasmas é feito uso das equações de Maxwell, que são elencadas a seguir.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho; \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (2.6)$$

Em adição, considera-se a relação constitutiva geral que determina a densidade de corrente \vec{J} a partir do campo elétrico e do tensor condutividade $\overleftrightarrow{\sigma}$:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int \int_{-\infty}^t \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') dt' d\vec{r}'. \quad (2.7)$$

O caráter tensorial da condutividade indica a possibilidade do plasma ser um meio anisotrópico. Este é o caso, por exemplo, de um plasma sujeito a um campo magnético externo. Por outro lado, a relação (2.7) evidencia um caráter não-local: o valor da densidade de corrente na posição \vec{r} e instante t depende do valor do campo elétrico e das características do meio (representadas pela condutividade) em todos os pontos do sistema e em todos os instantes anteriores a t .

No caso em que o meio é homogêneo e estacionário, o tensor condutividade deve ser invariante frente a uma translação espacial ou temporal e, portanto, pode ser escrito na forma

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t'). \quad (2.8)$$

Tomando a transformada de Fourier da relação (2.7) e considerando (2.8), pode-se escrever

$$\vec{J}(\vec{k}, \omega) = \int dt' \int d\vec{r}' \left[\int dt \int d\vec{r} \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \cdot \vec{E}(\vec{r}', t'). \quad (2.9)$$

Definindo $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $\tau = t - t'$, obtém-se

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{k}, \omega) &= \int dt' \int d\vec{r}' \left[\int d\tau \int d\vec{R} \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{R}, \tau) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega \tau)} \right] \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t')} \\ &= \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \int dt' \int d\vec{r}' \vec{E}(\vec{r}', t') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t')} = \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Das relações (2.5) e (2.6), obtém-se

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Ainda considerando as transformadas de Fourier, pode-se reescrever a relação (2.11), omitindo as dependências em \vec{k} e ω , na seguinte forma:

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} + \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = -i\omega \frac{4\pi}{c^2} \vec{J}. \quad (2.12)$$

Utilizando (2.10),

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\vec{E} + i \frac{4\pi}{\omega} \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} \right) + \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0. \quad (2.13)$$

Definindo o tensor dielétrico

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}(\vec{k}, \omega) = \vec{I} + i \frac{4\pi}{\omega} \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}, \omega), \quad (2.14)$$

obtém-se

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} + \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0. \quad (2.15)$$

Tomando a componente α da equação (2.15), obtém-se

$$\begin{aligned} & -k^2 E_\alpha + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta + k_\alpha k_\beta E_\beta \\ & = -k^2 \delta_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta + k_\alpha k_\beta E_\beta = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde índices repetidos indicam soma. Pode-se, então, reescrever a relação (2.16):

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta \right) E_\beta = 0. \quad (2.17)$$

A relação (2.17) condensa três equações, para $\alpha = x, y, z$, constituindo, assim, um sistema linear homogêneo nas incógnitas E_x , E_y e E_z . Esse sistema somente admitirá solução não-trivial se for nulo o determinante da matriz dos coeficientes. Dessa forma, deve ser satisfeita a relação

$$\det \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta \right] = 0. \quad (2.18)$$

Reescrevendo (2.18) em termos do índice de refração $\vec{N} = \frac{\vec{k}c}{\omega}$, obtém-se

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - N^2 + N_x^2 & \varepsilon_{xy} + N_x N_y & \varepsilon_{xz} + N_x N_z \\ \varepsilon_{yx} + N_y N_x & \varepsilon_{yy} - N^2 + N_y^2 & \varepsilon_{yz} + N_y N_z \\ \varepsilon_{zx} + N_z N_x & \varepsilon_{zy} + N_z N_y & \varepsilon_{zz} - N^2 + N_z^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

A relação (2.19) constitui a *relação de dispersão*, que estabelece a dependência entre a frequência de oscilação, o vetor de onda e as propriedades do meio, representadas pelo tensor dielétrico. A relação de dispersão determina quais os modos de oscilação o meio é capaz de suportar, além de caracterizar a possível troca energética entre as partículas constituintes e as ondas eletromagnéticas.

2.5 Modos de oscilação

A nomenclatura dos modos de oscilação num plasma não é consistentemente utilizada na literatura [49, 76]. Em Shafranov (1967) [73] a seguinte elaboração é feita. Assumindo que \vec{k} está ao longo do eixo z_0 , pode-se escrever (2.17) em componentes

$$(N^2 - \varepsilon_{xx}^o) E_x - \varepsilon_{xy}^o E_y - \varepsilon_{xz}^o E_z = 0; \quad (2.20)$$

$$-\varepsilon_{yx}^o E_x + (N^2 - \varepsilon_{yy}^o) E_y - \varepsilon_{yz}^o E_z = 0; \quad (2.21)$$

$$-\varepsilon_{zx}^o E_x - \varepsilon_{zy}^o E_y - \varepsilon_{zz}^o E_z = 0. \quad (2.22)$$

Considerando um referencial com coordenadas x', y', z' , onde o campo magnético está ao longo de z' e x' é coplanar aos vetores \vec{B}' e \vec{k} que estão separados por um ângulo θ , pode-se relacionar as expressões do tensor dielétrico nos dois referenciais através de uma transformação usual entre tensores (rotação em torno do eixo y):

$$\varepsilon_{xx}^o = \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta + \varepsilon_{zz} \sin^2 \theta - \varepsilon_{xz} \sin 2\theta; \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{xy}^o = -\varepsilon_{yx}^o = \varepsilon_{xy} \cos \theta + \varepsilon_{yz} \sin \theta; \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{xz}^o = \varepsilon_{zx}^o = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz}) \sin 2\theta + \varepsilon_{xz} \cos 2\theta; \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{yy}^o = \varepsilon_{yy}; \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{yz}^o = -\varepsilon_{zy}^o = \varepsilon_{yz} \cos \theta - \varepsilon_{xy} \sin \theta; \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_{zz}^o = \varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta + \varepsilon_{xz} \sin 2\theta. \quad (2.28)$$

A relação de dispersão obtida demandando que o determinante das equações (2.20), (2.21) e (2.22) seja nulo é dada por

$$AN^4 + BN^2 + C = 0, \quad (2.29)$$

onde

$$A = \varepsilon_{zz}^o = \varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta + \varepsilon_{xz} \sin 2\theta, \quad (2.30)$$

$$B = -(\varepsilon_{xy} \sin \theta - \varepsilon_{yz} \cos \theta)^2 + \varepsilon_{xz}^2 (\cos^2 2\theta + \sin^4 \theta) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy} (\varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta + \varepsilon_{xz} \sin 2\theta), \quad (2.31)$$

$$C = \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz}^2 + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx}. \quad (2.32)$$

Deste modo, obtém-se

$$N^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (2.33)$$

A solução é formal, uma vez que os coeficientes A , B e C dependem de N^2 . As raízes da equação (2.33) determinam os modos de oscilação *ordinário* e *extraordinário*.

A equação (2.33) pode ser expressa numa forma diversa, introduzindo quantidades em termos das quais o vetor de polarização pode ser representado:

$$N^2 = \frac{1}{2} (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \pm \sqrt{\frac{(\eta_{xx} - \eta_{yy})^2}{4} + \eta_{xy} \eta_{yx}}, \quad (2.34)$$

onde

$$\eta_{xx} = \varepsilon_{xx}^o - \frac{\varepsilon_{xz}^o \varepsilon_{zx}^o}{\varepsilon_{zz}^o} = \frac{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta + \varepsilon_{xz} \sin 2\theta}, \quad (2.35)$$

$$\eta_{xy} = -\eta_{yx} = \varepsilon_{xy}^o - \frac{\varepsilon_{xz}^o \varepsilon_{zy}^o}{\varepsilon_{zz}^o} = \frac{(\varepsilon_{xy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xz}) \cos \theta + (\varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{yz} \varepsilon_{xx}) \sin \theta}{\varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta + \varepsilon_{xz} \sin 2\theta}, \quad (2.36)$$

$$\eta_{yy} = \varepsilon_{yy}^o - \frac{\varepsilon_{yz}^o \varepsilon_{zy}^o}{\varepsilon_{zz}^o} = \frac{\varepsilon_{yy} (\varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta) + \varepsilon_{xy}^2 \sin^2 \theta + (\varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz} - \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz}) \sin 2\theta + \varepsilon_{yz}^2 \cos^2 \theta}{\varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta + \varepsilon_{xz} \sin 2\theta}. \quad (2.37)$$

Seguindo, denota-se por $i\alpha_x^o$ e $i\alpha_z^o$ as razões das componentes x e z do campo elétrico pela sua componente y :

$$\vec{E} = E_y (i\alpha_x^o, 1, i\alpha_z^o), \quad (2.38)$$

onde $(i\alpha_x^o, 1, i\alpha_z^o)$ pode ser identificado como o vetor de polarização. Usando (2.22) expressa-se α_z^o em termos de α_x^o :

$$i\alpha_z^o = i\alpha_x^o \varepsilon_{zx}^o / \varepsilon_{zz}^o - \varepsilon_{zy}^o / \varepsilon_{zz}^o. \quad (2.39)$$

Eliminando α_z^o de (2.20) e (2.21), resulta

$$(N^2 - \eta_{xx}) i\alpha_x^o - \eta_{xy} = 0; \quad (2.40)$$

$$-\eta_{xy} i\alpha_x^o + N^2 - \eta_{yy} = 0. \quad (2.41)$$

Desta forma obtém-se uma expressão para N^2 envolvendo a razão entre as componentes do campo elétrico:

$$N^2 = \frac{\eta_{xy}}{i\alpha_x^o} + \eta_{xx} = \eta_{yy} + i\alpha_x^o \eta_{yx}. \quad (2.42)$$

Assim, a quantidade α_x^o , que caracteriza a polarização da onda, é governada pela equação quadrática

$$\alpha_x^{o2} + i \frac{\eta_{xx} - \eta_{yy}}{\eta_{yx}} \alpha_x^o + \frac{\eta_{xy}}{\eta_{yx}} = 0. \quad (2.43)$$

Analogamente, pode-se obter uma relação para α_z^o .

No sistema de coordenadas em que o campo magnético \vec{B}' está ao longo de z' , as componentes do vetor de polarização são dadas pela transformação de coordenadas usual:

$$\alpha_x = \alpha_x^o \cos \theta + \alpha_z^o \sin \theta; \quad (2.44)$$

$$\alpha_y = 1; \quad (2.45)$$

$$\alpha_z = \alpha_z^o \cos \theta - \alpha_x^o \sin \theta. \quad (2.46)$$

Considerando as relações,

$$S = \frac{1}{2} (R + L), \quad (2.47)$$

$$D = \frac{1}{2} (R - L), \quad (2.48)$$

com,

$$R = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + \Omega_{\alpha})}, \quad (2.49)$$

$$L = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega - \Omega_{\alpha})}, \quad (2.50)$$

$$S = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2}, \quad (2.51)$$

$$D = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega(\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \quad (2.52)$$

$$P = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}, \quad (2.53)$$

e considerando o limite de plasma frio, em que

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

a relação (2.17) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} S - N^2 \cos^2 \theta & -iD & N^2 \cos \theta \sin \theta \\ iD & S - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - N^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.55)$$

Tomando o caso de interesse $\theta = \pi/2$, obtém-se de (2.34)-(2.37) e de (2.55),

$$N^2 = \frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} = S - \frac{D^2}{S} \quad (\text{modo extraordinário}); \quad (2.56)$$

$$N^2 = \varepsilon_{zz} = P \quad (\text{modo ordinário}). \quad (2.57)$$

Pode-se determinar a polarização de uma maneira alternativa a (2.43). De (2.55) obtém-se

$$\frac{E_y}{E_x} = i \frac{D}{N^2 - S}. \quad (2.58)$$

A relação $E_y/E_x = i$ corresponde a polarização circular à direita, enquanto que $E_y/E_x = -i$ corresponde a polarização circular à esquerda.

No caso em que apenas os elétrons são tomados em conta,

$$S = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad (2.59)$$

$$D = -\frac{\omega_{pe}^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}. \quad (2.60)$$

Levando (2.56), (2.59) e (2.60) em (2.58),

$$\frac{E_y}{E_x} = -i \frac{S}{D} = i \frac{\omega}{\Omega_e} \left[\frac{(\omega^2 - \Omega_e^2)}{\omega_{pe}^2} - 1 \right]. \quad (2.61)$$

De (2.61) pode-se notar que se

$$\omega^2 > \omega_{pe}^2 + \Omega_e^2 \equiv \omega_{uh}^2 \quad (2.62)$$

o modo extraordinário terá polarização elíptica (ou circular) à direita, caso contrário a polarização será à esquerda. No entanto, deve-se cuidar que para frequências mais baixas os íons devem ser tomados em conta, o que pode alterar a polarização. Mesmo para $\omega \simeq \omega_{uh}$ pode ocorrer alteração devido à inclusão dos íons, conforme se conclui de (2.51), (2.52) e (2.61).

Outro aspecto a ser notado se refere à frequência de corte ($N^2 \rightarrow 0$). Para o modo extraordinário, de (2.56), (2.47) e (2.48), obtém-se

$$N^2 = \frac{S^2 - D^2}{S} = \frac{RL}{S}. \quad (2.63)$$

Assim, ou $R = 0$ (-) ou $L = 0$ (+). Segue, de (2.49) e (2.50),

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \pm \Omega_e)} = 0. \quad (2.64)$$

A solução de (2.64) é dada por

$$\omega_{\pm} = \mp \frac{\Omega_e}{2} \pm \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\Omega_e^2}{4}}. \quad (2.65)$$

Assumindo frequências positivas, as soluções possíveis de (2.65) são

$$\omega_X = \frac{\Omega_e}{2} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\Omega_e^2}{4}}, \quad (2.66)$$

$$\omega_Z = -\frac{\Omega_e}{2} + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \frac{\Omega_e^2}{4}}, \quad (2.67)$$

onde $\omega_X > \omega_Z$. Como $\omega_X > \omega_{uh}$, ω_X representa a frequência de corte inferior para o modo extraordinário polarizado à direita. Pode-se também demonstrar a relação $\omega_Z < \omega_{uh} < \omega_X$, de maneira que, considerando (2.49), (2.50), (2.51) e (2.63), verifica-se:

$$\omega > \omega_X : R > 0, L > 0, S > 0 \rightarrow N^2 > 0 \rightarrow \text{há propagação};$$

$$\omega_{uh} < \omega < \omega_X : R < 0, L > 0, S > 0 \rightarrow N^2 < 0 \rightarrow \text{não há propagação};$$

$$\omega_Z < \omega < \omega_{uh} : R < 0, L > 0, S < 0 \rightarrow N^2 > 0 \rightarrow \text{há propagação};$$

$$\omega < \omega_Z : R < 0, L < 0, S < 0 \rightarrow N^2 < 0 \rightarrow \text{não há propagação}.$$

A faixa de frequências $\omega_Z < \omega < \omega_{uh}$ pode representar um outro modo de oscilação, em que o modo extraordinário tem velocidade de fase tipicamente menor (modo extraordinário lento, Z). A frequência ω_Z representaria a respectiva frequência de corte.

Analogamente ao recém exposto, é possível determinar a frequência de corte para o modo ordinário (ω_O), a partir da relação (2.57), resultando

$$\omega_O = \omega_{pe}, \quad (2.68)$$

onde ω_{pe} é a frequência de plasma eletrônica.

A análise de um sistema formado por plasma de dispersão térmica finita utilizando a relação de dispersão obtida para plasma frio se justifica pela consideração de que as propriedades de propagação não devem ser profundamente afetadas por efeito da temperatura. As propriedades de amplificação ou absorção, no entanto, devem ser sensíveis à existência ou não de dispersão térmica [15].

2.6 Interação onda-partícula

Uma das formas de interação entre ondas eletromagnéticas e partículas carregadas é através da *ressonância de cíclotron*. Partículas carregadas que estejam sob a ação de um campo magnético externo executam trajetórias helicoidais ao longo das linhas de campo magnético. Neste caso, um campo elétrico agindo sobre a partícula é capaz de ceder ou drenar energia, em analogia ao conhecido processo de amortecimento de Landau. Este processo é otimizado quando a frequência de oscilação do campo elétrico no referencial da partícula tem o mesmo valor de um harmônico da frequência de cíclotron da partícula e pode ser matematicamente representado pela condição de ressonância (3.35).

O resultado líquido da interação da onda com as partículas dependerá da distribuição de velocidades das partículas que compõem o meio em questão. Partículas com velocidade pouco acima da velocidade ressonante tenderão a ceder energia, enquanto as com velocidade pouco abaixo da velocidade ressonante tenderão a drenar energia da onda. Assim, a onda terá sua amplitude aumentada se o número de partículas que cedem energia for maior do que o número das que drenam energia. Considerando somente a troca de energia na direção perpendicular ao campo magnético, isto implica a existência de inclinação positiva na distribuição de partículas F , em relação à velocidade perpendicular ao campo magnético v_{\perp} , para o valor de velocidade igual à velocidade ressonante ($\partial F / \partial v_{\perp} > 0$). Esta declividade positiva representa uma inversão de população e, em analogia ao mecanismo de *laser*, este processo de amplificação de radiação

recebe o nome de *maser de cíclotron*. A correspondente representação matemática pode ser dada pelas relações (3.23) e (3.24).

2.7 Teorema de Poynting

Das equações de Maxwell (2.3)-(2.6) obtém-se o Teorema de Poynting:

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad (2.69)$$

com

$$\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{E}. \quad (2.70)$$

Usando a convenção da parte real, os campos têm a forma

$$\vec{A} = \text{Re} \left(\vec{A}_1 e^{-i\phi} \right), \quad (2.71)$$

onde

$$\phi = \phi_r + i\phi_i = \left(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r} \right) + i \left(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r} \right) \quad (2.72)$$

e os subíndices r e i indicam, respectivamente, as partes real e imaginária. A média temporal pode ser escrita como

$$\langle \vec{A} \otimes \vec{B} \rangle = \frac{1}{4} \left(\vec{A}_1 \otimes \vec{B}_1^* + \vec{A}_1^* \otimes \vec{B}_1 \right) e^{2\phi_i}, \quad (2.73)$$

onde \otimes representa a operação de produto escalar ou vetorial. Pode-se expressar, assim, a média temporal dos lados esquerdo (LE) e direito (LD) da relação (2.69) como segue:

$$LE = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \left[\frac{1}{4} \left(\vec{E}_1 \times \vec{B}_1^* + \vec{E}_1^* \times \vec{B}_1 \right) e^{2\phi_i} \right]; \quad (2.74)$$

$$LD = -\frac{1}{16\pi} \left[2\omega_i \vec{B}_1^* \cdot \vec{B}_1 + \omega_i \vec{E}_1^* \cdot \left(\overleftrightarrow{\varepsilon} + \overleftrightarrow{\varepsilon}^\dagger \right) \cdot \vec{E}_1 + \omega_r \vec{E}_1^* \cdot \left(-i \overleftrightarrow{\varepsilon} + i \overleftrightarrow{\varepsilon}^\dagger \right) \cdot \vec{E}_1 \right] e^{2\phi_i}, \quad (2.75)$$

onde

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega, \vec{k}) = \overleftrightarrow{\varepsilon}'(\omega, \vec{k}) + \overleftrightarrow{\varepsilon}''(\omega, \vec{k}), \quad (2.76)$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}'(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{2} \left[\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega, \vec{k}) + \overleftrightarrow{\varepsilon}^\dagger(\omega, \vec{k}) \right], \quad (2.77)$$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}''(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{2i} \left[\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega, \vec{k}) - \overleftrightarrow{\varepsilon}^\dagger(\omega, \vec{k}) \right]. \quad (2.78)$$

$\overleftrightarrow{\varepsilon}'$ é a parte hermiteana do tensor dielétrico, $\overleftrightarrow{\varepsilon}''$ é a parte anti-hermiteana. Expandindo $\overleftrightarrow{\varepsilon}'(\omega, \vec{k})$ em torno de $\phi = \phi_r$, resulta

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}'(\omega, \vec{k}) = \left[\overleftrightarrow{\varepsilon}' + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \overleftrightarrow{\varepsilon}' + i\vec{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \overleftrightarrow{\varepsilon}' \right]_{\omega_r, \vec{k}_r} + \dots \quad (2.79)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\dagger}(\omega, \vec{k}) = \left[\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} - i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} - i\vec{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \right]_{\omega_r, \vec{k}_r} + \dots \quad (2.80)$$

Assim,

$$-i \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime}(\omega, \vec{k}) + i \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\dagger}(\omega, \vec{k}) = 2\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime}(\omega_r, \vec{k}_r) + 2\vec{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime}(\omega_r, \vec{k}_r) + \dots \quad (2.81)$$

Considerando

$$|\omega_i| \ll |\omega|, \quad \left| \vec{k}_i \right| \ll \left| \vec{k} \right|, \quad (2.82)$$

LD pode ser aproximado por

$$LD = -\frac{1}{8\pi} \left[\omega_i \vec{B}_1^* \cdot \vec{B}_1 + \omega_i \vec{E}_1^* \cdot \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \cdot \vec{E}_1 + \omega_r \vec{E}_1^* \cdot \left(\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime\prime} + \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} + \vec{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \right) \cdot \vec{E}_1 \right] e^{2\phi_i}. \quad (2.83)$$

Definindo as quantidades

$$\vec{S} = \vec{S}_T + \vec{T}, \quad (2.84)$$

$$\vec{S}_T = \frac{c}{16\pi} \left(\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B} \right), \quad (2.85)$$

$$T = -\frac{\omega_r}{8\pi} \vec{E}^* \cdot \vec{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \cdot \vec{E}, \quad (2.86)$$

$$\vec{T} = \frac{\omega_r}{16\pi} \vec{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \cdot \vec{E}, \quad (2.87)$$

$$W' = -\frac{\omega_i}{8\pi} \left[\vec{B}^* \cdot \vec{B} + \vec{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_r} \left(\omega_r \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \right) \cdot \vec{E} \right], \quad (2.88)$$

$$W = \frac{1}{16\pi} \left[\vec{B}^* \cdot \vec{B} + \vec{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_r} \left(\omega_r \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \right) \cdot \vec{E} \right], \quad (2.89)$$

$$Q = -\frac{\omega_r}{8\pi} \vec{E}^* \cdot \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime\prime} \cdot \vec{E}, \quad (2.90)$$

e notando que

$$T = \vec{k}_i \cdot \left(-\frac{\omega_r}{8\pi} \vec{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \cdot \vec{E} \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\omega_r}{16\pi} \vec{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{k}_r} \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}{}^{\prime} \cdot \vec{E} \right) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial \vec{r}}, \quad (2.91)$$

$$W' = -\frac{\partial W}{\partial t}, \quad (2.92)$$

a seguinte lei de conservação pode ser escrita:

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial W}{\partial t} = Q. \quad (2.93)$$

Às quantidades \vec{S}_T , T , W e Q , Stix (1992) [76] atribui os seguintes significados. \vec{S}_T representa a média temporal do vetor de Poynting. T representa o fluxo de energia não-eletromagnética devido ao movimento coerente dos portadores de carga. O primeiro termo de W representa a densidade de energia magnética. O segundo termo de W representa a soma da energia

eletrostática e da porção da energia cinética das partículas que está associada com o movimento coerente da onda. Q desempenha o papel de fonte ou sumidouro.

Nota-se, portanto, que a amplificação ou absorção da energia de ondas eletromagnéticas em plasmas homogêneos está associada exclusivamente à parte anti-hermiteana do tensor dielétrico. Deve-se notar também que este desenvolvimento considera apenas as dependências explícitas no tempo e espaço: a frequência e o vetor de onda são tomados como constantes. Para um plasma inhomogêneo a lei de conservação deve ser alterada.

2.8 Fator de amplificação

A amplificação ou absorção de ondas eletromagnéticas que se propagam em plasmas, de um dado ponto inicial \vec{r}_0 até um ponto \vec{r} , pode ser estimada por

$$g = \ln \left[\frac{I(\vec{r})}{I(\vec{r}_0)} \right], \quad (2.94)$$

onde $I(\vec{r})$ é a intensidade da radiação no ponto \vec{r} e $I(\vec{r}_0)$ é a intensidade no ponto inicial \vec{r}_0 . A quantidade g é chamada *fator de amplificação*. Ao se considerar que as oscilações são descritas por ondas planas na forma $\sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, a intensidade da onda pode ser expressa como

$$I(\vec{r}) = I(\vec{r}_0) e^{-2\text{Im}(\vec{k}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}. \quad (2.95)$$

Na situação em que o vetor de onda possui dependência espacial, a intensidade deve ser dada por

$$I(\vec{r}) = I(\vec{r}_0) e^{-2 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \text{Im}[\vec{k}(\vec{r}')] \cdot d\vec{r}'} . \quad (2.96)$$

Assim, o fator de amplificação toma a seguinte forma:

$$g = -2 \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \text{Im}[\vec{k}(\vec{r}')] \cdot d\vec{r}' . \quad (2.97)$$

2.9 Espelhamento magnético

Seguindo Cavalcanti (2001): Em um plasma não-colisional imerso num campo magnético, tanto a energia das partículas (E) como seu momentum magnético (μ_q) são conservados ao longo das linhas de campo:

$$E = \frac{m_q}{2} (v_{\parallel s}^2 + v_{\perp s}^2) + qV_s = \text{cte}; \quad (2.98)$$

$$\mu_q = \frac{m_q v_{\perp s}^2}{2B_s} = \text{cte}, \quad (2.99)$$

onde m_q é a massa da partícula de carga q , $v_{\parallel s}$ e $v_{\perp s}$ são, respectivamente, as velocidades paralela e perpendicular ao campo magnético no ponto s ao longo das linhas de campo, V_s e B_s são, respectivamente o potencial elétrico e a intensidade do campo magnético no ponto s . De (2.99):

$$v_{\perp s'}^2 = \frac{B_{s'}}{B_s} v_{\perp s}^2. \quad (2.100)$$

De (2.98):

$$(v_{\parallel s}^2 - v_{\parallel s'}^2) + (v_{\perp s}^2 - v_{\perp s'}^2) = \frac{2}{m_q} q (V_{s'} - V_s). \quad (2.101)$$

Substituindo (2.100) em (2.101):

$$(v_{\parallel s}^2 - v_{\parallel s'}^2) - \left(\frac{B_{s'}}{B_s} - 1 \right) v_{\perp s}^2 = \frac{2}{m_q} q (V_{s'} - V_s). \quad (2.102)$$

Utilizando a notação

$$\beta_{s's} = \left| \frac{B_{s'}}{B_s} - 1 \right|; \quad (2.103)$$

$$v_{s's}^{q2} = \frac{2}{m_q} |q (V_{s'} - V_s)|, \quad (2.104)$$

e considerando os casos $s < s'$ e $s > s'$, obtém-se

$$v_{\parallel s'}^2 = v_{\parallel s}^2 - \beta_{s's} v_{\perp s}^2 \pm v_{s's}^{q2}; \quad (2.105)$$

$$v_{\parallel s'}^2 = v_{\parallel s}^2 + \beta_{s's} v_{\perp s}^2 \pm v_{s's}^{q2}. \quad (2.106)$$

Particularizando para o caso de campo elétrico ascendente, os sinais \pm na relação (2.105) se referem aos íons (-) e elétrons (+); na relação (2.106), aos íons (+) e elétrons (-).

Outra particularização pode ser feita, considerando $s' = l$ e $s' = 0$:

$$v_{\parallel l}^2 = v_{\parallel s}^2 - \beta_{ls} v_{\perp s}^2 \pm v_{ls}^{q2} \rightarrow \text{íons(-), elétrons(+)}; \quad (2.107)$$

$$v_{\parallel 0}^2 = v_{\parallel s}^2 + \beta_{0s} v_{\perp s}^2 \pm v_{0s}^{q2} \rightarrow \text{íons(+), elétrons(-)}. \quad (2.108)$$

O fenômeno de espelhamento magnético ocorre no ponto s em que a velocidade da partícula paralela ao campo magnético $v_{\parallel s}$ for nula. Se $v_{\parallel s}^2 < 0$, significa que a partícula foi espelhada em um ponto s' qualquer, tal que $s' < s$. Logo, uma partícula tem acesso ao ponto s se $v_{\parallel s}^2 \geq 0$.

Desconsiderando a existência do campo elétrico paralelo e supondo que a partícula seja espelhada em um ponto s_{esp} , tal que $l \geq s_{esp} > 0$, resulta $v_{\parallel l}^2 \leq 0$. Se for analisado o movimento da partícula a partir de um ponto $s < s_{esp}$, obtém-se da relação (2.107), com $v_{ls}^q = 0$:

$$v_{\perp s}^2 \geq \frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{ls}}. \quad (2.109)$$

A relação (2.109) representa a condição para que uma partícula sofra espelhamento no ponto s_{esp} . Esta condição define um cone no espaço de velocidades, chamado *cone-de-perda*, que é caracterizado pelo ângulo de abertura $\theta_c = \text{tg}^{-1}(1/\beta_{ls})^{1/2}$ medido em relação ao eixo v_{\parallel} . Nota-se ainda que na ausência de campo elétrico a condição de espelhamento é a mesma para íons e elétrons.

A presença do campo elétrico paralelo altera a condição de espelhamento. Novamente, utilizando a relação (2.107) e a condição $v_{\parallel l}^2 \leq 0$, obtêm-se as seguintes desigualdades:

$$v_{\perp s}^2 - \frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{ls}} \geq \frac{v_{ls}^{e2}}{\beta_{ls}} \rightarrow \text{elétrons}; \quad (2.110)$$

$$\frac{v_{\parallel s}^2}{\beta_{ls}} - v_{\perp s}^2 \leq \frac{v_{ls}^{i2}}{\beta_{ls}} \rightarrow \text{íons}. \quad (2.111)$$

Nota-se que o cone-de-perda foi transformado em uma hipérbole-de-perda para os elétrons e outra para os íons.

2.10 Traçado de raios

As equações de traçado de raios são usadas para calcular a trajetória de uma onda em um dado meio, levando em conta as propriedades dielétricas do meio em questão. É possível também, a partir delas, calcular a absorção ou amplificação da energia da onda, enquanto ela se propaga.

Para deduzir as equações de traçado de raios, considera-se a radiação como um conjunto de partículas de energia (fótons), com Hamiltoniano $H = \hbar\omega$ e momentum $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ [6, 21]. Utilizando as relações de Hamilton

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla_{\vec{r}}H; \quad (2.112)$$

$$\dot{\vec{r}} = \nabla_{\vec{p}}H, \quad (2.113)$$

obtém-se

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla_{\vec{k}}\omega, \quad (2.114)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\nabla_{\vec{r}}\omega. \quad (2.115)$$

A relação de dispersão pode ser escrita como

$$\Lambda(\vec{k}, \omega, \vec{r}) = 0. \quad (2.116)$$

Disso, segue

$$d\Lambda = \nabla_{\vec{k}}\Lambda \cdot d\vec{k} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}d\omega + \nabla_{\vec{r}}\Lambda \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2.117)$$

Escrevendo $d\omega$ como $d\omega = \nabla_{\vec{k}}\omega \cdot d\vec{k} + \nabla_{\vec{r}}\omega \cdot d\vec{r}$ e substituindo em (2.117), obtém-se

$$\begin{aligned} d\Lambda &= \nabla_{\vec{k}}\Lambda \cdot d\vec{k} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}\nabla_{\vec{k}}\omega \cdot d\vec{k} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}\nabla_{\vec{r}}\omega \cdot d\vec{r} + \nabla_{\vec{r}}\Lambda \cdot d\vec{r} \\ &= \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}\nabla_{\vec{k}}\omega + \nabla_{\vec{k}}\Lambda \right) \cdot d\vec{k} + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}\nabla_{\vec{r}}\omega + \nabla_{\vec{r}}\Lambda \right) \cdot d\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Considerando, em (2.118), $d\vec{k}$ e $d\vec{r}$ independentes e arbitrários, deve-se ter

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}\nabla_{\vec{k}}\omega + \nabla_{\vec{k}}\Lambda = 0; \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\omega}\nabla_{\vec{r}}\omega + \nabla_{\vec{r}}\Lambda = 0. \quad (2.120)$$

A substituição de (2.114) e (2.115) em (2.119) e (2.120) produz as seguintes relações:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{-\nabla_{\vec{k}}\Lambda}{\partial\Lambda/\partial\omega}; \quad (2.121)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\nabla_{\vec{r}}\Lambda}{\partial\Lambda/\partial\omega}. \quad (2.122)$$

As relações (2.121) e (2.122) são utilizadas no cálculo da trajetória do raio na região-fonte, bem como para determinar sua amplificação ou absorção à medida que evolui.

Capítulo 3

Caracterização da AKR e da região-fonte

Este capítulo é constituído de três partes principais. A primeira traz uma coleção de dados obtidos, principalmente por satélites, ao longo das últimas três décadas, que serviram de base para o entendimento da AKR. Entre esses dados destacam-se aqueles colhidos pelo satélite FAST¹ ("Fast Auroral Snapshot") a partir do ano de 1996, devido ao seu projeto avançado e especificidade de sua missão, que trouxeram novas respostas, e perguntas, para o estudo da AKR.

A segunda parte aborda os modelos teóricos e simulações numéricas, que buscaram responder pelo cenário revelado pelos satélites, à medida que novas informações eram obtidas. É concebível afirmar que a maioria dos estudos acerca da geração da AKR tem como base a proposta teórica feita por Wu e Lee (1979) para explicar a produção da AKR na região auroral. Essa proposta, o maser de cone-de-perda, que consiste em atribuir a emissão eletromagnética a um mecanismo de maser decorrente do aspecto de cone-de-perda exibido pela distribuição eletrônica na região-fonte, é a melhor estabelecida e aceita pela comunidade científica para explicação da AKR, tendo sido aprimorada pela consideração do maser de C-invertido.

As partes primeira e segunda são expostas na seqüência cronológica em que os trabalhos analisados foram publicados. Ressalta-se que na segunda parte a ordem cronológica é reiniciada.

A terceira parte apresenta um panorama do entendimento atual acerca da AKR, onde são reconhecidos desafios e, possivelmente, a necessidade de rever conceitos.

¹Perigeu: 348km; Apogeu: 4159km; Inclinação: 83° [58].

3.1 Dados observacionais

As primeiras evidências de que a Terra é um emissor de ondas de rádio datam do final dos anos sessenta. Entretanto, o trabalho de Gurnett (1974) [43] pode ser apontado como marco inicial da tentativa de caracterizar e compreender este fenômeno, cujos aspectos principais são descritos a seguir.

Nesse trabalho, as medidas feitas pelos satélites Imp 6² e Imp 8³ mostram que a Terra emite radiação eletromagnética muito intensa na faixa de frequência 50-500kHz. Nesta faixa, a potência total emitida alcança valores de até 10⁹W, com emissões típicas em torno de 10⁷W. Considerando que a energia máxima dissipada pela precipitação de partículas carregadas na região auroral é estimada em cerca de 10¹¹W, o mecanismo para gerar esta radiação deve ter eficiência da ordem de 1%.

A figura 3.1 mostra a intensidade do campo elétrico nos canais de frequência 178, 100, 56,2 e 31,1kHz para um período de 24h, enquanto a nave está em apogeu na região da cauda geomagnética. Os incrementos observados nos canais de 100 e 178kHz, alcançando cerca de 60dB acima do nível de ruído do receptor, são típicos da AKR. A figura 3.1 revela características de duração das emissões: a radiação ocorre em "tempestades" esporádicas, com duração de meia hora a várias horas. Entre as tempestades, a radiação pode ser completamente indetectável, algumas vezes por períodos tão longos quanto 24h. Outra característica revelada pelas medições refere-se à natureza da radiação quilométrica. A figura 3.1 ilustra as amplitudes dos campos elétrico e magnético durante um evento de intensa emissão, em que a nave cobre uma distância entre 3,7 e 6R_e, onde R_e é o raio da Terra. A relação linear entre campo elétrico e magnético, revelada pela figura 3.1, provê evidência convincente de que a radiação detectada pelo Imp 6 é de natureza eletromagnética.

O espectro de frequências de um típico evento de AKR é mostrado na figura 3.2. Este espectro foi obtido pelo Imp 8 a uma distância radial aproximada de 25,2R_e em relação a Terra, no entardecer local. A figura 3.2 revela as principais características espectrais da AKR, observadas pelos satélites Imp 6 e 8: a intensidade espectral atinge um pico em torno do intervalo 100-300kHz; decresce rapidamente para frequências abaixo de 100kHz, sendo praticamente indetectada abaixo de 30kHz; decresce rapidamente para frequências crescentes acima de 300kHz e fica próximo ao nível de ruído cósmico à frequência aproximada de 2MHz.

²Perigeu: 242km; Apogeu: 196.574km; Inclinação: 28,7° [58].

³Perigeu: 141.017km; Apogeu: 288.668km; Inclinação: 28,64° [58].

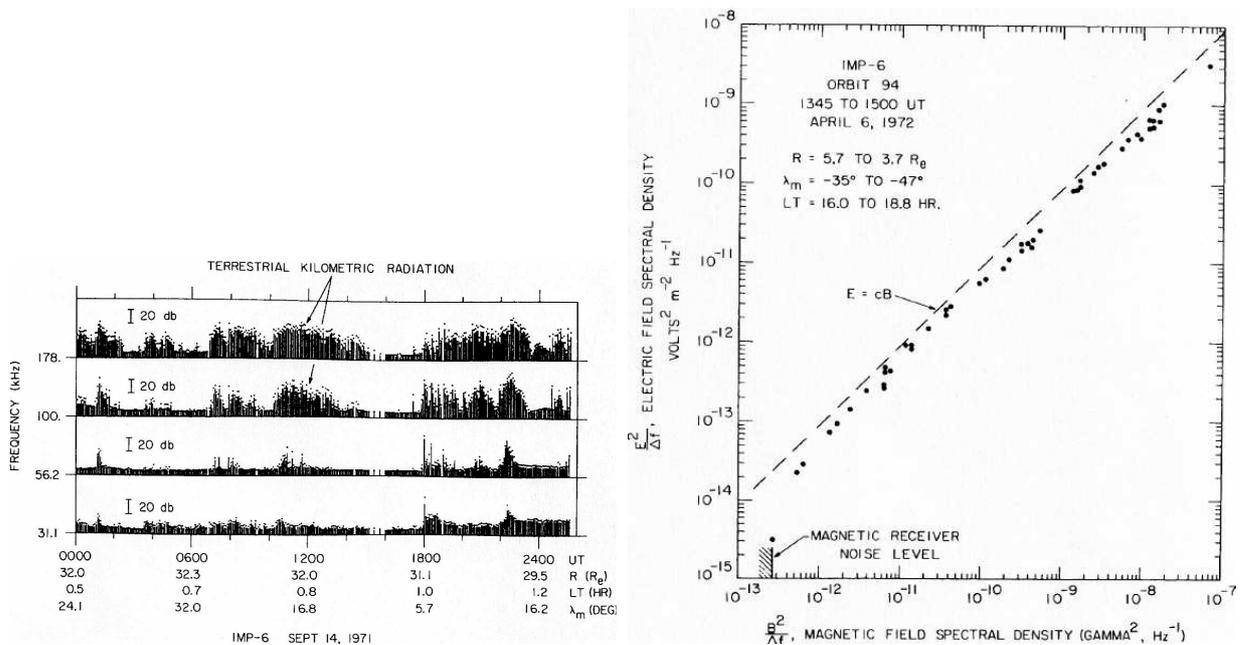


Figura 3.1: À esquerda: Registros de ocorrência da AKR [43]. À direita: Linearidade entre campo elétrico e magnético (emissão eletromagnética) [43].

Se a fonte da AKR está localizada próxima a Terra, é esperado que o fluxo de potência varie inversamente com o quadrado da distância radial em relação a Terra ($\propto 1/R^2$). Esta dependência pode ser verificada diretamente a partir dos dados obtidos pelo Imp 6. A figura 3.2 mostra a distribuição do fluxo de potência como função da distância radial em relação a Terra, no canal de frequência para o campo elétrico de 178kHz. O histograma em cada intervalo de distância radial indica a porcentagem de ocorrência da AKR como função do fluxo de potência dentro do intervalo considerado. Os intervalos de distância radial na figura 3.2 estão distribuídos com espaçamento logarítmico, de modo que uma dependência do fluxo de potência proporcional a $1/R^2$ deve ser uma linha reta neste diagrama. O fluxo de potência máximo segue de perto a dependência $1/R^2$, indicada pelas linhas tracejadas, provendo, assim, evidência de que a AKR se origina próximo a Terra.

A AKR também apresenta dependência pronunciada em relação ao tempo local e latitude do ponto de observação. A dependência com o tempo local é ilustrada na figura 3.3, que mostra o tempo local e a distância radial do Imp 6 quando a intensidade do fluxo de potência no canal de 178kHz excede o limiar (THRESHOLD):

$$\text{THRESHOLD} = \left(\frac{R_e}{R}\right)^2 \times (7.35 \times 10^{-16}) \text{ WATTS m}^{-2}\text{Hz}^{-1}. \quad (3.1)$$

O fator $1/R^2$ no limiar para contar um evento é usado a fim de corrigir a dependência radial do fluxo de potência. O valor limiar é muito pequeno comparado ao fluxo médio da AKR, de

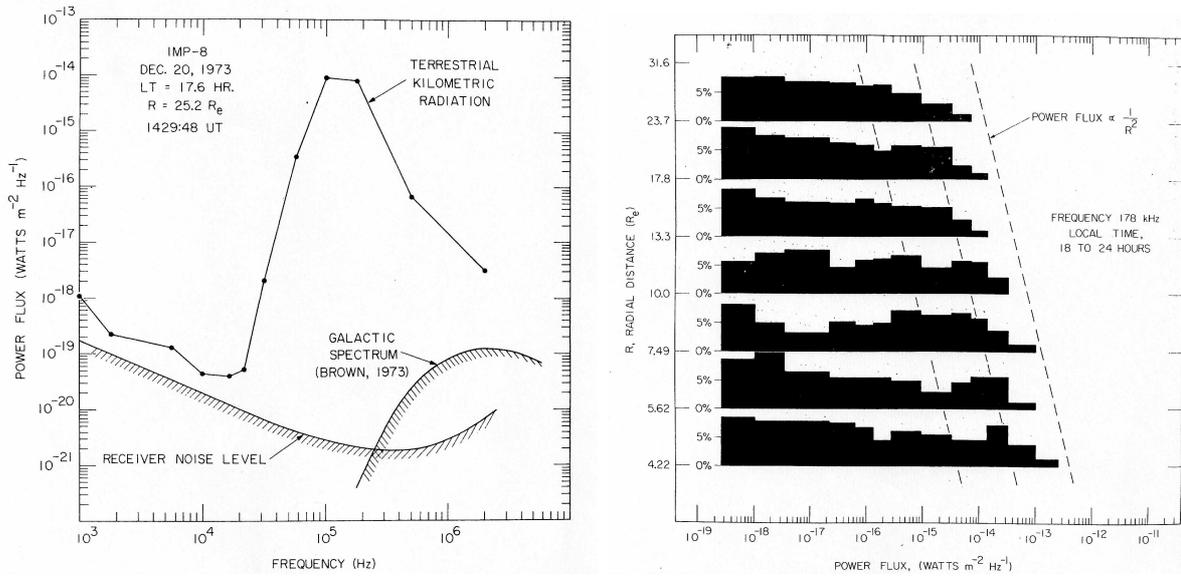


Figura 3.2: À esquerda: Espectro de potência da AKR [43]. À direita: Distribuição radial do fluxo de potência [43].

maneira que, essencialmente, todos eventos são detectados. A figura 3.3 mostra que a AKR é muito mais freqüente no entardecer local (16h a 4h) que no amanhecer local. Uma freqüência muito menor de eventos é observada entre 6h e 12h do tempo local. A figura também mostra um corte pronunciado na ocorrência da AKR a uma distância de $3R_e$ em todos tempos locais. A localização deste corte (próximo à localização esperada para a plasmapausa) sugere que a plasmaesfera afeta a propagação da AKR nessa região. Os dados da figura 3.3 (à esquerda) representam o registro de um ano completo de operação, assegurando, assim, a cobertura de todos tempos locais.

Os registros também mostram dependência dos eventos de AKR com a latitude magnética. A figura 3.3 (à direita) resume os dados coletados durante dois anos de operação. Ela mostra a freqüência em que os eventos AKR ocorrem, dentro do intervalo 18-24 horas do tempo local, em função da latitude magnética e da distância radial em relação a Terra. Um corte bem definido na ocorrência da AKR, a baixa latitude, é evidente na figura 3.3; variando, aproximadamente, de 40° em $3R_e$ até 10° em $10R_e$. Em distâncias radiais menores que cerca de $4R_e$, este corte coincide com o rápido incremento da densidade do plasma que ocorre na plasmapausa.

A fim de determinar a distribuição angular da radiação observada a partir de um ponto distante da Terra, a freqüência de eventos de AKR também foi determinada como função do tempo local magnético e da latitude magnética conjuntamente. Os resultados dessa investigação, usando dados coletados durante dois anos pelo Imp 6, no canal de 178kHz, são mostrados

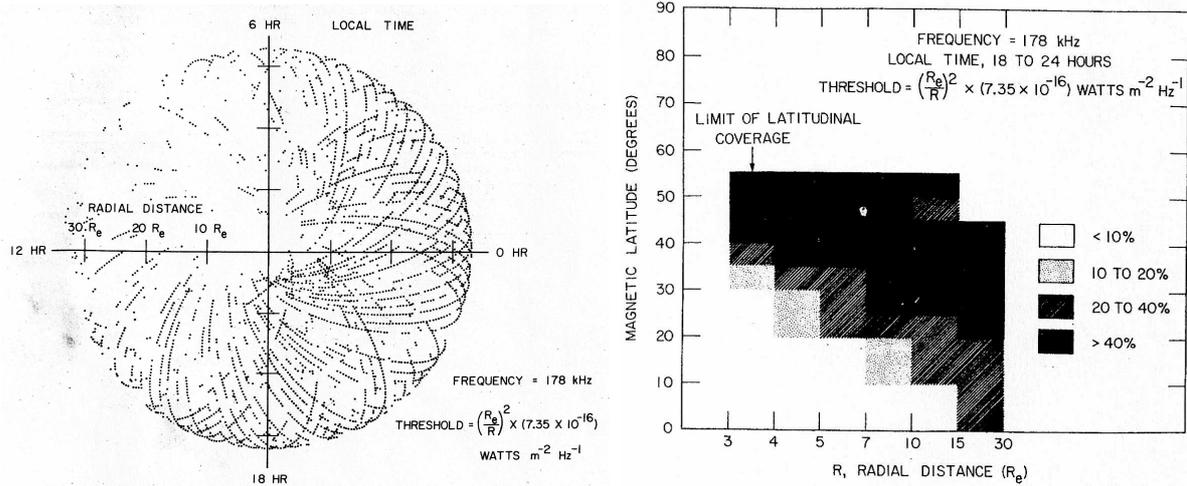


Figura 3.3: À esquerda: Distribuição de ocorrências em tempo local e distância radial [43]. À direita: Percentual de ocorrências em latitude magnética e distância radial [43].

na figura 3.4. Nota-se que as ocorrências são confinadas numa região em forma de cone, tanto no hemisfério Norte como Sul. Próximo à meia-noite local as duas regiões em forma de cone unem-se e a radiação é detectada em todas latitudes medidas pelo Imp 6. No lado diurno (de 6h a 12h do tempo local) a radiação é observada apenas em latitudes muito elevadas ($> 45^\circ$ no Norte, $< -45^\circ$ no Sul). De 12h a 20h um máximo latitudinal é reconhecido na assiduidade das ocorrências, variando de 30° em 20h, até 45° em 12h. Este máximo latitudinal sugere a existência de um mínimo na frequência de eventos sobre as regiões polares.

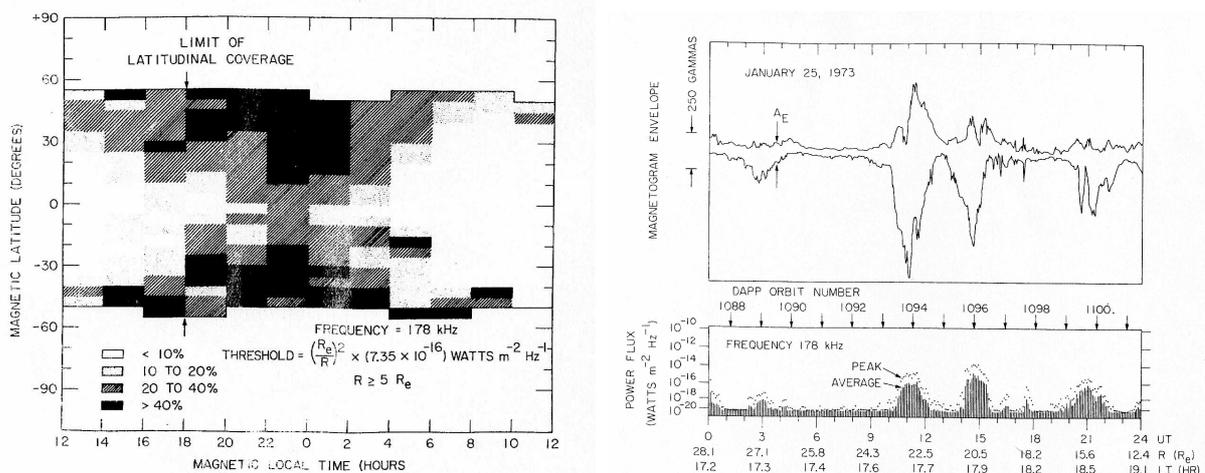


Figura 3.4: À esquerda: Percentagem de ocorrência em latitude magnética e tempo local [43]. À direita: Correlação entre AKR e o índice AE [43].

Uma investigação comparativa também foi feita entre os registros de distúrbios magnéticos

e medidas dos níveis de emissão da AKR. A figura 3.4 mostra o fluxo de potência no canal de 178kHz do Imp 6 e o envelope dos registros de magnetogramas, onde a diferença entre os envelopes superior e inferior constitui o índice de eletrojato auroral AE , freqüentemente usado como medida da atividade de subtempestades magnéticas que, por sua vez, são reconhecidas como causa dos eventos de aurora. Nota-se na figura uma forte correlação entre os distúrbios magnéticos e a ocorrência da AKR.

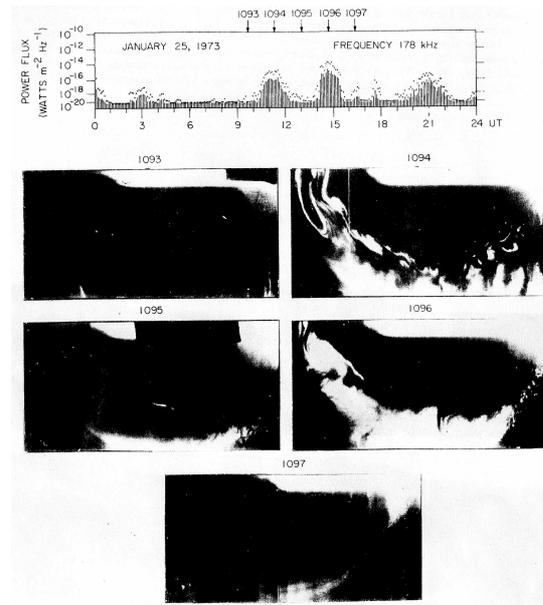


Figura 3.5: Correlação da AKR com eventos de auroras [43].

Uma vez que a AKR parece se originar de baixas altitudes na região auroral, foi investigada a relação entre as ocorrências de AKR e auroras. Usando fotografias das regiões aurorais, obtidas pelo satélite Dapp⁴, pôde-se constatar que a ocorrência de intensa radiação quilométrica está estreitamente associada à ocorrência de auroras: sempre que um extenso e brilhante evento de aurora se apresenta nas fotografias do Dapp, intensa radiação quilométrica é detectada pelo Imp 6. Quando não há aurora evidente, a radiação quilométrica é usualmente fraca ou indetectável. Além disso, nota-se pela figura 3.5 que a radiação parece estar mais correlacionada com os arcos aurorais discretos do que com a aurora difusa, como sugere particularmente a órbita 1095. A correlação positiva da AKR com os eventos de aurora discreta indica que a AKR é provavelmente gerada por intensas precipitações de elétrons do tipo "V-invertido".

Em Green et al. (1979) [42] são reportadas observações simultâneas de precipitações de elétrons energéticos e AKR obtidas pelos satélites AE-D⁵ e Hawkeye⁶. Os dados mostram que a

⁴Perigeu: ~ 800 km; Apogeu: ~ 800 km; Inclinação: $\sim 98^\circ$ [26, 58].

⁵Perigeu: 154km; Apogeu: 3816km; Inclinação: $90,1^\circ$ [58].

⁶Perigeu: 469km; Apogeu: 125.570km; Inclinação: $89,8^\circ$ [58].

AKR é mais estreitamente associada a precipitações do tipo V-invertido do que a precipitações da lâmina de plasma.

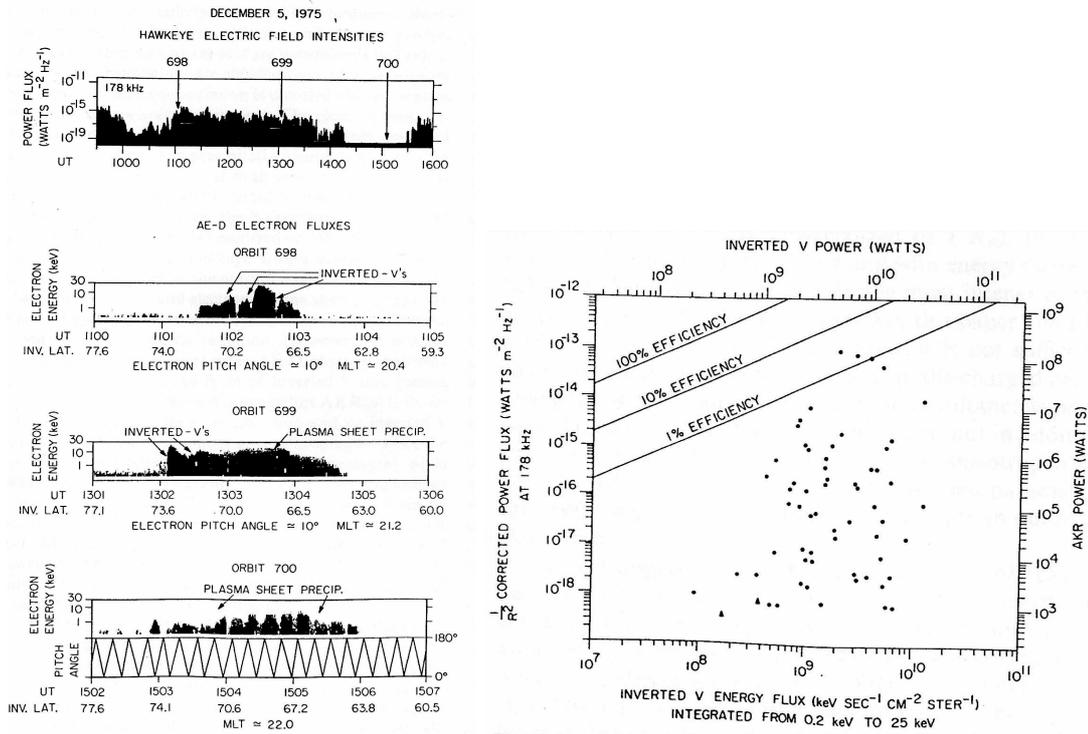


Figura 3.6: À esquerda: Precipitação eletrônica [42]. À direita: Eficiência de conversão [42].

As precipitações de elétrons do tipo V-invertido são caracterizadas pelo fluxo de elétrons cuja energia cresce de alguns poucos eV até keV e então retorna à energia de poucos eV, à medida que a nave cruza esta estreita banda de precipitação de elétrons aurorais. Este tipo de precipitação cria uma forma de V-invertido nos espectrogramas tempo-energia. Estas precipitações sugerem a existência de um potencial acelerador na região de ocorrência.

As precipitações da lâmina de plasma têm como característica serem provenientes da região central da lâmina de plasma da cauda geomagnética e corresponderem a regiões de aurora difusa. A precipitação da lâmina de plasma apresenta grandes fluxos de elétrons de baixa energia, estendendo-se em latitude tanto quanto 10° e é facilmente distinguível dos eventos de V-invertido nos espectrogramas tempo-energia.

A figura 3.6 mostra intensidades do campo elétrico da AKR detectadas pelo Hawkeye no canal de 178kHz. Todos incrementos nas emissões de rádio são atribuídos à AKR. Na órbita 698 da figura 3.6, o AE-D detectou três eventos de V-invertido energéticos, em 1102, 1102:15 e 1102:30 UT, com picos de energia de 1,9, 1,38 e 13,1keV. Aproximadamente duas horas depois, na próxima passagem do satélite através da região auroral no hemisfério Norte, ao menos dois eventos de V-invertido energéticos foram detectados, com energias de pico de 6,88 e 3,62keV,

mais precipitação moderadamente intensa da lâmina de plasma. Simultaneamente, o Hawkeye mediu emissões moderadamente intensas de AKR, em torno de $10^{-16}\text{W}/(\text{m}^2\text{Hz})$, no canal de 178kHz.

Na órbita 700, precipitação moderadamente intensa da lâmina de plasma é detectada pelo AE-D, enquanto nenhuma evidência de precipitação do tipo V-invertido é detectada. A modulação dos fluxos de elétrons no painel inferior da figura 3.6 pelo movimento de *spin* do satélite indica a natureza precipitante desses elétrons (0° indica fluxo em direção a Terra). Nenhuma AKR é detectada durante a última passagem do AE-D pela região auroral (seta com rótulo 700 na figura 3.6).

Um mapeamento dos dados coletados é apresentado na figura 3.6. Eventos de V-invertido com fluxos de energia grandes ($\simeq 10^{10}\text{keV}/(\text{s cm}^2\text{sr})$) têm picos característicos de energia no intervalo aproximado de 2,62keV a 24,9keV, mas as emissões mais intensas de AKR estão associadas a eventos de V-invertido com energias $\geq 7\text{keV}$. Este mapeamento indica que mesmo havendo possibilidade de se ter potência $\geq 10^{10}\text{W}$ num evento de precipitação do tipo V-invertido, não é necessariamente verdade que ao mesmo tempo haverá intensa emissão de AKR. É razoável, então, assumir que a geração da AKR pode ser muito sensível a outros parâmetros do plasma na região-fonte e a anisotropias na função distribuição das partículas precipitantes.

Outro aspecto importante da figura 3.6 se refere à consideração dos eventos de V-invertido como fonte de energia para AKR: a eficiência de conversão da energia das partículas em radiação eletromagnética cresce até um máximo em torno de 1% para a maioria das intensas emissões de AKR (concordando com estimativas anteriores, como de Gurnett et al. (1974)). Entretanto, a eficiência de 1% ocorre somente para poucos casos. A média da distribuição na figura 3.6 alcança em torno de 0,001% de eficiência, com a mais baixa eficiência de conversão próximo a $10^{-5}\%$.

Em Benson e Calvert (1979) [7] são reportadas observações feitas pelo satélite ISIS 1⁷ durante passes em apogeu sobre a zona auroral noturna. As observações provêm a primeira evidência direta de que a localização da região-fonte de AKR coincide com a dos eventos de V-invertido, suportando a inferência feita em Gurnett (1974), baseada na análise das correlações entre AKR e arcos aurorais discretos. As medidas do ISIS 1 também (como em Green et al. (1979)) registram casos onde há precipitação de partículas mas não há AKR, com AKR detectada quando há precipitação de partículas do tipo V-invertido.

As observações revelam que a radiação ocorre em depleções locais da densidade eletrônica,

⁷Perigeu: 578km; Apogeu: 3526km; Inclinação: 88,42° [58].

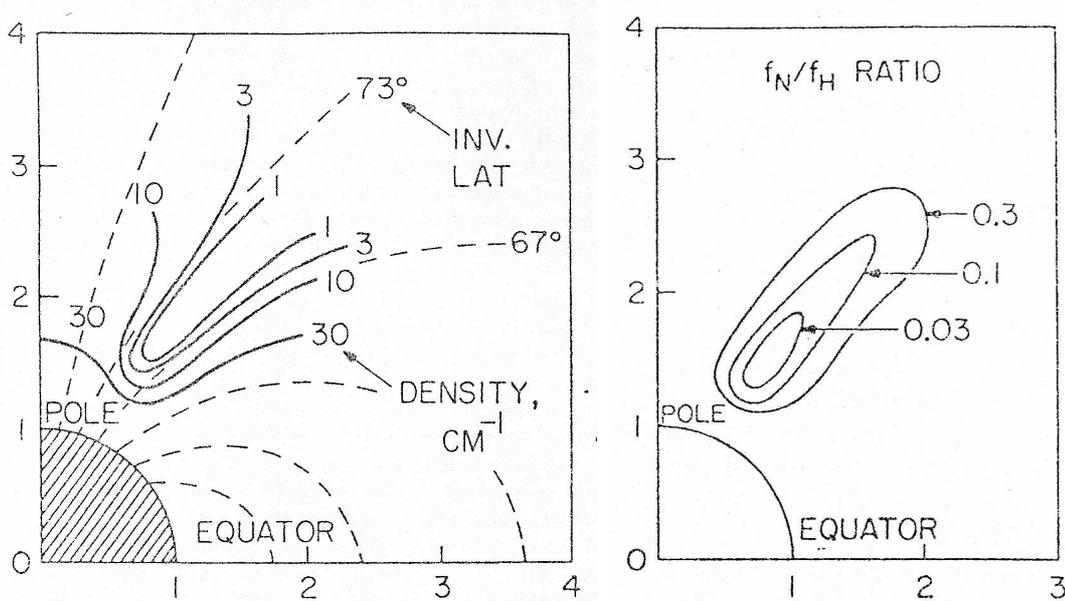


Figura 3.7: À esquerda: Perfil típico da cavidade auroral [18]. À direita: Razão entre as frequências de plasma e cíclotron eletrônicas na cavidade auroral [18].

onde a razão entre a frequência de plasma (ω_{pe}) e frequência de cíclotron (Ω_e) é menor que 0,2. As depleções na densidade são restritas a altitudes acima de 2000km aproximadamente e o limite superior na frequência da AKR corresponde à frequência de corte do modo extraordinário a esta altitude. O sinal detectado é atribuído ao modo eletromagnético extraordinário porque o corte de baixa frequência está sempre próximo ou levemente acima de ω_X (relação (2.66)). Nas depleções, a densidade eletrônica medida assume valores tão baixos que a condição $\omega_{pe}^2 \ll \Omega_e^2$ é facilmente satisfeita na vizinhança das fontes de AKR. Os dados registram depleções dos elétrons de baixa energia durante os eventos de V-invertido. Quando apenas elétrons de baixa energia ($< 1\text{keV}$) são detectados, não são registradas intensas assinaturas de AKR, embora a razão ω_{pe}/Ω_e seja pequena.

A AKR é observada pelo ISIS 1 emanando aproximadamente perpendicular ao campo magnético sobre uma extensão maior em longitude do que em latitude. Como indicação quantitativa, os dados revelam que se a latitude magnética média da fonte é tomada como 70° , então intensa AKR é observada sobre 12° de latitude e 8,5h de tempo local, o que representa uma extensão quase 4 vezes maior em longitude do que em latitude.

Em Calvert (1981) [18] são reportadas evidências obtidas pelo satélite Hawkeye de que as depleções na densidade, primeiramente detectadas pelo ISIS 1, se estendem a altitudes muito maiores, constituindo uma enorme cavidade auroral, com densidades de plasma menores que os valores então esperados. O principal resultado desse estudo está representado na figura 3.7.

A figura mostra uma cavidade de plasma profunda na fonte de intensa AKR. Na cavidade, densidades tão baixas quanto 1cm^{-3} ocorrem por volta de $1,8R_e$ de distância geocêntrica. A cavidade tem uma abertura angular aproximada de 6° , centrada por volta de 70° de latitude magnética invariante. Os dados de densidade em conjunto com as características espectrais da AKR (figura 3.2) sugerem que a fonte se estende de $1,3$ a $3,3R_e$, aproximadamente.

A figura 3.7 refere-se apenas aos instantes em que a AKR está ativa, já que sua medida requer a existência de ondas associadas à AKR. A natureza transiente da cavidade sugere que ela se desenvolve com a AKR e isto é consistente com o fato de ser consequência de energização eletrônica.

Embora a densidade de plasma no interior da cavidade seja aproximadamente uniforme com a altitude, o campo decresce substancialmente. Isto produz o mínimo pronunciado, mostrado na figura 3.7, por volta de $1,8R_e$ de altitude geocêntrica, com um valor um pouco abaixo de $0,03$. Este mínimo corresponde ao pico de intensidade no espectro de emissão da AKR, que ocorre em torno de 250kHz , uma vez que a frequência de ciclotron eletrônica a $1,8R_e$ é de aproximadamente 250kHz . Além disso, a frequência de ciclotron nos extremos do contorno com razão $0,1$ na figura 3.7, é de aproximadamente 50 e 600kHz , o que corresponde aos limites médios do espectro observado da AKR (figura 3.2).

Conclui-se, desta forma, que a cavidade auroral controla o espectro de emissão global da intensa AKR e que a existência de uma cavidade deve ser essencial para sua geração.

Shawhan e Gurnett (1982) [74] reportam dados obtidos pelo satélite DE-1⁸. O satélite faz medidas diretas da polarização da AKR e verifica a propagação no modo extraordinário circularmente polarizado à direita (R-X). O fato do satélite estar próximo à região-fonte permite inferir que a AKR é *gerada* predominantemente no modo R-X. Os resultados reforçam as teorias que predizem a emissão da AKR nesse modo, em detrimento daquelas que predizem emissão no modo ordinário.

Roux et al. (1993) [70] expõe um sumário dos estudos envolvendo as medidas feitas pelo satélite Viking⁹. Além de confirmar várias das características já conhecidas da AKR, são reportadas medidas de densidade obtidas utilizando diferentes métodos. Essas medidas evidenciam a existência de estruturas internas à região de depleção na densidade (subcavidades), como mostra a figura 3.8. Na figura pode-se observar uma variação por um fator ~ 10 entre as densidades dentro e fora da cavidade. As medidas também revelam possíveis fontes de energia livre capazes de alimentar o mecanismo de maser: além do cone-de-perda, uma

⁸Perigeu: $567,6\text{km}$; Apogeu: 23.289km ; Inclinação: $89,9^\circ$ [58].

⁹Perigeu: 822km ; Apogeu: 14.000km ; Inclinação: $98,7^\circ$ [58].

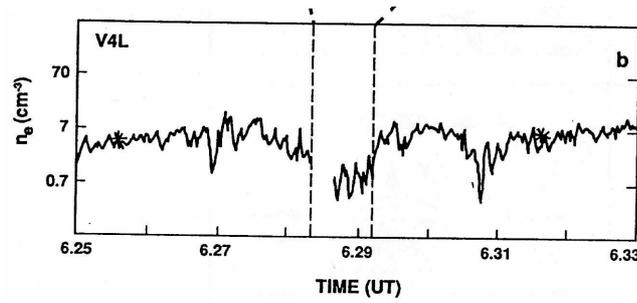


Figura 3.8: Caverna e subcavernas na região-fonte de AKR [70].

região com aspecto de buraco, para ângulo de arremesso pequeno das partículas descendentes e uma região de incremento (corcova) para ângulo de arremesso próximo à perpendicular das partículas descendentes. Essas regiões da distribuição de partículas são potenciais fontes de energia para a AKR, uma vez que produzem intervalos onde $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$.

Em McFadden et al. (1999) [52] são reportados os principais resultados obtidos durante os primeiros dois anos da missão FAST. Esses resultados são reportados parcialmente em Ergun et al. (1998a) [30], Ergun et al. (1998b) [29] e Delory et al. (1998) [25]. O satélite FAST foi projetado para investigar a estrutura em microescala da região de aceleração auroral, que era não-resolvida pelos satélites até então.

Medições locais de partículas e campos nas regiões aurorais da Terra têm sido realizadas por décadas. Essas medições têm revelado uma rica variedade de fenômenos de plasmas em escalas espaciais e temporais múltiplas, com mais detalhes e fenômenos revelados à medida que a instrumentação é aprimorada. Até recentemente, recursos limitados das naves, instrumentos com projetos incipientes e naves com alta velocidade têm forçado as missões de satélites a se concentrar na estrutura de larga escala da região auroral. Essas medidas de larga escala feitas por satélites têm sido complementadas por foguetes de sondagem que têm provido medidas sumárias de alta resolução em altitudes mais baixas. O satélite Freja¹⁰ foi o primeiro capaz de fazer medidas com alta resolução temporal, mas seu baixo apogeu (1764km) apenas ocasionalmente permitiu que alcançasse a região de aceleração auroral.

O satélite FAST foi especificamente projetado para investigar a física de plasmas dos fenômenos aurorais no interior da região de aceleração em resoluções espaciais e temporais extremamente altas. Ele faz parte das missões SMEX ("Small Explorer", NASA), que foram estabelecidas para prover oportunidades rápidas e de baixo custo à comunidade de ciências espaciais. Os dados obtidos apresentam bom acordo com as descobertas anteriores, entretanto

¹⁰Perigeu: 596km; Apogeu: 1764km; Inclinação: 63° [58].

algumas medidas revelam novas características, qualitativas ou quantitativas, que são descritas a seguir.

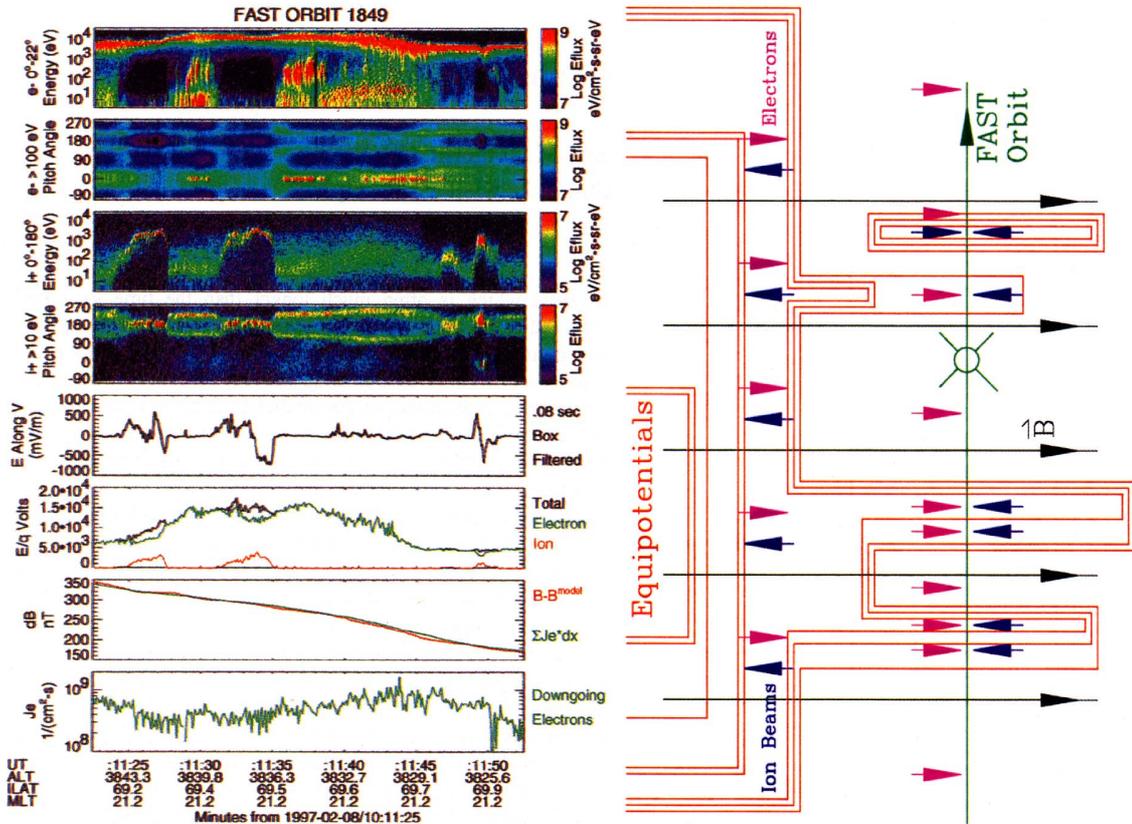


Figura 3.9: À esquerda: Conjunto de dados do FAST [52]. À direita: Respectiva estrutura de potencial inferida [52].

A figura 3.9 (à esquerda) mostra uma coleção de dados obtida durante 30s próximo à meia-noite local. Os dois primeiros painéis são espectrogramas de energia e ângulo-de-arremesso dos elétrons, que mostram arcos eletrônicos de V-invertido (10keV) e elétrons de baixa energia ($< 1\text{keV}$) alinhados com o campo magnético. Os painéis terceiro e quarto mostram as mudanças na distribuição iônica, de uma distribuição cônica com picos em $\sim 135^\circ$ e $\sim 225^\circ$ para uma distribuição ascendente com pico em 180° e de volta a uma distribuição cônica, várias vezes no período medido. Cada transição é acompanhada por um intenso campo elétrico perpendicular (quinto painel) e um aumento do cone-de-perda (segundo painel). Essas múltiplas transições feixe-cone são comuns nas passagens em que são feitas medidas sobre os íons. Concomitante ao aparecimento das cônicas, há um incremento no fluxo de elétrons de baixa energia no interior do cone-de-perda. Esses elétrons são elétrons secundários retroespalhados, que são excluídos da região de aceleração pelo campo elétrico paralelo [77].

As propriedades dessas regiões estreitas com feixes iônicos podem ser resumidas como

segue. A componente paralela do campo elétrico é pequena ($E_{\parallel} < 0,1 E_{\perp}$), indicando que os limites inferiores dessas regiões de aceleração se estendem bastante abaixo da nave. Assim, as quedas de potencial relacionadas aos V-invertidos contêm longas estruturas de potencial, que podem ter alguns quilômetros de largura e dezenas ou centenas de quilômetros ao longo das linhas de campo. A localização desses feixes de íons ou longas estruturas de potencial não estão correlacionadas com nenhuma mudança na queda total de potencial ou na densidade local de corrente (painéis sétimo e oitavo).

As quedas de potencial inferidas pela energia dos feixes de íons, pela variação do cone-de-perda e pela integração dos campos perpendiculares estão em acordo na maioria das vezes, embora variações temporais no potencial sejam observadas. Esse resultados sugerem que a estrutura de potencial é geralmente estática em relação ao tempo de trânsito dos íons ($> 10s$). A boa correlação entre o potencial inferido e a energia das partículas sugere que a energização das partículas é decorrente de um campo elétrico paralelo.

O quarto feixe de íons do quarto painel tem um aspecto incomum, com íons fluindo tanto em 0° como em 180° . Ambos feixes parecem manter a mesma energia por um tempo em torno de 1s. Isto sugere que um potencial reverso tenha sido formado ao longo das linhas de campo, que reflete, ao menos em parte, os íons ascendentes. A característica identificada no quinto painel em 1011:49UT mostra que uma estrutura de potencial está associada com esse contra-fluxo de íons. A estrutura do campo elétrico não constitui uma variação temporal, uma vez que não há registro magnético correspondente (sétimo painel). A estrutura eletrostática é, aparentemente, uma vacância de íons, com um tempo de existência $> 1s$. Uma vez que os eventos de contra-fluxo de íons representam mudanças na configuração auroral raras e, talvez, de curta existência, sua discussão apenas ilustra o tipo de estruturas que podem ser observadas com instrumentação de alta resolução.

A figura 3.9 (à direita) mostra a estrutura de potencial quase-estático sugerida pelas medições de campos e partículas expostas na figura 3.9 (à esquerda). Um possível potencial reverso é representado no extremo da figura, sendo capaz de responder pelo contra-fluxo de íons observado. Os potenciais quase-estáticos que formam os feixes de íons observados pelo FAST tipicamente contêm uma fração significativa do potencial total, da ordem de $\sim 30\%$, embora raramente contenha mais que a metade do potencial total (os íons determinam o potencial abaixo da nave, os elétrons, acima). Sabendo que os campos aceleradores se estendem a altitudes muito maiores (até $\sim 13.500km$, Viking), pode-se concluir que os potenciais aceleradores não são distribuídos uniformemente ao longo dos tubos de fluxo.

A figura 3.10 (à esquerda) representa características da região-fonte da AKR. A linha

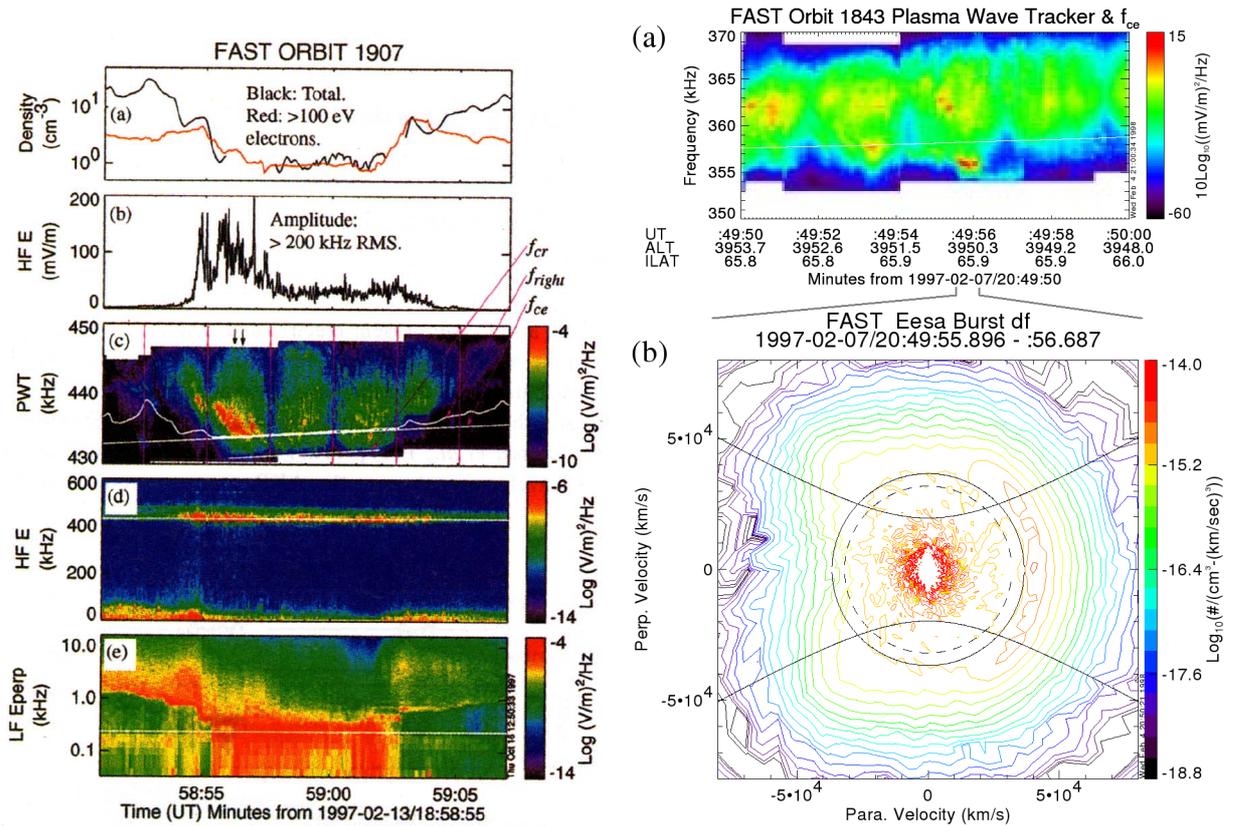


Figura 3.10: À esquerda: Conjunto de dados do FAST [30]. À direita: (a) Medida da AKR (b) Distribuição eletrônica [25].

branca no quarto painel representa a frequência de elétron-cíclotron f_{ce} e no quinto painel representa a frequência de cíclotron dos íons de Hidrogênio f_{cH^+} . A linha vermelha no primeiro painel indica a densidade dos elétrons com energia $> 100\text{eV}$, enquanto a linha preta indica a densidade eletrônica total. A densidade eletrônica parece ser suportada essencialmente por elétrons energéticos, dentro da cavidade. Os dados são consistentes com a ausência de um núcleo térmico abaixo de $\sim 100\text{eV}$. Notam-se também subestruturas na cavidade. O segundo painel mostra a amplitude do campo elétrico com frequências $> 200\text{kHz}$ (RMS, "Root-Mean-Square", com média sobre $\sim 50\text{ms}$). O sinal é dominado pela AKR. Nesse exemplo, a AKR alcança amplitudes tão altas quanto 200mV/m . As emissões mais intensas ocorrem em intervalos $< 1\text{s}$. Algumas medidas reportadas indicam intensidade de emissão $> 300\text{mV/m}$ e dados consistentes com propagação perpendicular ($k_{\parallel} = 0$). As medidas feitas pelo FAST revelam densidades espectrais máximas 3 ordens de magnitude mais altas e densidades espectrais médias 1 ordem de magnitude mais alta do que as obtidas anteriormente pelo satélite Viking.

No terceiro painel, as linhas verticais (cor magenta) indicam quando as antenas de campo

elétrico estão aproximadamente paralelas ao campo geomagnético local. A potência medida nesses instantes é muito menor, indicando que o sinal de campo elétrico é essencialmente perpendicular.

A frequência de corte para o modo X, $f_{right} = (f_{ce} + (f_{ce}^2 + 4f_{pe}^2)^{1/2})/2$ (relação (2.66)), onde f_{pe} é a frequência de plasma eletrônica e f_{ce} é a frequência de cíclotron eletrônica não-relativística, é determinada a partir da densidade total (painel a) e do campo magnético medido. A frequência de cíclotron eletrônica relativística $f_{cr} = eB/m\gamma$ corrige a frequência, tomando em conta a energia média da população eletrônica medida, com energia $> 100\text{eV}$. Uma vez que a maior parte da população eletrônica é mono-energética, f_{cr} representa a frequência de cíclotron da população eletrônica energética.

Alguns aspectos podem ser observados no espectro da AKR na região-fonte (painel 3). As emissões, por vezes, nitidamente se estendem abaixo de f_{ce} (por exemplo, em 18:59:01.2UT), mas não abaixo de f_{cr} . Fora da cavidade de densidade, as emissões parecem obedecer ao corte em f_{right} . As emissões mais intensas ($\sim 18:58:54.75\text{UT}$ e $\sim 18:58:55.75\text{UT}$) estão localizadas nas bordas da cavidade, antes da densidade alcançar seu valor mais baixo. A maioria das emissões de AKR registradas ocorrem acima de f_{ce} , mas os picos das emissões mais intensas (por exemplo, na órbita 1843, figura 3.10) ocorreram em frequências menores que f_{ce} , essencialmente em f_{cr} . As observações também confirmam que as emissões mais intensas de AKR ocorrem em depleções de densidade que se estendem de 30 a 300km em latitude. Todas essas regiões-fonte estavam localizadas próximas à meia-noite do tempo local magnético e próximas ao apogeu do FAST (4159km).

Na região de corrente ascendente (onde ocorre AKR) são observadas ondas de íon-cíclotron de grande amplitude que desenvolvem uma componente paralela substancial ($\sim 700\text{mV/m}$) e que alteram significativamente a distribuição eletrônica. Modulações na distribuição eletrônica acompanham a forma dessas ondas, o que pode responder pelas oscilações nas auroras ("flickering aurora"). Estas observações também suportam a sugestão, feita em Block e Fälthammar (1990), de que campos elétricos de baixa frequência podem causar aceleração seletiva entre íons e elétrons.

Por outro lado, a presença de ondas íon-cíclotron com componente perpendicular significativa, também observada, é capaz de responder pela formação dos fluxos iônicos em forma cônica (no espaço de velocidades), como no quinto painel da figura 3.9 (à esquerda), decorrentes do aquecimento perpendicular provocado por essas ondas.

As medidas do FAST revelam que no interior das regiões-fonte da AKR, a distribuição de elétrons energéticos parece exibir um platô sobre um grande intervalo em ângulo-de-arremesso.

Em geral, a maioria das distribuições medidas apresentam platô numa região em torno de $v_{\parallel} = 0$, com um cone-de-perda presente na região ascendente e uma inclinação positiva suave ($\partial F/\partial v_{\perp} > 0$) para ângulos-de-arremesso pequeno, na região descendente. Na figura 3.10 (à direita) é apresentado um exemplo de medida na fonte de AKR (órbita 1843). A linha branca representa f_{ce} . (a) mostra emissões logo abaixo e logo acima de f_{ce} . (b) mostra a distribuição eletrônica quando da emissão intensa abaixo de f_{ce} .

A fim de entender as várias possíveis regiões de energia livre na distribuição, é útil dividir a distribuição em termos das várias populações eletrônicas presentes. Superpostas aos contornos da distribuição, estão linhas sólidas pretas definindo regiões de populações eletrônicas magnetosférica, ionosférica e aprisionada, como descrito em Chiu e Schulz (1978). A elipse aproximadamente circular define um limite para os elétrons magnetosféricos acelerados. Esses elétrons não podem ocupar regiões da distribuição abaixo dessa velocidade, a menos que sejam espalhados por interação onda-partícula ou outro tipo de interação. As hipérbolas definem o cone-de-perda na presença de uma queda de potencial paralelo (seção 2.9). As áreas exteriores às hipérbolas, mas interiores à elipse, definem regiões de elétrons aprisionados. Ordinariamente, nenhum elétron deveria ocupar estas regiões, a menos que alguma forma de espalhamento ou, possivelmente, variação temporal do potencial paralelo, tenha ocorrido. As regiões internas às hipérbolas e à elipse correspondem aos elétrons de origem ionosférica.

Os elétrons energéticos primários do V-invertido são visíveis, com pico em pequeno ângulo e espalhando-se até em torno de 45° , devido ao campo magnético convergente. O cone-de-perda está presente na região ascendente. Há um extenso platô na distribuição, evidenciado pelas linhas de contorno verde/amarelo, que abarcam a elipse definida pelos elétrons acelerados. A distribuição representada na figura 3.10 está contaminada por uma combinação de fotoelétrons produzidos pela nave (até 60eV) e elétrons secundários emitidos pela nave devido aos feixes eletrônicos energéticos, produzindo, assim, um núcleo artificial na distribuição.

Em várias passagens são observadas distribuições que apresentam inclinações negativas acentuadas em ângulos próximos a 90° . Essas distribuições são observadas nas bordas das regiões-fonte da AKR. Uma possível explicação para esses registros é a de que, uma vez gerada, a AKR pode agir como um mecanismo de aquecimento dos elétrons ionosféricos mais frios.

O papel do cone-de-perda na geração da AKR é questionado, à luz das observações do FAST, uma vez que raramente foram encontrados cones-de-perda que pareciam preenchidos (indicando difusão pelo maser). Embora os platôs nas distribuições são freqüentemente observados no interior das regiões de elétrons aprisionados, esses platôs se estendem além dessa

região, tanto em v_{\parallel} como em v_{\perp} , o que pode indicar que esta difusão de elétrons envolve mais do que somente elétrons aprisionados.

Um cenário capaz de produzir os extensos platôs observados e o aumento ocasional do fluxo de elétrons ao longo de v_{\perp} , pode ser descrito como segue. Inicia-se com um feixe aproximadamente mono-energético que foi acelerado numa região bastante acima da altitude de observação. À medida que o feixe se desloca no campo magnético convergente, os elétrons evoluem para ângulos-de-arremesso crescentes, formando uma distribuição em forma de C-invertido¹¹, com inclinações positivas em v_{\perp} , capazes de alimentar um mecanismo de maser.

A AKR pode ter frequência menor que f_{ce} e $k_{\parallel} = 0$. Neste caso, a elipse ressonante (3.36) torna-se um círculo centrado na origem, capaz de excursionar pela região quase contínua onde $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$, que acredita-se ser criada pela ação do campo magnético convergente sobre os elétrons (\sim keV) do V-invertido. Essas ondas podem existir, como mostra a figura 3.10(a), onde uma emissão de AKR ocorre logo abaixo de f_{ce} próximo a $\sim 20:49:56$ UT e é consistente com a propagação observada pelo FAST de $\sim 90^{\circ}$ em relação ao campo magnético. A distribuição eletrônica da figura 3.10(b) foi obtida durante este evento de AKR. Superposto à distribuição está um círculo tracejado que representa a curva ressonante definida por (3.36), assumindo que $k_{\parallel} \sim 0$. Como pode ser visto pelo círculo resultante, a condição de ressonância para esta emissão de AKR coincide com a área onde a distribuição apresenta um platô. Presume-se que essa região apresentava o maior valor integrado de $\partial F/\partial v_{\perp}$ antes da distribuição ter sido estabilizada e é onde as emissões de AKR estavam aptas a extrair a máxima quantidade de energia para a amplificação. Sugere-se, portanto, que esse platô decorre da difusão no espaço de velocidades devido ao crescimento da AKR.

Os resultados indicam que a fonte de energia livre para a AKR não é limitada apenas ao cone-de-perda, mas pode abarcar uma região muito mais extensa da distribuição. Contudo, o FAST observa, por vezes, gradientes íngremes no cone-de-perda.

A modificação mais importante no conhecimento da AKR, resultante dos novos dados colhidos pelo FAST, é de que, diversas vezes, as emissões não drenam sua energia somente do cone-de-perda, mas sim de uma distribuição instável em forma de C-invertido. A implicação de maior alcance é que o maser de elétron-cíclotron está associado a um tipo particular de aceleração de partículas carregadas: um campo elétrico alinhado a um campo magnético dipolar. Esses aspectos alteram características do mecanismo de maser de elétron-cíclotron e podem tornar necessária uma reanálise de algumas fontes de rádio astrofísicas.

¹¹Este tipo de distribuição é referida na literatura como "horseshoe", "incomplete shell", "incomplete ring" ou ainda "banana shape".

Em Ergun (2000) et al. [31] as recentes descobertas acerca da AKR são colocadas no contexto astrofísico. Essas descobertas permitem que o maser de elétron-cíclotron seja aplicado a fontes de rádio que não eram consideradas capazes de exibir este mecanismo, até então. Por exemplo, fontes muito intensas e de emissão contínua ou fontes muito acima de superfícies estelares.

O maser alimentado por um cone-de-perda, além de apontado como mecanismo gerador da AKR, já foi postulado como causa de outras emissões de rádio. Essas emissões incluem radiação de todos os planetas magnetizados externos, emissões solares, emissões a partir de sistemas binários e de estrelas anãs. Essas fontes de rádio têm em comum alta intensidade, acentuada polarização circular, estreita largura de banda e alta variabilidade. O maser de elétron-cíclotron tem um certo apelo por ser considerado eficiente e por ser capaz de produzir amplificação direta de radiação eletromagnética circularmente polarizada, com pequena largura de banda ou estrutura fina.

O maser de C-invertido resulta em emissões com apenas pequenas diferenças em relação àquelas previstas pelo maser de cone-de-perda. Ambos mecanismos produzem emissões circularmente polarizadas, com frequências próximas a f_{ce} , largura de banda estreita e alta intensidade. As diferenças são quase impossíveis de serem detectadas remotamente. Por exemplo, o maser de cone-de-perda emite de forma mais intensa em frequências pouco acima de f_{ce} , enquanto o de C-invertido, pouco abaixo de f_{ce} , o que é identificável apenas no interior da região-fonte. Entretanto, a instabilidade de C-invertido é mais viável porque é reconhecida como fonte da AKR, é uma fonte mais energética e está diretamente associada a aceleração de partículas.

Há, entretanto, algumas características nas emissões que são contempladas pelo C-invertido, mas não pelo cone-de-perda: emissão intensa continuada, emissões com largura de banda grande e emissões a partir de uma altitude muito acima de uma superfície estelar. É esperado que os masers de cone-de-perda saturem rapidamente, enquanto o maser de C-invertido é capaz de produzir tanto emissões contínuas, como eclosões de curta duração, dependendo da aceleração dos elétrons. Masers de cone-de-perda estão limitados a se localizar próximos a uma superfície estelar, enquanto os de C-invertido podem ter localização muito acima da superfície estelar ou planetária. Sob aceleração relativística moderada ($\gamma \sim 2$), as emissões podem ter a largura de banda aumentada.

Há duas propriedades interessantes das distribuições em C-invertido. Todos os elétrons têm aproximadamente a mesma energia (considerando que a energia da aceleração seja maior que a temperatura da fonte). A massa efetiva (γm_e) e, portanto, a frequência de cíclotron

relativisticamente corrigida ($f_{cr} = f_{ce}/\gamma$) de todos os elétrons é essencialmente a mesma. Assim, a parte real da relação de dispersão pode ser analisada simplesmente com os elétrons "pesados". Uma vez que a frequência de plasma (f_{pe}) é muito menor que f_{cr} , a frequência de corte para o modo X (2.66) torna-se

$$f_{right} \simeq f_{cr} + 2f_{pe}^2/f_{cr}. \quad (3.2)$$

Nas cavidades de densidade aurorais, f_{right} é geralmente menor que f_{ce} . Assim, o modo R-X pode se propagar abaixo de f_{ce} . É possível que ondas geradas pelo cone-de-perda possam refletir em irregularidades nas bordas da cavidade e emergir com propagação descendente. Assim, detecção de ondas com frequência abaixo de f_{ce} geradas pelo maser de cone-de-perda, embora improvável, não deve ser descartada.

Uma diferença importante entre os masers de cone-de-perda e C-invertido é a saturação do crescimento da onda. Sob o maser de cone-de-perda, a radiação causa difusão no espaço de velocidades que preenche o cone e pode acabar por extinguir a instabilidade. O maser de cone-de-perda não é capaz de sustentar uma alta intensidade em estado estacionário. Emissões mais intensas somente são possíveis na forma de pulsos.

A instabilidade de C-invertido tem abastecimento contínuo de energia livre para o maser, pelo campo elétrico paralelo, sendo capaz de sustentar um estado estacionário com grande intensidade de emissão. O crescimento da onda provoca a difusão de elétrons para energias menores. Esta difusão perpendicular é observada nas distribuições medidas nas regiões-fonte, sendo considerada forte evidência da instabilidade de C-invertido. Os elétrons que sofreram difusão podem ser removidos pelo campo elétrico paralelo ou, dependendo da distribuição do campo elétrico, podem ser aprisionados (os elétrons aprisionados nem sempre aparecem nas regiões-fonte). A radiação do maser pode continuar a crescer devido à inclinação positiva ($\partial F/\partial v_{\perp} > 0$) causada pela população aprisionada. Assim, o maser de C-invertido pode sustentar intensidades elevadas em estado estacionário, enquanto a aceleração for mantida. As emissões podem ser na forma de curtas eclosões se a aceleração de partículas também apresentar característica impulsiva.

Há duas condições principais para a amplificação direta de ondas eletromagnéticas pelo maser de elétron-cíclotron. A distribuição instável precisa ser criada (o maser requer $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$). Também é requerida uma baixa densidade de plasma, tal que $f_{pe} \ll f_{ce}$. Embora um cone-de-perda possa satisfazer o primeiro requerimento, não, necessariamente, satisfaz o segundo. Enquanto a existência de um campo elétrico paralelo parece ser capaz de fazer com que ambas as condições sejam satisfeitas simultaneamente (Em Wu e Lee (1979) é suposto que

as cavidades sejam produzidas por um campo elétrico alinhado, no entanto, não é considerado o respectivo efeito sobre a população energética e a conseqüente dinâmica envolvida).

Uma característica freqüentemente mencionada do maser de elétron-cíclotron é a expectativa que as emissões tenham largura de banda estreita ou estrutura fina. Estrutura fina nas emissões aurorais consiste de tons ascendentes ou descendentes (figura 3.17) com largura de banda de menos de 1% da freqüência das ondas ($\sim f_{ce}$). Na instabilidade de C-invertido a largura de banda é restrita, aproximadamente, a $(f_{ce} - f_{cr})/f_{ce}$. De forma equivalente, $\Delta f/f_{ce} < (\gamma - 1)/\gamma$. A energia dos elétrons aurorais raramente excede $\sim 30\text{keV}$; tipicamente apresentam energias $\sim 10\text{keV}$. Assim, a largura de banda estreita para a AKR é esperada.

Há duas possibilidades para explicar uma grande largura de banda no contexto de maser de elétron-cíclotron: Radiação em múltiplos pontos ao longo de um tubo de fluxo magnético produziria o que parece uma emissão com grande largura de banda a um observador remoto (como no caso da AKR). Aceleração relativística moderada ($\gamma \sim 2$) dos elétrons também pode produzir emissões de banda larga através do maser de C-invertido.

Outra diferença entre a instabilidade de cone-de-perda e C-invertido é a altitude do maser acima da superfície estelar ou planetária. Um problema importante do maser de elétron-cíclotron está no fato de que a radiação deve ser absorvida à medida que se propaga em regiões tais que a freqüência da radiação é um harmônico da freqüência de cíclotron local. O ângulo do cone-de-perda depende da razão de espelhamento com respeito à *superfície estelar*, geralmente requerendo que a fonte esteja próximo à superfície. Embora um campo magnético intenso próximo à superfície seja capaz de satisfazer $f_{pe} \ll f_{ce}$, a radiação precisa atravessar um plasma relativamente denso e, assim, experimenta uma forte absorção em harmônicos mais altos. A distribuição de C-invertido requer uma razão de espelhamento moderada com respeito ao *ponto de aceleração* e pode ocorrer em qualquer altitude acima da superfície estelar ou planetária. A densidade de plasma ambiente pode ser menor e, assim, a absorção harmônica pode ser menor.

Uma vez que as emissões do maser de C-invertido estão diretamente associadas com a aceleração de partículas, modulações na aceleração de elétrons podem produzir modulações de amplitude nas emissões de rádio. Modulações na intensidade da AKR associadas a modulações do fluxo de elétrons ou de energia têm sido observadas.

Assim, sugere-se que a instabilidade de C-invertido possa ser aplicada aos fenômenos até então atribuídos à instabilidade de cone-de-perda e também àqueles que exibem emissão intensa de longa duração ou em grande altitude, para os quais o maser de elétron-cíclotron não era considerado viável.

Em Ergun et al. (2004) [32] são reportadas medidas da região auroral obtidas pelos satélites FAST e Polar¹². As medidas de campo elétrico e de distribuição de partículas se mostram consistentes com a existência de camadas-duplas.

As observações sugerem que os campos elétricos paralelos se concentram ao menos em duas regiões ao longo das linhas de campo magnético. Uma camada de transição de baixa altitude localiza-se na fronteira entre o plasma ionosférico e o plasma tênue da cavidade auroral. Esta camada pode carregar $\sim 10\%$ a $\sim 50\%$ do potencial auroral total, tendo sido diretamente observada e caracterizada como camada-dupla forte. Assim, a maioria do potencial auroral é interior à cavidade auroral ou está a grande altitude em uma camada de transição entre a cavidade auroral e o plasma magnetosférico. A natureza do potencial auroral interno à cavidade auroral e na camada de transição de grande altitude é largamente indeterminada.

Camadas-duplas na fronteira ionosfera-cavidade auroral são mais freqüentemente oblíquas ($|E_{\perp}| > |E_{\parallel}|$). O processo físico que governa o ângulo da camada-dupla em relação ao campo magnético ainda não é compreendido. Camadas-duplas oblíquas com amplitudes maiores que 100mV/m têm sido verificadas em $\sim 3\%$, podendo ocorrer em até 11% dos passes dos satélites na cavidade auroral. Desta forma, é plausível que camadas-duplas fortes constituam um mecanismo principal de aceleração.

A figura 3.11 exhibe um modelo bastante simplificado da região de corrente ascendente, derivado de vários anos de pesquisa sobre a região auroral. A localização do potencial auroral está geralmente entre $\sim 1/2$ e $2R_e$ em altitude.

Embora de forma não conclusiva, principalmente devido ao fato das medidas não constituírem um bom conjunto estatístico, sugere-se que a ocorrência observacional é alta o suficiente para concluir que as camadas-duplas constituem um mecanismo físico dominante.

Em Seki et al. (2005) [72] é apresentada uma investigação do processo de acoplamento magnetosfera-ionosfera (M-I) durante tempestades magnéticas. Esse estudo é baseado em observações da radiação quilométrica das auroras na região de aceleração e das variações de densidade na lâmina de plasma, envolvendo diversos satélites (Geotail¹³, Akebono¹⁴, DMSP¹⁵, IMAGE¹⁶, WIND¹⁷).

A AKR mostra um comportamento inesperado durante as tempestades magnéticas: (1) A

¹²Perigeu: 185km; Apogeu: 50.551km; Inclinação: 85,9° [58].

¹³Fase 1/fase 2: Perigeu: 47.835/51.024km; Apogeu: 869.321/191.340km; Inclinação: 5,15/7,5° [58].

¹⁴Perigeu: 300km; Apogeu: 8000km; Inclinação: 75° [58].

¹⁵Perigeu: ~ 800 km; Apogeu: ~ 800 km; Inclinação: $\sim 98^\circ$ [26, 58].

¹⁶Perigeu: 1000km; Apogeu: 46.004km; Inclinação: 90,01° [58].

¹⁷Órbita solar [58].

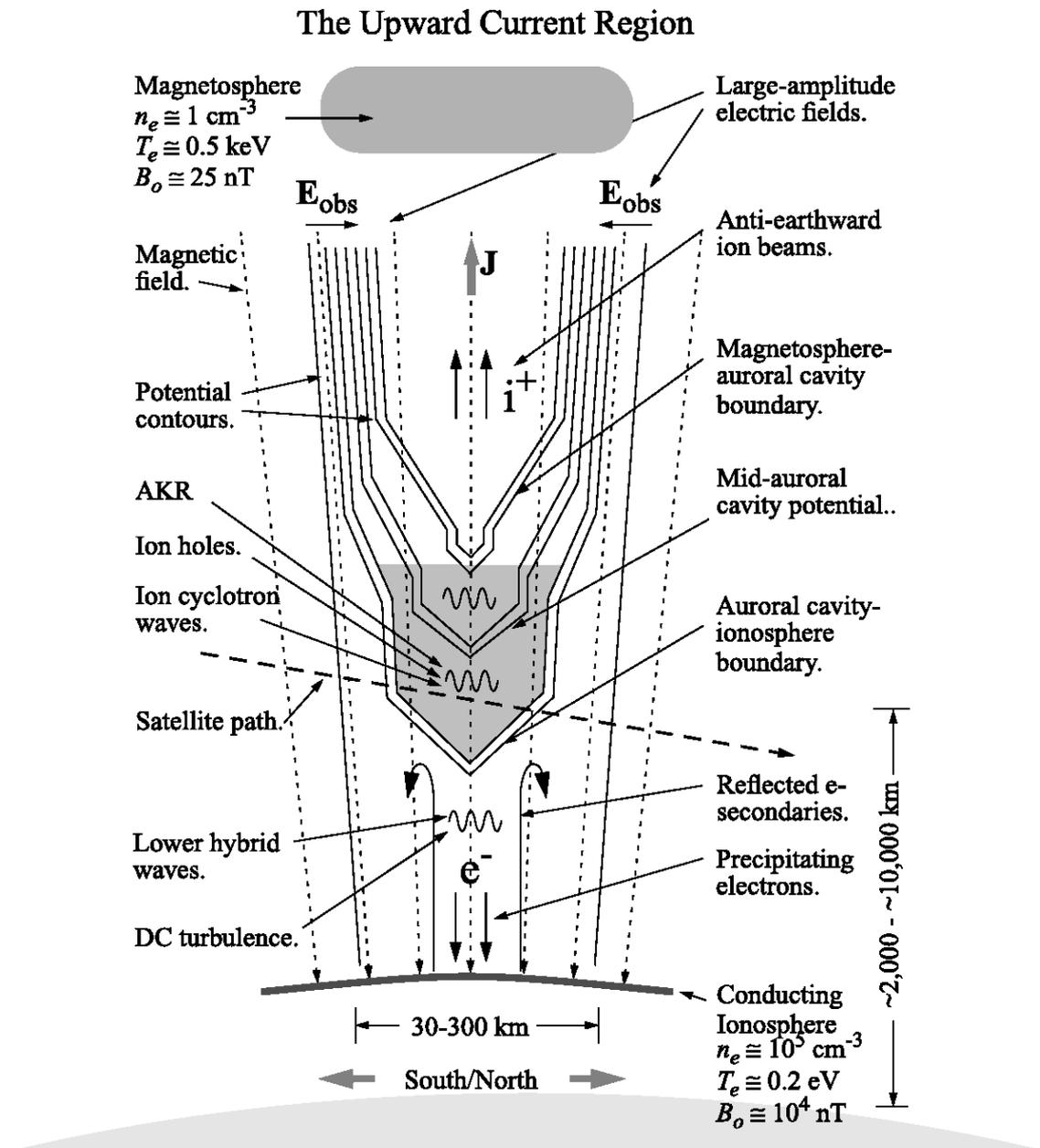


Figura 3.11: Estrutura da região de corrente ascendente, onde evidenciam-se as dimensões características e a divisão da região de aceleração em alta e baixa altitude [32].

AKR freqüentemente desaparece nas fases inicial e principal da tempestade magnética, a despeito do grande incremento nas correntes alinhadas. (2) Nesses casos, os espectros de energia dos elétrons precipitantes não mostram assinaturas de aceleração por campo alinhado, em vez disso, mostram incrementos de elétrons energéticos, provavelmente da lâmina de plasma. (3) A radiação é ativada fortemente na fase de restabelecimento.

A precipitação eletrônica na fase principal da tempestade, onde a AKR está inativa, é confirmada como não sendo caracterizada por precipitação do tipo V-invertido, mas precipitação com distribuição do tipo Maxwelliana. A injeção de elétrons energéticos em vez de precipitação em forma de feixe durante as fases inicial e principal indica que o potencial alinhado era muito fraco ou não foi formado. Por outro lado, o reaparecimento da AKR e a simultânea precipitação de elétrons em forma de feixe durante a fase de restabelecimento, indica a formação de potencial alinhado. As observações também verificam que o plasma superdenso na lâmina de plasma está estreitamente relacionado com a atividade da AKR: a ocorrência de plasma superdenso na lâmina de plasma parece suprimir a atividade de AKR.

Nesse estudo, a densidade de corrente alinhada é descrita, sob a assunção de que os portadores de corrente são os elétrons magnetosféricos com uma distribuição Maxwelliana, por

$$j_{\parallel} = eN \left(\frac{K_{th}}{2\pi m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{B_i}{B_{V_{\parallel}}} \left[1 - \left(1 - \frac{B_{V_{\parallel}}}{B_i} \right) \exp \left\{ - \frac{eV_{\parallel}}{K_{th} \left[\left(B_i/B_{V_{\parallel}} \right) - 1 \right]} \right\} \right], \quad (3.3)$$

onde j_{\parallel} , N , K_{th} e V_{\parallel} são, respectivamente, a densidade de corrente alinhada, a densidade do plasma, a energia térmica e a queda de potencial alinhado. B_i é o campo magnético ionosférico e $B_{V_{\parallel}}$ é a intensidade do campo magnético no topo da variação de potencial ao longo do campo magnético. A carga e massa dos elétrons são representadas por e e m_e , respectivamente. No estudo considera-se que esta relação é válida mesmo durante as tempestades magnéticas.

O caso em que o potencial alinhado não é formado ($V_{\parallel} = 0$) e a AKR não se apresenta, a despeito das fortes correntes alinhadas, implica que elétrons com densidade N e energia térmica K_{th} são suficientemente supridos pela magnetosfera para manter a corrente alinhada no sistema de acoplamento M-I. O caso em que o potencial alinhado é formado e a AKR está ativa, com presença de corrente alinhada, sugere que o fluxo de elétrons torna-se insuficiente para manter a corrente alinhada e, então, o potencial alinhado é formado de maneira a manter a necessária relação corrente-voltagem no sistema.

Dessas considerações é sugerido que, durante o período de inatividade da AKR, a lâmina de plasma apresenta um estado denso ou energético e, então, retoma seu estado usual, em que a AKR é ativa.

As anti-relações observadas entre atividade de AKR na região de acoplamento M-I e a densidade da lâmina de plasma suportam a hipótese que os portadores de corrente na lâmina de plasma são suficientes para sustentar a corrente alinhada durante a fase prévia de uma tempestade magnética, sem a necessidade de uma queda de potencial alinhado. Uma vez que a lâmina de plasma torna-se rarefeita durante a fase de restabelecimento, o potencial alinhado é formado, a fim de manter a relação corrente-voltagem entre a magnetosfera e a ionosfera, resultando em radiação de AKR.

É interessante notar a consistência dessas considerações com a condição de Bohm para a formação de camadas-duplas fortes (relação (2.2)). A condição de Bohm poderia ser resolvida para a densidade, produzindo uma condição de densidade máxima para a existência de camadas-duplas fortes.

Além dos trabalhos expostos neste capítulo, outros foram consultados e trazem informações adicionais relativas à AKR [27, 79, 50, 64, 60, 45, 36, 35, 4, 28, 33, 10, 71, 34, 62]. Dentre eles ainda cabe mencionar os trabalhos de Hashimoto et al. (1999) [44] e Menietti et al. (2003) [54], pelas similaridades do objeto de estudo com a AKR: o Contínuo Quilométrico ("Kilometric Continuum", KC). Ambos os fenômenos consistem de emissões eletromagnéticas a partir da magnetosfera terrestre e apresentam faixas de frequências em comum. Em adição, e apesar da nomenclatura, tal como a AKR, o KC exhibe uma estrutura espectral discreta e deriva nas frequências. Entretanto, o KC apresenta diferenças importantes em relação à AKR: ocorre somente próximo ao equador magnético e parece ser descorrelacionado com a atividade magnética.

3.2 Modelos teóricos e simulações numéricas

Diante das evidências de que um campo elétrico alinhado ao campo magnético é formado durante os eventos de V-invertido, em Chiu e Schulz (1978) [23] propõe-se um modelo no qual o campo elétrico é determinado de forma autoconsistente com as distribuições de partículas do plasma. O presente trabalho faz uso desse modelo (com algumas modificações) para obter os parâmetros do plasma na região-fonte de AKR, como densidade, temperatura e velocidade de deriva, os quais são necessários para o cálculo do tensor dielétrico e para o estudo de traçado de raios. Os aspectos relevantes são descritos a seguir.

Basicamente, existem dois mecanismos pelos quais uma diferença de potencial elétrico quase-estático V_l pode ser estabelecida ao longo de uma linha de campo magnético em plasmas não-colisionais. Uma maneira é dada pela formação de camadas-duplas, capazes de serem

produzidas em laboratório, nas quais há correntes de plasma interpenetrantes envolvendo íons e elétrons aprisionados (seção 2.3).

Outra forma é dada considerando que um plasma anisotrópico e não-colisional, sujeito a um campo magnético, é capaz de estar em equilíbrio quase-neutro sem um campo elétrico paralelo, somente se o campo magnético é homogêneo ou se a anisotropia em ângulo de arremesso for a mesma para elétrons e íons. Caso contrário, num campo magnético dipolar como o da Terra, a ausência de campo elétrico paralelo resultaria em diferentes distribuições de íons e elétrons ao longo das linhas de campo, se as anisotropias equatoriais das partículas forem diferentes. De outra maneira: neutralidade de carga do plasma ao longo das linhas de campo magnético demanda que um campo eletrostático seja estabelecido paralelo às linhas de campo magnético.

Utilizando a segunda possibilidade, é empregado o princípio de quase-neutralidade para calcular de forma mutuamente consistente o potencial eletrostático e a distribuição de partículas ao longo de uma linha de campo auroral. De maneira que uma diferença de potencial de vários kilovolts entre o equador e a ionosfera pode ser mantida ao longo de uma linha de campo auroral. O modelo requer que o potencial eletrostático seja uma solução da equação de quase-neutralidade e este requerimento constitui uma importante restrição na admissibilidade do potencial eletrostático.

O princípio de quase-neutralidade parte da consideração de um tubo de fluxo magnético dipolar, no qual a magnitude de \vec{B} varia monotonicamente, desde B_0 , no equador magnético, até B_l , onde l indica aproximadamente o ponto a partir do qual o plasma deixa ser considerado não-colisional. No modelo, as funções distribuição de íons e elétrons, f_+ e f_- , são expressas analiticamente em termos das componentes de velocidade v_\perp e v_\parallel relativas a \vec{B} , em termos do potencial eletrostático local $V_s \equiv V(s)$ e em termos da intensidade local do campo magnético $B_s \equiv B(s)$, onde s é a coordenada que mede o comprimento de arco da linha de campo, a partir do equador magnético. O princípio da quase-neutralidade estabelece que:

$$\int_0^\infty v_\perp dv_\perp \int_{-\infty}^\infty [f_+(v_\parallel, v_\perp; V_s) - f_-(v_\parallel, v_\perp; V_s)] dv_\parallel = 0. \quad (3.4)$$

Para o modelo, onde f_+ e f_- são explicitamente construídas, pode-se interpretar (3.4) como uma equação para o valor de V_s em qualquer ponto s ao longo da linha de campo ($0 \leq s \leq l$), sob a convenção de que V se anula no equador ($V_0 = 0$). Uma vez que o plasma é considerado não-colisional no intervalo $0 \leq s \leq l$, a função distribuição independente do tempo para ambas

as espécies deve depender apenas das constantes de movimento¹⁸:

$$W \equiv (m_q/2) (v_{\parallel s}^2 + v_{\perp s}^2) + qeV_s; \quad (3.5)$$

$$\mu \equiv m_q v_{\perp s}^2 / 2B_s, \quad (3.6)$$

onde m_q é a massa da partícula e $q(= \pm 1)$ é a carga da partícula em unidade de carga eletrônica e . Por outro lado o teorema de Liouville estabelece que

$$f_{\pm}(v_{\parallel s}, v_{\perp s}; V_s) = f_{\pm}(v_{\parallel s'}, v_{\perp s'}; V_{s'}) \quad (3.7)$$

se os pontos $(v_{\parallel s}, v_{\perp s}; s)$ e $(v_{\parallel s'}, v_{\perp s'}; s')$ estão conectados por uma trajetória dinâmica no espaço de fases. As leis de conservação expressas por (3.5) e (3.6) implicam em

$$v_{\perp s'}^2 = (B_{s'}/B_s) v_{\perp}^2; \quad (3.8)$$

$$v_{\parallel s'}^2 = v_{\parallel s}^2 + [1 - (B_{s'}/B_s)] v_{\perp s}^2 + (2qe/m_q) (V_s - V_{s'}), \quad (3.9)$$

para qualquer par de pontos sobre a mesma trajetória no espaço de fases. Assim, diz-se que o ponto $(v_{\parallel s}, v_{\perp s}; s)$ é acessível a partir do ponto de fonte, definido como $(v_{\parallel s^*}, v_{\perp s^*}; s^*)$, se $v_{\parallel s'}$ é real ($v_{\parallel s'}^2 > 0$) para todo s' entre s e s^* . Uma condição necessária para a acessibilidade da partícula a s , a partir de um ponto de fonte s^* , é que $v_{\parallel s^*}^2$, como dado por (3.9), seja positivo ou zero. A suficiência desta condição, nominalmente $v_{\parallel s^*}^2 \geq 0$, depende da forma funcional de V_s . Pode-se mostrar que a condição $v_{\parallel s^*}^2 \geq 0$ é suficiente para a acessibilidade a qualquer ponto de fonte s^* para ambas as espécies de partículas ($q = \pm 1$) se

$$dV_{s'}/dB_{s'} > 0, \quad (3.10)$$

$$d^2V_{s'}/dB_{s'}^2 \leq 0, \quad (3.11)$$

para todos os pontos entre s e s^* . Assume-se que os pontos de fonte localizam-se no equador ($s^* = 0$) ou ao fim da linha de campo ($s^* = l$).

Uma consideração apropriada das restrições sobre V_s , baseada na acessibilidade de uma partícula ao seu ponto de fonte no espaço de fase, deve incluir não somente o potencial eletrostático, como em (3.11), mas também o potencial gravitacional. De fato, a gravidade é tomada em conta, mas somente para os íons ionosféricos, já que neste caso a energia eletrostática é da ordem da energia gravitacional.

Entre as possíveis populações de partículas capazes de suportar V_s , pode haver populações que não têm acesso a qualquer ponto de fonte no intervalo $0 \leq s \leq l$. Essas partículas executam

¹⁸Algumas expressões, definições e conceitos, discutidos na seção 2.9, são repetidos ou modificados aqui por conveniência.

trajetórias dinâmicas com dois pontos de retorno no intervalo $0 < s < l$ e são, portanto, aprisionadas pelo potencial elétrico e pelo espelhamento magnético. Para um potencial V_s ($0 \leq V_s \leq V_l$), com a restrição imposta por (3.11), apenas elétrons podem executar essas trajetórias. Assume-se que as trajetórias no espaço de fase disponíveis para esses elétrons aprisionados são definidas pelos requerimentos que $v_{\parallel 0}^2 < 0$ e $v_{\parallel l}^2 < 0$ (inacessibilidade a $s = 0$ e $s = l$).

No modelo, assumem-se as seguintes distribuições constituintes do plasma no intervalo não-colisional $0 \leq s \leq l$ do tubo de fluxo auroral: plasma magnetosférico anisotrópico quente, $f_{Mq}(v_{\parallel}, v_{\perp}; V_s)$; plasma ionosférico térmico frio, $f_{Iq}(v_{\parallel}, v_{\perp}; V_s)$; elétrons retroespalhados, $f_S(v_{\parallel}, v_{\perp}; V_s)$ e elétrons aprisionados, $f_T(v_{\parallel}, v_{\perp}; V_s)$. As distribuições magnetosféricas f_{Mq} são consideradas como tendo origem de uma fonte equatorial ($s^* = 0$), enquanto a distribuição ionosférica f_{Iq} e as partículas retroespalhadas f_S são consideradas como sendo injetadas em $s = l$. Os elétrons aprisionados f_T são considerados como tendo sido espalhados para suas trajetórias aprisionadas e não requerem uma fonte acessível.

Partículas pertencentes a f_{Mq} são classificadas como precipitantes ($v_{\parallel l}^2 > 0$) ou espelhadas ($v_{\parallel l}^2 < 0$) de acordo com seus respectivos valores de

$$v_{\parallel l}^2 = v_{\parallel s}^2 + [1 - (B_l/B_s)] v_{\perp s}^2 + (2qe/m_q)(V_s - V_l), \quad (3.12)$$

que determina acessibilidade a $s = l$. Uma vez que v_{\parallel} é positivo para partículas descendentes na presente convenção e já que todas partículas magnetosféricas que vão além de $s = l$ são consideradas como sendo absorvidas, requer-se que $f_{M\pm} = 0$ para trajetórias que obedecem a ambas as condições $v_{\parallel} < 0$ e $v_{\parallel l}^2 > 0$. Além disso, estando a fonte de $f_{M\pm}$ localizada em $s = 0$, requer-se que todas as trajetórias de f_{\pm} sejam acessíveis a $s = 0$ pelo critério $v_{\parallel 0}^2 > 0$. Notando que as partículas magnetosféricas podem ser anisotrópicas, postula-se uma forma do tipo bi-Maxwelliana para $f_{M\pm}$ no equador magnético, tal que,

$$\begin{aligned} f_{Mq}(v_{\parallel s}, v_{\perp s}; V_s) &= C_{Mq} [\theta(-v_{\parallel l}^2) + \theta(v_{\parallel s}) \theta(v_{\parallel l}^2)] \theta(v_{\parallel 0}^2) \\ &\times \exp \left\{ - (m_q v_{\parallel s}^2 / 2\kappa T_{\parallel q}) - (qeV_s / \kappa T_{\parallel q}) \right. \\ &\left. - (m_q v_{\perp s}^2 / 2\kappa T_{\perp q}) [1 - (B_o/B_s)] - (m_q v_{\perp s}^2 / 2\kappa T_{\perp q}) (B_o/B_s) \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde κ é a constante de Boltzmann e C_{Mq} é uma constante de normalização, definida de maneira que a densidade equatorial seja dada por

$$N_{Mq} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} f_{Mq}(v_{\parallel}, v_{\perp}; 0^+). \quad (3.14)$$

A função de Heaviside $\theta(x)$ é definida como +1 para $x \geq 0$ e se anula para $x < 0$.

Para elétrons ionosféricos requer-se acessibilidade da fonte em $s = l$, ou seja, requer-se que $v_{\parallel l}^2 > 0$. A condição $v_{\parallel 0}^2 \geq 0$ distingue entre elétrons que são espelhados (pelo potencial elétrico) antes de alcançar o equador ($v_{\parallel 0}^2 < 0$) e aqueles que cruzam o equador ($v_{\parallel 0}^2 > 0$) para se perderem na ionosfera conjugada. Postula-se uma função distribuição de elétrons ionosféricos do tipo Maxwelliana isotrópica de temperatura T_{I-} em $s = l$:

$$f_{I-}(v_{\parallel s}, v_{\perp s}; V_s) = (m_-/2\pi\kappa T_{I-})^{3/2} N_{I-} \theta(v_{\parallel l}^2) \\ \times \exp \left\{ - (m_- v_s^2 / 2\kappa T_{I-}) - (qe/\kappa T_{I-})(V_s - V_l) \right\}, \quad (3.15)$$

onde N_{I-} é a densidade de elétrons ionosféricos frios em $s = l$.

Para íons frios o efeito da gravidade deve ser tomado em conta. Assim, o mapeamento entre o ponto de fonte $(v_{\parallel l}, v_{\perp l}; l)$ e o ponto $(v_{\parallel s}, v_{\perp s}; s)$, analogamente a (3.9), é dado por

$$v_{\parallel l}^2 = v_{\parallel s}^2 + [1 - (B_l/B_s)] v_{\perp s}^2 + (2e/m_q)(V_s - V_l) + 2GM_T [(1/r_l) - (1/r_s)], \quad (3.16)$$

onde G é a constante gravitacional e r_s é a distância radial entre o centro da Terra e o ponto s . No modelo é usada a distribuição de íons frios

$$f_{I+}(v_{\parallel s}, v_{\perp s}; V_s) = (m_+/2\pi\kappa T_{I+})^{3/2} N_{I+} \theta(v_{\parallel l}^2) \theta(-v_{\parallel s}) \\ \times \exp \left\{ - (m_+ v_s^2 / 2\kappa T_{I+}) - (e/\kappa T_{I+})(V_s - V_l) \right. \\ \left. - (GM_T m_+ / \kappa T_{I+}) [(1/r_l) - (1/r_s)] \right\}, \quad (3.17)$$

que é o mapeamento de uma distribuição Maxwelliana em acordo com (3.16).

Assume-se que os íons ascendentes são perdidos ao cruzarem o equador magnético, de modo que não há íons descendentes no intervalo $0 < s \leq l$ (para a população f_{I+}). O equador magnético é tratado como o sítio onde as partículas magnetosféricas precipitadas na ionosfera (além do ponto $s = l$) são repostas e onde íons ionosféricos são removidos do tubo de fluxo.

Estabelecido o modelo, os passos para determinar o potencial autoconsistente são os seguintes: obtidos os parâmetros de entrada V_l , $T_{\parallel -}$, N_{M-} e $T_{\perp -}$, procede-se à implementação da condição de quase-neutralidade (3.4). Uma vez que foram assumidas formas específicas para as funções distribuição, calculam-se os momentos de densidade de $f_{M\pm}$, $f_{I\pm}$, f_s e f_T (em forma fechada) como funções de V_s , B_s e os parâmetros de partículas $N_{M\pm}$, $N_{I\pm}$, $T_{\parallel\pm}$, $T_{\perp\pm}$, $T_{I\pm}$ e T , onde T é a temperatura dos elétrons aprisionados e onde a temperatura dos elétrons retroespalhados é expressa em termos de $T_{\parallel -}$.

Uma vez especificados os parâmetros, considera-se (3.4), a equação de quase-neutralidade em forma integral, como uma equação transcendental a ser resolvida para V_s como uma função

de B_s . Entretanto, a "solução" obtida não é necessariamente a solução requerida do modelo, uma vez que um V_s aceitável deve ser uma função monótona de B_s e deve satisfazer (3.11).

A diferença fundamental encontrada em Gaelzer et al. (1992, 1994) [38, 39] e adotada no presente trabalho, está na introdução de uma forma funcional algébrica para V_s , que obedece às condições (3.10) e (3.11):

$$V_s = V_l \frac{\sqrt{B_s} - \sqrt{B_o}}{\sqrt{B_l} - \sqrt{B_o}}. \quad (3.18)$$

Outra adaptação desse estudo também adotada, é a assunção de que as populações aprisionadas e retroespalhadas têm a mesma temperatura. Neste caso, basta conhecer a soma da densidade de ambas, o que é obtido a partir da condição de quase-neutralidade.

No presente trabalho é tomada apenas a variação radial do campo magnético ($B \propto 1/z^3$). Assim a dependência em s é substituída por z . Desta forma, as distribuições $f = f(v_\perp, v_\parallel; V_s)$, podem ser escritas como $f = f(v_\perp, v_\parallel, z)$, já que $V(z)$ é função de $B(z) \propto 1/z^3$, o que permite calcular o momento de densidade e o segundo momento das distribuições, determinando assim, a densidade e temperatura em cada altitude z . Determina-se também a velocidade de deriva dos elétrons $v_d(s)$, definida como o negativo da velocidade média dos elétrons magnetosféricos refletidos.

Trata-se de um modelo unidimensional, de modo que a dependência perpendicular ao campo magnético é introduzida como em Cavalcanti et al. (1996) [22], tanto para a densidade (n_{Te}) e temperatura (T_{Me}) como para a velocidade de deriva (v_d):

$$n_{Te}(x, s) = \bar{n}_{Te}(s) [\Delta - (\Delta - 1)e^{-[(x/L_1)^2 \mathcal{F}(x)]}]; \quad (3.19)$$

$$T_{Me}(x, s) = \bar{T}_e(s) + [T_{Me}(s) - \bar{T}_e(s)] e^{-[(x/L_1)^2 \mathcal{F}(x)]}; \quad (3.20)$$

$$v_d(x, s) = v_d(s) e^{-[(x/L_1)^2 \mathcal{F}(x)]}, \quad (3.21)$$

onde

$$\mathcal{F}(x) = a + (b - a) \cos^2(x/L_2). \quad (3.22)$$

L_1 e L_2 são parâmetros que medem, respectivamente, a largura das cavidades e subcavidades. $\bar{n}_{Te}(s)$ é a densidade no centro da cavidade e $\Delta \times \bar{n}_{Te}(s)$ é a densidade na borda da cavidade, sendo Δ um número maior que a unidade. $T_{Me}(s)$ é a temperatura dos elétrons magnetosféricos e $\bar{T}_e(s)$ é a temperatura eletrônica fora da cavidade. a e b são parâmetros que caracterizam as subcavidades, como pode ser visto no perfil de densidade ilustrado pela figura 3.12.

As informações acumuladas a respeito da AKR permitem que modelos de geração sejam propostos. Em Wu e Lee (1979) [80], num trabalho seminal, é sugerido um mecanismo consistente capaz de gerar a AKR. O mecanismo de emissão é atribuído a um efeito de maser

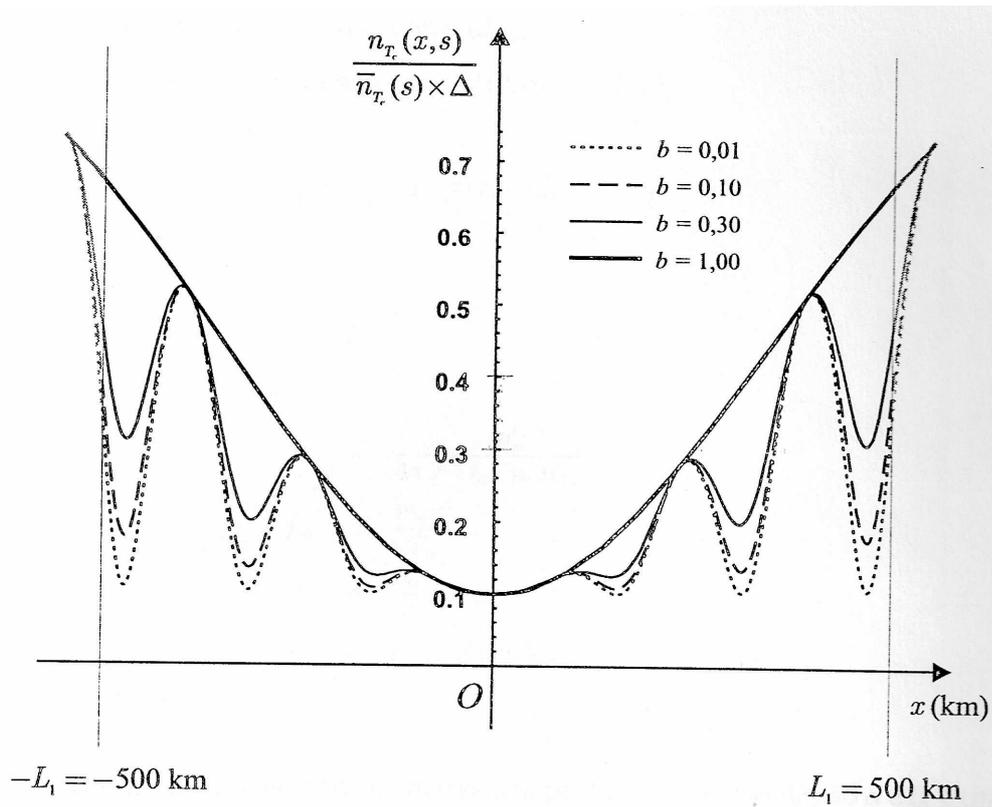


Figura 3.12: Perfil de densidade para $a = 1$ [21].

associado aos elétrons energéticos originados na lâmina de plasma durante as subtempestades magnéticas e que são espelhados devido ao campo magnético convergente. O espelhamento magnético estabelece um aspecto de cone-de-perda na distribuição eletrônica, produzindo uma região em que $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$. Nesse estudo, assume-se a existência de um campo elétrico alinhado ao campo magnético, que evacua os elétrons frios, formando uma cavidade, de modo que apenas os elétrons energéticos são tomados em conta. As seguintes taxas de crescimento são obtidas para os modos ordinário (ω_{iO}) e extraordinário (ω_{iX}):

$$\omega_{iO} = \frac{\pi^2 \omega_{pe}^2 n_+}{4\omega_r n_e} \int_0^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} \frac{v_{\perp}^2}{c^2} v_{\parallel}^2 \delta \left[\omega_r - \Omega_e \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} \right] \Omega_e \frac{\partial F_+}{\partial v_{\perp}}; \quad (3.23)$$

$$\omega_{iX} = \frac{\pi^2 \omega_{pe}^2 n_+}{4\omega_r n_e} \int_0^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} dv_{\perp} v_{\perp}^2 \delta \left[\omega_r - \Omega_e \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} \right] \Omega_e \frac{\partial F_+}{\partial v_{\perp}}, \quad (3.24)$$

onde foi considerado o caso fracamente relativístico ($\gamma \simeq 1 - v^2/2c^2$), propagação aproximadamente perpendicular ao campo magnético ($k_{\parallel} \simeq 0$), $\omega_r \gtrsim \Omega_e \simeq kc$ e $\partial F_+/\partial v_{\perp} \simeq \partial F_+/\partial v_{\parallel}$. F_+ representa a distribuição de elétrons ascendentes espelhados. Os elétrons descendentes são desconsiderados, uma vez que a condição de ressonância $\omega_r - \Omega_e \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0$ revela que se $k_{\parallel} < 0$ e $\omega_r > \Omega_e$ (caso considerado), apenas os elétrons ascendentes ($v_{\parallel} < 0$) são capazes de entrar em ressonância com a onda.

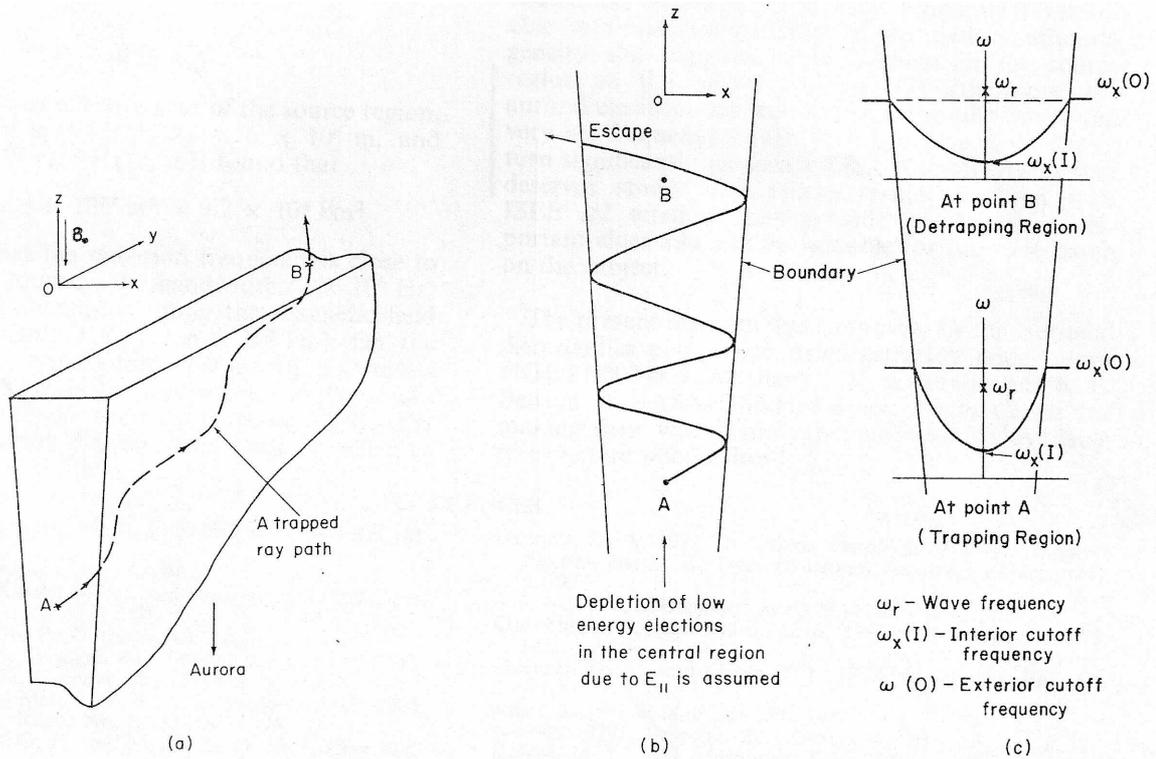


Figura 3.13: Aprisionamento da radiação proposto sobre um modelo de lâmina auroral, permitindo maior amplificação da AKR [80].

De (3.23) e (3.24) fica evidente a importância da região com declividade positiva: se na região onde são calculadas as integrais, que é determinada pelo argumento da função delta, a contribuição da parte onde $\partial F_+ / \partial v_{\perp} > 0$ superar a contribuição da parte onde $\partial F_+ / \partial v_{\perp} < 0$, haverá instabilidade.

Os resultados obtidos utilizando-se uma distribuição do tipo cone-de-perda revelaram uma taxa de crescimento para o modo extraordinário em torno de 100 vezes maior que o ordinário, em acordo com os dados observacionais. Sugere-se também uma explicação para o comportamento do radiação dentro da cavidade, baseado num modelo de lâmina auroral, ilustrado pela figura 3.13. Dentro dessa lâmina a densidade eletrônica é significativamente menor que no exterior. Assim, a frequência de corte do modo X fora da lâmina $\omega_X(O)$ é maior que no interior $\omega_X(I)$. Se a frequência da radiação satisfaz a condição $\omega_X(O) > \omega_r > \omega_X(I)$, a onda é localmente aprisionada até alcançar uma região onde $\omega_r > \omega_X(O) > \omega_X(I)$ (a cavidade desempenha um papel de guia de ondas). Assim, mesmo quando a cavidade é estreita, a radiação no modo extraordinário pode ser aprisionada e amplificada por um tempo longo. Este aprisionamento não ocorre para a radiação no modo ordinário (considerando $\omega_{pe}(O) < \omega \sim \Omega_e$ (2.68)) e a amplificação é, portanto, muito menos eficiente.

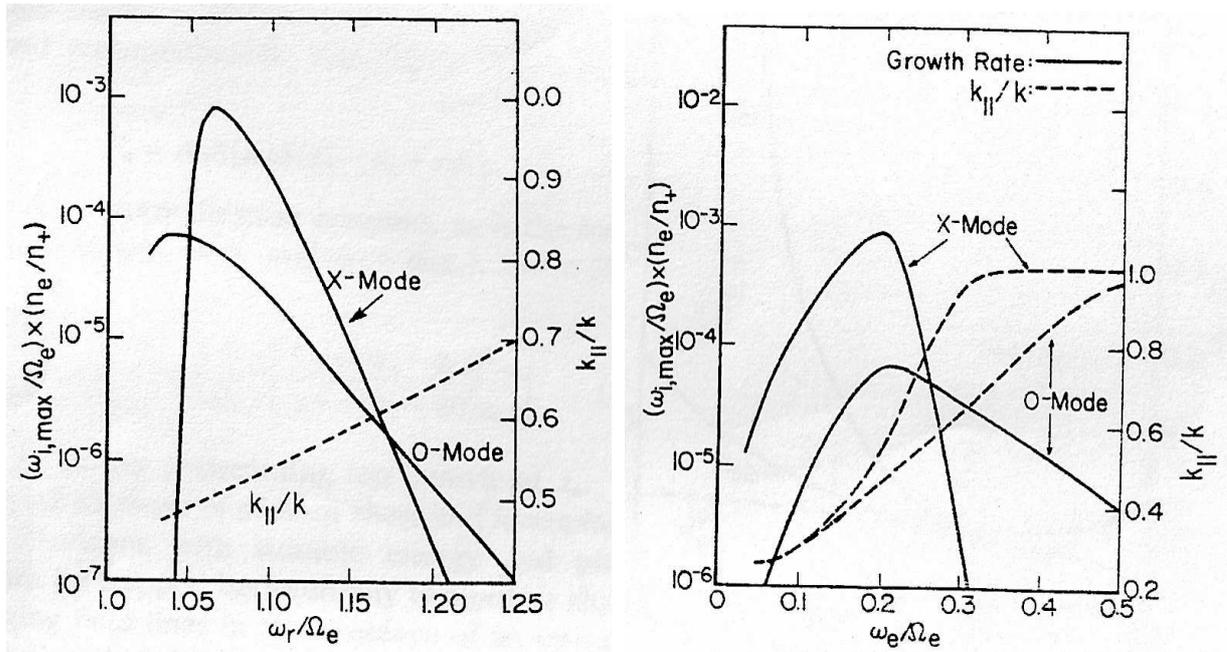


Figura 3.14: À esquerda: Taxa de crescimento como função da frequência [51]. À direita: Taxa de crescimento como função da densidade [51].

Lee et al. (1980) [51] faz um contra-ponto a Chiu e Schulz (1978) ao modelar a região-fonte baseando-se na formação de camadas-duplas. Inicialmente calcula-se a taxa de crescimento e a distância de amplificação¹⁹ utilizando valores arbitrários para os parâmetros. Utiliza-se o mesmo mecanismo que Wu e Lee (1979), onde a AKR é gerada pelos elétrons energéticos aprisionados via um mecanismo de maser de cíclotron. Estes elétrons energéticos podem ser identificados como os elétrons retroespalhados primários aprisionados entre o espelho magnético e o potencial elétrico. Neste trabalho é incluído o plasma de fundo. Assim, o plasma consiste de duas componentes: um plasma frio de fundo e uma população de elétrons energéticos com uma distribuição do tipo cone-de-perda com deriva. Os elétrons frios de fundo correspondem aos elétrons secundários.

A figura 3.14 mostra que a taxa de crescimento para o modo extraordinário alcança um máximo pouco acima da frequência de corte ($\simeq 1.04\Omega_e$), consistente com as observações. As figuras 3.14 e 3.15 mostram a taxa de crescimento e a distância de amplificação, em função de ω_e/Ω_e ($\omega_e \equiv \omega_{pe}$). Ambos os resultados são consistentes com as observações de que a AKR é gerada em regiões onde $\omega_{pe}/\Omega_e \lesssim 0,2$.

Elabora-se, então, um modelo tendo como base a formação de camadas-duplas que permite

¹⁹Pode ser definida como a distância a ser percorrida pela radiação para que esta obtenha um determinado nível de amplificação.

estimar a dimensão da região de aceleração. Os parâmetros obtidos com o modelo também são utilizados para determinar a distância de amplificação dos modos ordinário e extraordinário. As populações (seção 2.3) que fazem parte deste modelo são análogas às de Chiu e Schulz (1978): (1) elétrons descendentes originados da lâmina de plasma; (2) íons originados da lâmina de plasma; (3) íons ascendentes de origem ionosférica e (4) elétrons aprisionados originados da lâmina de plasma e da ionosfera. A função distribuição da espécie s deve depender somente das constantes de movimento expressas em (3.5) e (3.6) (com $qe, V \rightarrow q, \phi$), ou seja, $F_s = F_s(\mu, W)$. A densidade da espécie s passa a ser dada por

$$n_s = \left(\frac{B}{B_0}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{2}{m_s}\right)^{3/2} \int d\mu \int dW F_s(\mu, W) (W - \mu B - q_s \phi)^{1/2}, \quad (3.25)$$

onde $B_0 = B(z_0)$, sendo z_0 a altitude do limite superior da região de aceleração e z_1 a altitude do limite inferior.

População (1): as velocidades desta população são altamente alinhadas com as linhas de campo, portanto, por simplicidade, esses elétrons são considerados como tendo $\mu \simeq 0$ e uma energia inicial ε_{e0} . Com esta assunção, a densidade pode ser escrita como

$$n_{e0}(z) = N_{e0} (B/B_0) [1 + e(\phi - \phi_0)/\varepsilon_{e0}]^{-1/2}, \quad (3.26)$$

onde N_{e0} é a densidade em z_1 e $\phi_0 = \phi(z_0)$.

População (2): assume-se uma distribuição Maxwelliana anisotrópica

$$F_{i0}(\mu, W) = A_{i0} \exp(-W/\theta_{i0} - \mu/\mu_c), \quad (3.27)$$

onde A_{i0} é uma constante de normalização, θ_{i0} é energia térmica dos íons na lâmina de plasma e μ_c é um momento magnético característico. Substituindo (3.27) em (3.25), obtém-se a densidade iônica

$$n_{i0}(z) = N_{i0} \frac{B(B_c + B_0)}{B_0(B_c + B)} \exp[-e(\phi - \phi_0)/\theta_{i0}], \quad (3.28)$$

onde $B_c \equiv \theta_{i0}/\mu_c$. A dependência em B na equação acima descreve o efeito do campo geomagnético convergente. O perfil de densidade depende fortemente do parâmetro μ_c (ou B_c). Para μ_c grande (ou B_c pequeno), a maioria dos íons originados da lâmina de plasma tem um grande ângulo de arremesso (no espaço de velocidades) e são espelhados em altas altitudes pelo campo geomagnético convergente. Para μ_c pequeno, a maioria dos íons tem ângulo de arremesso pequeno, sendo capazes de alcançar baixas altitudes.

População (3): assume-se que a distribuição é monoenergética e altamente alinhada com o campo magnético

$$F_{il} = A_{il} \delta(\mu) \delta(W - \varepsilon_{il} - e\phi_l), \quad (3.29)$$

onde A_{il} é uma constante de normalização, ε_{il} é a energia inicial em z_1 e $\phi_1 = \phi(z_1)$. De (3.29), obtém-se a densidade

$$n_{il}(z) = N_{il} \left(\frac{B}{B_0} \right) \left[\frac{1 + e(\phi_1 - \phi_0)/\varepsilon_{il}}{1 + e(\phi_1 - \phi)/\varepsilon_{il}} \right], \quad (3.30)$$

onde N_{il} é a densidade dos íons ascendentes em z_0 .

População (4): à densidade n_{et} é permitido que seja qualquer função não-negativa de z . Esses elétrons aprisionados desempenham um papel fundamental, mantendo a quase-neutralidade ao longo das linhas de campo.

Os elétrons aprisionados podem ser produzidos por (i) colisões com partículas neutras na alta atmosfera e (ii) e interações onda-partícula. Nota-se, assim, que o número de elétrons aprisionados cresce com o aumento do fluxo de elétrons precipitantes devido a esses processos. Portanto é esperado que a radiação quilométrica das auroras esteja estreitamente correlacionada com precipitações do tipo V-invertido, em acordo com as observações. Neste modelo a componente energética dos elétrons aprisionados é responsável pela geração da AKR. Soluções podem ser obtidas através da condição de quase-neutralidade (escrita em forma distinta de (3.4))

$$n_{e0}(z) + n_{el}(z) = n_{i0}(z) + n_{il}(z). \quad (3.31)$$

Deve-se notar que aqui, ao contrário da formulação de Chiu e Schulz (1978), a quase-neutralidade é requerida apenas entre os pontos z_0 e z_1 , podendo ser violada nas extremidades.

O seguinte perfil de potencial foi escolhido para a obtenção de resultados numéricos,

$$\phi(z) = -\phi_m (z - z_1)^2 / (z_0 - z_1)^2, \quad (3.32)$$

onde $\phi_m = 8\text{kV}$, $z_0 = 2,5R_T$ e $z_1 = 1,3R_T$. Foi assumida uma forma dipolar para o campo geomagnético, ou seja,

$$B/B_0 = (z_0/z)^3, \quad (3.33)$$

e $B = 0,6\text{gauss}$ a $z = 1R_T$. As densidades n_{e0} , n_{i0} e n_{il} são obtidas substituindo a função potencial escolhida em (3.26), (3.28) e (3.30), respectivamente. A densidade das partículas aprisionadas é então calculada pela condição de quase-neutralidade expressa em (3.31). A população aprisionada pode ser dividida em duas componentes: os elétrons primários e os elétrons secundários. A densidade dos elétrons energéticos primários pode ser obtida de (3.25). Esses elétrons energéticos aprisionados apresentam uma distribuição do tipo cone-de-perda e são responsáveis pela geração da AKR. A densidade desses elétrons, obtida do modelo, é usada para determinar a distância de amplificação dos modos ordinário e extraordinário, cujos resultados são ilustrados na figura 3.15. A distância de amplificação do modo X pode ser tão

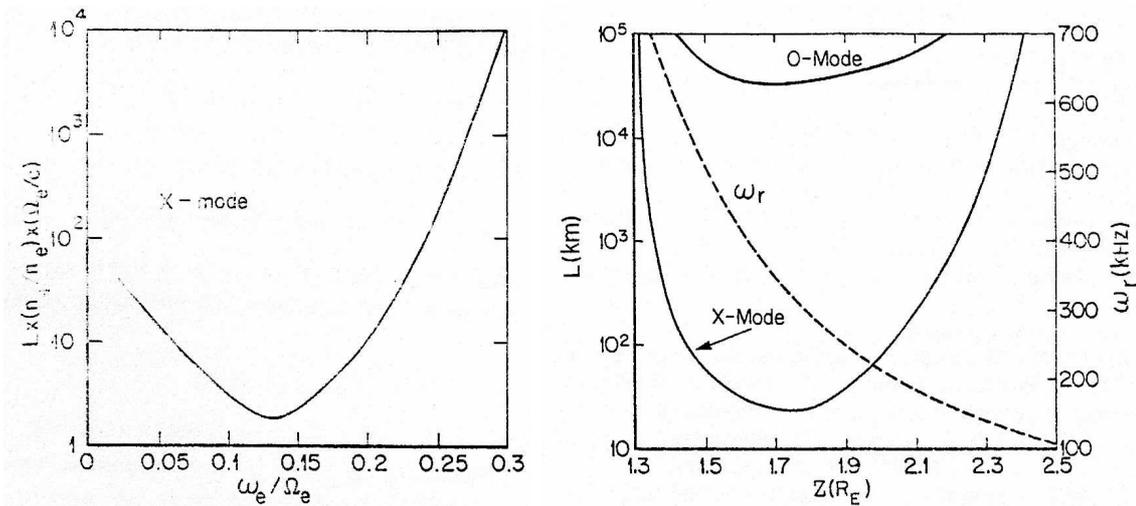


Figura 3.15: À esquerda: Distância de amplificação obtida com parâmetros arbitrários [51]. À direita: Distância de amplificação obtida com parâmetros fornecidos pelo modelo [51].

pequena quanto 20km e é muito menor que a do modo O. Próximo e abaixo do limite inferior z_1 , a densidade do plasma e assim a razão ω_e / Ω_e cresce rapidamente e o crescimento é pequeno. Acima do limite superior z_0 , os elétrons não são acelerados e não há radiação. Portanto, AKR somente pode ser gerada dentro da região de aceleração e o campo elétrico paralelo na região de aceleração deve se estender por uma distância de um a dois raios terrestres para responder pelo intervalo de frequências da AKR. A frequência da AKR pode ser relacionada à localização z da fonte pela fórmula (considerando (3.33))

$$\omega_r \simeq \Omega_e \approx (1680/z^3) \text{ kHz}, \quad (3.34)$$

onde z está em unidades de R_T . Tipicamente, o intervalo observado de frequências da AKR é de 100-700kHz. Portanto, a altitude do limite inferior da região de aceleração é ~ 2000 km e do limite superior é $\gtrsim 9000$ km.

Este modelo envolvendo camadas-duplas não constitui uma explicação para sua formação, mas somente as características autoconsistentes necessárias para a auto-sustentação da diferença de potencial, uma vez estabelecida. Enquanto que no modelo envolvendo anisotropia, a causa da formação do potencial elétrico pode ser apontada: a anisotropia entre elétrons e íons faz com que os dois tipos de partículas sejam espelhadas em pontos diferentes ao longo das linhas de campo, produzindo separação de cargas e a conseqüente diferença de potencial. Baseado nisto, é concebível que, para anisotropias compatíveis com as observações, uma grande diferença de potencial não possa ser estabelecida em distâncias curtas, ao contrário das camadas-duplas.

Grabbe (1981) [41] traça um panorama dos principais modelos teóricos que procuram explicar a AKR até então. Dos sete modelos analisados, cinco deles envolvem características que estão em desacordo com as observações, como: radiação gerada predominantemente no modo ordinário, frequência de radiação muito elevada, baixa eficiência de conversão ou alta anisotropia eletrônica requerida. Das outras duas possibilidades, a Instabilidade de Cone-de-perda é discutida em Wu e Lee (1979), enquanto que a Amplificação por Feixe de Ondas Eletromagnéticas via Flutuações Coerentes de Densidade EIC ("Electrostatic Ion Cyclotron") faz previsões em excelente acordo com as medidas. No entanto, um argumento deletério, também exposto em Lee et al. (1980), causa impedimento a esta proposta: Ondas EIC são observadas, predominantemente, no intervalo de altitude 5000-8000km, onde também ocorrem, em geral, as mais intensas emissões de AKR. No entanto, observações de ondas EIC abaixo de 5000km são raras, embora AKR continue a ser observada em altitudes tão baixas quanto 3000km.

Em Omidi e Gurnett (1982) [59] é utilizada a mesma expressão de Wu e Lee (1979) para a taxa de crescimento do modo extraordinário, mas considera-se a distribuição eletrônica medida na região-fonte da AKR pelo satélite S3-3²⁰ para a determinação das derivadas. A região do cone-de-perda da distribuição mostrou ser capaz de produzir taxas de crescimento suficientes para responder pelos níveis das emissões medidas. O cone-de-perda é tomado em conta através do estudo da dependência da condição de ressonância com os parâmetros envolvidos. A condição de ressonância constitui o argumento da função δ em (3.24), que, sem a aproximação fracamente relativística, pode ser escrita como

$$\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - \frac{\Omega_e}{\gamma} = 0, \quad (3.35)$$

onde $\gamma^{-1} = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Usando $k_{\parallel} = \omega N_{\parallel}/c$ e $Y = \Omega_e/\omega$, pode-se reescrever (3.35) como

$$\left[(Y^2 + N_{\parallel}^2)^{1/2} v_{\parallel} - \frac{cN_{\parallel}}{(Y^2 + N_{\parallel}^2)^{1/2}} \right]^2 + Y^2 v_{\perp}^2 = c^2 (Y^2 - 1) + \frac{c^2 N_{\parallel}^2}{Y^2 + N_{\parallel}^2}. \quad (3.36)$$

A equação (3.36) representa uma elipse no espaço de velocidades, com centro em $(v_{\perp}, v_{\parallel}) = (0, V_c)$, onde

$$V_c = \frac{cN_{\parallel}}{Y^2 + N_{\parallel}^2}. \quad (3.37)$$

A relação entre a taxa de crescimento e a frequência da onda é mostrada na figura 3.16 para certos valores dos parâmetros envolvidos na condição de ressonância. Os pontos indicados

²⁰Perigeu: 246km; Apogeu: 7856km; Inclinação: 97,5° [58].

por A , B e C estão em regiões, respectivamente, de crescimento, atenuação e crescimento. As curvas de ressonância correspondentes a esses pontos, sobrepostas à distribuição medida pelo S3-3, são representadas na figura 3.16. Fica clara a concordância com a proposta de Wu e Lee (1979): as curvas que possuem uma maior parte de sua extensão sobre as regiões onde $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$ correspondem a maior amplificação.

A localização da curva de ressonância é de importância fundamental para o presente trabalho, uma vez que a função distribuição modelo utilizada representa adequadamente a distribuição medida somente no semiplano $v_{\parallel} < 0$. Assim, podem-se determinar as restrições sobre os parâmetros a fim de que a curva de ressonância esteja contida integralmente na região adequada: para o centro da elipse deve-se ter $V_c < 0$. De (3.37), isto implica

$$N_{\parallel} < 0. \quad (3.38)$$

Levando (3.38) em (3.35), obtém-se

$$\omega > \Omega_e. \quad (3.39)$$

As condições (3.38) e (3.39) devem ser respeitadas na implementação computacional para que os resultados sejam representativos. Deve-se notar que na convenção utilizada, $v_{\parallel} < 0$ caracteriza partículas ascendentes e $N_{\parallel} < 0$ (ou $k_{\parallel} < 0$) caracteriza ondas ascendentes.

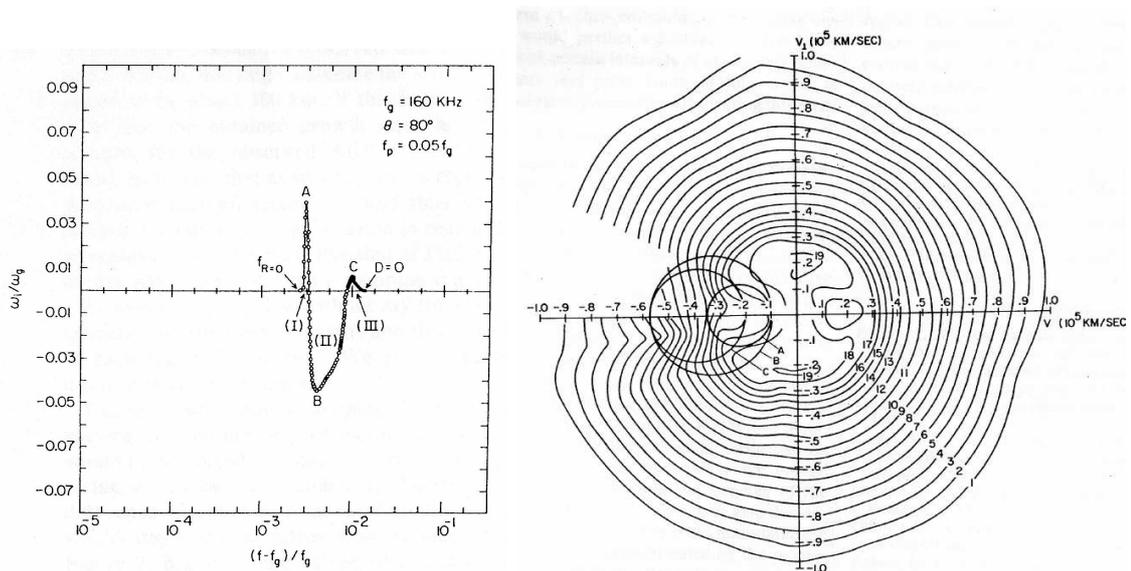


Figura 3.16: À esquerda: Taxa de crescimento [59]. À direita: Respectivas curvas de ressonância sobrepostas à distribuição eletrônica [59].

Calvert (1982) [19] propõe um modelo de geração capaz de responder por aspectos inerentes à AKR até então não contemplados pelos modelos teóricos, como por exemplo o espectro

discreto de emissão e a deriva nas frequências. A maioria das observações anteriores da AKR foram feitas por equipamentos com resolução de frequências relativamente baixa. Entretanto, o satélite ISEE 1²¹ foi equipado com um receptor aprimorado e revelou a estrutura espectral discreta da AKR. Um exemplo desta estrutura é mostrado na figura 3.17.

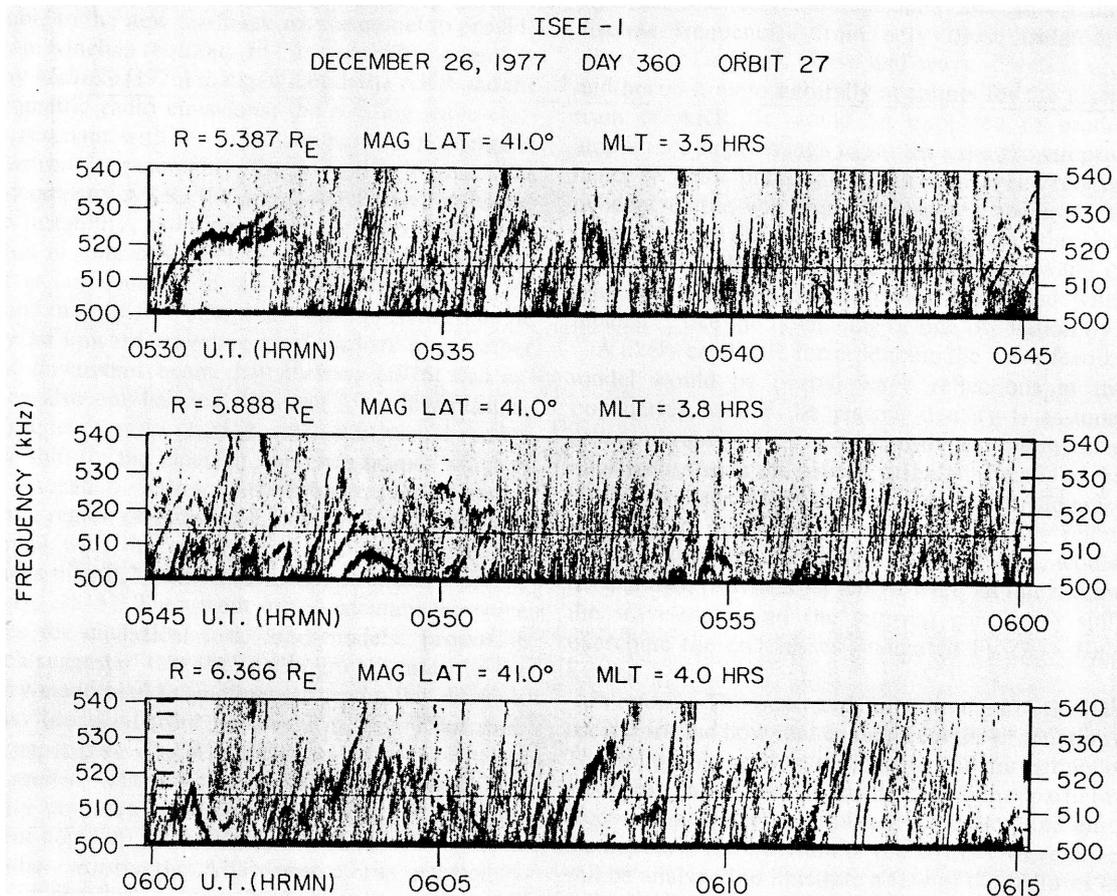


Figura 3.17: Espectrograma da AKR obtido pelo ISEE 1, mostrando as componentes discretas [19].

A largura de banda espectral de uma componente de emissão individual no espectro da AKR é usualmente menor que 1kHz e a maioria deriva em direção a frequências mais altas a taxas algumas vezes excedendo poucos kilohertz por segundo. Entretanto, algumas componentes derivam em direção a frequências mais baixas e algumas ocasionalmente reverterem a direção de deriva gradualmente no intervalo em torno de um minuto. Embora raramente como harmônicos (estritamente), as componentes algumas vezes também ocorrem como multipletos, com um espaçamento regular em torno de 10kHz.

O modelo proposto considera a ocorrência de oscilações auto-excitadas, onde a onda é amplificada através da fonte, presumivelmente pela instabilidade de cíclotron, como em Wu e

²¹Perigeu: 6633km; Apogeu: 146.694km; Inclinação: $28,76^\circ$ [58].

Lee (1979). Entretanto, no novo modelo parte da onda amplificada é direcionada de volta à sua origem com a apropriada amplitude, direção e fase. De outra forma, a fonte de AKR é vista como um oscilador laser natural. Uma possibilidade para produzir a retroalimentação no modelo é a reflexão parcial nas bordas dos sítios de ressonância, onde assume-se que a densidade decresce abruptamente (ver figura 3.8). Deve-se enfatizar, portanto, que não são as bordas da cavidade auroral consideradas pontos de reflexão. Há boas evidências de que acréscimos na densidade dentro da cavidade auroral ocorrem, como em Benson e Calvert (1979). Uma ilustração do modelo é mostrada na figura 3.18, onde também é mostrado um esquema

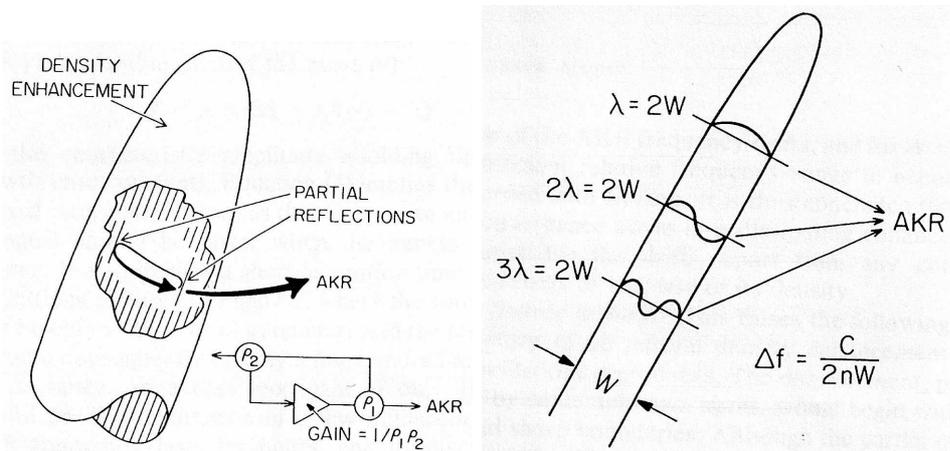


Figura 3.18: À esquerda: Ilustração dos sítios de ressonância [19]. À direita: Geração de multipletos em diferentes altitudes [19].

em que o ganho (amplificação) é dado em termos dos coeficientes de reflexão ρ_1 e ρ_2 . Deve-se ressaltar que a densidade na região de acréscimo ainda deve ser suficientemente baixa para que a instabilidade de cíclotron tenha lugar. Uma vez que as oscilações requerem um número inteiro de comprimentos de onda dentro da fonte, as frequências devem ser determinadas por

$$m\lambda = 2W, \quad (3.40)$$

onde W é a espessura da fonte, λ é o comprimento de onda e m é o número inteiro de comprimentos de onda através da fonte. Sendo $\lambda = c/nf$, onde c é a velocidade da luz e n é o índice de refração, a frequência deve ser dada por

$$f = mc/2nW. \quad (3.41)$$

Isto implica que a fonte de AKR pode produzir um espectro harmônico, provido que a espessura da fonte e o índice de refração sejam os mesmos para os diferentes valores de m . Estes modos, que devem satisfazer (3.41) e que ocorrem próximo à frequência de cíclotron local, estarão

localizados em diferentes altitudes, onde podem presumivelmente existir independente um do outro.

Entre os aspectos encontrados no espectro da AKR estão as componentes discretas múltiplas, aproximadamente com igual espaçamento, que são atribuídas a oscilações na mesma fonte com diferentes valores de m . Um exemplo desses multipletos ocorre na figura 3.17 em 0550UT. As oscilações devem ocorrer próximo à frequência de ciclotron local, isto implica que as componentes de multipletos devem ser geradas em diferentes altitudes na fonte, como ilustra a figura 3.18. Assim, para produzir multipletos, a fonte de AKR deve ser alongada verticalmente, presumivelmente ao longo do campo magnético. A possível variação da espessura da fonte com a altitude pode produzir uma diferença em relação ao exato espaçamento harmônico. Uma vez que a frequência de ciclotron decresce com a altitude, as componentes de multipletos de frequências mais baixas devem se originar em altitudes maiores e vice-versa, cada uma em altitudes onde a espessura da fonte é um semimúltiplo do comprimento de onda e, assim, onde a retroalimentação construtiva pode ocorrer.

A deriva na frequência e as reversões mostradas na figura 3.17 indicam que a fonte deve estar mudando enquanto a AKR é produzida. O modelo sugere uma interpretação, uma vez que a frequência é determinada pela equação (3.41) e pelo valor de nW . A deriva da frequência representa, então, a história do produto nW durante a existência do sítio de oscilação. A deriva caracteristicamente crescente encontrada na AKR requer, assim, um índice de refração decrescente ou uma espessura da fonte decrescente ou ambos. Embora seja possível atribuir a deriva à mudança na espessura da fonte, as reversões representariam um problema, uma vez que não há razões para esperar que a espessura da fonte reverta sua magnitude. Dados do satélite Jikiken²² sugerem que as reversões de deriva são relativamente comuns. Isto implicaria em que as reversões não são acidentais, mas um aspecto necessário de alguns sítios de oscilações e isto sugere que a variação do índice de refração deve desempenhar um papel importante nas derivas.

A viabilidade dos sítios ressonantes requer que as superfícies refletoras sejam convergentes, de modo a compensar a refração da radiação, atribuída ao gradiente do campo magnético, como ilustra a figura 3.19, onde o ângulo de abertura β é determinado por

$$\tan\beta = \frac{(W/H_R)(\Delta W/W)}{\xi(\Delta N/N)}. \quad (3.42)$$

ΔW é a espessura da borda, ΔN é a variação da densidade na borda, N é a densidade dentro do sítio e H_R é um parâmetro que representa a magnitude da escala das refrações. ξ é dado

²²Perigeu: 230km; Apogeu: 30.558km; Inclinação: 31° [58].

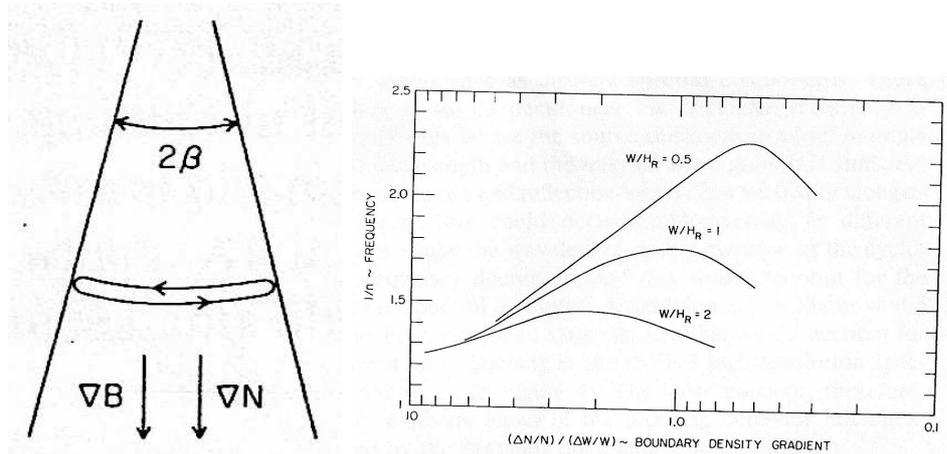


Figura 3.19: À esquerda: Refletores verticalmente convergentes [19]. À direita: Relação entre o índice de refração e o gradiente de densidade na borda [19].

por

$$\xi = f(f - f_H)/f_N^2, \quad (3.43)$$

sendo f , f_H e f_N , respectivamente, as frequências de oscilação, de cíclotron e de plasma. A figura 3.19 mostra a dependência do recíproco do índice de refração com a razão $(\Delta N/N)/(\Delta W/W)$ para diferentes espessuras W relativas ao parâmetro H_R . Juntamente com a equação (3.41), pode-se notar que a dissipação do sítio de oscilação ($\Delta N \rightarrow 0$) é capaz de responder pela deriva e reversão da frequência. Da equação (3.42) nota-se também que a dissipação pode alterar o ângulo das superfícies refletoras de modo a torná-lo desfavorável à amplificação, levando as oscilações à extinção. A história da frequência das componentes discretas da AKR reflete, assim, a história da dissipação dos sítios de densidade em que tiveram origem.

AKR usualmente constitui radiação do modo extraordinário rápido (X), mas algumas vezes há uma componente fraca do modo ordinário (O) e há evidências de harmônicos mais altos, bem como de uma componente do modo extraordinário lento (Z). Em Melrose et al. (1984) [53] são calculadas e comparadas as taxas de crescimento resultantes do mecanismo de maser de cíclotron produzido por uma distribuição do tipo cone-de-perda, para os seguintes modos: harmônico fundamental X, O, Z e segundo harmônico de X e O.

Para determinar qual o modo predominante são considerados dois critérios distintos. O primeiro assume que o modo dominante é o que possui maior taxa de crescimento temporal Γ . O segundo critério elege o modo dominante como aquele que produz maior amplificação espacial para radiação com largura de banda $\Delta\omega$.

O primeiro critério deve ser usado se o maser alcança a saturação, uma vez que o modo dominante neste caso, drena a energia livre da distribuição rapidamente e quando satura não

há energia remanescente para os demais modos crescerem. Enquanto que o segundo critério deve ser usado quando não há saturação do maser. Em várias aplicações o crescimento da radiação é limitado pela estrutura espacial das regiões-fonte, como pode ocorrer à AKR. Neste caso, pode-se considerar o maser não-saturado. A figura 3.20 mostra os resultados obtidos para

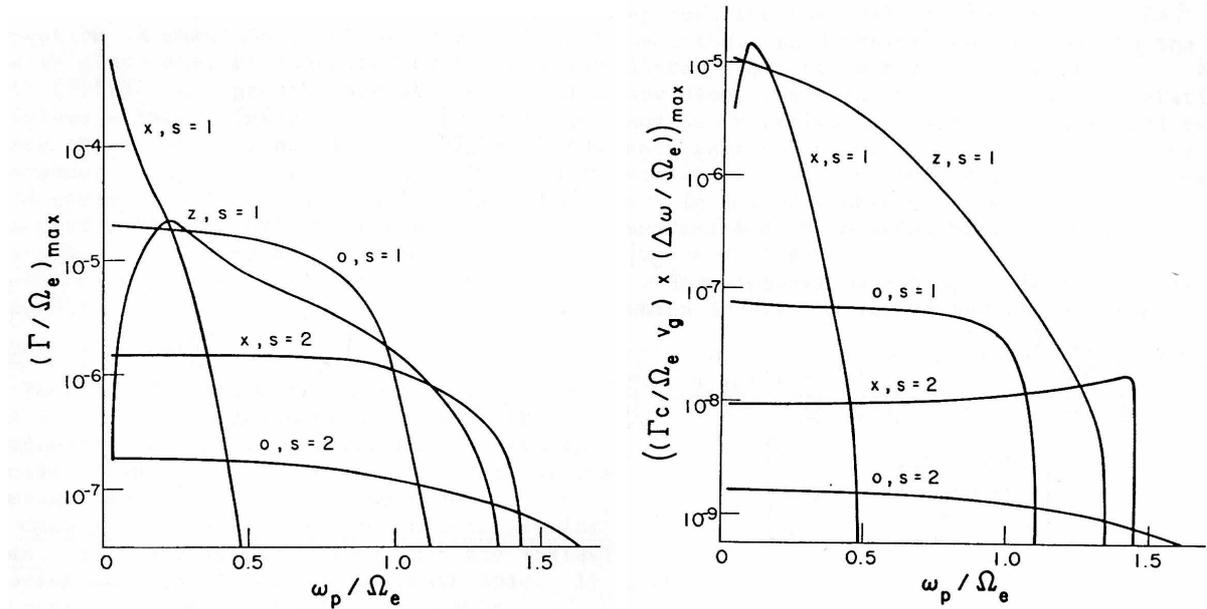


Figura 3.20: À esquerda: Crescimento temporal [53]. À direita: Crescimento espacial [53].

os critérios primeiro e segundo. É possível concluir que o modo fundamental X é dominante para $\omega_{pe}/\Omega_e \lesssim 0,3$ e o modo fundamental Z é dominante para $0,3 \lesssim \omega_p/\Omega_e \lesssim 1,3$.

Em Pritchett e Winglee (1989) [67] são reportados resultados de simulações feitas utilizando uma distribuição do tipo anel, de modo a obter um fluxo constante de elétrons através da região de simulação. Verifica-se principalmente que a radiação não é produzida uniformemente ao longo da região de simulação, mas em um intervalo correspondente da ordem de 20-30km. Este resultado suporta a consideração de que o maser de cíclotron pode agir como uma fonte localizada de radiação, com uma largura de banda em torno de 1kHz, estando, portanto, em acordo com as observações e constituindo uma alternativa à proposta feita em Calvert (1982). Essa proposta de Calvert (1982) também é questionada pelos resultados das simulações que indicam a inexistência de radiação refletida apreciável nas interfaces de densidade, mesmo para uma mudança abrupta na densidade.

Em Block e Fälthammar (1990) [13] são analisados aspectos que determinam a importância dos campos alinhados para a aceleração das partículas na região auroral. Medidas diretas de campo elétrico de satélites como S3-3 e Viking mostram que as flutuações no intervalo de frequências 0,1-100Hz têm amplitudes que excedem o campo estático por uma ordem de

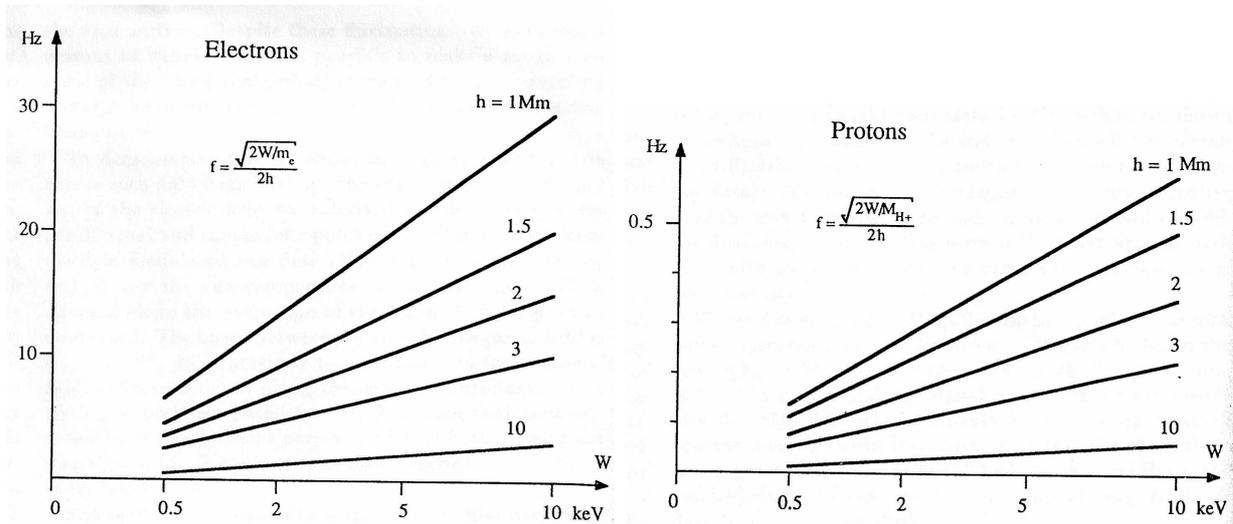


Figura 3.21: À esquerda: Tempo de percurso para elétrons [13]. À direita: Tempo de percurso para íons [13].

magnitude ou mais. Portanto, é interessante considerar os efeitos de ambos, campo estático (dc) e flutuante (ac), sobre a distribuição de velocidade das partículas.

Para avaliar esses efeitos, introduz-se uma definição de campo estático, baseada no tempo necessário para uma partícula típica atravessar a região de aceleração. Este tempo depende do tipo de partícula, sua velocidade ao longo do campo magnético e da extensão da região de aceleração. Considera-se uma partícula se movendo através de uma região de aceleração, com E_{\parallel} tendo frequências de zero até algum valor arbitrário. Seleciona-se uma banda de frequências de zero até uma frequência superior f . O campo elétrico correspondente $E_{\parallel}(f)$, integrado sobre esta banda de frequências, pode ser tomado como um campo estático para todas as partículas que passam através da região de aceleração (determinada pelos pontos P_1 e P_2) num tempo t pequeno o suficiente para que o campo elétrico seja essencialmente inalterado. A energia cinética das partículas W_{\parallel} será alterada por

$$\Delta W_{\parallel} = \pm \int_{P_1}^{P_2} qE_{\parallel}(f)dz \quad (3.44)$$

devido a este campo "estático". Isto vale estritamente para $t \ll 1/f$. Por simplicidade, o limite de validade é tomado como $t < 1/(2f)$, sem que as conclusões sejam comprometidas por esta simplificação. A figura 3.21 mostra a dependência de f com o comprimento h ao longo da região de aceleração (de P_1 a P_2) e com a energia das partículas

$$W_{\parallel} = mv_{\parallel}^2/2, \quad (3.45)$$

onde v_{\parallel} é a velocidade média paralela ao campo magnético dentro da região de aceleração. Nota-se que a frequência de transição dc-ac para elétrons típicos (keV) é da ordem de alguns

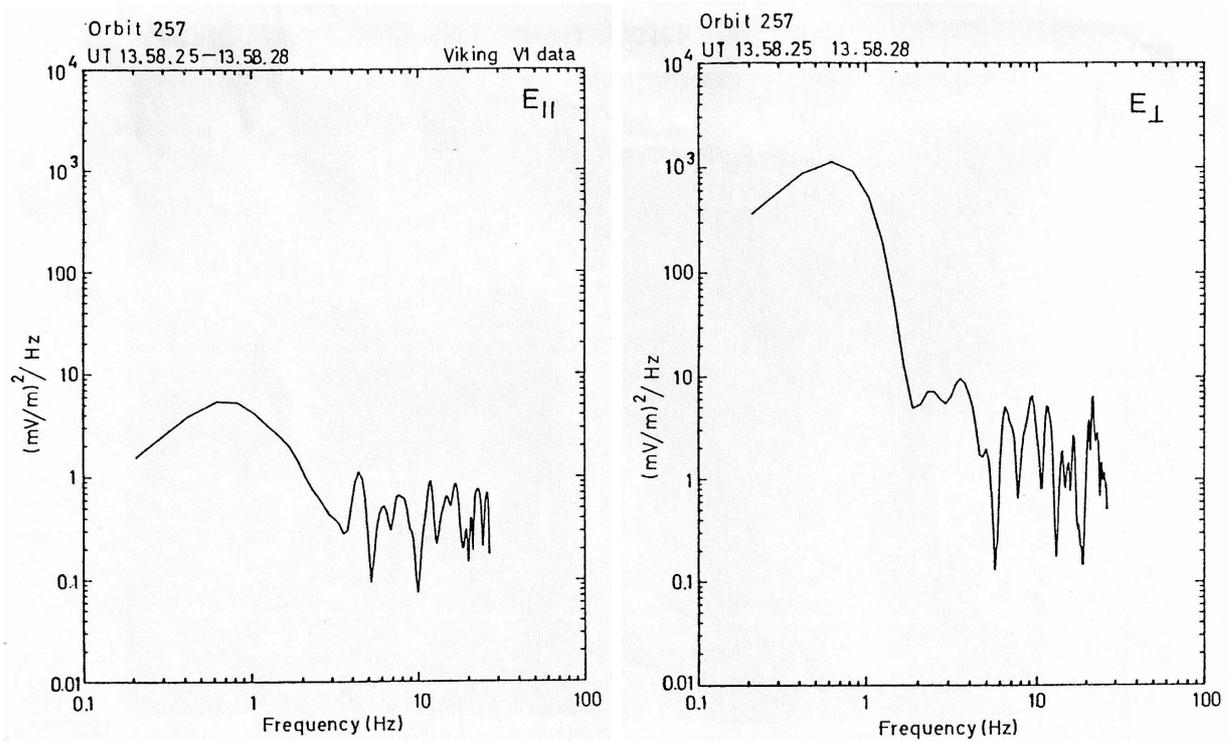


Figura 3.22: À esquerda: Espectro de potência do campo elétrico paralelo [13]. À direita: Espectro de potência do campo elétrico perpendicular [13].

hertz para um comprimento de aceleração de poucos megametros (Mm). Para os íons é menor que 0,1Hz. Passa-se, então, a considerar campo dc como campos elétricos com frequência suficientemente baixa para as partículas relevantes, ou seja, $f < 0,1\text{Hz}$.

A figura 3.22 mostra a densidade espectral de potência (DEP) para E_{\parallel} e E_{\perp} , medida pelo Viking. Esses espectros são típicos para tubos de fluxo aurorais com correntes ascendentes em todos tempos locais e atividade magnética. A máxima DEP está abaixo de 1Hz para ambas as componentes, mas $DEP(E_{\perp}) \gg DEP(E_{\parallel})$ abaixo de 2Hz aproximadamente, por cerca de duas ordens de magnitude. Acima de 5Hz, aproximadamente, a razão é apenas de um fator 1-3. A grande densidade de potência em baixas frequências, as quais são dc para elétrons, mas ac para íons, sugere que o campo dc para elétrons ($E_{\parallel}(dc,e)$) pode desempenhar um papel importante para os elétrons, enquanto, ao mesmo tempo, tem apenas pequeno efeito sobre os íons.

Os dados obtidos pelo Viking permitem estimar o potencial acelerador de duas formas distintas. Uma delas utiliza a variação do ângulo do cone-de-perda dos elétrons, enquanto a outra utiliza a variação da energia dos íons. Embora a maioria dos casos resulte em bom acordo entre os potenciais determinados pelos dois métodos distintos, alguns produzem diferença. As diferenças observadas entre as quedas de potencial determinadas pelos íons e elétrons

podem estar dentro dos erros inerentes aos métodos (um conjunto estatístico muito maior seria necessário para definir se uma diferença sistemática existe).

Existindo uma diferença sistemática, uma explicação pode ser dada em termos da diferença entre o potencial acelerador para íons e elétrons. Supõe-se a existência de um campo estático ascendente para íons ($E_{\parallel}(\text{dc},\text{p})$), capaz de responder pelo feixe ascendente de íons. Um campo $E_{\parallel}(\text{dc},\text{e})$ (menor) superposto, cuja flutuação é muito rápida para os íons, deve dar energia adicional aos elétrons descendentes, se a integral em (3.44) é significativa. A DEP integrada na frequência para $E_{\parallel}(\text{dc},\text{e})$ corresponde a uma amplitude de um ou poucos milivolts por metro (figura 3.22), a qual pode responder facilmente pelas (possíveis) discrepâncias entre os potenciais determinados pelos íons e elétrons.

A definição relativa de potencial acelerador permite uma explicação para observações em que elétrons e íons são acelerados simultaneamente em sentido ascendente, com energias similares da ordem de 1keV. Nesses eventos os elétrons são, até mesmo, bidirecionais. Assim, os feixes de elétrons ascendentes e descendentes podem ser acelerados por campos flutuantes substancialmente mais fortes que o campo estático com frequências que parecem ac para os íons.

As medidas também resultam em conclusões a respeito da estrutura da região de aceleração. As primeiras medidas diretas feitas na região-fonte pelo satélite S3-3 revelaram um grande número de pequenas camadas-duplas, cada uma com uma queda de potencial da ordem de 1V. A frequência de ocorrência dessas camadas indica a existência de milhares delas em série ao longo das linhas de campo aurorais. Elas podem, então, responder pelas quedas de potencial da ordem de kilovolt requeridas para explicar a aceleração dos elétrons aurorais e feixes de íons ascendentes em termos de campos elétricos paralelos. Evidências acumuladas pelos satélites S3-3, DE 1, DE 2²³ e Viking mostram que a extensão em altitude típica da região de aceleração é de poucos milhares de quilômetros e as quedas de potencial são tipicamente de 1-10kV, produzindo em média um campo de um a poucos milivolts por metro. As observações do S3-3 de valores altos para E_{\parallel} ($>100\text{mV/m}$) são também confirmadas pelas observações do Viking. Esses campos de curta duração (100ms ou menos) são vistos em todos os passes sobre a zona auroral. Entretanto, campos E_{\parallel} mais fracos até 20mV/m são mais comuns, com durações que podem chegar a dezenas de segundos.

O mesmo tipo de camadas-duplas foi observado em maior detalhe pelo Viking. Elas estão associadas a depleções na densidade como requerido pela teoria e se movem no sentido ascendente ao longo do campo magnético com velocidades da ordem de 10-50km/s. Durante as

²³Perigeu: 309km; Apogeu: 1012km; Inclinação: 89,99° [58].

medidas, ondas íon-cíclotron também estão presentes. Seus períodos são aproximadamente os mesmos que a duração das camadas-duplas (em torno de 10ms), o que indica que as camadas-duplas não podem se manter independentemente do plasma de fundo. O campo elétrico paralelo é aproximadamente nulo entre as camadas, as quais são, portanto, facilmente detectadas. A queda de potencial paralelo parece estar distribuída por milhares de quilômetros, enquanto a distância perpendicular ao campo magnético correspondente é da ordem de 100km ou menos. Os dados do Viking mostram claramente que os limites da região de aceleração devem estar entre 3000km e 7000km de altitude. Considerando que as camadas-duplas sejam parte de uma estrutura de larga escala em forma de U associada aos arcos aurorais ou eventos de V-invertido, as superfícies equipotenciais nas proximidades podem ter a forma mostrada na figura 3.23.

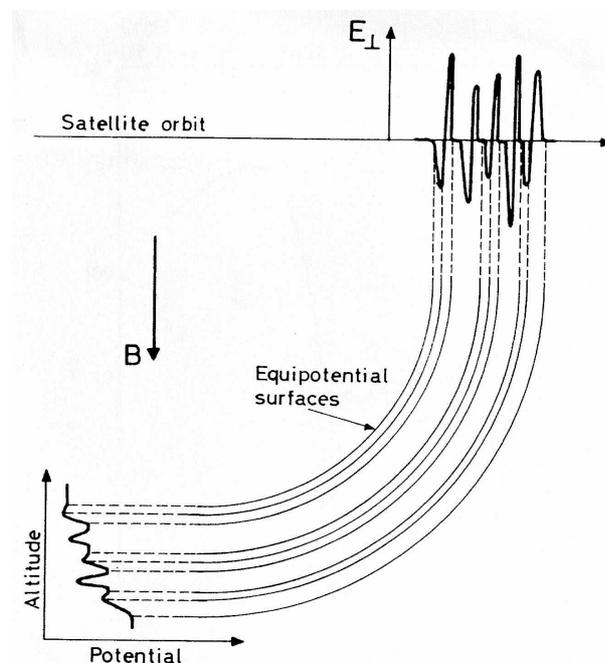


Figura 3.23: Possível forma da estrutura aceleradora auroral [13].

Em Calvert (1995) [20] é proposta uma nova teoria sobre a formação de auroras, estreitamente relacionada com a forma de geração da AKR sugerida em Calvert (1982). Este modelo, que não requer a existência de campos elétricos alinhados, é baseado em dois novos conceitos: (1) a densidade nas linhas de campo aurorais determina o padrão da precipitação eletrônica e (2) a precipitação eletrônica reduz significativamente a densidade nessas linhas de campo. Os elétrons precipitantes causadores dos arcos aurorais têm sua origem atribuída ao espalhamento no espaço de velocidades causado pelo maser de elétron-cíclotron que resulta do aspecto cone-de-perda da distribuição eletrônica.

Fora das regiões correspondentes aos arcos aurorais discretos, os elétrons são caracterizados por distribuições de velocidades aproximadamente isotrópicas com cones-de-perda bidirecionais vazios ou aproximadamente vazios. Dentro dessas regiões, os cones-de-perda tornam-se preenchidos ou parcialmente preenchidos por elétrons energéticos. Os elétrons internos ao cone-de-perda são os causadores das auroras, ao contrário dos externos. Assim, a chave para o entendimento das auroras reside na compreensão de como os elétrons chegam ao interior do cone-de-perda.

Sugere-se que o espalhamento de partículas por ondas para dentro do cone-de-perda substitui o papel de campos alinhados na formação das auroras. Esse espalhamento é capaz de responder pelos estreitos picos de energia tradicionalmente atribuídos à aceleração de elétrons. É proposto que a precipitação de elétrons aurorais resulta do espalhamento de elétrons energéticos para dentro do cone-de-perda pelo maser de elétron-cíclotron alimentado pelo cone-de-perda, como em Wu e Lee (1979), uma vez que esta instabilidade automaticamente causa o requerido espalhamento e, presumivelmente, produz a AKR que acompanha a aurora discreta durante as subtempestades.

As ondas devem causar espalhamento em ambos os cones-de-perda. Para o corrente propósito, entretanto, não importa qual, uma vez que em linhas de campo aurorais fechadas o espalhamento deve causar precipitação na zona auroral em um hemisfério ou no outro.

Tipicamente a aurora inicia como trechos difusos, os quais se desenvolvem em arcos difusos homogêneos, antecedendo a expansão da subtempestade. Isto é seguido por um brilho local repentino de um único arco difuso no setor da meia-noite, o que marca o estabelecimento da subtempestade. Observa-se também que os arcos difusos tendem a permanecer fracos e difusos até que os arcos iniciais tenham se tornado totalmente desenvolvidos, após o que, esses arcos repentinamente brilham.

Para responder por tal comportamento, a aurora difusa que antecede a expansão da subtempestade é atribuída à amplificação de circuito aberto pelo maser de elétron-cíclotron e à sua estrutura, que produz ganho acentuado em densidades menores. Isso deve produzir ondas mais fortemente amplificadas nas depleções de densidade e, assim, precipitação eletrônica difusa (fraca), localizada de modo disperso. Uma vez que a precipitação deve gradualmente aumentar as depleções, também pode responder pela estrutura dos arcos difusos homogêneos.

A estrutura irregular inicial da aurora difusa é, portanto, atribuída ao incremento da precipitação nas depleções de densidade ambiente e seu subsequente desenvolvimento em arcos difusos homogêneos é atribuído a essa precipitação, que gradualmente aumenta a depleção de densidade em que ocorre. Isso deve causar depleções de densidade, nas quais o ganho e a

retroalimentação gradualmente aumentam e o brilho local repentino de um arco homogêneo difuso, no estabelecimento de uma subtempestade, pode ser atribuído pelo estabelecimento do processo de laser dentro dessas depleções de densidade. Isso explica porque o brilho ocorre localmente apenas em um arco homogêneo difuso pré-existente e porque este arco difuso se desenvolve no primeiro arco discreto da expansão da subtempestade.

Embora este modelo explique a injeção de elétrons, ele também prediz que o estabelecimento da subtempestade deve ocorrer com um atraso que depende da amplitude das ondas externas, o que pode responder pela observada ignição da AKR por ondas externas.

No processo de ignição, a AKR inicia durante uma emissão kilométrica solar do tipo III²⁴, usualmente partindo de uma única frequência próxima ao centro do intervalo de frequências da AKR e freqüentemente persistindo por um longo tempo após a emissão do tipo III ter completamente desaparecido. Uma vez que a AKR deve ser um indicador confiável de aurora, isso implica em ignição externa da aurora por ondas externas. A ignição de ambas, AKR e aurora, pode ser entendida como mostrado na figura 3.24, onde são mostrados espectrogramas

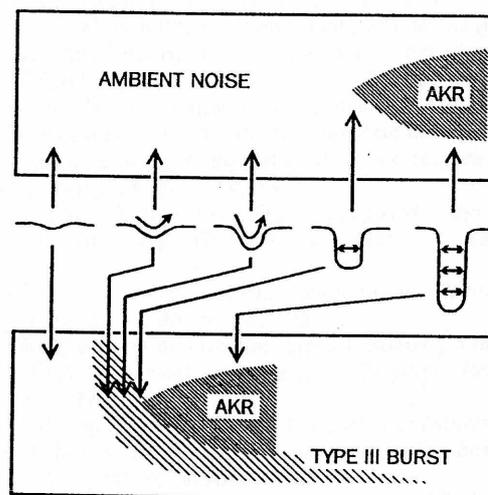


Figura 3.24: Geração da AKR com e sem ignição externa [20].

esquemáticos com e sem ignição, juntamente com esboços das depleções de densidade em que o processo de laser ocorre. No painel superior, o ruído ambiente fraco gradualmente aumenta a depleção, transcorrendo possivelmente uma hora ou mais até que o processo de laser ocorra. No painel inferior, por outro lado, onde as ondas aumentam de intensidade entre 40 a 60dB durante uma emissão do tipo III, a precipitação eletrônica predita deve aumentar de duas a três ordens de magnitude, assim, colapsando horas em minutos e respondendo pelo pronto

²⁴Emissão solar de ondas de rádio caracterizada por rápida variação na frequência e comprimento de onda no intervalo decimétrico-quilométrico.

estabelecimento da AKR durante os eventos de ignição observados. A ignição da AKR é, portanto, atribuída às ondas externas que causam maior precipitação eletrônica, avançando o estabelecimento da subtempestade. Uma vez que as ondas são amplificadas pelo maser de ciclotron, pode-se entender como essas ondas relativamente fracas podem produzir um efeito tão dramático.

A fim de responder pela subsequente expansão latitudinal da aurora, é assumido que a AKR resultante produz ignição em depleções adjacentes pelo mesmo processo. Isso também explica as observações de arcos difusos no estabelecimento da subtempestade, os quais tendem a permanecer fracos e difusos até que o primeiro arco discreto da expansão da subtempestade tenha se tornado completamente desenvolvido.

Assim, a aurora difusa é atribuída à amplificação de circuito aberto das ondas externas e a aurora discreta é atribuída à amplificação de circuito fechado (retroalimentação), portanto, explicando ambos os tipos de auroras e respondendo por suas diferenças.

Entre as questões ainda não respondidas sobre o processo de geração da AKR, destacam-se a identificação precisa da fonte de energia livre que alimenta o maser e a explicação para a estrutura fina do espectro de emissão, que apresenta largura de banda de $\sim 1\text{kHz}$, até menos de 100Hz . Em Pritchett et al. (1999) [65] essas questões são investigadas através de simulações envolvendo diferentes distribuições eletrônicas.

Como sugerido, em parte, pelas medidas do Viking em Roux et al. (1993), pode-se apontar possíveis fontes de energia livre para a AKR: (1) cone-de-perda na região ascendente; (2) C-invertido, com buraco em ângulo-de-arremesso pequeno e incremento em ângulo-de-arremesso grande, decorrente da difusão do feixe que é produzido pelo campo elétrico alinhado, provocada pelo campo magnético convergente; (3) população aprisionada na região proibida (inacessível, na ausência de colisões ou difusão, tanto para os elétrons ionosféricos como para os magnetosféricos), em ângulo-de-arremesso grande. As medidas indicam que esta região não está vazia. A Viking observa um extenso platô e, às vezes, até inclinação positiva nessa região. Possivelmente, esta população é formada quando os elétrons são expostos a um campo elétrico variável no tempo.

As medidas com resolução sem precedentes realizadas pelo FAST de ondas e partículas mostram que as emissões de AKR observadas apresentam variações temporal e espacial acentuadas. A detalhada distribuição eletrônica medida pelo FAST é usada para analisar a questão de fonte de energia livre e a correspondente largura de banda, através de simulação numérica. Diferente das simulações em Pritchett e Winglee (1989), em que a região de simulação é constantemente alimentada por elétrons, neste estudo consideram-se simulações de valor inicial.

Deve-se salientar também que em Pritchett e Winglee (1989) os resultados mostram a radiação se propagando em pacotes de onda, consistentes com as eclosões de curta duração observadas.

O estudo é baseado em dados da distribuição medida pelo FAST na órbita 1761, cujo aspecto é semelhante à distribuição mostrada na figura 3.10. Os efeitos da difusão (platô) são

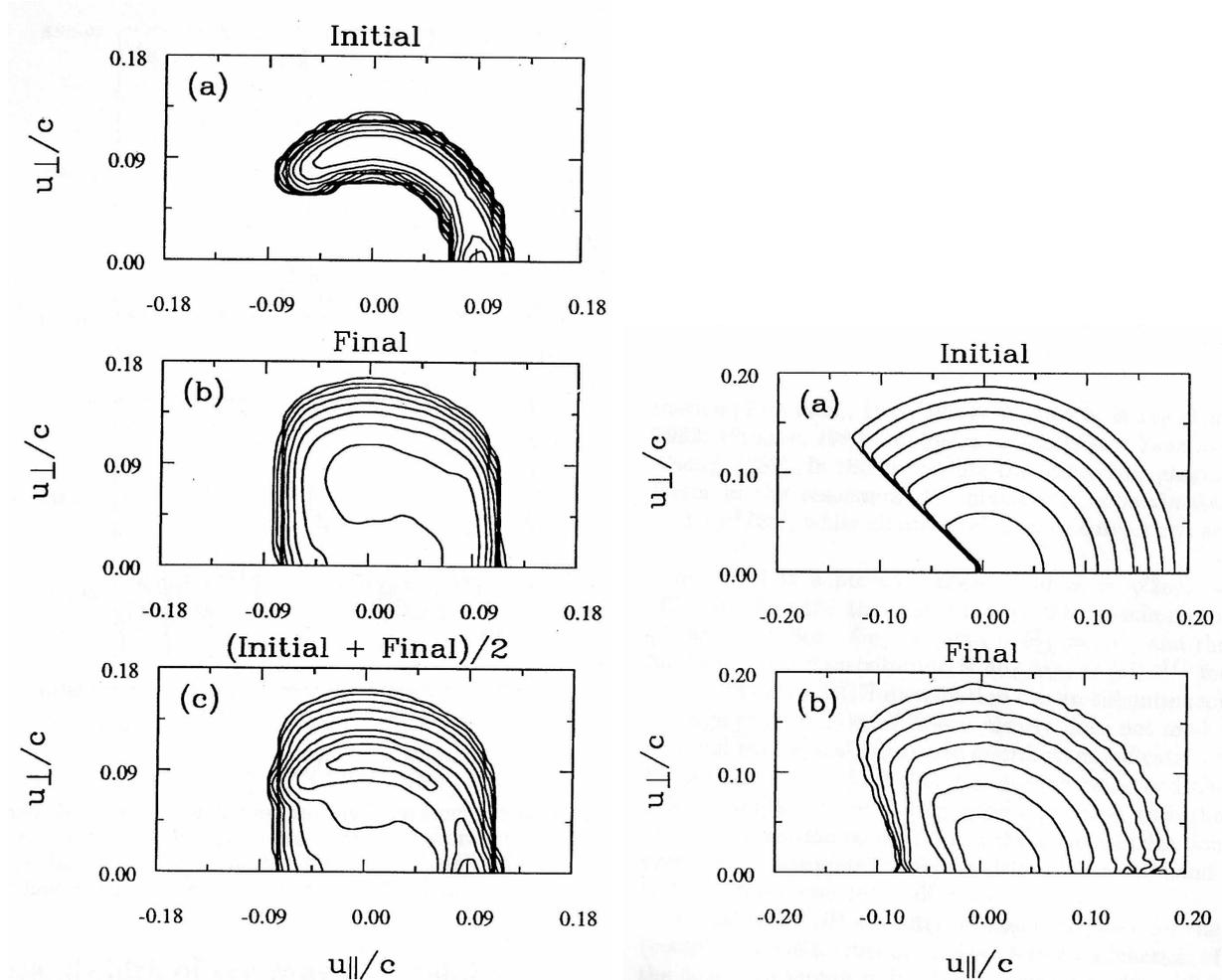


Figura 3.25: À esquerda: C-invertido, (a) estado inicial (b) estado final (c) média entre estados final e inicial [65]. À direita: Cone-de-perda, (a) estado inicial (b) estado final [65].

contornados definindo uma função reduzida

$$\bar{f}(v_{\parallel}) = \int_{E>400\text{eV}} 2\pi f(v_{\parallel}, v_{\perp}) dv_{\perp}, \quad (3.46)$$

à qual é atribuída uma dispersão, pequena ou suficiente para que a distribuição resultante não alcance a região proibida (de elétrons aprisionados). A integração é restrita a energias $> 400\text{eV}$ para evitar contaminação por fotoelétrons. A distribuição obtida ("C-invertido") é mostrada na figura 3.25, bem como o estado final e a difusão ocorrida devido ao mecanismo de maser.

Outra simulação é feita considerando o cone-de-perda isoladamente, através de uma distribuição-modelo, figura 3.25, onde também é mostrado o respectivo estado final da simulação. Nota-se

o preenchimento do cone devido à difusão e a ausência de formação de um platô na região descendente.

A figura 3.25 também mostra a média entre a distribuição inicial e o estado final saturado. Esta média exhibe, qualitativamente, vários dos aspectos encontrados na distribuição medida: o feixe, o incremento ao longo da elipse que define a condição de acesso dos elétrons magnetosféricos (limite da região de aprisionamento) e um cone-de-perda (pouco pronunciado), além de um platô. Este painel suporta a interpretação de que as observações feitas pelo FAST representam uma condição quase-estacionária, na qual a introdução de elétrons magnetosféricos é balanceada pela difusão para menores valores de v_{\perp} causada pela instabilidade de maser.

Em contraste, na simulação utilizando somente o cone-de-perda ascendente, a difusão é confinada à região ascendente e os elétrons descendentes, essencialmente, não são afetados pelo desenvolvimento da instabilidade de maser. Assim, um maser alimentado unicamente pelo cone-de-perda ascendente não é capaz de explicar o platô observado na região descendente da distribuição eletrônica.

A intensidade do campo elétrico obtida utilizando a distribuição baseada nas medidas do satélite atinge valores de $\sim 500\text{mV/m}$. Portanto, uma distribuição deste tipo é capaz de reproduzir as emissões mais intensas de AKR registradas ($\sim 300\text{mV/m}$). Por outro lado, a simulação utilizando apenas o cone-de-perda alcança uma intensidade máxima em torno de 12 vezes menor do que a intensidade máxima resultante da simulação envolvendo a distribuição medida. Desta forma, frente às elevadas intensidades registradas pelo FAST, a consideração de uma nova fonte de energia livre é relevante para a manutenção do maser de elétron-cíclotron como mecanismo gerador da AKR.

A respeito das bandas de frequência, as intensidades espectrais obtidas nas simulações são consistentes com uma largura de banda $\sim 0,5\text{-}1,0\text{kHz}$. Estes valores são consideravelmente maiores que a estrutura fina que tem sido reportada (100Hz e menor). Assim, pode-se concluir que a estrutura espectral da AKR poderia ser parcialmente explicada sem a necessidade de mecanismos adicionais, como a retroalimentação proposta em Calvert (1982).

Em Pritchett et al. (2002) [66] são feitas simulações utilizando uma distribuição do tipo C-invertido. Os resultados são consistentes com as conclusões previamente obtidas em Pritchett e Winglee (1989). Particularmente, é reafirmada a desprezível intensidade de radiação refletida nas bordas da cavidade (mesmo para um perfil de densidade abrupto do tipo "poço quadrado"), removendo suporte à possibilidade de retroalimentação sugerida em Calvert (1982,1995). Como observa Treumann (2006): O fato mais importante a respeito do aprisionamento de radiação e amplificação na "cavidade-guia" é que nenhuma estrutura de

ondas estacionárias foi alguma vez observada e, assim, a amplificação pelo "guia de ondas" é irrelevante para alcançar as altas emissividades.

Em adição, Pritchett et al. (2002) indica a possibilidade de que a amplificação da AKR pode ser alcançada via propagação na direção longitudinal. Uma vez que a dimensão da fonte na direção longitudinal é $\sim 1000\text{km}$ (enquanto na direção transversal é $\sim 100\text{km}$, dimensões já verificadas pelo ISIS 1 em Benson e Calvert (1979)), não haveria dificuldade em alcançar a amplificação requerida, nesta direção preferencial. Assim, o problema de distância de amplificação fica removido, bem como a necessidade de invocar um mecanismo de retroalimentação.

Também é obtido como resultado o aquecimento perpendicular de elétrons térmicos na região exterior à cavidade, devido à absorção da radiação de maser. Esta característica é reportada em Delory et al. (1998), onde é sugerida a mesma explicação. Os resultados também mostram emissões com estreita largura de banda, embora não suficientemente estreita para responder pelas menores larguras de banda observadas.

3.3 Panorama atual

Nesta seção são expostos aspectos do panorama atual, traçado por Treumann (2006) [78] (alguns desses aspectos já são abordados em Pottellette et al. (2001) [63]), a respeito do maser de elétron-cíclotron aplicado à Astrofísica. O entendimento mais recente contraria alguns dos modelos e conceitos tidos como válidos na explicação da AKR. No entanto, deve-se ressaltar que essas novas propostas apresentam questões em aberto e carecem de estudos adicionais, de maneira que o cenário traçado anteriormente ainda constitui a explicação melhor estabelecida para a geração da AKR. Contudo, os resultados mais recentes parecem indicar novos paradigmas a serem seguidos no estudo do maser de elétron-cíclotron.

3.3.1 Platô na distribuição eletrônica

No início dos anos 80, a resolução das medições de elétrons não era suficiente para revelar que a distribuição eletrônica exibia a forma aproximada de um anel, com um cone-de-perda pouco proeminente. Sob a ação combinada do campo elétrico paralelo e do campo magnético convergente, a distribuição eletrônica assume a forma de C-invertido no espaço de velocidades.

A fim de esclarecer como este estado é alcançado, pode-se assumir um campo elétrico estacionário ao longo do campo magnético com sentido ascendente. Este campo acelera os elétrons no sentido de convergência do campo magnético. Enquanto os elétrons se movem, o primeiro invariante adiabático (o momento magnético das partículas, relação (3.6)) é conservado. Em

conseqüência, os elétrons assumem ângulos-de-arremesso maiores. A remoção de elétrons de baixa energia devido à aceleração no campo elétrico produz uma vacância na região de baixa energia, formando um gradiente positivo em velocidade perpendicular ($\partial F/\partial v_{\perp} > 0$). Sem um campo elétrico paralelo, a distribuição de partículas permaneceria um cone-de-perda. O campo elétrico, em analogia ao que ocorre no caso de masers moleculares, excita as partículas e as eleva a um nível de energia mais alto.

A predição anterior não está em acordo com as observações, que mostram a distribuição eletrônica exibindo um platô pronunciado em velocidades menores. A explicação deste platô envolveu consideráveis dificuldades. Atualmente está claro que o platô não é causado por relaxação quase-linear da distribuição através da perda de energia pelas emissões do maser de elétron-cíclotron. Em vez disto, entende-se que o platô é causado por interação onda-partícula entre elétrons energéticos e ondas na faixa de frequência muito baixa (VLF). Essas ondas de baixa frequência não escapam do plasma, ficando aprisionadas. A amplificação dessas ondas é inevitável, sendo intrínseca ao gradiente positivo em velocidade perpendicular da distribuição eletrônica. A intensidade aumenta o suficiente para difundir os elétrons que estão em ressonância com as ondas VLF, causando a depleção do gradiente e a formação do platô. De fato, a inibição artificial da depleção do gradiente, através da remoção das ondas VLF, leva a uma maior emissividade do maser. Os modos produzidos que escapam para o espaço livre não são intensos o suficiente para causar depleção do gradiente, a menos que a radiação fosse mantida no interior da fonte por algum mecanismo de confinamento. Um extenso platô é gerado pelas ondas de baixa frequência na distribuição de C-invertido, a qual mantém apenas um modesto gradiente, suficiente para manter o maser de elétron-cíclotron ativo.

Os elétrons perdem energia para a radiação. Esta perda de energia irá, em princípio, diminuir o gradiente de momentum perpendicular, espalhando elétrons para menores valores de momenta. Este efeito, embora bastante pequeno, causa a saturação observada. Isto estará correto para qualquer modo de oscilação aprisionado. Mas radiação acima da frequência de corte pode escapar do plasma. Então, a pequena perda de energia das partículas não é apreciável se a distribuição de partículas é restabelecida por forças externas.

Para aplicações na natureza, a saturação da radiação emitida tem alguma importância apenas se a radiação é confinada no volume irradiador. Caso contrário, a radiação escapará imediatamente, encontrando outras regiões onde pode ser absorvida ou se propagar no espaço livre. Neste sentido, um tratamento quase-linear da emissão de maser, como se pode encontrar em muitos trabalhos publicados, é de pequena relevância para aplicações a fenômenos da natureza.

3.3.2 Geração das camadas-duplas

Mecanismos que geram quedas de potencial ao longo do campo magnético estão sob consideração ainda atualmente, porque o encontro das condições para mantê-las num plasma não-colisional apresenta sérias dificuldades. Teoricamente, a manutenção de camadas-duplas ao longo do campo magnético em plasmas não-colisionais encontra dificuldades severas e ainda não completamente resolvidas (2006).

Em plasmas estacionários não-colisionais, idealmente condutores (condutividade infinita), as linhas de campo magnético tornam-se isopotenciais elétricas, com o campo elétrico possuindo apenas componente perpendicular ao campo magnético. O plasma sob estas condições apresenta um movimento de deriva $\vec{v}_e = \vec{E}_\perp \times \vec{B}_0 / B_0^2$, perpendicular aos campos elétrico e magnético. Entretanto, quando, por algum processo, duas regiões com movimento de deriva opostos são colocadas em contato, os campos elétricos ou convergem ou divergem. Neste caso, a região de transição entre os dois regimes de movimento comporta-se como uma camada eletricamente carregada. Interessa aqui apenas camadas negativamente carregadas, correspondendo a campos elétricos convergentes (conforme figura 3.11).

Esta camada requer que as isopotenciais desviem-se da direção paralela ao campo magnético. Simulações numéricas desses fluxos demonstram que uma região inferior desenvolve-se, onde potenciais negativos são acumulados, transformando as isopotenciais, inicialmente alinhadas ao campo magnético, em estruturas de potencial em forma de U e S; e um campo elétrico alinhado ao campo magnético (aqui, ascendente) se desenvolve numa extensão espacial limitada e, assim, expulsa o plasma da região considerada.

A evolução deste processo pode ser visualizada na figura 3.26. Uma depleção na densidade do plasma em forma U toma a forma de S. Desta maneira, a cavidade de plasma é gerada e, ao mesmo tempo, uma região de campo elétrico paralelo é formada, a qual tem duração enquanto o contrafluxo inicial for mantido acima da cavidade. Esta estrutura se torna instável para tempos de simulação ($\omega_{pe}t$) mais longos, com o fundo da cavidade se apagando, desenvolvendo estruturas de densidade filamentosas e movendo-se para cima, de forma a anular o contrafluxo.

Conclui-se que o processo de formação das camadas-duplas é não-estacionário: tem duração limitada e produz campos elétricos paralelos pulsados. Entretanto, uma vez que $\omega_{pe} \ll \omega_{ce}$, o tempo de duração é muito maior que o tempo requerido para a geração das distribuições de C-invertido e a conseqüente emissão do maser de elétron-cíclotron.

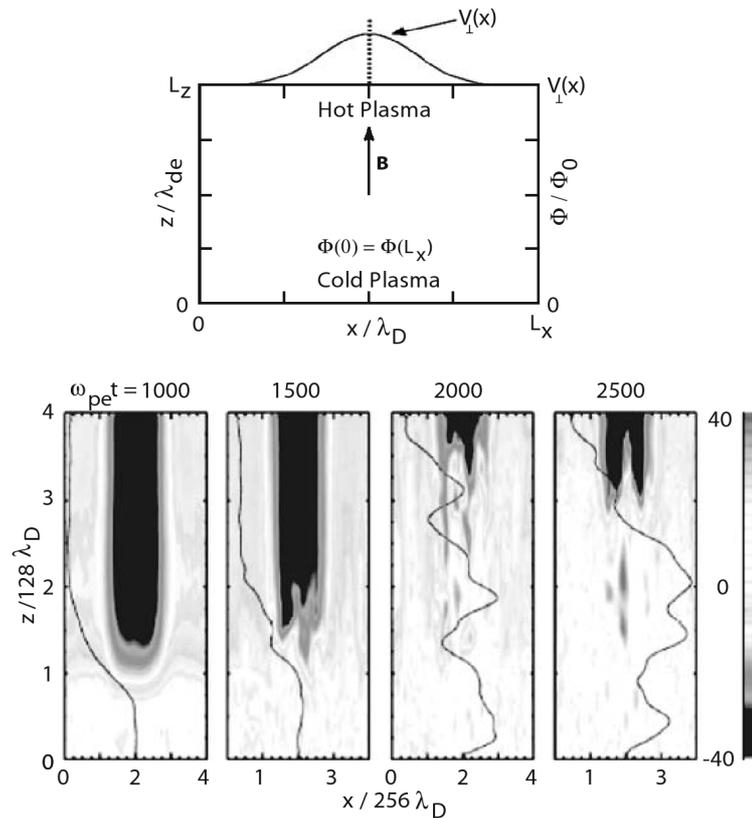


Figura 3.26: Simulação da formação e evolução de camadas-duplas [78].

3.3.3 Estrutura fina espectral

A investigação mais detalhada das propriedades da região-fonte produziu o resultado de que ela é preenchida com estruturas em pequena escala de campo elétrico paralelo: as chamadas vacâncias eletrônicas no espaço de fase ("electron holes in phase space"), as quais contribuem ativamente para a geração de radiação. Essas vacâncias possivelmente causam a estrutura fina da radiação através de um mecanismo que, até o momento da publicação da Ref. [78] (2006), não está esclarecido. As observações indicam que quase toda a radiação consiste de "irradiadores elementares". Eles atuam como fontes pontuais de radiação, movendo-se tanto no espaço real como no espaço de fase.

Uma das propriedades mais pronunciadas da AKR é sua estrutura fina. A figura 3.27 mostra uma observação, com resolução muito alta de tempo e frequência, feita pelo satélite FAST da radiação quilométrica das auroras, detectada a uma altitude de ~ 4000 km acima da superfície da Terra. Essa medida, estendendo-se por apenas 2s, exhibe uma abundante estrutura fina na emissão, a qual é importante, uma vez que provê informação sobre as fontes de radiação.

A primeira conclusão depreendida da figura 3.27 é que toda a AKR emana de "fontes

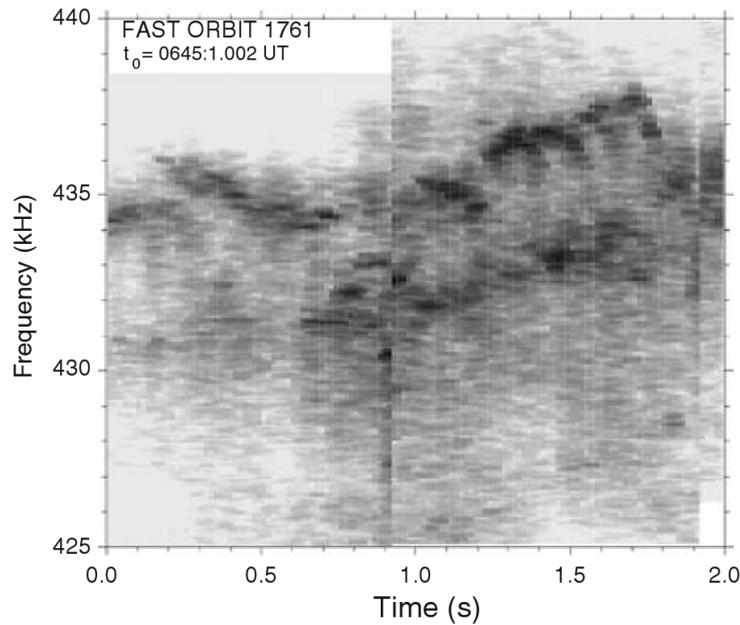


Figura 3.27: Estrutura fina da AKR [78].

elementares de radiação" que se movem rapidamente, cuja natureza deve ser identificada. A velocidade dessas fontes elementares de radiação, como inferido a partir da deriva desses elementos através do espectro da AKR na figura 3.27, é da ordem de algumas unidades de 10^3 km/s. Este valor está próximo à velocidade térmica dos elétrons (~ 1 keV), sendo que elétrons com esta velocidade compõem em grande número na região-fonte da AKR.

A segunda conclusão depreendida é que essas fontes elementares de radiação, algumas vezes, se arranjam em grupos que derivam como um conjunto através do espaço e, assim, sua radiação emitida deriva como uma linha intensa no espaço de frequências. A largura instantânea dessas linhas de emissão é da ordem de 1 kHz, o que corresponde, aproximadamente, a 1 km ao longo das linhas magnéticas, a altitudes da região-fonte próximas a Terra. O arranjo das fontes elementares de radiação numa linha freqüentemente se parece com um aprisionamento, como visto na figura 3.27, onde os irradiadores parecem se deter e permanecer por algum tempo até serem refletidos. Também duas linhas podem interagir (conforme a figura) sem se sobreporem e após a interação moverem-se juntas, como se duas regiões de mesmo potencial se rejeitassem mutuamente. A região de maior momentum pressionando a de menor momentum. Comportamento similar é encontrado em simulações numéricas.

A terceira conclusão depreendida da figura 3.27 é que a largura de banda local da modulação da AKR numa fonte de radiação elementar pode ser tão pequena quanto a resolução, ou seja, $\Delta f \simeq 0,1$ kHz, correspondendo a uma extensão da fonte elementar de radiação da ordem de $\simeq 100$ m, ou até menor, ao longo do campo magnético. Uma largura de banda tão pequena

implica que as fontes elementares de radiação da AKR, ou seja, os irradiadores do maser de elétron-cíclotron, sejam estruturas de escala muito pequena, não maiores que da ordem do comprimento de Debye²⁵.

A natureza da estrutura fina da radiação não está esclarecida. É possível que se deva a interferências, efeitos de popagação, efeitos de absorção e também seja a assinatura direta de estruturas de escala muito pequena; até mesmo menores do que as recém descritas.

3.3.4 Vacâncias no espaço de fase

As observações locais levantam a questão de qual a natureza dos "irradiadores elementares". Lembrando que o interior da cavidade (e, portanto, a região-fonte macroscópica da radiação de elétron-cíclotron) contém uma intensa corrente alinhada que passa por um plasma pouco denso. Estas correntes excitam instabilidades cinéticas do tipo "two-stream instability", as quais são excitadas pela interação do contrafluxo dos feixes de íons e elétrons. Quando a velocidade de deriva $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel i} - \vec{v}_{\parallel e}$ (que é a diferença entre as velocidades médias de deriva de íons e elétrons) excede a velocidade térmica eletrônica $v_{e,th}$, esta instabilidade cresce rapidamente. Ela prontamente aprisiona elétrons no potencial elétrico da onda e, assim, gera estruturas localizadas na distribuição eletrônica, que são conhecidas como "vacâncias eletrônicas no espaço de fase". Essas vacâncias correspondem a uma divisão da distribuição eletrônica em distribuição aprisionada (consistindo de elétrons com energias menores que o potencial da onda, no referencial da onda) e distribuição não-aprisionada (consistindo de elétrons com energias maiores que o potencial da onda). Velocidades de deriva menores podem formar estruturas similares na distribuição iônica. Essas entidades são conhecidas como modos BGK e contêm campos elétricos localizados que podem ser detectados com instrumentação de alta resolução.

A figura 3.28 fornece um exemplo recente da forma de onda de uma seqüência dessas estruturas localizadas, como detectadas pelo satélite FAST na cavidade auroral. A representação tem apenas 200ms de duração e mostra sete assinaturas de campo elétrico com estruturas localizadas. Decorrem menos de 10ms enquanto a nave atravessa uma estrutura de dimensão típica. As amplitudes do campo elétrico alcançam valores de 0,5V/m dentro de uma dessas estruturas. De fato, um campo elétrico bastante intenso. Esses campos podem ser mantidos num plasma não-colisional, somente se partículas com energia menor que poucas unidades de 100eV são aprisionadas no campo elétrico da onda.

²⁵Definido como $\lambda_{De} = \sqrt{2m_e k T_e / \omega_{pe}}$, indica a escala espacial acima da qual o plasma pode ser considerado quase-neutro.

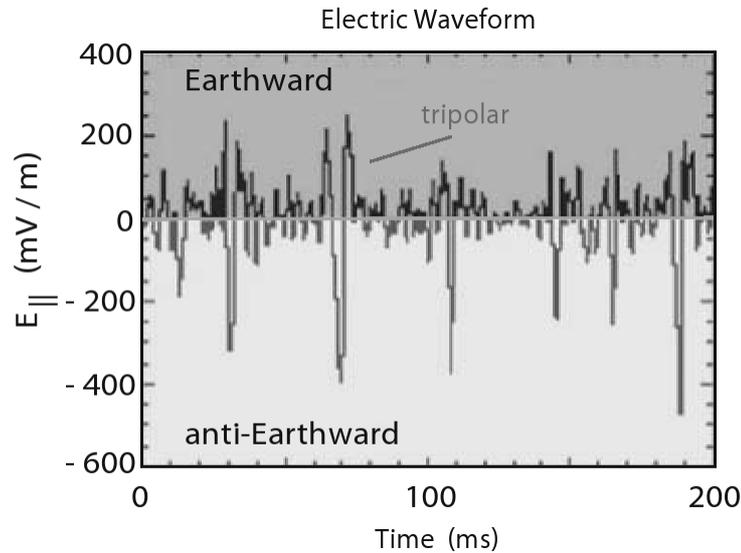


Figura 3.28: Estruturas de campo elétrico em pequena escala [78].

Na presença de muitas vacâncias, essas diferenças de potencial somam-se, produzindo uma queda de potencial de larga escala, que pode responder inteiramente pela queda de potencial ao longo do campo magnético na cavidade auroral. Por exemplo, na figura 3.28 as vacâncias eletrônicas ocorrem a uma taxa de uma vacância a cada 20ms, resultando 500 vacâncias em 10s. A pequena diferença de potencial de 10mV/m na seqüência mostrada, corresponde, então, a um campo elétrico de 5V/m ao longo do campo magnético. Estendendo ao longo de uma distância efetiva de ~ 1 km (dependendo da velocidade das estruturas elétricas), resulta uma diferença de potencial ~ 5 kV. Ou, aplicado às partículas, produz uma aceleração até 5keV, o que está em muito bom acordo com as observações.

Por um lado, essas vacâncias no espaço de fase resultam de uma queda de potencial existente, por outro lado, elas contribuem para a existência da queda de potencial. Esta ambivalência ainda não é resolvida (2006). A física da formação das vacâncias no espaço de fase é altamente não-linear e, assim, não é acessível através de uma abordagem perturbacional. A única maneira de investigar sua evolução é através de simulações numéricas.

3.3.5 Radiação das vacâncias eletrônicas

A radiação é gerada na presença dessas entidades de pequena escala devido a duas razões. Em primeiro lugar, cada uma das vacâncias produz um gradiente bastante acentuado na distribuição de partículas. Em segundo lugar, as vacâncias eletrônicas comparecem em um número muito grande e, assim, suas contribuições individuais à radiação somam-se para produzir intensidades de radiação elevadas.

A fim de contribuir para a geração de radiação via mecanismo de elétron-cíclotron, uma vacância eletrônica deve ser capaz de modificar a distribuição inicial impondo um gradiente em velocidade perpendicular acentuado. A maneira como isto pode ser efetivado está mostrado esquematicamente na figura 3.29. À direita nessa figura, uma vacância eletrônica é imposta sobre a distribuição de C-invertido. A vacância é, essencialmente, uma entidade na direção da velocidade paralela e forma uma tira estreita no espaço de velocidades que inicialmente, para todas velocidades perpendiculares, está localizada na velocidade $v_{||h}$. De maneira equivalente, a vacância eletrônica representa uma carga positiva sobre o fundo eletrônico e, portanto, experimenta uma atração pela parte principal ("bulk") da distribuição eletrônica.

Considera-se uma pequena parte de uma vacância localizada em velocidade perpendicular constante. A força atrativa que é exercida sobre a vacância pela parte principal da distribuição de C-invertido resulta em troca de momentum entre a vacância e a distribuição. Isto faz com que a vacância se mova em direção ao máximo da distribuição eletrônica. O movimento continua até que esta parte da vacância se estabelece em uma certa velocidade paralela, onde é alcançado um equilíbrio de momentum. Para uma distribuição não-simétrica, como a de C-invertido, as diferentes partes da vacância, em diferentes velocidades perpendiculares, serão movidas por diferentes distâncias na direção da velocidade paralela. A vacância se deformará e assumirá uma forma curvada.

À esquerda na figura 3.29 é mostrado o que acontece à vacância quando ela se move para

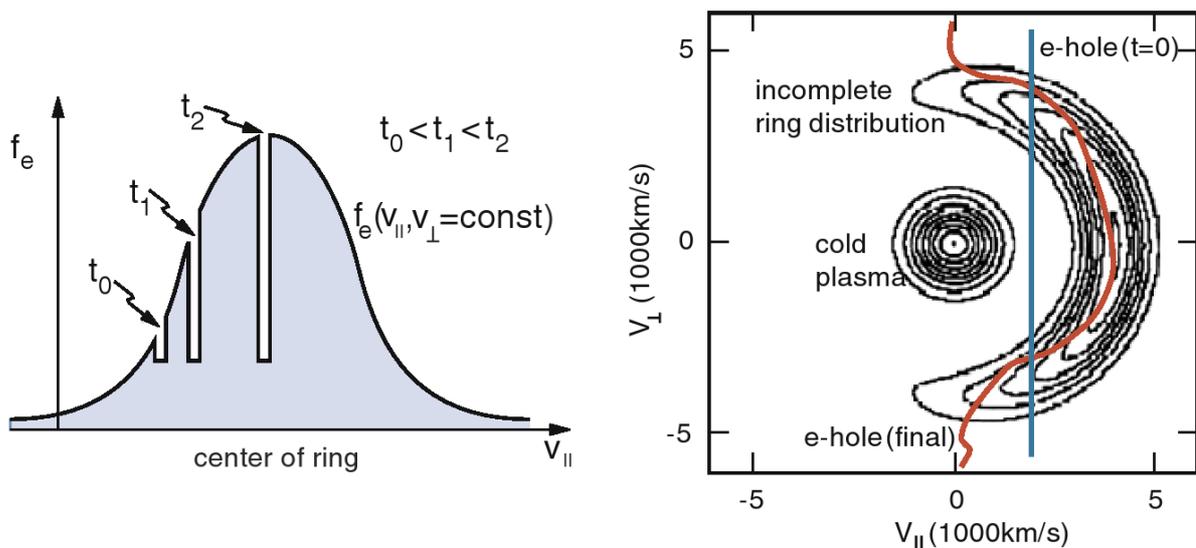


Figura 3.29: Dinâmica das vacâncias eletrônicas [78].

a parte principal da distribuição. Enquanto a vacância resistir à entrada de elétrons, ou seja, enquanto não houver partículas de baixa energia tal que fiquem aprisionadas na vacância, o

número de partículas no interior da vacância permanece constante. O ambiente local no espaço de velocidades em que está a vacância alcança densidades cada vez mais altas, de maneira que, efetivamente, a vacância aumenta de amplitude. Devido ao aumento de potencial a que fica sujeita a vacância ao mover-se para a parte principal da distribuição, elétrons são expelidos da vacância. Isto é realístico, uma vez que a vacância aprisiona apenas as partículas que possuem energia menor que o potencial local no referencial da vacância. Assim, o número de elétrons aprisionados na vacância permanece constante, enquanto as paredes da vacância não forem destruídas por instabilidades. Por fim, isto ocorrerá e a vacância será destruída. Entretanto, antes que isso ocorra, os gradientes da distribuição nos limites da vacância eletrônica crescem intensamente em ambas as direções, paralela e perpendicular ao campo magnético, quando a vacância se deforma e adentra a distribuição de C-invertido.

Dessa maneira, vacâncias eletrônicas deformadas produzem gradientes perpendiculares ($\partial F/\partial v_{\perp}$) intensos na distribuição de velocidades nos limites das vacâncias. Este efeito torna a vacância deformada em um eficiente emissor de radiação, uma "fonte de radiação elementar". Emissão ocorre no limite superior da vacância, onde $\partial F/\partial v_{\perp} > 0$. Enquanto que no limite inferior, onde $\partial F/\partial v_{\perp} < 0$ e o qual se localiza em menor velocidade perpendicular, a vacância absorve radiação. Radiação e absorção são devidas aos diferentes sinais dos gradientes de velocidade perpendicular nos dois limites da vacância, como mostrado na figura 3.30. Devido às

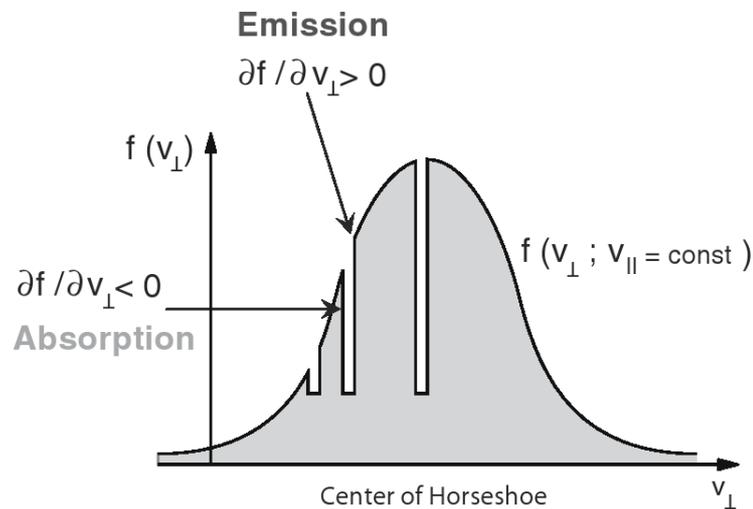


Figura 3.30: Emissão e absorção decorrentes das vacâncias eletrônicas [78].

diferentes posições dos gradientes perpendiculares na vacância e da largura finita Δ da vacância no espaço de velocidades, as emissões e absorções têm lugar em frequências ligeiramente distintas. Os círculos de ressonância ($k_{\parallel} \sim 0$) que passam pelos limites inferior e superior da vacância têm raios que diferem pelo espaçamento de velocidade Δ . Da condição de ressonân-

cia (3.35) para propagação perpendicular, pode-se concluir que, para v_{\parallel} constante, a absorção localizada em um menor valor de v_{\perp} implica absorção em uma frequência ligeiramente acima que a emissão.

O espaçamento na frequência é pequeno. Da condição de ressonância para propagação perpendicular e para um intervalo de velocidade Δ das vacâncias, pode-se estimar o intervalo entre as frequências de emissão e absorção como sendo

$$\frac{\Delta f}{f_{ce}} \sim \frac{\Delta v_h}{c}, \quad (3.47)$$

onde v_h é a velocidade ressonante da localização da vacância no espaço de velocidades, onde ela forma uma depleção na distribuição de C-invertido. Na derivação da expressão acima é assumido que a forma da vacância no espaço de velocidades pode ser aproximada por um círculo (como na figura). Para a AKR, o espaçamento entre emissão e absorção é da ordem de $10^{-5} < \Delta f/f < 10^{-4}$. Isto corresponde a um intervalo de frequência que é da ordem de $\sim 100\text{Hz}$. Deve-se observar que o alargamento relativístico da emissão pode alterar esta estrutura segmentada de frequências.

A ocorrência de uma seqüência de emissões e absorções em plasmas fracamente relativísticos é um efeito bastante interessante. Ele pode permitir a identificação da radiação de vacâncias a partir da seqüência de bandas de emissão e absorção estreitamente espaçadas. Também pode permitir a determinação das dimensões das vacâncias eletrônicas. Todos esses fatos unidos indicam que a dinâmica no espaço de fase das vacâncias eletrônicas provê a chave para o entendimento das intensas emissões obtidas das distribuições de C-invertido quando vacâncias eletrônicas são geradas no plasma com presença de corrente. Algumas assinaturas de linhas de emissão e absorção estreitas durante uma passagem do satélite pela região-fonte de AKR podem realmente ser reconhecidas no espectro dinâmico da figura 3.31.

A natureza dos "irradiadores elementares" não é apenas uma questão acadêmica: apenas quando for possível explicar esta questão é esperado entender a natureza da radiação e extrair informação da radiação recebida de objetos mais longínquos, embora é provável que não se possa resolver uma fonte de emissão distante, tal qual é possível no caso da Terra.

O maser de elétron-cíclotron é capaz de gerar emissões de rádio intensas sob condições bastante peculiares, embora não improváveis. Neste sentido, ele se torna uma ferramenta de diagnóstico poderosa para tais condições. Uma vez que o maser de elétron-cíclotron seja identificado como mecanismo gerador em algum objeto remoto, ele permite inferir a magnitude do campo magnético e a densidade na fonte de rádio. Também permite inferir algumas propriedades qualitativas da fonte: a presença de um campo elétrico ao longo das linhas de

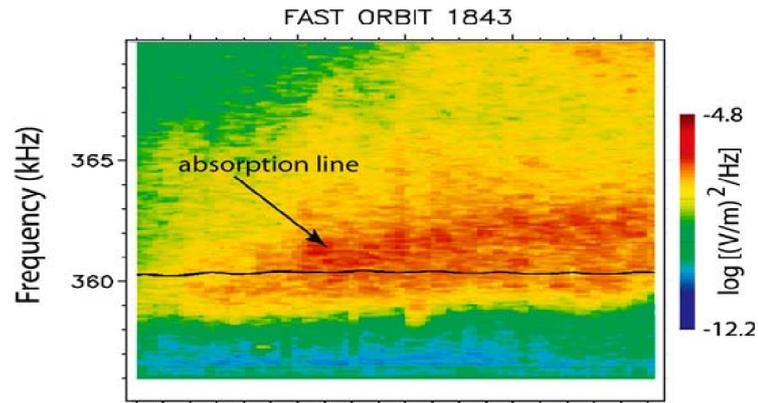


Figura 3.31: Linhas de emissão e absorção medidas (com menor resolução que a figura 3.27) [78].

campo magnético, a presença de cavidades de plasma em larga escala e o grau de depleção na densidade, além da energia dos elétrons ressonantes.

3.4 Sumário

A fim de sintetizar o que foi exposto até aqui, podem-se apontar as propriedades principais e gerais da região-fonte de AKR:

- intensas correntes alinhadas com o campo magnético (no caso da Terra, com sentido ascendente);
- densidade de plasma muito baixa, com $f_{pe} \ll f_{ce}$;
- fluxos de elétrons energéticos alinhados com o campo magnético (no caso da Terra, com sentido descendente e energia média $\sim 10\text{keV}$);
- campos elétricos estacionários paralelos, intensos e ascendentes, que rarefazem o plasma (no caso da Terra, com intensidade $\sim 1\text{V/m}$);
- distribuição eletrônica de velocidades em forma de C-invertido;
- feixe iônico ascendente com mesma energia que o feixe eletrônico descendente;
- radiação eletromagnética *intensa* na região-fonte com frequência de emissão $f < f_{ce}$;
- radiação circularmente polarizada no modo R-X;
- radiação *intensa* essencialmente perpendicular ao campo magnético ambiente.

Capítulo 4

O tensor dielétrico

Neste capítulo são discutidas duas possíveis abordagens ao estudo de plasmas inhomogêneos: a abordagem localmente homogênea (LH) e a abordagem em termos de um tensor dielétrico efetivo ou não-homogênea (NH). Ambas são consideradas a partir do tensor dielétrico de um plasma homogêneo, que é derivado na parte inicial do capítulo. São consideradas oscilações de pequena amplitude, tal que um tratamento matemático linear seja possível. Desta forma, o tensor dielétrico obtido fica expresso em termos da função distribuição de equilíbrio, a qual é conhecida na região-fonte da AKR. A frequência da radiação estudada tem magnitude por volta do valor da frequência de ciclotron eletrônica, assim, os íons, devido à sua maior inércia, podem ser tratados como um plasma de fundo, estático e neutralizante.

4.1 Plasma homogêneo

O tensor dielétrico para o caso homogêneo é obtido a partir das equações de Maxwell (2.3)-(2.6) e da equação de Vlasov, que pode ser expressa da forma seguinte:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) F_\alpha + e_\alpha \left\{ \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{p}} \right\} = 0. \quad (4.1)$$

Sob a assunção de que as oscilações no plasma são de pequena amplitude, as quantidades relevantes, quais sejam, a função distribuição F_α , o campo elétrico \vec{E} e o campo magnético \vec{B} , são descritos como possuindo um termo de equilíbrio (índice 0) e um termo oscilante (índice 1):

$$F_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) = f_{\alpha 0}(p_{\parallel}, p_{\perp}) + f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t); \quad (4.2)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1; \quad (4.3)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1. \quad (4.4)$$

Dessa forma um tratamento linear é possível, desprezando as quantidades quadráticas nos termos oscilantes. Aplicando estas considerações à equação (4.1) e assumindo $\vec{E}_0 = 0$, $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$, $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ e considerando coordenadas cilíndricas $(p_\perp, p_\parallel, \phi)$, obtém-se

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f_\alpha + e_\alpha \left\{ \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{p}} \right\} - \Omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \phi} = 0, \quad (4.5)$$

onde \vec{E} , \vec{B} e f_α passam a representar as partes oscilantes e onde $\Omega_\alpha = e_\alpha B_0 / \gamma m_\alpha c$ é a frequência de ciclotron relativística. Tomando a transformada de Fourier, a relação (4.5) ganha a forma

$$i \left[\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} \right] f_\alpha + \Omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \phi} = e_\alpha \left\{ \left[\vec{E} \left(1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega} \right) + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{\omega} \right) \vec{k} \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{p}} \right\}, \quad (4.6)$$

onde foi usado $\vec{B} = (c/\omega) \vec{k} \times \vec{E}$ e $\vec{v} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{v}) \vec{E}$. Multiplicando os dois lados de (4.6) pelo fator integrante

$$h(\phi) = \exp \left\{ \int_0^\phi -\frac{i}{\Omega_\alpha} \left[(\vec{k} \cdot \vec{v}) - \omega \right] d\phi' \right\} \quad (4.7)$$

e observando que γ independe de ϕ , o lado esquerdo de (4.6) torna-se uma diferencial exata:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} [\Omega_\alpha f_\alpha h(\phi)] = e_\alpha \left\{ \left[\vec{E} \left(1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega} \right) + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{\omega} \right) \vec{k} \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{p}} \right\} h(\phi). \quad (4.8)$$

Segue, de (4.8),

$$f_\alpha = [\Omega_\alpha h(\phi)]^{-1} \int_{\phi_\alpha}^\phi e_\alpha \left\{ \left[\vec{E} \left(1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega} \right) + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{\omega} \right) \vec{k} \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{p}} \right\} h(\phi') d\phi', \quad (4.9)$$

onde foi considerado que ω possui uma parte imaginária positiva [11] e

$\phi_\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \operatorname{sgn}(\Omega_\alpha)]$. Tomando $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$, já que há simetria azimutal,

$$\begin{aligned} \int_0^\phi -\frac{i}{\Omega_\alpha} \left[(\vec{k} \cdot \vec{v}) - \omega \right] d\phi' &= \int_0^\phi -\frac{i}{\Omega_\alpha} (k_x v_\perp \cos \phi' + k_z v_\parallel - \omega) d\phi' \\ &= -\frac{i}{\Omega_\alpha} [(k_z v_\parallel - \omega) \phi + k_x v_\perp \operatorname{sen} \phi] = -ia_\alpha \phi - ib_\alpha \operatorname{sen} \phi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

com

$$a_\alpha = \frac{k_z v_\parallel - \omega}{\Omega_\alpha}, \quad (4.11)$$

$$b_\alpha = \frac{k_x v_\perp}{\Omega_\alpha}. \quad (4.12)$$

Assim, a relação (4.9) pode ser reescrita como

$$f_\alpha = \frac{e_\alpha}{\Omega_\alpha} e^{ia_\alpha \phi} e^{ib_\alpha \operatorname{sen} \phi} \int_{\phi_\alpha}^\phi \left\{ \left[\vec{E} \left(1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega} \right) + \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{\omega} \right) \vec{k} \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \vec{p}} \right\} e^{-ia_\alpha \phi'} e^{-ib_\alpha \operatorname{sen} \phi'} d\phi'. \quad (4.13)$$

O termo entre chaves pode ser expresso como $\vec{E} \cdot \vec{A}$, onde

$$A_1 = \left[\left(1 - \frac{k_z v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_z v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \cos \phi', \quad (4.14)$$

$$A_2 = \left[\left(1 - \frac{k_z v_{\parallel}}{\omega} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_z v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \text{sen } \phi', \quad (4.15)$$

$$A_3 = \left\{ \left[\frac{k_x v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_x v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \cos \phi' + \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right\}. \quad (4.16)$$

Resta fazer as integrações pertinentes:

$$\begin{aligned} \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi} e^{-ia_{\alpha}\phi'} e^{-ib_{\alpha}\text{sen } \phi'} d\phi' &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(b_{\alpha}) \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi} e^{-i(a_{\alpha}+n)\phi'} d\phi' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{J_n(b_{\alpha})}{i(a_{\alpha}+n)} e^{-i(a_{\alpha}+n)\phi}; \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi} e^{-ia_{\alpha}\phi'} \cos \phi' e^{-ib_{\alpha}\text{sen } \phi'} d\phi' &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi} e^{-i(a_{\alpha}+n)\phi'} d\phi' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{n}{b_{\alpha}} \frac{J_n(b_{\alpha})}{i(a_{\alpha}+n)} e^{-i(a_{\alpha}+n)\phi}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi} e^{-ia_{\alpha}\phi'} \text{sen } \phi' e^{-ib_{\alpha}\text{sen } \phi'} d\phi' &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i J'_n(b_{\alpha}) \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi} e^{-i(a_{\alpha}+n)\phi'} d\phi' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -i \frac{J'_n(b_{\alpha})}{i(a_{\alpha}+n)} e^{-i(a_{\alpha}+n)\phi}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde foram usadas as identidades

$$e^{\pm ib_{\alpha}\text{sen } \phi'} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(b_{\alpha}) e^{\pm in\phi'}, \quad (4.20)$$

$$\cos \phi' e^{\pm ib_{\alpha}\text{sen } \phi'} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) e^{\pm in\phi'}, \quad (4.21)$$

$$\text{sen } \phi' e^{\pm ib_{\alpha}\text{sen } \phi'} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mp i J'_n(b_{\alpha}) e^{\pm in\phi'}. \quad (4.22)$$

Obtém-se, substituindo expressão para a_{α} ,

$$f_{\alpha} = -ie_{\alpha} e^{ib_{\alpha}\text{sen } \phi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{A}_n \cdot \vec{E}}{\omega - k_z v_{\parallel} - n\Omega_{\alpha}} e^{-in\phi}, \quad (4.23)$$

onde

$$A_{n1} = \left[\left(1 - \frac{k_z p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_z p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}), \quad (4.24)$$

$$A_{n2} = \left[\left(1 - \frac{k_z p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_z p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right] i J'_n(b_{\alpha}), \quad (4.25)$$

$$A_{n3} = \left[\frac{k_x p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_x p_{\perp}}{\gamma m_{\alpha} \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) + \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} J_n(b_{\alpha}). \quad (4.26)$$

Com

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} \vec{J}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \frac{\vec{p}}{\gamma} f_{\alpha} d\vec{p}, \quad (4.27)$$

obtem-se, de (4.23), a componente i da densidade de corrente da espécie α :

$$J_{\alpha i} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \frac{p_i}{\gamma} f_{\alpha} d\vec{p} = -\frac{ie_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{p_i}{\gamma} \frac{e^{-in\phi} e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} A_{nj}}{\omega - k_z v_{\parallel} - n\Omega_{\alpha}} d\vec{p} E_j. \quad (4.28)$$

De

$$\vec{J} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \sum_{\alpha} \vec{\sigma}^{\alpha} \cdot \vec{E}, \quad (4.29)$$

obtem-se

$$\sigma_{ij}^{\alpha} = -i \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{p_i}{\gamma} \frac{e^{-in\phi} e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} A_{nj}}{\omega - k_z v_{\parallel} - n\Omega_{\alpha}} d\vec{p}. \quad (4.30)$$

Avaliando as integrações em ϕ :

Para p_x ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_i e^{-in\phi} e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} d\phi &= p_{\perp} \int_0^{2\pi} \cos \phi e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} e^{-in\phi} d\phi = v_{\perp} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{b_{\alpha}} J_l(b_{\alpha}) e^{il\phi} e^{-in\phi} d\phi \\ &= p_{\perp} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{b_{\alpha}} J_l(b_{\alpha}) \int_0^{2\pi} e^{il\phi} e^{-in\phi} d\phi = p_{\perp} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{b_{\alpha}} J_l(b_{\alpha}) 2\pi \delta_{nl} = 2\pi p_{\perp} \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para p_y ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_i e^{-in\phi} e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} d\phi &= p_{\perp} \int_0^{2\pi} \text{sen } \phi e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} e^{-in\phi} d\phi = p_{\perp} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} -i J'_l(b_{\alpha}) e^{il\phi} e^{-in\phi} d\phi \\ &= -ip_{\perp} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J'_l(b_{\alpha}) \int_0^{2\pi} e^{il\phi} e^{-in\phi} d\phi = -ip_{\perp} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J'_l(b_{\alpha}) 2\pi \delta_{nl} = -2\pi ip_{\perp} J'_n(b_{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para p_z ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_i e^{-in\phi} e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} d\phi &= p_{\parallel} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} e^{ib_{\alpha} \text{sen } \phi} d\phi = p_{\parallel} \int_0^{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(b_{\alpha}) e^{il\phi} e^{-in\phi} d\phi \\ &= p_{\parallel} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(b_{\alpha}) \int_0^{2\pi} e^{il\phi} e^{-in\phi} d\phi = p_{\parallel} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(b_{\alpha}) 2\pi \delta_{nl} = 2\pi p_{\parallel} J_n(b_{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Definição:

$$\vec{\Pi}_n = \frac{p_{\perp}}{\gamma} \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) \hat{\mathbf{e}}_x - i \frac{p_{\perp}}{\gamma} J'_n(b_{\alpha}) \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{p_{\parallel}}{\gamma} J_n(b_{\alpha}) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (4.34)$$

Com as definições (2.14) e (4.34), considerando que o fator 2π pode ser reexpresso como a integral, em aberto, em ϕ e, finalmente, fazendo a substituição $\Omega_{\alpha} \rightarrow \Omega_{\alpha}/\gamma$, onde Ω_{α} passa a

representar a frequência de ciclotron para $\gamma = 1$ ($b_\alpha \rightarrow k_\perp p_\perp / m_\alpha \Omega_\alpha$), obtém-se a expressão para o tensor dielétrico em termos da função distribuição de equilíbrio:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi}{\omega} \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{\Pi_{ni} A_{nj}}{\omega - k_\parallel v_\parallel - n\Omega_\alpha / \gamma} d\vec{p}. \quad (4.35)$$

4.2 Plasma inomogêneo

A expressão (4.35) é válida para um plasma homogêneo ou *localmente homogêneo*. A aproximação de plasma localmente homogêneo é válida quando o comprimento de onda λ das oscilações é pequeno, comparado à escala L das variações espaciais dos parâmetros do plasma ($\lambda \ll L$). Em busca de uma expressão que incorpore efeitos de inomogeneidade, vamos iniciar com algumas considerações de caráter geral.

As soluções de equilíbrio da equação de Vlasov na aproximação linear são funções das constantes de movimento do sistema [56]. Assumindo que o campo magnético de equilíbrio seja fracamente inomogêneo, tal que o comprimento característico da inomogeneidade do campo seja grande comparado ao raio de Larmor da partícula, a posição do *centro-guia*¹ da partícula pode ser considerada uma constante de movimento, bem como seu momentum magnético e sua energia. As constantes de movimento relevantes no caso de um plasma magnetizado, com campo magnético constante na direção z e inomogeneidades na direção x , podem ser tomadas como p_\perp^2 , p_\parallel e \bar{X}_α , onde

$$\bar{X}_\alpha = x + \frac{p_\perp \text{sen } \phi}{m_\alpha \Omega_\alpha}, \quad (4.36)$$

com p_\perp e p_\parallel sendo as componentes do momentum das partículas, respectivamente, perpendicular e paralelo ao campo magnético. \bar{X}_α é a coordenada x da posição do centro-guia, ϕ é o ângulo entre o vetor \vec{p}_\perp e a direção x , m_α é a massa de repouso da partícula. Portanto, a função distribuição de equilíbrio das partículas da espécie α pode ser escrita como

$$F_\alpha = F_\alpha(p_\perp^2, p_\parallel, \bar{X}_\alpha). \quad (4.37)$$

Tal representação é conveniente quando a aproximação de campo magnético homogêneo é utilizada (como caso limite de campo inomogêneo). O desenvolvimento desta função em série de Taylor em torno de x produz

$$F_\alpha = f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel, x) + \frac{p_\perp \text{sen } \phi}{m_\alpha \Omega_\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x} + \dots \quad (4.38)$$

¹Centro-guia é o centro da circunferência definida pela trajetória da partícula em torno das linhas de campo magnético, no plano perpendicular ao campo. O raio desta circunferência é o raio de Larmor.

Quando o tensor dielétrico é calculado na aproximação local, apenas o primeiro termo na expressão (4.38) é retido. Este é um procedimento válido quando a quantidade $|p_{\perp} \sin \phi / m_{\alpha} \Omega_{\alpha}|$ é muito menor que o comprimento L característico das variações espaciais de F_{α} . Em outras palavras, a aproximação local também implica a validade da relação $r_{L\alpha} \ll L$, onde $r_{L\alpha}$ é o raio de Larmor das partículas da espécie α .

Uma extensão da aproximação local que parece bastante adequada é possível através da inclusão, no cálculo das componentes do tensor dielétrico, das derivadas espaciais dos parâmetros que descrevem o plasma em cada ponto, inserindo essas componentes na mesma relação de dispersão utilizada para o tratamento de um plasma homogêneo, relação (2.19) [55, 56].

Esta é uma abordagem que pode ser chamada de convencional, já bastante utilizada na literatura. Essencialmente, ela usa uma função distribuição descrita pelos dois primeiros termos na expansão (4.38), assumindo que as inomogeneidades do plasma, bem como as do campo magnético, sejam fracas. Efeitos das inomogeneidades são retidos até primeira ordem, mas a inomogeneidade ainda é suposta pequena, tal que os termos de ordem mais alta sejam desprezíveis. A substituição de $f_{\alpha 0}$ pelo lado direito de (4.38) nas expressões (4.24)-(4.26) possibilita levar em conta, explicitamente, gradientes do plasma. No presente trabalho, o tensor assim obtido passa a ser representado por $\vec{\epsilon}_M$.

O processo descrito permite considerar inomogeneidades menos suaves que a abordagem localmente homogênea, e leva a expressões bastante gerais para as componentes do tensor dielétrico de um plasma inomogêneo, embora boa parte dos estudos utilizando este método considere o vetor de onda na direção perpendicular à direção das inomogeneidades [17]. Esse ponto é salientado porque, como veremos, essa abordagem convencional pode levar a resultados de interpretação discutível, no caso de direções arbitrárias de propagação. Tais aspectos são reconhecidos e reformulados em Caldela et al. (1989) [17], conforme é exposto, de forma resumida, nos parágrafos que seguem².

Deve-se ressaltar que a expressão para o tensor dielétrico de um meio homogêneo (4.35) foi obtida assumindo propagação no plano $y = 0$ ($k_y = 0$), o que se justifica inicialmente pela existência de simetria azimutal e posteriormente pelo modelo de lâmina auroral utilizado no presente trabalho. No entanto, em Caldela et al. (1989) esta particularização não é feita *a priori*, conforme descrevem as seções 4.2.1 e 4.3.2.

Nesse trabalho, expressões explícitas para as componentes do tensor dielétrico são derivadas através de dois processos distintos: (1) Seguindo o procedimento convencional, que toma em conta os efeitos dos gradientes dos parâmetros do plasma e que produz contribuições não-

²O extenso trabalho algébrico envolvido não será reproduzido aqui; pode ser encontrado na Ref. [16].

ressonantes às partes anti-hermiteanas do tensor. (2) Seguindo uma abordagem diferente (abordagem BGI), que resulta num tensor com propriedades de simetria satisfatórias, onde as partes anti-hermiteanas são constituídas apenas por termos ressonantes.

Essa outra abordagem ao problema é baseada no trabalho de Beskin, Gurevich e Istomin [9] (abordagem BGI). Nesse estudo um procedimento iterativo é aplicado à equação da onda e é mostrado que as propriedades dielétricas do plasma podem ser descritas por uma relação de dispersão que é formalmente a mesma obtida para o caso homogêneo, com um tensor dielétrico efetivo substituindo o tensor de plasma homogêneo. Os autores da Ref. [9] não provêm expressões explícitas para o tensor dielétrico, exceto para algumas aplicações particulares utilizadas como exemplos. Expressões explícitas e gerais são obtidas por Caldela et al. (1989).

As expressões obtidas são válidas para ondas eletromagnéticas de qualquer frequência propagando-se num plasma magnetizado numa direção arbitrária em relação ao campo magnético e às inomogeneidades. As expressões podem, em princípio, ser aplicadas a qualquer distribuição de partículas com simetria azimutal. Os efeitos das inomogeneidades são incluídos até ordem L^{-1} , onde L é o comprimento da escala de variação espacial. As expressões são também completamente relativísticas e nenhuma hipótese é requerida sobre o raio de Larmor, exceto que deve ser pequeno em relação a L .

A obtenção do tensor efetivo segue, inicialmente, o procedimento convencional para derivar o tensor dielétrico tomando em conta os gradientes dos parâmetros do plasma ($\vec{\epsilon}_M$). Este tensor, então, é usado como ponto de partida para a obtenção do tensor dielétrico efetivo, como proposto por BGI. O tensor dielétrico efetivo, $\vec{\epsilon}_{ef}$, pode ser obtido com o uso da seguinte regra:

$$\vec{\epsilon}_{ef} = \vec{\epsilon}_M + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}_M}{\partial k_l \partial r_l}, \quad (4.39)$$

onde contribuições de ordem L^{-1} foram retidas e os índices repetidos indicam soma. No caso de inomogeneidades apenas na direção x , somente o termo com $r_l = x$ e $k_l = k_x$ permanece.

O processo que leva a esta regra pode ser sumarizado como segue. Uma relação linear não-local entre a densidade de corrente e o campo elétrico é assumida, sendo dependente de um tensor condutividade com variação espacial. O campo elétrico da onda é considerado como tendo um máximo próximo a um certo valor para o vetor de onda e o tensor condutividade é expandido numa série de Taylor em torno deste valor. Um procedimento iterativo é, então, aplicado à equação da onda, com a inclusão progressiva de um número maior de termos da expansão mencionada para descrever a corrente. Em cada passo da iteração, um argumento de conservação de energia é empregado e uma expressão para o vetor de Poynting é obtida, com

o papel do tensor dielétrico desempenhado por um ente que, sucessivas iterações mostram, obedece a uma regra que é, simplesmente, uma generalização da relação (4.39), incluindo termos de ordem mais alta em L^{-1} . Também é mostrado que este tensor dielétrico efetivo é a transformada de Fourier do tensor dielétrico simetrizado que relaciona \vec{D} e \vec{E}

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \overleftrightarrow{\varepsilon}_{ef}((\vec{r} + \vec{r}')/2, \vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') \quad (4.40)$$

e é o tensor que deve ser inserido na relação de dispersão (2.19) a fim de descrever corretamente a amplificação e absorção de ondas eletromagnéticas em plasmas.

No caso de propagação perpendicular às inomogeneidades do plasma (com campo magnético homogêneo na direção x), o tensor dielétrico efetivo se reduz a $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$, mas no caso de uma direção arbitrária em relação às inomogeneidades, a correção adicionada a fim de construir o tensor efetivo cancela exatamente parte do tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$, com conseqüências muito importantes.

O tensor efetivo exibe a simetria $\varepsilon_{ij}^h(-\vec{B}_0) = \varepsilon_{ji}^h(\vec{B}_0)$ e $\varepsilon_{ij}^{nh}(-\vec{B}_0) = -\varepsilon_{ji}^{nh}(\vec{B}_0)$, onde ε_{ij}^h e ε_{ij}^{nh} são, respectivamente, as partes homogêneas e não-homogêneas do tensor efetivo. O tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$ não exibe esta simetria.

Uma conseqüência importante da simetria é que as partes anti-hermiteanas de $\overleftrightarrow{\varepsilon}_{ef}$ são constituídas somente por termos ressonantes, enquanto que para $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$ aparecem contribuições não-ressonantes para as partes anti-hermiteanas.

A absorção ou instabilidade não-ressonante que provém da relação de dispersão quando as propriedades dielétricas são descritas por $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$ constitui um aspecto desafiador, devido à dificuldade de encontrar um mecanismo físico consistente capaz de explicá-lo. É importante ressaltar que o tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$ não é a transformada de Fourier do tensor dielétrico, como seria no caso de um meio homogêneo. Portanto, se $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$ é tomado como o tensor dielétrico na relação de dispersão, uma hipótese de homogeneidade está implícita, a qual é inconsistente com a manutenção dos efeitos de inomogeneidade em $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$.

O problema é solucionado com o uso de $\overleftrightarrow{\varepsilon}_{ef}$, contruído de maneira a distinguir troca real de energia entre ondas e partículas das variações da amplitude da onda produzidas pelas variações na velocidade de grupo da onda, relacionadas às contribuições não-ressonantes do tensor $\overleftrightarrow{\varepsilon}_M$ [9].

O tensor dielétrico efetivo dado por (4.39) é proposto como o tensor a ser usado na relação de dispersão a fim de descrever corretamente os efeitos das inomogeneidades espaciais nos parâmetros do plasma, até ordem L^{-1} .

4.2.1 O tensor dielétrico efetivo para um plasma inhomogêneo

Conforme o procedimento BGI, a propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas inhomogêneos pode ser tratada utilizando-se o mesmo procedimento formal utilizado para um plasma homogêneo, mas inserindo um tensor dielétrico efetivo na relação de dispersão.

Considera-se, então, um plasma fracamente inhomogêneo, com inhomogeneidades ao longo da direção x , imerso num campo magnético homogêneo (na direção x) orientado ao longo da direção z , $\vec{B} = B_0 \mathbf{e}_3$. Assumem-se ondas propagantes numa direção arbitrária relativa ao campo magnético ambiente e às inhomogeneidades, com vetor de onda

$$\vec{k} = k_{\perp} \cos \psi \mathbf{e}_1 + k_{\perp} \sin \psi \mathbf{e}_2 + k_{\parallel} \mathbf{e}_3, \quad (4.41)$$

onde os índices (1, 2, 3) são usados como equivalentes a (x, y, z) .

O procedimento inicia com o cálculo do tensor $\vec{\varepsilon}_M$, o qual corresponde ao tensor dielétrico usual para um meio homogêneo, obtido com a aproximação de ondas planas, mas que inclui termos relativos aos gradientes da função distribuição. O tensor dielétrico efetivo é, então, obtido pela aplicação da regra (4.39). As componentes do tensor assim obtidas podem ser expressas numa forma concisa, como traz Ziebell e Schneider (2004) [83] (no que segue, faz-se a identificação $\vec{\varepsilon}_{ef} \equiv \vec{\varepsilon}$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \delta_{ij} + \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha n}} \varphi_0(f_{\alpha}) \pi_i^* \pi_j \\ & - \delta_{iz} \delta_{jz} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 p \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}) \\ & + \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3 p p_{\perp}^2 \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha n}} \left[\frac{k_{\perp} \sin \psi}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha} \omega} f'_{\alpha} \pi_i^* \pi_j + \varphi_0(f'_{\alpha}) (\Phi_i^* \pi_j)^H \right] \\ & + (\delta_{iy} \delta_{jz} + \delta_{jy} \delta_{iz}) \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \int d^3 p p_{\perp} \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} f'_{\alpha}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde f'_{α} representa a derivada em relação a x da função distribuição de equilíbrio. Estas expressões para as componentes do tensor dielétrico efetivo são exatamente equivalentes às obtidas em Caldeia et al. (1989). Deve-se enfatizar que, na relação (4.42), a quantidade $\gamma_{\alpha} = (1 + p^2/(m_{\alpha}^2 c^2))^{1/2}$ não é a mesma que γ_{α} presente na relação (4.54).

Nessas expressões foram introduzidas as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \left(1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha} \omega}\right) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} p_{\perp}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha} \omega} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}; \\ \mathcal{L} &= p_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} - p_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}; \\ D_{\alpha n} &= \omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} - \frac{n \Omega_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}}; \\ X_{\alpha} &= \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}, \text{ onde } \omega_{p\alpha} = \left(\frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Também foram introduzidas as seguintes definições:

$$\vec{\pi}_{n\alpha} = \left(\frac{n J_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \cos \psi - i J'_n(b_{\alpha}) \sin \psi\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{n J_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \sin \psi + i J'_n(b_{\alpha}) \cos \psi\right) \mathbf{e}_2 + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n(b_{\alpha}) \mathbf{e}_3; \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_{n\alpha} &= \left\{ \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n(b_{\alpha}) - \frac{J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \sin(2\psi) - i \left[\frac{n}{b_{\alpha}^2} J_n(b_{\alpha}) - \frac{n J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \cos(2\psi) \right\} \mathbf{e}_1 \\ &+ \left\{ \frac{J_n}{2} - \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n(b_{\alpha}) - \frac{J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \cos(2\psi) - i \left[\frac{n}{b_{\alpha}^2} J_n(b_{\alpha}) - \frac{n J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \sin(2\psi) \right\} \mathbf{e}_2 \\ &+ \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[\frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) \sin \psi + i J'_n(b_{\alpha}) \cos \psi \right] \mathbf{e}_3, \quad (4.44)\end{aligned}$$

onde $b_{\alpha} = k_{\perp} p_{\perp} / (m_{\alpha} \Omega_{\alpha})$ e onde J'_n representa a derivada da função de Bessel relativa ao seu argumento.

4.3 Adaptações

Algumas adaptações são feitas para aplicação ao estudo da AKR, conforme segue.

4.3.1 Relação de dispersão

Para a descrição da região auroral, uma lâmina bidimensional é utilizada. O eixo z aponta no sentido ascendente em relação a Terra, ao longo do campo magnético. O eixo x pode ser orientado tanto ao longo da direção latitudinal do campo magnético, como ao longo da direção longitudinal, uma vez que apenas a variação radial do campo magnético é tomada em conta. A lâmina é considerada homogênea na direção y . A relação de dispersão pode ser escrita como

$$\Lambda(\vec{k}, \omega, x, z) = AN_{\perp}^4 + BN_{\perp}^2 + C = 0, \quad (4.45)$$

onde

$$\begin{aligned}
 A &= (1 + \chi_{11})(1 - \chi_{33}) + \chi_{13}(2N_{\parallel} + \chi_{13}) + \chi_{33}N_{\parallel}^2, \\
 B &= (\chi_{11} + 1 - N_{\parallel}^2)[\chi_{23}^2 - 1 - e_{zz} + \chi_{33}(\chi_{22} + 1 - N_{\parallel}^2)] \\
 &\quad - (\chi_{22} + 1 - N_{\parallel}^2)[1 + \chi_{11} + \chi_{13}(2N_{\parallel} + \chi_{13})] - \chi_{12}^2(1 - \chi_{13}) + 2\chi_{12}\chi_{23}(N_{\parallel} + \chi_{13}), \\
 C &= (1 + e_{zz})[(\chi_{11} + 1 - N_{\parallel}^2)(\chi_{22} + 1 - N_{\parallel}^2) + \chi_{12}^2].
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

N_{\perp} e N_{\parallel} são, respectivamente, as componentes perpendicular e paralela de $\vec{N} = c\vec{k}/\omega$, onde \vec{k} é o vetor de onda. As componentes χ_{ij} presentes na relação (4.45) são definidas como parte do tensor dielétrico, tais que

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{iz}\delta_{jz}e_{zz} + N_{\perp}^{\delta_{iz}+\delta_{jz}}\chi_{ij}. \tag{4.47}$$

Obtém-se uma solução formal para N_{\perp}^2 análoga a (2.33). A solução efetiva é obtida através de iterações numéricas, permitindo que N_{\perp} seja um número complexo.

Valores iniciais de N_{\parallel} e N_{\perp} são fornecidos pelo avanço temporal determinado através das equações de traçado de raios (2.121) e (2.122), de modo que a relação de dispersão é avaliada em cada ponto da trajetória do raio, produzindo a taxa de amplificação local, N_i (estritamente, $2\omega N_i/c$), definida pela parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração N_{\perp} .

Com esta construção o produto $\text{Im}[\vec{k}(\vec{r}')] \cdot d\vec{r}'$ na relação (2.97) se reduz a $\text{Im}[k_x(\vec{r}')]dx'$, quando se considera propagação no plano $y = 0$ e campo magnético ambiente ao longo da direção z .

4.3.2 Propagação no plano xz

Consideram-se ondas propagando-se com a componente perpendicular do vetor de onda ao longo da direção das inhomogeneidades. Isto é, considera-se o caso $\psi = 0$. Portanto, de (4.42) e (4.47),

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \delta_{iz}\delta_{jz}e_{zz} + N_{\perp}^{\delta_{iz}+\delta_{jz}}\chi_{ij} = \delta_{ij} + \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3p p_{\perp} \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha n}} \varphi_0(f_{\alpha}) \pi_i^* \pi_j \\
 &\quad - \delta_{iz}\delta_{jz} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3p \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}) \\
 &\quad + \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3p p_{\perp}^2 \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha n}} \varphi_0(f'_{\alpha}) (\Phi_i^* \pi_j)^H
 \end{aligned}$$

$$+(\delta_{iy}\delta_{jz} + \delta_{jy}\delta_{iz}) \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \int d^3p p_{\perp} \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} f'_{\alpha}, \quad (4.48)$$

onde as seguintes definições foram usadas:

$$\vec{\pi}_{n\alpha} = \frac{nJ_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \mathbf{e}_1 + i J'_n(b_{\alpha}) \mathbf{e}_2 + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n(b_{\alpha}) \mathbf{e}_3; \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{n\alpha} &= i \left[-\frac{n}{b_{\alpha}^2} J_n(b_{\alpha}) + \frac{nJ'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \mathbf{e}_1 \\ &+ \left[\left(-\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} + 1 \right) J_n(b_{\alpha}) + \frac{J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \mathbf{e}_2 + i \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J'_n(b_{\alpha}) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.50)$$

No cálculo das quantidades (4.48), são necessárias as seguintes combinações das funções de Bessel:

$$J_n^2, \quad J_n'^2, \quad J_n J_n',$$

as quais são dadas pelas relações (A.47) do Apêndice A. Deve-se notar que as quantidades em (A.47) dependem de $|n|$ e não de n . No entanto, n aparece em outros lugares nas definições de $\vec{\pi}_i$ e $\vec{\Phi}_i$, bem como no denominador ressonante. É possível escrever $n = s|n|$ e, assim, as componentes do tensor dielétrico serão expressas como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \delta_{iz}\delta_{jz}e_{zz} + N_{\perp}^{\delta_{iz}+\delta_{jz}} \chi_{ij} = \delta_{ij} + \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3p p_{\perp} \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha sn}} \varphi_0(f_{\alpha}) (\pi_i^* \pi_j)_{sn} \\ &+ \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3p p_{\perp} \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha 0}} \varphi_0(f_{\alpha}) (\pi_i^* \pi_j)_{n=0} - \delta_{iz}\delta_{jz} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3p \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}) \\ &+ \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3p p_{\perp}^2 \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha sn}} \varphi_0(f'_{\alpha}) (\Phi_i^* \pi_j)_{sn}^H \\ &+ \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \int d^3p p_{\perp}^2 \frac{1}{\gamma_{\alpha} D_{\alpha 0}} \varphi_0(f'_{\alpha}) (\Phi_i^* \pi_j)_{n=0}^H + (\delta_{iy}\delta_{jz} + \delta_{jy}\delta_{iz}) \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \int d^3p p_{\perp} \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} f'_{\alpha}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde foi escrito n em vez de $|n|$, por simplicidade, uma vez que $n \geq 1$. É desnecessário escrever $|n|$ porque aqui n é positivo e o sinal s aparece explicitamente.

4.3.3 Troca de variáveis

Define-se o momentum normalizado,

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}c}; \quad (4.52)$$

$$\int d^3p f(p) = \int d^3u f(u).$$

Esta normalização é diferente para diferentes espécies de partículas (íons e elétrons). Portanto, deve-se cuidar ao comparar as distribuições eletrônica e iônica. Entretanto, \vec{u} é apenas uma variável de integração e seu uso não afetará as expressões para as componentes χ_{ij} . Note-se, porém, que utilizando a variável \vec{u} , a quantidade γ_α pode ser escrita simplesmente como γ , como usado na função distribuição dada por (4.54). As conseqüências desta troca de variáveis são:

$$\begin{aligned}
 p_\perp \varphi_0 &= p_\perp \left[\left(1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \gamma_\alpha \omega} \right) \frac{\partial}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel p_\perp}{m_\alpha \gamma_\alpha \omega} \frac{\partial}{\partial p_\parallel} \right] \Rightarrow u_\perp \left[\left(1 - \frac{N_\parallel u_\parallel}{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial u_\perp} + \frac{N_\parallel u_\perp}{\gamma} \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \right] \\
 &= \frac{u_\perp}{\gamma} \left[(\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{\partial}{\partial u_\perp} + N_\parallel u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \right] \equiv u_\perp L, \\
 \mathcal{L} &= p_\parallel \frac{\partial}{\partial p_\perp} - p_\perp \frac{\partial}{\partial p_\parallel} \Rightarrow u_\parallel \frac{\partial}{\partial u_\perp} - u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\parallel}, \\
 D_{\alpha sn} &= \omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \gamma_\alpha} - \frac{sn \Omega_\alpha}{\gamma_\alpha} \Rightarrow \frac{\omega}{\gamma} (\gamma - N_\parallel u_\parallel - sn s_\alpha Y_\alpha) = \frac{\omega}{\gamma} \mathcal{D}_{\alpha sn}, \\
 b_\alpha &= \frac{k_\perp p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} \Rightarrow \frac{N_\perp u_\perp}{s_\alpha Y_\alpha},
 \end{aligned}$$

onde foi introduzido, além do operador L ,

$$\vec{N} = \frac{c \vec{k}}{\omega}, \quad Y_\alpha = \frac{|\Omega_\alpha|}{\omega}, \quad s_\alpha = \text{sign}(\Omega_\alpha).$$

Usando estas variáveis na relação (4.51), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \delta_{iz} \delta_{jz} e_{zz} + N_\perp^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} \chi_{ij} &= \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_\perp \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f_\alpha) (\pi_i^* \pi_j)_{sn} \\
 &+ \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \int d^3 u u_\perp \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f_\alpha) (\pi_i^* \pi_j)_{n=0} - \delta_{iz} \delta_{jz} \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_\parallel}{u_\perp} \mathcal{L}(f_\alpha) \\
 &+ \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \frac{c}{\Omega_\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_\perp^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f'_\alpha) (\Phi_i^* \pi_j)^H \\
 &+ \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \frac{c}{\Omega_\alpha} \int d^3 u u_\perp^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f'_\alpha) (\Phi_i^* \pi_j)_{n=0}^H + (\delta_{iy} \delta_{jz} + \delta_{jy} \delta_{iz}) \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \frac{c}{\Omega_\alpha} \int d^3 u u_\perp \frac{1}{\gamma} \frac{u_\parallel}{u_\perp} f'_\alpha,
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

onde

$$\mathcal{D}_{\alpha sn} = (\gamma - N_\parallel u_\parallel - sn s_\alpha Y_\alpha).$$

Deve-se notar que γ_α foi convertido em γ , uma vez que é diferente de γ_α na relação (4.54).

4.3.4 Função-modelo

Utiliza-se uma função distribuição baseada na mesma função-modelo considerada em Cavalcanti et al. (1996), modificada para o caso de um meio inhomogêneo. Inicialmente justifica-se o uso dessa função-modelo, como segue.

A distribuição eletrônica na região-fonte da AKR, tipicamente, se caracteriza pela forma de C-invertido. Essa distribuição exibe um aspecto de cone-de-perda na região ascendente, uma vez que elétrons com velocidade paralela suficientemente alta não são refletidos pelo campo magnético convergente. Entretanto, para ondas que se afastam da Terra com frequência maior que a frequência de ciclotron eletrônica, a curva ressonante se localiza inteiramente na região ascendente da distribuição, como pode ser depreendido da relação (3.35). Neste caso, o aspecto cone-de-perda presente na distribuição de C-invertido constitui a fonte de energia livre a ser considerada na geração da AKR. Em adição, as medidas do satélite FAST revelam, por vezes, gradientes íngremes no cone-de-perda [25], o que pode responder por uma amplificação significativa da AKR.

Outro aspecto importante a ser considerado é a velocidade de deriva dos elétrons magnetosféricos, v_d . Tomando em conta essas considerações, uma função representando um cone-de-perda bidirecional com deriva é utilizada como modelo para a distribuição dos elétrons magnetosféricos. A função distribuição total é escrita como a soma de duas populações, um cone-de-perda energético mais uma Maxwelliana de baixa temperatura que representa os elétrons ionosféricos frios:

$$n_{Te}f_0(\vec{u}) = n_{Me}f_{LC}(\vec{u}) + (n_{Te} - n_{Me})f_M(\vec{u}),$$

onde n_{Me} é a densidade dos elétrons magnetosféricos, n_{Te} é a densidade eletrônica total, sendo $f_{LC}(\vec{u})$ e $f_M(\vec{u})$ dadas pelas seguintes funções distribuições [81]:

$$f_\alpha(\vec{u}) = A_\alpha u_\perp^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel)}, \quad (4.54)$$

com $A_\alpha = \mu_\alpha^{l_\alpha+1} / (4\pi 2^{l_\alpha} l_\alpha! \gamma_\alpha K_{l_\alpha+2}(\mu_\alpha))$, $\mu_\alpha = m_e c^2 / T_\alpha$, $\gamma = (1 + u^2)^{1/2}$, $\beta_\alpha = v_\alpha / c$, onde v_α é a velocidade de deriva das espécies identificadas por α , $\gamma_\alpha = (1 - \beta_\alpha^2)^{-1/2}$, e l_α é um inteiro positivo, conhecido como índice de cone-de-perda. Para $\alpha = LC$, $l_{LC} \geq 1$ e para $\alpha = M$, $l_M = 0$. Uma vez que $\beta_M = 0$, no que segue, denota-se β_{LC} como β_d e γ_{LC} como γ_d .

4.3.5 Normalização

Basicamente, deve-se modificar a normalização da função distribuição, que passa a ser dada por

$$n_{Te}(x, s) = \int d^3v f_0(\vec{u}, \vec{x}, s), \quad n_{Te}(x, s) = n_{LC}(s) + n_M(x),$$

onde

$$n_{LC}(s) = \int d^3v f_{LC}(\vec{u}, \vec{x}, s), \quad n_{LC}(s) = n_{Me}(s),$$

$$n_M(x) = \int d^3v f_M(\vec{u}, \vec{x}).$$

$f_{LC}(\vec{u})$ e $f_M(\vec{u})$ podem ser escritas como (explicitando a dependência frente às variáveis):

$$f_\alpha(\vec{u}, x) = n_\alpha(x) A_\alpha(x) u_\perp^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha(x) \mu_\alpha(x) [\gamma - \beta_\alpha(x) u_\parallel]}, \quad (4.55)$$

onde

$$A_\alpha(x) = \frac{\mu_\alpha^{l_\alpha+1}(x)}{4\pi 2^{l_\alpha} l_\alpha! \gamma_\alpha(x) K_{l_\alpha+2}(\mu_\alpha(x))},$$

$$\mu_\alpha(x) = \frac{m_e c^2}{T_\alpha(x)},$$

$$\gamma = (1 + u^2)^{1/2},$$

$$\beta_\alpha = \frac{v_\alpha(x)}{c}, \quad \gamma_\alpha(x) = (1 - \beta_\alpha^2(x))^{-1/2}.$$

4.4 Expressões finais para o tensor dielétrico

As expressões obtidas para o tensor dielétrico efetivo, tomando em conta a relação (4.47) e as demais considerações anteriores, são elencadas a seguir. Pormenores envolvidos nos cálculos são mostrados no Apêndice A.

$$\chi_{xx} = \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y_\alpha} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m n^2 a(|n|, m - |n|) J(n, m, 0; f_\alpha); \quad (4.56)$$

$$\chi_{xy} = -i \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y_\alpha} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m n m a(|n|, m - |n|) J(n, m, 0; f_\alpha)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \frac{1}{N_\perp} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y_\alpha} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m \quad (4.57)$$

$$\times \left[\left(\frac{N_\perp}{Y_\alpha} \right)^2 n a(|n|, m - |n|) J(n, m + 1, 0; (c/\omega) f'_\alpha) - n [n^2 a(|n|, m - |n|) - b(|n|, m - |n|)] \right.$$

$$\left. \times J(n, m, 0; (c/\omega) f'_\alpha) \right];$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{yx} = & i \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m n m a(|n|, m - |n|) J(n, m, 0; f_{\alpha}) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m \\
 & \times \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 n a(|n|, m - |n|) J(n, m + 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) - n [n^2 a(|n|, m - |n|) - b(|n|, m - |n|)] \right. \\
 & \left. \times J(n, m, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right]; \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{xz} = & \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m n a(|n|, m - |n|) J(n, m, 1; f_{\alpha}) \\
 & + \frac{i}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m n a(|n|, m - |n|) J(n, m, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}); \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{zx} = & \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m n a(|n|, m - |n|) J(n, m, 1; f_{\alpha}) \\
 & - \frac{i}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m n a(|n|, m - |n|) J(n, m, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}); \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

$$\chi_{yy} = \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m b(|n|, m - |n|) J(n, m, 0; f_{\alpha}); \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{yz} = & i \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|) (m) J(n, m, 1; f_{\alpha}) \\
 & - \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(|n|, m - |n|) J(n, m + 1, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right. \\
 & \left. + [a(|n|, m - |n|) (m - n^2) + b(|n|, m - |n|)] J(n, m, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & - \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} a(0, 0) J(0, 1, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) + \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha}; \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{zy} = & -i \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|)(m) J(n, m, 1; f_{\alpha}) \\
& - \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(|n|, m - |n|) J(n, m + 1, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right. \\
& \quad \left. + [a(|n|, m - |n|)(m - n^2) + b(|n|, m - |n|)] J(n, m, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
& - \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} a(0, 0) J(0, 1, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) + \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha}; \quad (4.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{zz} = & \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}^2} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|) J(n, m, 2; f_{\alpha}) \\
& + \frac{1}{N_{\perp}^2} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} a(0, 0) J(0, 0, 2; f_{\alpha}). \quad (4.64)
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Resultados e conclusões

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos através de processamento computacional. São avaliados os comportamentos de algumas quantidades de interesse frente à variação de parâmetros físicos. Avalia-se a taxa de amplificação, definida pela parte imaginária da componente perpendicular do índice de refração N_{\perp} , e representada por \underline{Ni} ; o fator de amplificação g , representado por \underline{g} ; a trajetória do raio no plano xz , e a influência discriminada de cada tipo de inhomogeneidade (densidade, temperatura e velocidade de deriva) na taxa de amplificação.

O processo para a obtenção dos resultados numéricos segue de acordo com o que foi indicado na seção 4.3.1 e envolve o cálculo dos coeficientes A , B e C das expressões (4.46). Conforme (4.47), isto envolve a determinação do tensor dielétrico, que, por sua vez, requer o conhecimento da função distribuição f_{α} , de acordo com (4.51), por exemplo. Para tanto, é necessário o conhecimento das quantidades embutidas na função distribuição, quais sejam, a densidade n_{α} , a temperatura T_{α} e a velocidade de deriva v_{α} , seguindo a expressão (4.55). A esta altura se apresenta o modelo autoconsistente baseado no trabalho de Chiu e Schulz (1978) e exposto na seção 3.2. Esse modelo provê de forma paramétrica a dependência ao longo das linhas de campo geomagnético das quantidades recém citadas, uma vez que a dependência na direção perpendicular é dada através da prescrição de perfis, representados pelas relações (3.19)-(3.21).

O fator de amplificação g é obtido com a relação (2.97), sendo o avanço temporal dado pelas relações (2.121) e (2.122), que também determinam a trajetória do raio à medida que este se propaga.

Os parâmetros físicos presentes nos cálculos algébricos e cuja influência na amplificação da radiação pretende-se avaliar, sendo que alguns constam nas expressões (3.19)-(3.22), são: a largura da cavidade, L_1 , representada por \underline{lar} (medida em km); a componente paralela inicial do índice de refração, N_{\parallel} , representada por \underline{npari} ; a largura das subcavidades, L_2 ,

representada por lar2 (medida em km); a frequência da onda normalizada à frequência de ciclotron eletrônica, $\omega/|\Omega_e|$, representada por ombar; a magnitude das subinogeneidades, b , representada por b; a altitude inicial do raio, representada por z0 (medida em raios terrestres, R_T); a variação entre a densidade no centro e na borda da cavidade, Δ , representada por delta. Deve-se lembrar que os parâmetros lar (L_1) e lar2 (L_2) também se referem aos perfis de temperatura e velocidade de deriva. A importância da altitude inicial z_0 está no fato de que ela determina o valor inicial da frequência de ciclotron, ficando evidente apenas na implementação computacional.

O comportamento da taxa de amplificação e do fator de amplificação são avaliados conjuntamente, uma vez que este corresponde ao resultado líquido daquela, ao longo da trajetória do raio. Os gráficos apresentados são comparativos, representando o comportamento das grandezas analisadas, obtidas através da abordagem localmente homogênea (LH) e da abordagem BGI (NH). Os valores considerados para os parâmetros estão indicados sobre os respectivos gráficos, onde estes são contados intuitivamente da esquerda para a direita, de cima para baixo.

Com exceção do parâmetro indicado em cada gráfico, os valores utilizados são os seguintes: $\text{ombar}=1,008$; $\text{npari}=0,16690$; $\text{lar}=500$; $\text{lar2}=50$; $\text{b}=0,5$; $\text{delta}=10$ e $\text{z0}=2,5$. Outros valores utilizados são: $V_l=8\text{keV}$, $N_{M-}=0,8 \text{ el/cm}^3$, $T_{\parallel-}=4\text{keV}$ e $T_{\perp-}=6\text{keV}$. Estes são alguns dos vários valores de contorno requeridos pelo modelo baseado no trabalho de Chiu e Schulz (1978) apresentado na seção 3.2 e que produziram amplificação significativa nos trabalhos de Gaelzer (1991) e Cavalcanti (2001). Com isto, é possível analisar os resultados.

Na figura 5.1 os gráficos mostram uma região de amplificação inicial ($N_i < 0$). Nos três primeiros casos, tanto a abordagem LH como a NH apresentam uma evolução assintótica para $N_i = 0$. No entanto, o caso NH experimenta uma pequena absorção ($N_i > 0$), além de exibir uma tendência oscilante. No quarto gráfico a amplificação máxima é menor que nos gráficos (1) e (2), e tanto o caso LH como o NH experimentam pequena absorção. Nos gráficos (5)-(8), o caso NH produz amplificação final menor que o caso LH.

Dos gráficos (5)-(8) da figura 5.1 nota-se que o valor máximo alcançado para o fator de amplificação é obtido com $\text{ombar}=1,008$. O decréscimo do valor final de g para frequências que apresentam maior diferença em relação à frequência de ciclotron eletrônica é fisicamente consistente por corresponder a um menor acoplamento onda-partícula (ver figura 3.14).

Nos gráficos (1) e (2) da figura 5.2, após amplificação inicial, o raio experimenta absorção significativa, enquanto que os parâmetros dos gráficos (3) e (4) não produzem absorção relevante. O resultado integrado das regiões de absorção e amplificação, representado por g ,

indica que para valores de n_{pari} pequenos, como no gráfico (5), pode ocorrer amplificação final negativa (absorção). O fator de amplificação mostra-se crescente para valores crescentes de n_{pari} . Estes resultados estão em acordo com outros estudos que indicam a necessidade de uma componente paralela significativa do vetor de onda para alcançar valores expressivos de amplificação quando apenas o aspecto cone-de-perda da distribuição de partículas é considerado [65, 77]. Nos gráficos (5)-(8), o caso NH produz amplificação final menor que o caso LH.

Nos gráficos (1)-(4) da figura 5.3 a principal característica está no aparecimento de oscilações para os valores de N_i do caso NH em relação ao caso LH. Os valores de N_i para o caso NH excursionam acima e abaixo dos respectivos valores do caso LH. As mesmas características são apresentadas quando o parâmetro delta é variado, como pode-se verificar na figura 5.4. Deve-se ressaltar que as oscilações surgem pela abordagem BGI (NH), uma vez que as subinogeneidades também são tomadas em conta na abordagem localmente homogênea (LH).

Embora uma menor densidade possa corresponder a uma maior amplificação (ver figura 3.14), valores crescentes do parâmetro delta não produzem alteração significativa no fator de amplificação. Isto pode ser atribuído ao fato de que os valores das componentes paralela e perpendicular do vetor de onda também são influenciados pelo valor da densidade e determinam, por sua vez, a taxa de amplificação.

O valor do parâmetro z_0 deve ser mantido abaixo de ≈ 3 (raios terrestres) a fim de que a aproximação de campo magnético dipolar tenha validade, já que o campo geomagnético torna-se desviado de uma configuração dipolar para altitudes crescentes.

Os gráficos (1)-(4) da figura 5.5 mostram que a região de absorção é decrescente para valores crescentes do parâmetro l_{ar} . Isto se traduz em amplificação final crescente para valores crescentes do parâmetro em questão, sendo que no gráfico (5) a amplificação final é fortemente negativa.

Estes resultados são consistentes com o fato de que, mantida a razão entre as densidades no centro e na borda, as cavidades de menor largura apresentam gradientes mais íngremes, de maneira que o raio excursiona, em média, por regiões de maior densidade quando comparado a cavidades mais largas. Novamente nota-se a tendência do caso NH produzir valores menores para a amplificação do que o caso LH.

São apresentados na figura 5.6 os resultados obtidos da variação do parâmetro l_{ar2} . Verifica-se a tendência da abordagem NH introduzir oscilações nos valores de N_i , além de produzir menor amplificação final quando comparada à abordagem LH.

A conclusão mais relevante em relação aos resultados obtidos nos gráficos da figura 5.6 está

na constatação de que a largura da cavidade exerce maior influência sobre a amplificação final do que a largura das subcavidades (lembrando que os parâmetros lar e $lar2$ também definem os perfis de temperatura e velocidade de deriva).

Na figura 5.7 nota-se que valores decrescentes do parâmetro b introduzem oscilações tanto na taxa de amplificação como no fator de amplificação; tanto na abordagem LH como NH. Também deve-se notar que o perfil puramente gaussiano ($b=1$), que corresponde a ausência de subinogeneidades, produz fator de amplificação final $g < 20$, enquanto que para $b < 1$, que corresponde a presença de subinogeneidades, $g > 20$. O aumento da amplificação devido à inclusão de subinogeneidades é um resultado também obtido em Cavalcanti et al. (1996).

Na figura 5.8 são mostradas trajetórias do raio para diferentes valores da componente paralela inicial do índice de refração, n_{pari} . O comportamento do raio pode ser descrito como segue. No gráfico (1), o raio inicia com propagação quase-perpendicular, de modo que as inogeneidades na direção perpendicular são "percebidas" de maneira intensa pelo raio. Aparentemente, ao encontrar um incremento nas inogeneidades, o raio é refratado significativamente para a direção paralela, passando a "perceber" as inogeneidades de forma muito mais amena. Para valores de n_{pari} crescentes o ponto de refração significativa é antecipado até que a propagação quase-perpendicular inicial não mais se apresenta.

Trajетórias do raio também foram determinadas para $n_{pari}=0,16690$ e variação dos demais parâmetros como nos gráficos para o fator de amplificação e taxa de amplificação, já apresentados. Os resultados obtidos são qualitativamente análogos ao gráfico (4) da figura 5.8 não sendo, portanto, imprescindível sua apresentação. O resultado mais relevante é que em todos os casos a trajetória determinada pela abordagem LH é indistinguível da abordagem NH, ao menos frente à escala utilizada nas figuras.

Outro aspecto investigado diz respeito à contribuição específica de cada tipo de inogeneidade na formulação NH. Este estudo foi realizado variando as quantidades adimensionais $\epsilon_n, \epsilon_v, \epsilon_T$ (relações (A.26)), identificadas por drv , que representa a magnitude relativa dos gradientes, *em um determinado ponto espacial*, verificando a respectiva variação da taxa de amplificação para um intervalo de N_{pari} (n_{pari}) e diferentes parâmetros considerados em cada situação, conforme indicado nos gráficos da figura 5.8. Os valores utilizados são os mesmos já citados, com exceção do parâmetro b , que é tomado como $b=0,1$. Em cada gráfico estão superpostos os resultados obtidos tomando $\epsilon_n \neq 0, \epsilon_v = \epsilon_T = 0$; $\epsilon_n = \epsilon_v = 0, \epsilon_T \neq 0$ e $\epsilon_v \neq 0, \epsilon_T = \epsilon_n = 0$. A abordagem LH corresponde aos pontos com $drv=0$.

Desses gráficos pode-se concluir que, frente à abordagem BGI, a inogeneidade de temperatura tem maior influência na taxa de amplificação do que as inogeneidades de densidade

e de velocidade de deriva. As contribuições das inomogeneidades de densidade e de velocidade de deriva são indistinguíveis na escala da figura.

É possível também concluir que a consideração de ϵ_n e ϵ_v não-nulos e ϵ_T nulo, essencialmente, não altera a taxa de amplificação em relação àquela obtida na ausência de inomogeneidades explícitas. De modo equivalente: a consideração dos três tipos de inomogeneidades explícitas produz, essencialmente, o mesmo resultado que a consideração exclusiva da inomogeneidade explícita de temperatura.

É importante notar a insistência, para todos os valores utilizados dos parâmetros, da abordagem NH produzir amplificação final menor que a abordagem LH. Quantitativamente, a diferença no valor do parâmetro g , do caso NH para o caso LH, é de 1 (um), aproximadamente. Conforme seção 2.8, isto representa uma diminuição na intensidade final da radiação por um fator 3 (três), aproximadamente.

Estes resultados podem ter implicação no que diz respeito à capacidade do maser de elétron-cíclotron em responder pelas emissões mais intensas de AKR. O presente trabalho toma em conta apenas uma parcela da distribuição eletrônica: o aspecto de cone-de-perda. No entanto, o estudo de Pritchett et al. (1999), exposto na seção 3.2, é feito com a totalidade da distribuição eletrônica medida pelo satélite FAST, alcançando valores por volta de 500mV/m para a intensidade do campo elétrico. Este valor, obtido com uma situação otimizada, pode ser comparado com os valores mais elevados medidos pelo FAST para a intensidade do campo elétrico da AKR: por volta de 300mV/m, na saturação do equipamento de medida.

A abordagem BGI conceitualmente representa um tratamento mais acurado que a abordagem localmente homogênea. Portanto, persistindo a diferença deletéria, ~ 3 , obtida para o cone-de-perda, quando tomada em conta a totalidade da distribuição eletrônica, é concebível que um estudo de traçado de raios capaz de alcançar 500mV/m de intensidade, não seria capaz de responder pelos níveis mais altos de emissão, quando inomogeneidades explícitas fossem incluídas. A verificação dessa possibilidade deve constituir um trabalho futuro.

De certa maneira, estes resultados vão ao encontro do entendimento mais recente sobre a AKR, apresentados na seção 3.3; no sentido em que se atribui uma importância secundária à forma "macroscópica" da distribuição eletrônica, o que fica evidente ao considerar que os gradientes mais íngremes na distribuição são produzidos pelas vacâncias eletrônicas.

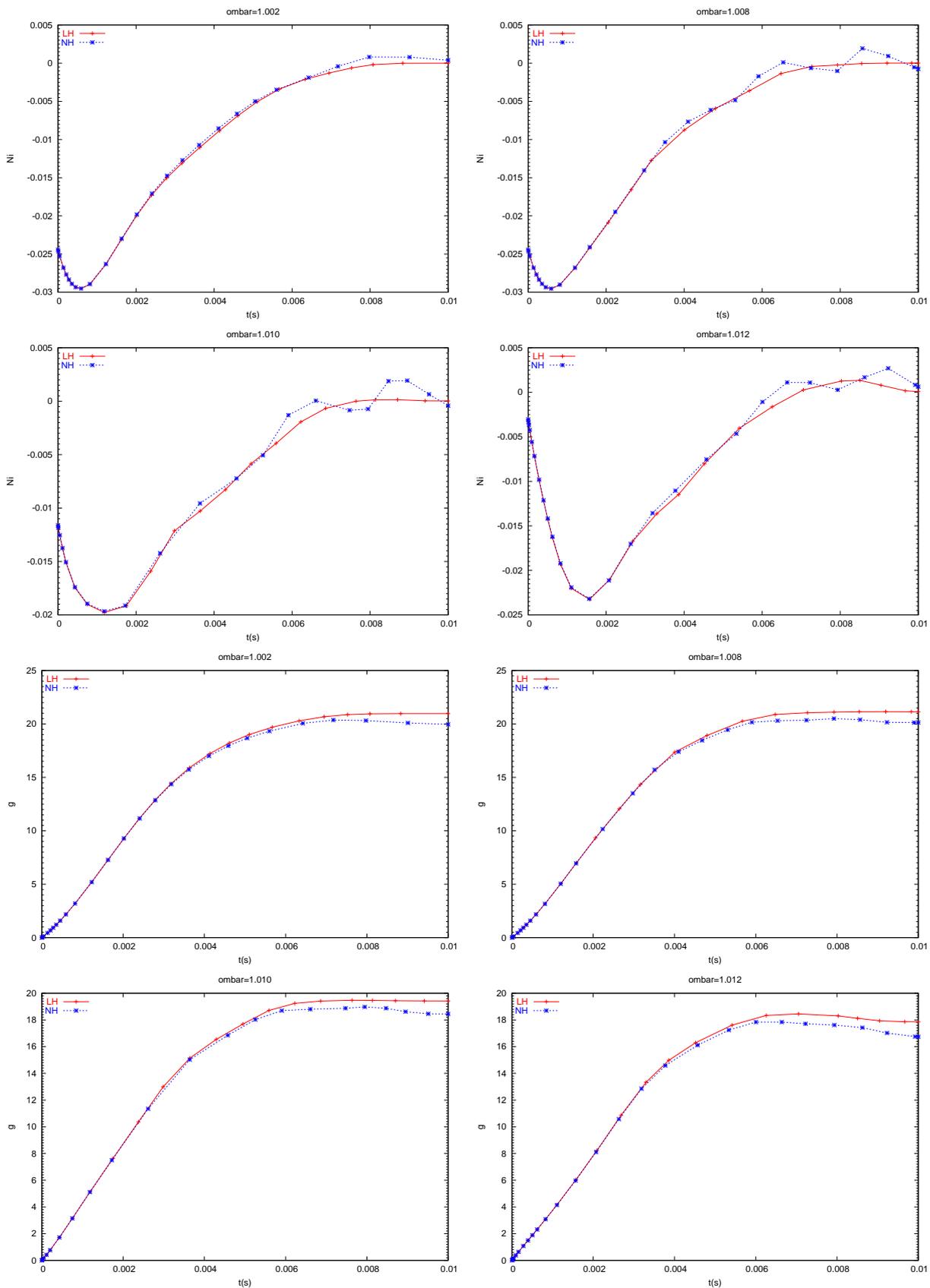


Figura 5.1: Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a frequência de oscilação (normalizada à frequência de ciclotron eletrônica), ombar . Valores utilizados: $\text{ombar}=1,008$; $\text{npari}=0,16690$; $\text{lar}=500\text{km}$; $\text{lar2}=50\text{km}$; $b=0,5$; $\text{delta}=10$ e $\text{z0}=2,5R_T$. Também para $\text{ombar}=1,002$; $\text{ombar}=1,010$ e $\text{ombar}=1,012$.

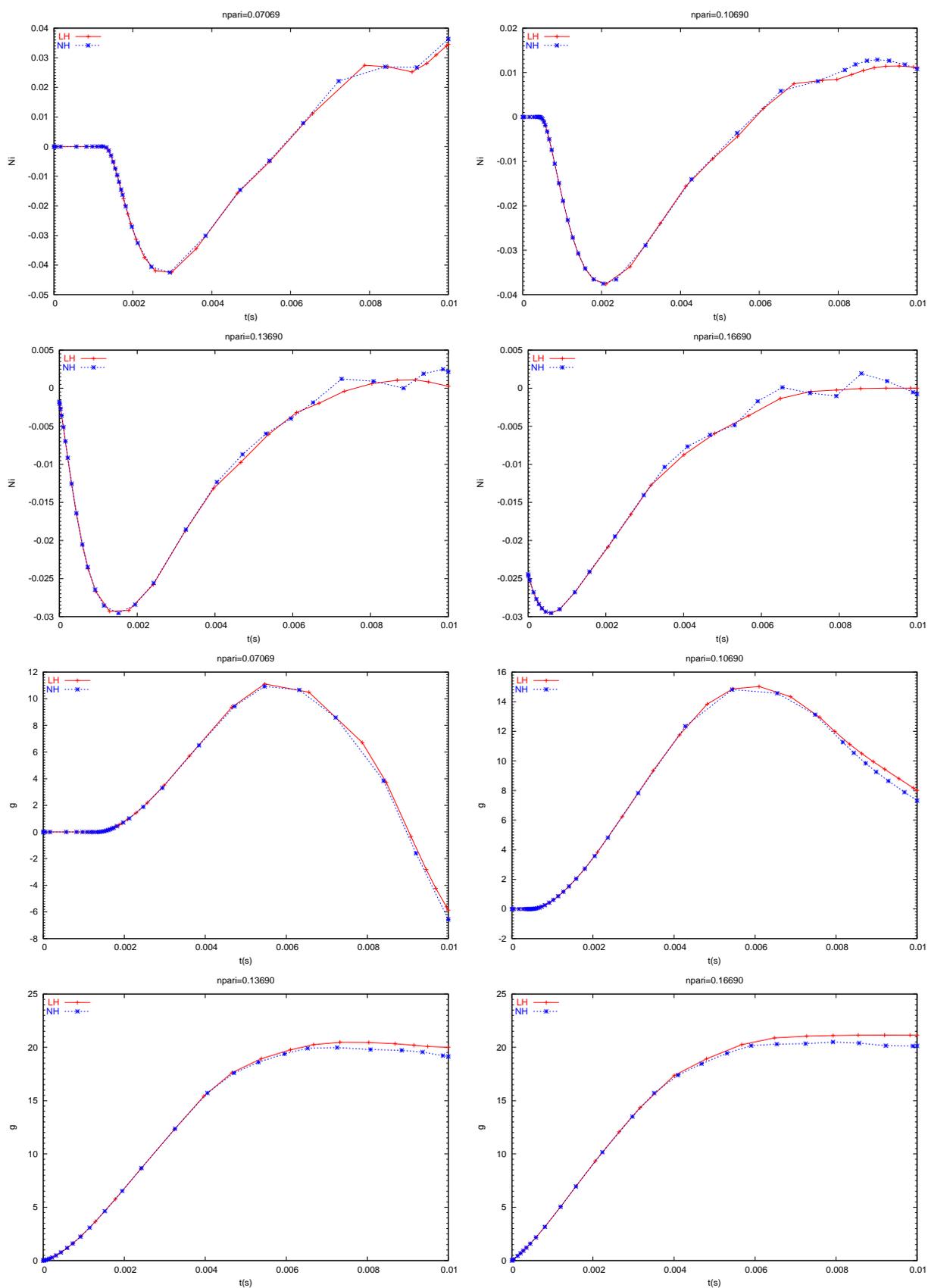


Figura 5.2: Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a componente paralela inicial do índice de refração, n_{pari} . Para $n_{pari}=0,07069$; $n_{pari}=0,10690$; $n_{pari}=0,13690$ e $n_{pari}=0,16690$. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.

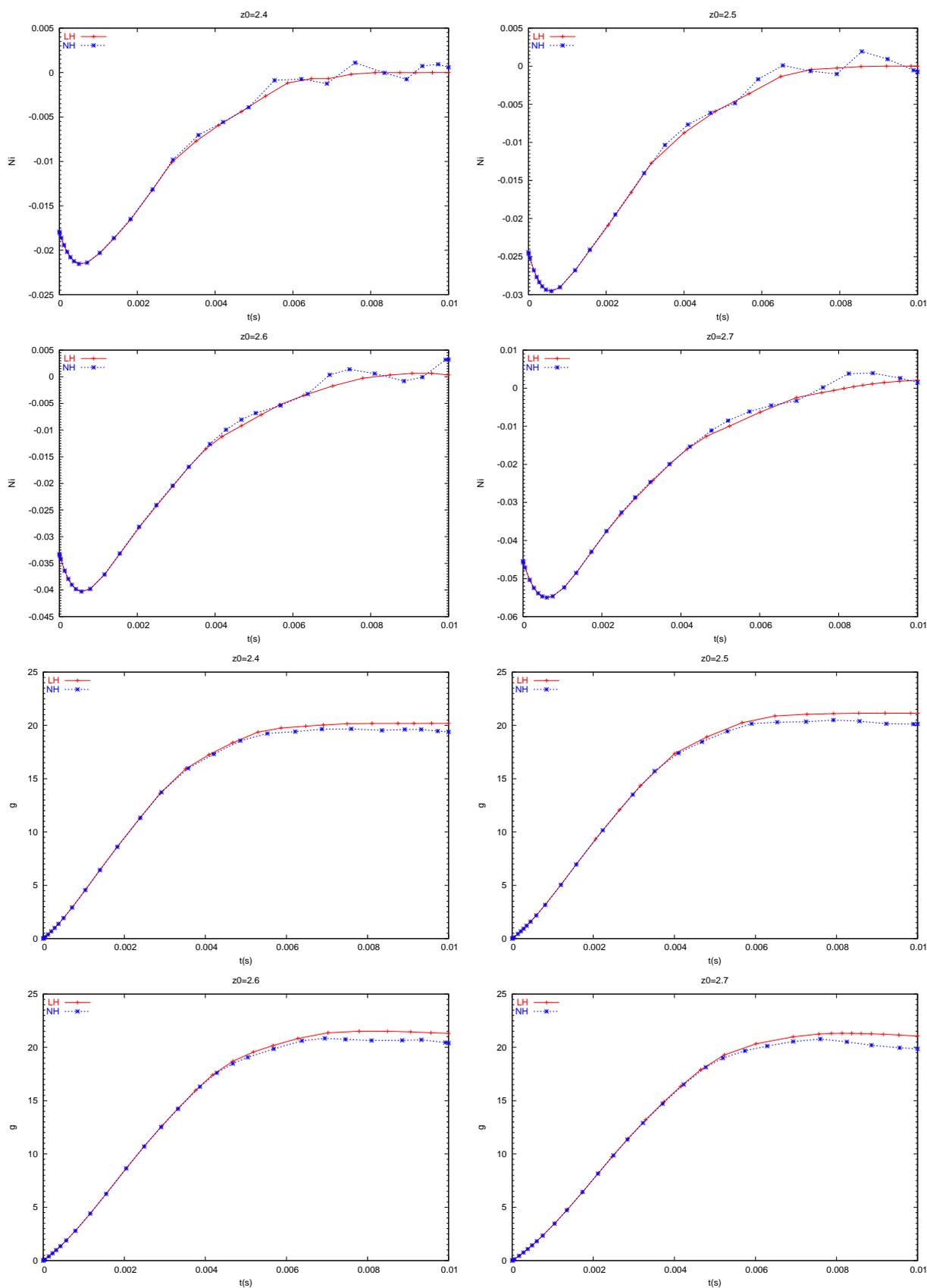


Figura 5.3: Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a altitude inicial do raio, z_0 . Para $z_0=2,4R_T$; $z_0=2,5R_T$; $z_0=2,6R_T$ e $z_0=2,7R_T$. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.

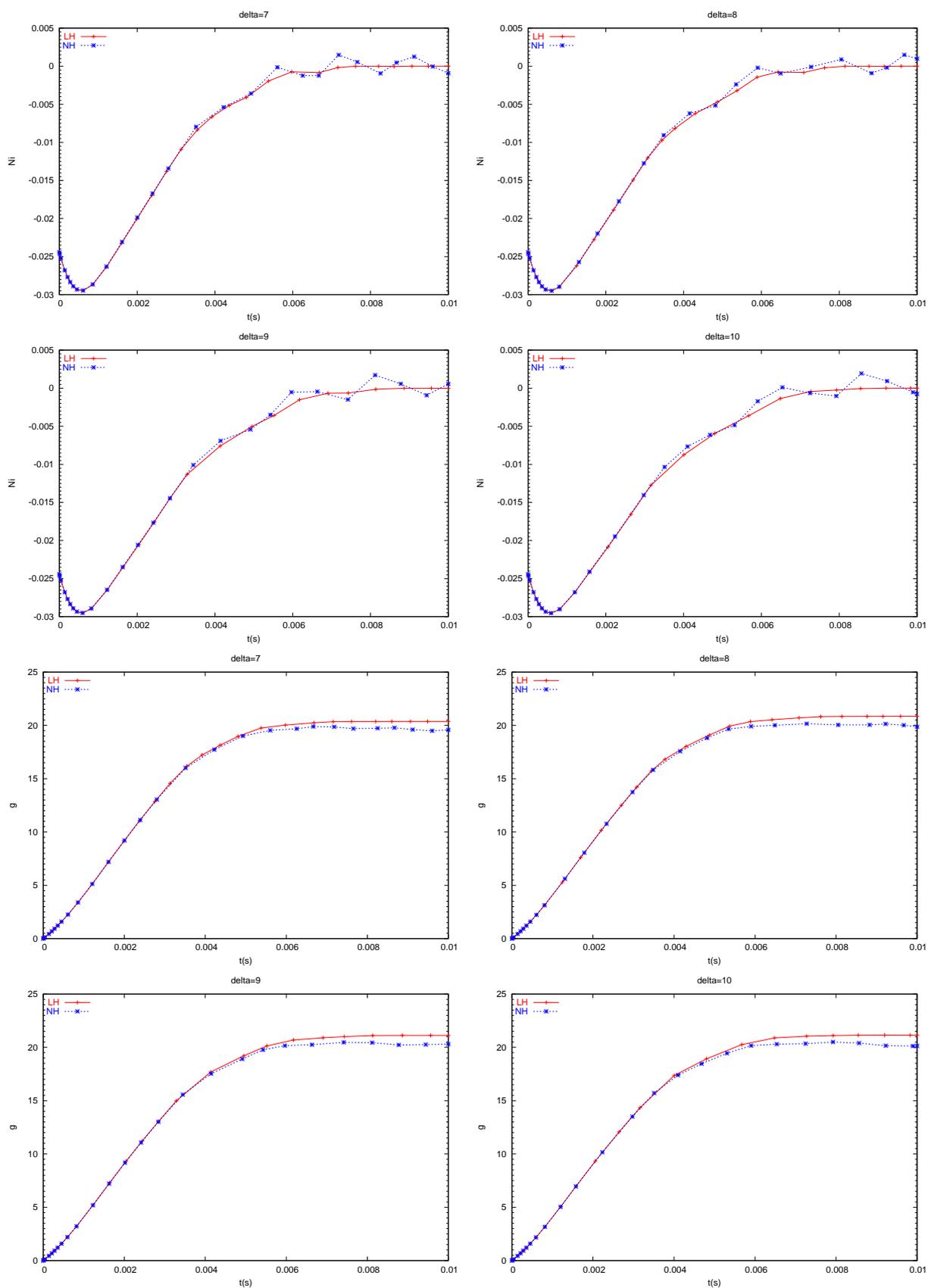


Figura 5.4: Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a variação de densidade entre o centro e a borda da cavidade, δ . Para $\delta=7$; $\delta=8$; $\delta=9$ e $\delta=10$. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.

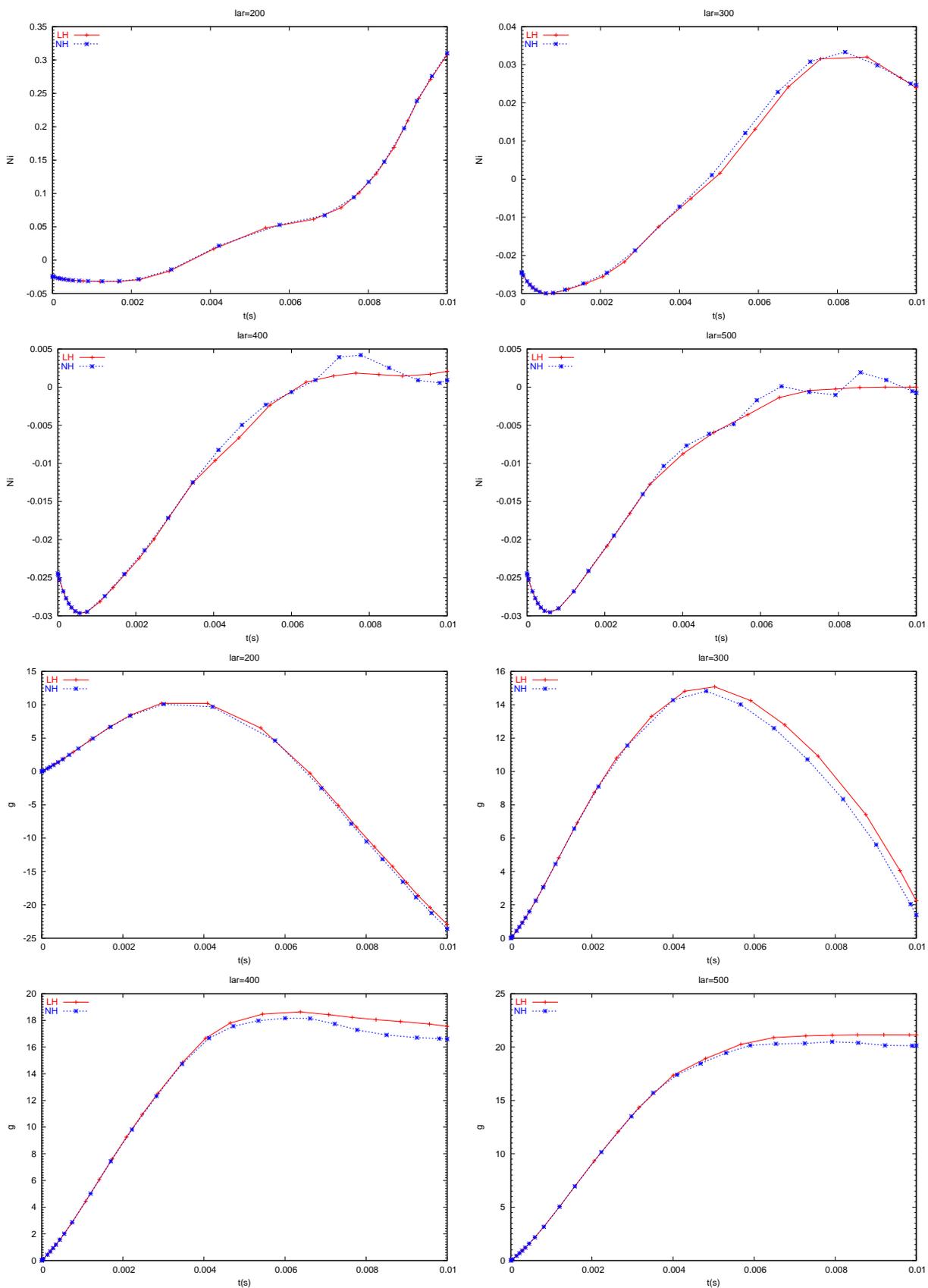


Figura 5.5: Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a largura da cavidade, lar . Para $lar=200\text{km}$; $lar=300\text{km}$; $lar=400\text{km}$ e $lar=500\text{km}$. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.

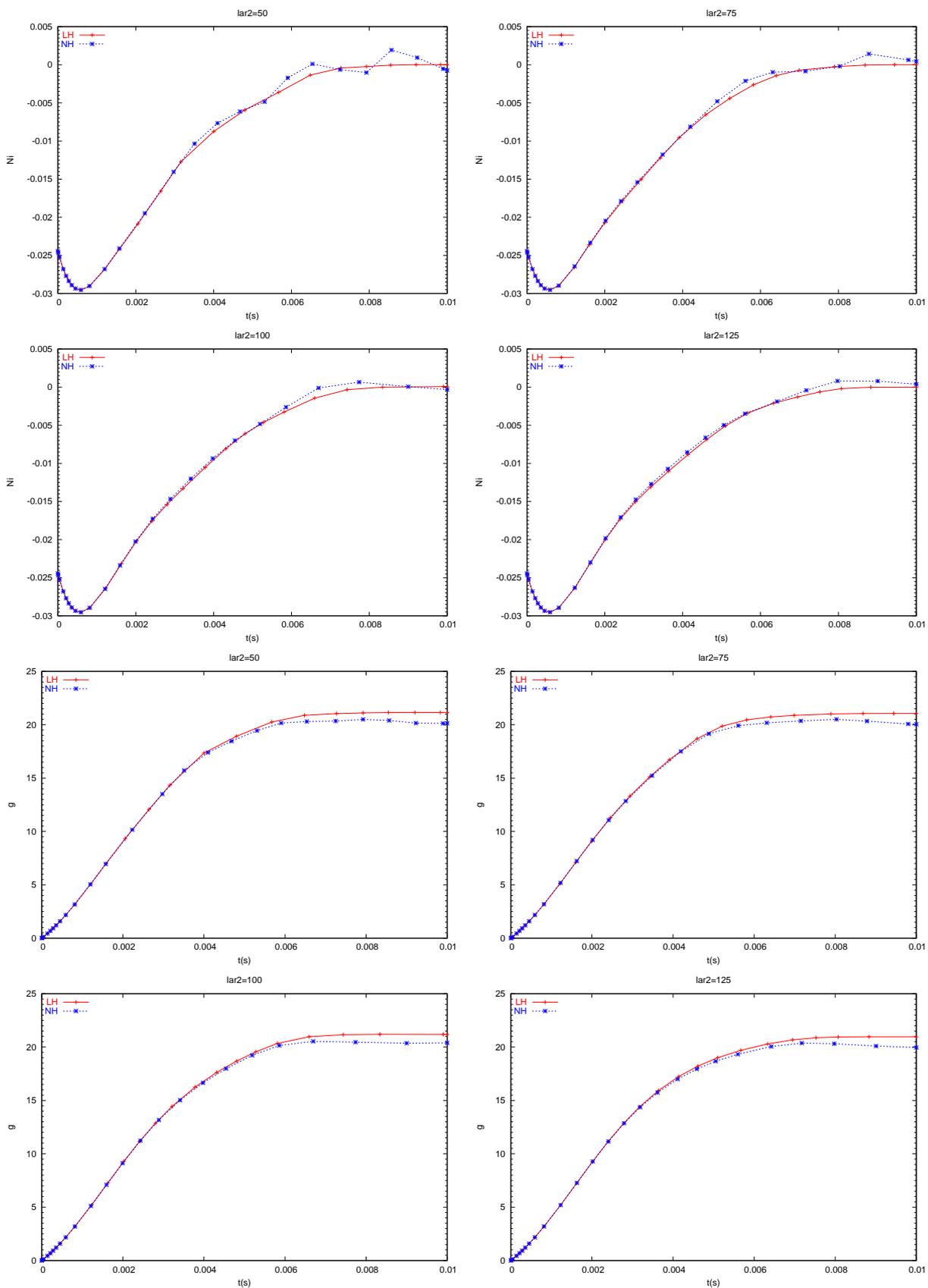


Figura 5.6: Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a largura das subcavidades, lar_2 . Para $lar_2=50\text{km}$; $lar_2=75\text{km}$; $lar_2=100\text{km}$ e $lar_2=125\text{km}$. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.

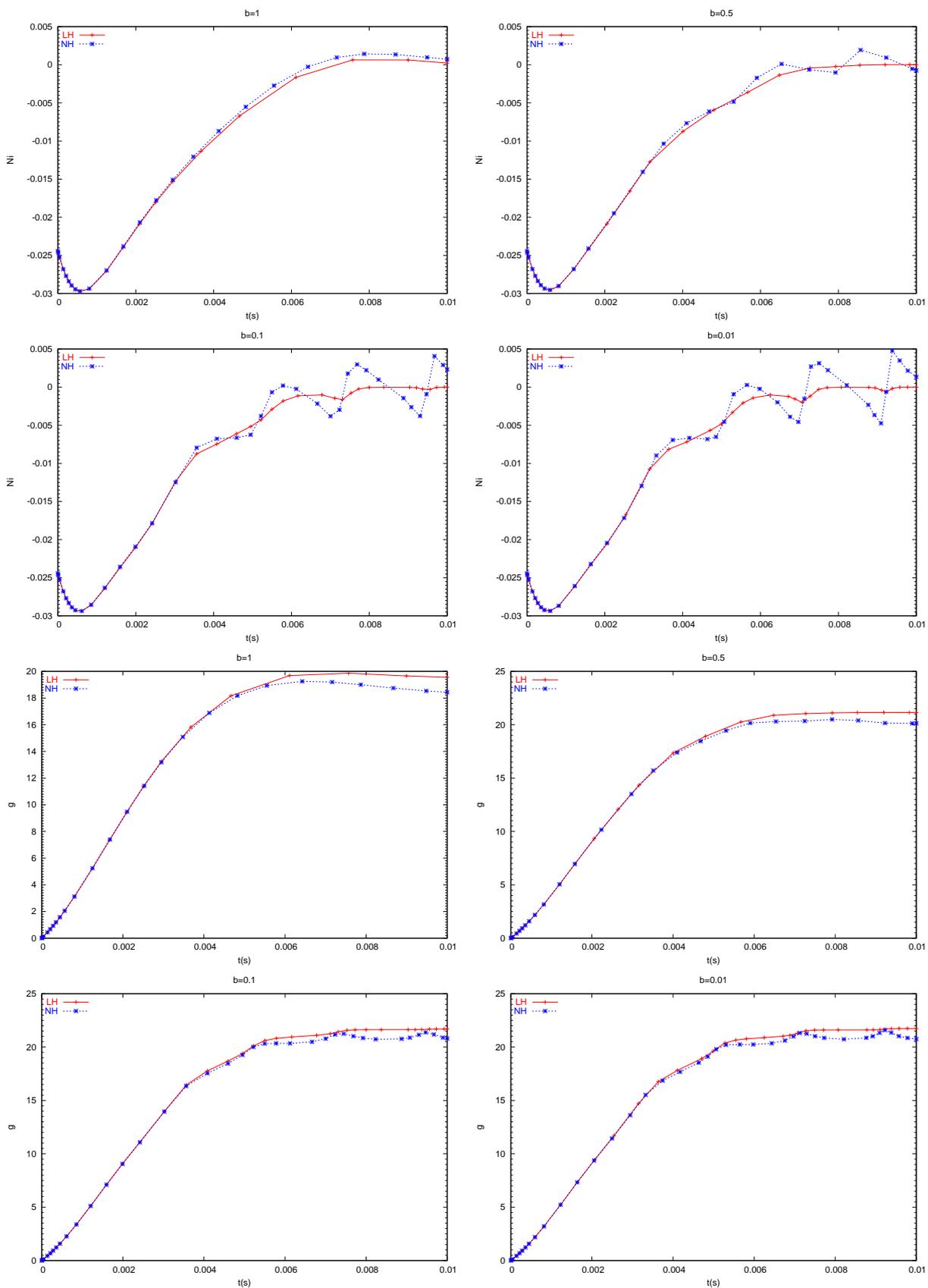


Figura 5.7: Dependência da taxa de amplificação e do fator de amplificação com a magnitude das subinogeneidades, b . Para $b=1$; $b=0,5$; $b=0,1$ e $b=0,01$. Demais parâmetros como na Fig. 5.1.

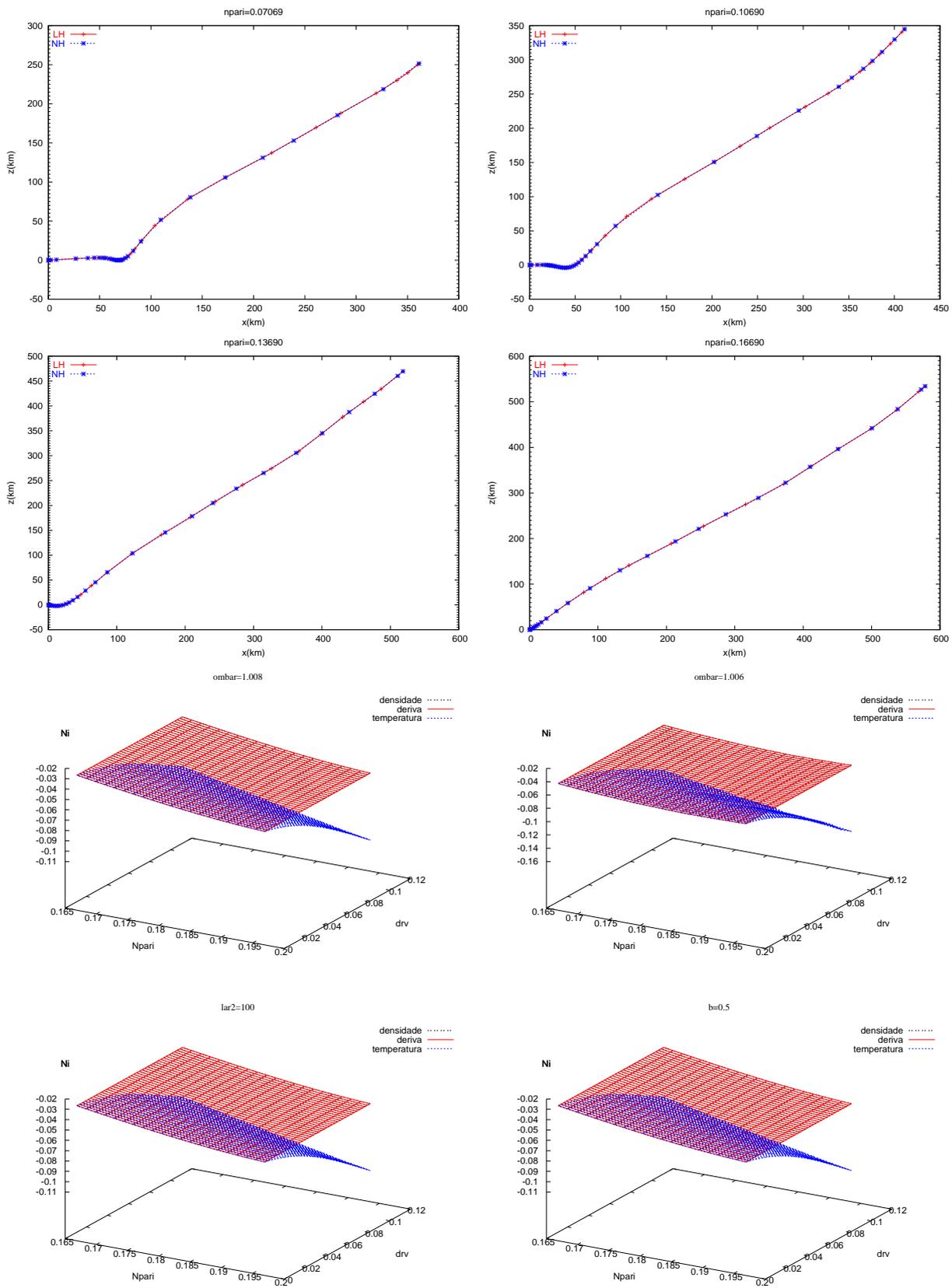


Figura 5.8: Acima: Dependência da trajetória do raio com a componente paralela inicial do índice de refração, n_{pari} . Abaixo: Dependência da contribuição específica de cada tipo de inhomogeneidade, densidade, temperatura e velocidade de deriva, com diferentes parâmetros ($b=0,1$). Demais parâmetros como na Fig. 5.1 .

Apêndice A

Avaliação das componentes do tensor dielétrico

Neste apêndice são apresentados os passos necessários para a obtenção das expressões para o tensor dielétrico. São desenvolvidos os cálculos pertinentes às componentes yz e zz . A determinação das demais componentes segue processo análogo.

A.1 Avaliação de χ_{yz}

Da Eq. (4.53),

$$\begin{aligned}
 N_{\perp}\chi_{yz} &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f_{\alpha}) (\pi_y^* \pi_z)_{sn} \\
 &\quad + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f_{\alpha}) (\pi_y^* \pi_z)_{n=0} \\
 &\quad + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3u u_{\perp}^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f'_{\alpha}) (\Phi_y^* \pi_z)_{sn}^H \\
 &\quad + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp}^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f'_{\alpha}) (\Phi_y^* \pi_z)_{n=0}^H + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Para n inteiro (positivo ou negativo),

$$\begin{aligned}
 (\pi_y^* \pi_z)_n &= (-iJ'_n) \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n = -i \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n J'_n = -i \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) b_{\alpha}^{2(|n|+m)-1}, \\
 (\pi_y^* \pi_z)_n &= -is_{\alpha} u_{\parallel} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(|n|+m)-1} a(n, m) (|n| + m) u_{\perp}^{2(|n|+m-1)}; \\
 (\Phi_y^* \pi_z)_n &= \left[\left(-\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} + 1 \right) J_n + \frac{J'_n}{b_{\alpha}} \right] \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n = \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[\left(-\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} + 1 \right) J_n^2 + \frac{J_n J'_n}{b_{\alpha}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[\left(-\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} + 1 \right) \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) b_{\alpha}^{2(|n|+m)} + \frac{1}{b_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) b_{\alpha}^{2(|n|+m)-1} \right] \\
 &= \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[(b_{\alpha}^2 - n^2) \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) b_{\alpha}^{2(|n|+m-1)} + \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) b_{\alpha}^{2(|n|+m-1)} \right] \\
 &= \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(|n|+m-1)} \left[\left(\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 u_{\perp}^2 - n^2 \right) a(n, m) + a(n, m) (|n| + m) \right] u_{\perp}^{2(|n|+m-1)}.
 \end{aligned}$$

Para avaliação da parte Hermiteana,

$$\begin{aligned}
 [\Phi_y^* \pi_z]_{sn}^H &= \frac{1}{2} [\Phi_y^* \pi_z + \Phi_z \pi_y^*]_{sn} = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[\left(-\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} + 1 \right) J_n^2 + \frac{J_n J_n'}{b_{\alpha}} \right] + i \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_n' (-i J_n') \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[\left(-\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} + 1 \right) J_n^2 + \frac{J_n J_n'}{b_{\alpha}} + J_n'^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[\left(-\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} + 1 \right) \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) b_{\alpha}^{2(|n|+m)} + \frac{1}{b_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) b_{\alpha}^{2(|n|+m)-1} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} b(n, m) b_{\alpha}^{2(|n|+m-1)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[(b_{\alpha}^2 - n^2) \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) b_{\alpha}^{2(|n|+m-1)} + \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) b_{\alpha}^{2(|n|+m-1)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} b(n, m) b_{\alpha}^{2(|n|+m-1)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{\alpha}^{2(|n|+m-1)} [(b_{\alpha}^2 - n^2) a(n, m) + a(n, m) (|n| + m) + b(n, m)] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(|n|+m-1)} \left[\left(\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 u_{\perp}^2 - n^2 \right) a(n, m) \right. \\
 &\quad \left. + a(n, m) (|n| + m) + b(n, m) \right] u_{\perp}^{2(|n|+m-1)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 N_{\perp} \chi_{yz} &= -i \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f_{\alpha}) s_{\alpha} u_{\parallel} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m)-1} a(n, m) (n+m) u_{\perp}^{2(n+m-1)} \\
 &\quad - i \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f_{\alpha}) s_{\alpha} u_{\parallel} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m)-1} a(0, m) (m) u_{\perp}^{2(m-1)} \\
 &\quad + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_{\perp}^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f'_{\alpha}) \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m-1)} \\
 &\quad \times \left[\left(\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 u_{\perp}^2 - n^2 \right) a(n, m) + a(n, m) (n + m) + b(n, m) \right] u_{\perp}^{2(n+m-1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp}^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f'_{\alpha}) \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \\
 & \times \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 u_{\perp}^2 a(0, m) + a(0, m)(m) + b(0, m) \right] u_{\perp}^{2(m-1)} \\
 & \quad + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha},
 \end{aligned}$$

onde não é mais necessário utilizar $|n|$.

$$\begin{aligned}
 N_{\perp} \chi_{yz} & = -i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m)-1} a(n, m)(n+m) \sum_{s=\pm} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f_{\alpha}) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(n+m-1)} \\
 & - i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m)-1} a(0, m)(m) \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f_{\alpha}) u_{\parallel} u_{\perp}^{2(m-1)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m-1)} \sum_{s=\pm} \int d^3u u_{\perp} u_{\parallel} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f'_{\alpha}) \\
 & \times \left[\left(\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 u_{\perp}^2 - n^2 \right) a(n, m) + a(n, m)(n+m) + b(n, m) \right] u_{\perp}^{2(n+m-1)} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f'_{\alpha}) u_{\parallel} \\
 & \times \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 u_{\perp}^2 a(0, m) + a(0, m)(m) + b(0, m) \right] u_{\perp}^{2(m-1)} \\
 & \quad + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\perp}\chi_{yz} = & -i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m)-1} a(n, m)(n+m) \sum_{s=\pm} I(n, m, 1, s; f_{\alpha}) \\
 & -i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m)-1} a(0, m)(m) I(0, m, 1, 0; f_{\alpha}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m-1)} \\
 & \times \sum_{s=\pm} \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(n, m) I(n, m+1, 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}), + [a(n, m)(n+m-n^2) \right. \\
 & \left. + b(n, m)] I(n, m, 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \\
 & \times \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(0, m) I(0, m+1, 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) + [a(0, m)(m) + b(0, m)] I(0, m, 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha}, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

onde foi definido

$$I(n, m, h, s; g_{\alpha}) \equiv \int d^3 u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(n+m-1)} u_{\perp} L(g_{\alpha})}{\gamma - s n s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}}. \tag{A.2}$$

A.2 Avaliação de χ_{zz}

Da Eq. (4.53),

$$\begin{aligned}
 e_{zz} + N_{\perp}^2 \chi_{zz} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha s n}} L(f_{\alpha}) (\pi_z^* \pi_z)_{s n} \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f_{\alpha}) (\pi_z^* \pi_z)_{n=0} - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}) \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_{\perp}^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha s n}} L(f'_{\alpha}) (\Phi_z^* \pi_z)_{s n}^H \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3 u u_{\perp}^2 \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f'_{\alpha}) (\Phi_z^* \pi_z)_{n=0}^H.
 \end{aligned}$$

Para n inteiro (positivo ou negativo),

$$(\pi_z^* \pi_z)_n = \frac{p_{\parallel}^2}{p_{\perp}^2} J_n^2 = \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} J_n^2 = \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) b_{\alpha}^{2(|n|+m)},$$

$$(\pi_z^* \pi_z)_n = \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(|n|+m)} a(n, m) u_{\perp}^{2(|n|+m)};$$

$$\begin{aligned}
 (\Phi_z^* \pi_z)_n &= -i \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J'_n \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} J_n = -i \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} J_n J'_n \\
 &= -i \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) b_{\alpha}^{2(|n|+m)-1} \\
 &= -i \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(|n|+m-1)} a(n, m) (|n| + m) u_{\perp}^{2(|n|+m)-1}.
 \end{aligned}$$

Para avaliação da parte Hermiteana,

$$[\Phi_z^* \pi_z]_{sn}^H = \frac{1}{2} [\Phi_z^* \pi_z + \Phi_z \pi_z^*]_{sn} = -i \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} J_n J'_n + i \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} J_n J'_n = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 e_{zz} + N_{\perp}^2 \chi_{zz} &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f_{\alpha}) \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m)} a(n, m) u_{\perp}^{2(n+m)} \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f_{\alpha}) \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m)} a(0, m) u_{\perp}^{2(m)} - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}),
 \end{aligned}$$

onde não é mais necessário utilizar $|n|$.

$$\begin{aligned}
 e_{zz} + N_{\perp}^2 \chi_{zz} &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m)} a(n, m) \sum_{s=\pm} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha sn}} L(f_{\alpha}) u_{\parallel}^2 u_{\perp}^{2(n+m-1)} \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m)} a(0, m) \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\mathcal{D}_{\alpha 0}} L(f_{\alpha}) u_{\parallel}^2 u_{\perp}^{2(m-1)} - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{zz} + N_{\perp}^2 \chi_{zz} &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m)} a(n, m) \sum_{s=\pm} I(n, m, 2, s; f_{\alpha}) \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m)} a(0, m) I(0, m, 2, 0; f_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}), \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

onde identifica-se e_{zz} como

$$e_{zz} = - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}).$$

A.3 Propagação no plano xz : troca do índice de soma

Vamos introduzir pequenas modificações na avaliação das componentes do tensor dielétrico.

A.3.1 Avaliação de χ_{yz}

Vamos prosseguir da Eq. (A.1),

$$\begin{aligned}
 N_{\perp}\chi_{yz} = & -i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m)-1} a(n, m)(n+m) \sum_{s=\pm} I(n, m, 1, s; f_{\alpha}) \\
 & -i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m)-1} a(0, m)(m) I(0, m, 1, 0; f_{\alpha}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(n+m-1)} \\
 & \times \sum_{s=\pm} \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(n, m) I(n, m+1, 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}) + [a(n, m)(n+m-n^2) \right. \\
 & \left. + b(n, m)] I(n, m, 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \\
 & \times \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(0, m) I(0, m+1, 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) + [a(0, m)(m) + b(0, m)] I(0, m, 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Podemos definir $m' = m + n$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
 N_{\perp}\chi_{yz} = & -i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=n}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m')-1} a(n, m'-n)(n+m'-n) \sum_{s=\pm} J(n, m', 1, s; f_{\alpha}) \\
 & -i \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m'=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m')-1} a(0, m')(m') J(0, m', 1, 0; f_{\alpha}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=n}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m'-1)} \sum_{s=\pm} \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(n, m'-n) J(n, m'+1, 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right. \\
 & \left. + [a(n, m'-n)(n+m'-n-n^2) + b(n, m'-n)] J(n, m', 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m'=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m'-1)} \\
 & \times \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(0, m') J(0, m'+1, 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) + [a(0, m')(m') + b(0, m')] J(0, m', 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha},
 \end{aligned}$$

onde definiu-se

$$J(n, m', h, s; g_{\alpha}) \equiv \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m'-1)} u_{\perp} L(g_{\alpha})}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}}.$$

Podemos modificar os limites dos somatórios e utilizar novamente a notação m no lugar de m' , por simplicidade,

$$\begin{aligned}
 \chi_{yz} = & -i \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=1}^m a(n, m-n)(m) \sum_{s=\pm} J(n, m, 1, s; f_{\alpha}) \\
 & -i \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} a(0, m)(m) J(0, m, 1, 0; f_{\alpha}) \\
 + & \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=1}^m \sum_{s=\pm} \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(n, m-n) J(n, m+1, 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right. \\
 & \left. + [a(n, m-n)(m-n^2) + b(n, m-n)] J(n, m, 1, s; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & + \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} s_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \\
 \times & \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(0, m) J(0, m+1, 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) + [a(0, m)(m) + b(0, m)] J(0, m, 1, 0; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & + \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha}, \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

onde definiu-se

$$J(n, m, h, s; g_{\alpha}) \equiv \int d^3 u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} u_{\perp} L(g_{\alpha})}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}}. \tag{A.5}$$

A.3.2 Avaliação de χ_{zz}

Vamos prosseguir da Eq. (A.3) e executar as mesmas operações aplicadas à outra componente.

Obtemos

$$\begin{aligned}
 e_{zz} + N_{\perp}^2 \chi_{zz} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2m} \sum_{n=1}^m a(n, m-n) \sum_{s=\pm} J(n, m, 2, s; f_{\alpha}) \\
 + & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2m} a(0, m) J(0, m, 2, 0; f_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{zz} = & \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}^2} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=1}^m a(n, m-n) \sum_{s=\pm} J(n, m, 2, s; f_{\alpha}) \\
 & + \frac{1}{N_{\perp}^2} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2m} a(0, m) J(0, m, 2, 0; f_{\alpha}), \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

$$e_{zz} = - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}). \tag{A.7}$$

A.4 Avaliação da integral $J(n, m, h, s; g_\alpha)$

É possível escrever

$$J(n, m, h, s; g_\alpha) = J'(n, m, h, s; g_\alpha) + i J''(n, m, h, s; g_\alpha), \quad (\text{A.8})$$

onde

$$J'(n, m, h, s; g_\alpha) = \wp \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} u_{\perp} L(g_\alpha)}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}};$$

$$J''(n, m, h, s; g_\alpha) = -\pi \int d^3u u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} u_{\perp} L(g_\alpha) \delta(\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}),$$

onde o símbolo \wp indica a *parte principal* da integral.

Vamos avaliar inicialmente J'' . Para uma distribuição com simetria azimutal,

$$J''(n, m, h, s; g_\alpha) = -2\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2m} L(g_\alpha) \delta(\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}).$$

A função δ pode ser escrita como segue,

$$\delta(\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}) = \sum_i \frac{1}{|\partial\gamma/\partial u_{\perp}|_i} \delta(u_{\perp} - (u_{\perp})_i),$$

onde o somatório é sobre as raízes de $\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel} = 0$.

Uma vez que há apenas uma raiz positiva \bar{u}_{\perp} que satisfaz a condição de ressonância, obtemos,

$$\delta(\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}) = \frac{\gamma}{u_{\perp}} \delta(u_{\perp} - \bar{u}_{\perp}),$$

$$\bar{u}_{\perp} = [n^2 Y_\alpha^2 - 1 + 2sn s_\alpha Y_\alpha N_{\parallel} u_{\parallel} - u_{\parallel}^2 (1 - N_{\parallel}^2)]^{1/2}.$$

Portanto,

$$J''(n, m, h, s; g_\alpha) = -2\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2m} L(g_\alpha) \frac{\gamma}{u_{\perp}} \delta(u_{\perp} - \bar{u}_{\perp}),$$

$$J''(n, m, h, s; g_\alpha) = -2\pi^2 \int_{u_-}^{u_+} du_{\parallel} u_{\parallel}^h \left[u_{\perp}^{2m} \frac{\gamma}{u_{\perp}} L(g_\alpha) \right]_{\bar{u}_{\perp}}, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$u_{\pm} = \frac{sn s_\alpha Y_\alpha N_{\parallel} \pm [N_{\parallel}^2 - 1 + n^2 Y_\alpha^2]^{1/2}}{1 - N_{\parallel}^2}.$$

A avaliação pode seguir com o uso da expressão explícita para a função distribuição. Também é necessário avaliar a contribuição de J' . Entretanto, aqui utilizamos uma abordagem diferente, que é exposta em detalhes no restante desta seção.

A.4.1 O caso $g_\alpha = f_\alpha$

Utilizando as Eqs. (A.24) e (4.55),

$$J(n, m, h, s; f_\alpha) = \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} u_{\perp}}{\gamma - sns_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}} \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_{\perp}} \left[u_{\perp}^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha,$$

$$\begin{aligned} J(n, m, h, s; f_\alpha) &= n_\alpha A_\alpha \eta_\alpha \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)}}{\gamma - sns_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{1}{\gamma} \\ &\times \left[u_{\perp}^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] u_{\perp}^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha [\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}]}, \end{aligned}$$

onde foi evitada a indicação explícita da dependência em x (como em $n_\alpha(x)$, por exemplo), por simplicidade.

$$\begin{aligned} J(n, m, h, s; f_\alpha) &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \eta_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{\gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha u_{\parallel}} \\ &\times \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp} \frac{u_{\perp}^{2(l_\alpha+m-1)}}{\gamma - sns_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{1}{\gamma} \left[u_{\perp}^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma}; \\ &\quad \gamma = \sqrt{1 + u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2}, \quad \gamma d\gamma = u_{\perp} du_{\perp}; \\ J(n, m, h, s; f_\alpha) &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \eta_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{\gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha u_{\parallel}} \\ &\times \underbrace{\int_{\gamma_{\parallel}}^{\infty} d\gamma \frac{(\gamma^2 - \gamma_{\parallel}^2)^{(l_\alpha+m-1)}}{\gamma - sns_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}} \left[\gamma^2 - \gamma_{\parallel}^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma}}_{J_\gamma}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde $\gamma_{\parallel} = \sqrt{1 + u_{\parallel}^2}$.

Vamos avaliar J_γ . Considerando

$$x = \gamma - \gamma_{\parallel}, \quad dx = d\gamma, \quad \gamma = x + \gamma_{\parallel},$$

$$\begin{aligned} J_\gamma &= e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_{\parallel}} \int_0^{\infty} dx \frac{(x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{(l_\alpha+m-1)}}{x + \gamma_{\parallel} - sns_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}} \left[x^2 + 2\gamma_{\parallel} x + (x + \gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}, \\ J_\gamma &= e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_{\parallel}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{(l_\alpha+m-1)} (x + 2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-1)}}{x + \xi} \\ &\times \left[x^2 + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) x + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}, \end{aligned}$$

onde

$$\xi = \gamma_{\parallel} - sns_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}.$$

Usando coeficientes binomiais,

$$J_\gamma = e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_{\parallel}} \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-1-i)}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_0^\infty dx \frac{x^{(l_\alpha+m-1+i)} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}}{x + \xi} \left[x^2 + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) x + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right], \\
 & J_\gamma = e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_{\parallel}} \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-1-i)} \\
 & \times \left[L_{sn}(l_\alpha+m+i+1) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) L_{sn}(l_\alpha+m+i) + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} L_{sn}(l_\alpha+m+i-1) \right], \tag{A.11}
 \end{aligned}$$

onde

$$L_{sn}(j) = \int_0^\infty dx \frac{x^j e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}}{x + \xi}.$$

Usando este resultado na Eq. (A.10),

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h, s; f_\alpha) &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \eta_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \\
 & \times \int_{-\infty}^\infty du_{\parallel} u_{\parallel}^h (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-1-i)} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 & \times \left[L_{sn}(l_\alpha+m+i+1) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta} \right) L_{sn}(l_\alpha+m+i) \right. \\
 & \left. + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} L_{sn}(l_\alpha+m+i-1) \right]. \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

A.4.2 O caso $g_\alpha = (c/\omega) f'_\alpha$

Usando Eq. (A.27),

$$\begin{aligned}
 \frac{c}{\omega} f'_\alpha(\vec{u}, x) &= f_\alpha \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v_\alpha} \right] \right. \\
 & \left. - \mu_\alpha \gamma_\alpha [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v_\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v_\alpha} u_{\parallel}] \right\}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 L(g_\alpha) &= \frac{c}{\omega} L(f'_\alpha) = L(f_\alpha) \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v_\alpha} \right] \right. \\
 & \left. - \mu_\alpha \gamma_\alpha [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v_\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v_\alpha} u_{\parallel}] \right\} \\
 & + f_\alpha L \left(\left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v_\alpha} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. - \mu_\alpha \gamma_\alpha [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v_\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v_\alpha} u_{\parallel}] \right\} \right).
 \end{aligned}$$

Usando Eq. (A.24),

$$L(g_\alpha) = \frac{c}{\omega} L(f'_\alpha) = \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_{\perp}} \left[u_{\perp}^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha$$

$$\times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] - \mu_\alpha \gamma_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\} \\ - \mu_\alpha \gamma_\alpha f_\alpha L \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right].$$

Na última linha temos

$$L \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \\ = \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} + N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \right] \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \\ = \frac{1}{\gamma} (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \\ + \frac{1}{\gamma} N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \\ = \frac{1}{\gamma} (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \frac{u_{\perp}}{\gamma} \right] \\ + \frac{1}{\gamma} N_{\parallel} u_{\perp} \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \left(\frac{u_{\parallel}}{\gamma} - \beta_\alpha \right) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} \right] \\ = (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \frac{u_{\perp}}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} N_{\parallel} u_{\parallel} \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \frac{u_{\perp}}{\gamma} \right] \\ + \frac{1}{\gamma} N_{\parallel} u_{\perp} \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \left(\frac{u_{\parallel}}{\gamma} - \beta_\alpha \right) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} \right] \\ = (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \frac{u_{\perp}}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} N_{\parallel} u_{\perp} \beta_\alpha \left[-(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) + \epsilon_{v\alpha} \right] \\ = (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha) \frac{u_{\perp}}{\gamma} + N_{\parallel} \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} \frac{u_{\perp}}{\gamma} \\ = \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha) + N_{\parallel} \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} \right] \frac{u_{\perp}}{\gamma}.$$

Usando este resultado na equação anterior,

$$L(g_\alpha) = \frac{c}{\omega} L(f'_\alpha) = \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_{\perp}} \left[u_{\perp}^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\ \times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] - \mu_\alpha \gamma_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\} \\ - \mu_\alpha \gamma_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha) + N_{\parallel} \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} \right] \frac{u_{\perp}}{\gamma} f_\alpha, \\ L(g_\alpha) = \frac{c}{\omega} L(f'_\alpha) = \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_{\perp}} \left[u_{\perp}^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\ \times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] - \mu_\alpha \gamma_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\} \\ + \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_{\parallel} \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} \right] \frac{u_{\perp}}{\gamma} f_\alpha. \quad (\text{A.13})$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h, s; (c/\omega)f'_\alpha) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h, s; f_\alpha) \\
 -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) &\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel) \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\
 -\mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} &\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} u_\parallel \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\
 + [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_\parallel \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] &\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \frac{u_\perp}{\gamma} f_\alpha, \\
 J(n, m, h, s; (c/\omega)f'_\alpha) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h, s; f_\alpha) \\
 -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) &\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \gamma \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\
 +\mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) &\int d^3u \frac{u_\parallel^{h+1} u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\
 -\mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} &\int d^3u \frac{u_\parallel^{h+1} u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\
 + [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_\parallel \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] &\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \frac{u_\perp}{\gamma} f_\alpha, \\
 J(n, m, h, s; (c/\omega)f'_\alpha) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h, s; f_\alpha) \\
 -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) &\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \gamma \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + (\gamma - N_\parallel u_\parallel) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha \\
 +\mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) &J(n, m, h+1, s; f_\alpha) - \mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} J(n, m, h+1, s; f_\alpha) \\
 + [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_\parallel \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] &\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \frac{u_\perp}{\gamma} f_\alpha, \\
 J(n, m, h, s; (c/\omega)f'_\alpha) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h, s; f_\alpha) \\
 +\mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 - 1) \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}] &J(n, m, h+1, s; f_\alpha) \\
 -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha &\underbrace{\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} u_\perp f_\alpha}_{J_0} \\
 -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha &\underbrace{\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \frac{1}{u_\perp} \gamma f_\alpha}_{J_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_\alpha \gamma_\alpha N_\parallel (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \underbrace{2l_\alpha \int d^3u \frac{u_\parallel^{h+1} u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \frac{1}{u_\perp} f_\alpha}_{J_2} \\
 & + [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_\parallel \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] \underbrace{\int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} \frac{u_\perp}{\gamma} f_\alpha}_{J_3}.
 \end{aligned}$$

Vamos avaliar J_0 ,

$$\begin{aligned}
 J_0 &= \int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} u_\perp f_\alpha, \\
 J_0 &= n_\alpha A_\alpha \int d^3u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2m}}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} u_\perp^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel)}, \\
 J_0 &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h e^{\gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha u_\parallel} \int_0^\infty du_\perp u_\perp \frac{u_\perp^{2(l_\alpha+m)}}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma}; \\
 & \quad \gamma = \sqrt{1 + u_\parallel^2 + u_\perp^2}, \quad \gamma d\gamma = u_\perp du_\perp; \\
 J_0 &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h e^{\gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha u_\parallel} \underbrace{\int_{\gamma_\parallel}^\infty d\gamma \gamma \frac{(\gamma^2 - \gamma_\parallel^2)^{(l_\alpha+m)}}{\gamma - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma}}_{J_{0\gamma}},
 \end{aligned}$$

onde $\gamma_\parallel = \sqrt{1 + u_\parallel^2}$.

Vamos avaliar $J_{0\gamma}$. Considerando

$$\begin{aligned}
 x &= \gamma - \gamma_\parallel, \quad dx = d\gamma, \quad \gamma = x + \gamma_\parallel, \\
 J_{0\gamma} &= e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_\parallel} \int_0^\infty dx (x + \gamma_\parallel) \frac{(x^2 + 2\gamma_\parallel x)^{(l_\alpha+m)}}{x + \gamma_\parallel - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}, \\
 J_{0\gamma} &= e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_\parallel} \int_0^\infty dx (x + \gamma_\parallel) \frac{x^{(l_\alpha+m)} (x + 2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m)}}{x + \xi} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x},
 \end{aligned}$$

onde

$$\xi = \gamma_\parallel - sn s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel.$$

Usando coeficientes binomiais,

$$\begin{aligned}
 J_{0\gamma} &= e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_\parallel} \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} (2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m-i)} \int_0^\infty dx (x + \gamma_\parallel) \frac{x^{(l_\alpha+m+i)} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}}{x + \xi}, \\
 J_{0\gamma} &= e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha \gamma_\parallel} \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} (2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m-i)} [L_{sn}(l_\alpha + m + i + 1) + \gamma_\parallel L_{sn}(l_\alpha + m + i)],
 \end{aligned}$$

onde $L_{sn}(j)$ foi definido após Eq. (A.11).

Portanto,

$$J_0 = 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)}$$

$$\times [L_{sn}(l_\alpha + m + i + 1) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha + m + i)].$$

Vamos avaliar J_1 ,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} u_{\perp}}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{\gamma}{u_{\perp}} f_{\alpha}, \\ J_1 &= n_{\alpha} A_{\alpha} \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} \gamma}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} u_{\perp}^{2l_{\alpha}} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma - \beta_{\alpha} u_{\parallel})}, \\ J_1 &= 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp} \frac{u_{\perp}^{2(l_{\alpha} + m - 1)} \gamma}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma}, \\ J_1 &= 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \underbrace{\int_{\gamma_{\parallel}}^{\infty} d\gamma \gamma^2 \frac{(\gamma^2 - \gamma_{\parallel}^2)^{(l_{\alpha} + m - 1)}}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma}}_{J_{1\gamma}}. \end{aligned}$$

Vamos avaliar $J_{1\gamma}$. Considerando

$$x = \gamma - \gamma_{\parallel}, \quad dx = d\gamma, \quad \gamma = x + \gamma_{\parallel},$$

$$\begin{aligned} J_{1\gamma} &= e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \int_0^{\infty} dx (x + \gamma_{\parallel})^2 \frac{(x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{(l_{\alpha} + m - 1)}}{x + \gamma_{\parallel} - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}, \\ J_{1\gamma} &= e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \int_0^{\infty} dx (x^2 + 2\gamma_{\parallel} x + \gamma_{\parallel}^2) \frac{x^{(l_{\alpha} + m - 1)} (x + 2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha} + m - 1)}}{x + \xi} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}, \end{aligned}$$

onde

$$\xi = \gamma_{\parallel} - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}.$$

Usando coeficientes binomiais,

$$J_{1\gamma} = e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \sum_{i=0}^{l_{\alpha} + m - 1} \binom{l_{\alpha} + m - 1}{i} (2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha} + m - 1 - i)} \int_0^{\infty} dx (x^2 + 2\gamma_{\parallel} x + \gamma_{\parallel}^2) \frac{x^{(l_{\alpha} + m - 1 + i)} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}}{x + \xi},$$

$$J_{1\gamma} = e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \sum_{i=0}^{l_{\alpha} + m - 1} \binom{l_{\alpha} + m - 1}{i} (2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha} + m - 1 - i)}$$

$$\times [L_{sn}(l_{\alpha} + m + 1 + i) + 2\gamma_{\parallel} L_{sn}(l_{\alpha} + m + i) + \gamma_{\parallel}^2 L_{sn}(l_{\alpha} + m - 1 + i)],$$

onde $L_{sn}(j)$ foi definido após Eq. (A.11).

$$\begin{aligned} J_1 &= 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha} + m - 1} \binom{l_{\alpha} + m - 1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} (2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha} + m - 1 - i)} \\ &\times [L_{sn}(l_{\alpha} + m + 1 + i) + 2\gamma_{\parallel} L_{sn}(l_{\alpha} + m + i) + \gamma_{\parallel}^2 L_{sn}(l_{\alpha} + m - 1 + i)]. \end{aligned}$$

Avaliação de J_2 : É fácil notar que J_2 é o mesmo que J_0 , com $(m - 1)$ no lugar de (m) e $(h + 1)$ no lugar de (h) ,

$$J_2 = 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha} + m - 1} \binom{l_{\alpha} + m - 1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^{h+1} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})}$$

$$\times [L_{sn}(l_\alpha + m + i) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha + m - 1 + i)].$$

Vamos avaliar J_3 ,

$$\begin{aligned} J_3 &= \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} u_{\perp}}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{u_{\perp}}{\gamma} f_{\alpha}, \\ J_3 &= n_{\alpha} A_{\alpha} \int d^3u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2m}}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} u_{\perp}^{2l_{\alpha}} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma - \beta_{\alpha} u_{\parallel})}, \\ J_3 &= 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp} \frac{u_{\perp}^{2(l_{\alpha}+m)}}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma} \frac{1}{\gamma}, \\ J_3 &= 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \underbrace{\int_{\gamma_{\parallel}}^{\infty} d\gamma \frac{(\gamma^2 - \gamma_{\parallel}^2)^{(l_{\alpha}+m)}}{\gamma - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma}}_{J_{3\gamma}}. \end{aligned}$$

Vamos avaliar $J_{3\gamma}$. Considerando

$$\begin{aligned} x &= \gamma - \gamma_{\parallel}, & dx &= d\gamma, & \gamma &= x + \gamma_{\parallel}, \\ J_{3\gamma} &= e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \int_0^{\infty} dx \frac{(x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{(l_{\alpha}+m)}}{x + \gamma_{\parallel} - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}, \\ J_{3\gamma} &= e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{(l_{\alpha}+m)} (x + 2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha}+m)}}{x + \xi} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}, \end{aligned}$$

onde

$$\xi = \gamma_{\parallel} - sn s_{\alpha} Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}.$$

Usando coeficientes binomiais,

$$\begin{aligned} J_{3\gamma} &= e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}+m} \binom{l_{\alpha}+m}{i} (2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha}+m-i)} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{(l_{\alpha}+m+i)} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}}{x + \xi}, \\ J_{3\gamma} &= e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\parallel}} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}+m} \binom{l_{\alpha}+m}{i} (2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha}+m-i)} L_{sn}(l_{\alpha} + m + i), \\ J_3 &= 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}+m} \binom{l_{\alpha}+m}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} (2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha}+m-i)} L_{sn}(l_{\alpha} + m + i). \end{aligned}$$

Utilizando as expressões obtidas para J_0 , J_1 , J_2 e J_3 , obtemos

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h, s; (c/\omega)f'_\alpha) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h, s; f_\alpha) \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 - 1) \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}] J(n, m, h + 1, s; f_\alpha) \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\quad \times [L_{sn}(l_\alpha + m + i + 1) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha + m + i)] \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\quad \times (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-1-i)} [L_{sn}(l_\alpha + m + 1 + i) + 2\gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha + m + i) + \gamma_{\parallel}^2 L_{sn}(l_\alpha + m - 1 + i)] \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha N_{\parallel} (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^{h+1} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\quad \times [L_{sn}(l_\alpha + m + i) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha + m - 1 + i)] \\
 &\quad + [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_{\parallel} \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-i)} L_{sn}(l_\alpha + m + i). \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

A.4.3 Avaliação de $L_{ns}(j)$

Para a avaliação de $L_{sn}(j)$ procedemos como segue:

$$\begin{aligned}
 L_{sn}(j) &= \int_0^{\infty} dx \frac{x^j e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}}{x + \xi} = \int_0^{\infty} dx x^{j-1} \frac{x + \xi - \xi}{x + \xi} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x} = \int_0^{\infty} dx x^{j-1} \left[1 - \frac{\xi}{x + \xi} \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x} \\
 &= \int_0^{\infty} dx x^{j-2} \left[x - \xi \left(1 - \frac{\xi}{x + \xi} \right) \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x} = \dots \dots \\
 &= \int_0^{\infty} dx \left[x^{j-1} - \xi x^{j-2} + \xi^2 x^{j-3} - \dots + \frac{(-1)^j \xi^j}{x + \xi} \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x} \\
 &= \int_0^{\infty} dx \left[\sum_{p=0}^{j-1} (-1)^p \xi^p x^{j-1-p} + \frac{(-1)^j \xi^j}{x + \xi} \right] e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}.
 \end{aligned}$$

As integrais iniciais podem ser resolvidas analiticamente,

$$L_{sn}(j) = \sum_{p=0}^{j-1} (-1)^p \xi^p \frac{(j-1-p)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j-p}} + (-1)^j \xi^j \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}}{x + \xi},$$

$$L_{sn}(j) = \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left[\sum_{p=0}^{j-1} (-\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi)^p (j-1-p)! + (-\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi)^j \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha x}}{x + \xi} \right].$$

Considerando

$$u = x + \xi, \quad du = dx,$$

$$L_{sn}(j) = \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left[\sum_{p=0}^{j-1} (-\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi)^p (j-1-p)! + (-\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi)^j e^{\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi} \int_\xi^\infty du \frac{e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha u}}{u} \right].$$

Considerando

$$t = \gamma_\alpha \mu_\alpha u, \quad dt = \gamma_\alpha \mu_\alpha du, \quad \frac{dt}{t} = \frac{du}{u},$$

$$L_{sn}(j) = \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left[\sum_{p=0}^{j-1} (-\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi)^p (j-1-p)! + (-\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi)^j e^{\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi} \int_{\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi}^\infty dt \frac{e^{-t}}{t} \right].$$

Considerando

$$x_{sn} = -\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi,$$

$$L_{sn}(j) = \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right], \quad (\text{A.15})$$

onde o contorno de Landau foi utilizado e onde $E_1(-x)$ é definida como segue [1]:

$$E_1(-x) = \int_{-x}^\infty dt \frac{e^{-t}}{t}, \quad \text{para } |\arg(-x)| < \pi.$$

A função de Heaviside $\Theta(j)$ foi introduzida porque a derivação é válida somente para $j > 0$.

Comentários sobre o contorno de Landau:

O *cut-off* na definição de $E_1(-x)$ ocorre ao longo do eixo real, para $x > 0$ (real). Utilizando o contorno de Landau a fim de definir a integral, $\omega = \omega_r + i0^+$, passe-se a considerar o plano complexo e portanto é válido o uso de $E_1(-x)$.

Ademais, é considerado o seguinte:

A integral em $L_{sn}(j)$ exhibe um pólo simples em $x = -\xi$. Uma vez que, $x \geq 0$ (os limites da integral em x são 0 and ∞), o pólo ocorre para $\xi \leq 0$. Portanto, usando o contorno de landau, podemos excrever $E_1(-x_{sn})$ como segue:

$$E_1(-x_{sn}) = -\text{Ei}(x_{sn}) - i\pi \Theta(sn s_\alpha Y_\alpha + N_{\parallel} u_{\parallel} - \gamma_{\parallel}), \quad (\text{A.16})$$

onde [1]

$$\text{Ei}(x) = -\wp \int_{-x}^\infty dt \frac{e^{-t}}{t}, \quad (\xi \leq 0 \rightarrow x_{sn} \geq 0).$$

A condição para a ocorrência da parte imaginária pode ser discutida como segue. Para $u_{\parallel} \rightarrow \infty$, o argumento da função de Heaviside tende a $-\infty$. Portanto, o argumento da função de Heaviside pode ser positivo somente entre os valores de u_{\parallel} que satisfazem

$$\begin{aligned} sn s_{\alpha} Y_{\alpha} + N_{\parallel} u_{\parallel} &= \gamma_{\parallel}; \\ n^2 Y_{\alpha}^2 + 2sn s_{\alpha} Y_{\alpha} N_{\parallel} u_{\parallel} + N_{\parallel}^2 u_{\parallel}^2 &= 1 + u_{\parallel}^2, \\ (1 - N_{\parallel}^2) u_{\parallel}^2 - 2sn s_{\alpha} Y_{\alpha} N_{\parallel} u_{\parallel} + (1 - n^2 Y_{\alpha}^2) &= 0. \end{aligned}$$

Nota-se que a condição de ocorrência de parte imaginária não-nula é a mesma obtida ao avaliar a parte imaginária da integral $J(n, m, h, s; g_{\alpha})$ na Eq. (A.9). Nominalmente, a função de Heaviside é satisfeita entre os seguintes valores de u_{\parallel} ,

$$u_{\pm} = \frac{sn s_{\alpha} Y_{\alpha} N_{\parallel} \pm \left[N_{\parallel}^2 - 1 + n^2 Y_{\alpha}^2 \right]^{1/2}}{1 - N_{\parallel}^2}.$$

Vamos adicionalmente discutir algumas propriedades de $L_{sn}(j)$:

Se $j > 0$,

$$L_{sn}(j) = \int_0^{\infty} dx \frac{x^j e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}}{x + \xi} = \int_0^{\infty} dx x^j \frac{x^{j-1} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}}{x + \xi} = \int_0^{\infty} dx x^{j-1} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x - \xi} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{j-1} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} x}}{x + \xi}.$$

Efetuada a integração no primeiro termo,

$$L_{sn}(j) = \frac{(j-1)!}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})^j} - \xi L_{sn}(j-1), \quad \text{para } j > 0.$$

Se $j = 0$, nota-se facilmente a partir da derivação que leva à Eq. (A.15) que

$$L_{sn}(j) = e^{x_{sn}} E_1(-x_{sn}).$$

Estes dois resultados podem ser unidos como uma útil propriedade recursiva [82]:

$$\begin{aligned} \text{Para } j = 0, \quad L_{sn}(j) &= e^{x_{sn}} E_1(-x_{sn}); \\ \text{Para } j \geq 1, \quad L_{sn}(j) &= \frac{(j-1)!}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})^j} - \xi L_{sn}(j-1). \end{aligned} \tag{A.17}$$

A.4.4 Desenvolvimentos adicionais em $L_{ns}(j)$ e $J(n, m, h, s; g_{\alpha})$

Na Eq. (A.12) temos

$$\left[L_{sn}(l_{\alpha} + m + i + 1) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_{\alpha}}{\eta_{\alpha}} \right) L_{sn}(l_{\alpha} + m + i) + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_{\alpha}}{\eta_{\alpha}} L_{sn}(l_{\alpha} + m + i - 1) \right].$$

Vamos definir $j = l_\alpha + m + i - 1$ e escrever

$$\begin{aligned}
 & \left[L_{sn}(j+2) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) L_{sn}(j+1) + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel}u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} L_{sn}(j) \right] \\
 = & \left[\frac{(j+1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+2}} - \xi L_{sn}(j+1) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \left(\frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} - \xi L_{sn}(j) \right) + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel}u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} L_{sn}(j) \right] \\
 = & \left[\frac{(j+1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+2}} - \xi \left(\frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} - \xi L_{sn}(j) \right) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \left(\frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} - \xi L_{sn}(j) \right) \right. \\
 & \left. + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel}u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} L_{sn}(j) \right] \\
 = & \left[\frac{(j+1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+2}} - \xi \left(\frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} \right) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \left(\frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} \right) \right] \\
 & + \left[\xi^2 L_{sn}(j) - \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \xi L_{sn}(j) + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel}u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} L_{sn}(j) \right] \\
 = & \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} - \xi + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \right] + \left[\xi^2 - \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \xi + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel}u_{\parallel}) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] L_{sn}(j) \\
 = & \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} - \xi + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \right] + \left[\xi^2 - \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \xi + (\xi + sn s_\alpha Y_\alpha) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] L_{sn}(j) \\
 = & \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} - \xi + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \right] + \left[\xi (\xi - 2\gamma_{\parallel}) + (sn s_\alpha Y_\alpha) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] L_{sn}(j).
 \end{aligned}$$

Usando Eq. (A.15),

$$\begin{aligned}
 \rightarrow & \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} - \xi + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \right] + \left[\xi (\xi - 2\gamma_{\parallel}) + (sn s_\alpha Y_\alpha) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] \\
 & \times \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \\
 = & \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left\{ \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} \left[\frac{(j+1)}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} - \xi + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right) \right] + \left[\xi (\xi - 2\gamma_{\parallel}) + (sn s_\alpha Y_\alpha) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] \right. \\
 & \left. \times \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\} \\
 = & \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \frac{1}{\eta_\alpha} \left\{ \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} \left[-(j+1)(1 - N_{\parallel}\beta_\alpha) + \eta_\alpha (2\gamma_{\parallel} - \xi) + 2l_\alpha \right] \right. \\
 & \left. + [\xi \eta_\alpha (\xi - 2\gamma_{\parallel}) + (sn s_\alpha Y_\alpha) 2l_\alpha] \right. \\
 & \left. \times \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\} \\
 = & \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \frac{1}{\eta_\alpha} \left\{ \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} \left[2l_\alpha - (j+1)(1 - N_{\parallel}\beta_\alpha) + \eta_\alpha (\gamma_{\parallel} + sn s_\alpha Y_\alpha + N_{\parallel}u_{\parallel}) \right] \right. \\
 & \left. + [-(\gamma_{\parallel} - sn s_\alpha Y_\alpha - N_{\parallel}u_{\parallel}) \eta_\alpha (\gamma_{\parallel} + sn s_\alpha Y_\alpha + N_{\parallel}u_{\parallel}) + (sn s_\alpha Y_\alpha) 2l_\alpha] \right. \\
 & \left. \times \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \frac{1}{\eta_\alpha} \left\{ \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} [2l_\alpha + \eta_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) - (j+1)(1 - N_\parallel \beta_\alpha) + \eta_\alpha N_\parallel u_\parallel + \eta_\alpha \gamma_\parallel] \right. \\
 &\quad + [-\eta_\alpha (\gamma_\parallel^2 - (sns_\alpha Y_\alpha + N_\parallel u_\parallel)^2) + 2l_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha)] \\
 &\quad \left. \times \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \frac{1}{\eta_\alpha} \left\{ \frac{(j)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} [2l_\alpha + \eta_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) - (j+1)(1 - N_\parallel \beta_\alpha) + \eta_\alpha N_\parallel u_\parallel + \eta_\alpha \gamma_\parallel] \right. \\
 &\quad + [2l_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) - \eta_\alpha (1 - n^2 Y_\alpha^2 - 2(sns_\alpha Y_\alpha) N_\parallel u_\parallel + (1 - N_\parallel^2) u_\parallel^2)] \\
 &\quad \left. \times \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Utilizando estas expressões na Eq. (A.12) e considerando que $j = l_\alpha + m + i - 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h, s; f_\alpha) &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \eta_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h (2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m-1-i)} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} \\
 &\times \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \frac{1}{\eta_\alpha} \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} [2l_\alpha + \eta_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) - (l_\alpha+m+i)(1 - N_\parallel \beta_\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \eta_\alpha N_\parallel u_\parallel + \eta_\alpha \gamma_\parallel] \right. \\
 &\quad + [2l_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) - \eta_\alpha (1 - n^2 Y_\alpha^2 - 2(sns_\alpha Y_\alpha) N_\parallel u_\parallel + (1 - N_\parallel^2) u_\parallel^2)] \\
 &\quad \left. \times \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^{l_\alpha+m+i-1} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Vamos definir os seguintes coeficientes,

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} [2l_\alpha + \eta_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) - (l_\alpha + m + i)(1 - N_\parallel \beta_\alpha)]; \\
 C_2 &= \frac{1}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \eta_\alpha N_\parallel = -N_\parallel (1 - N_\parallel \beta_\alpha); \\
 C_3 &= \frac{1}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \frac{\eta_\alpha}{2} = -\frac{1}{2} (1 - N_\parallel \beta_\alpha); \\
 D_1 &= 2l_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) - \eta_\alpha (1 - n^2 Y_\alpha^2) = 2l_\alpha (sns_\alpha Y_\alpha) + \mu_\alpha \gamma_\alpha (1 - N_\parallel \beta_\alpha) (1 - n^2 Y_\alpha^2); \\
 D_2 &= \eta_\alpha 2(sns_\alpha Y_\alpha) N_\parallel = -\mu_\alpha \gamma_\alpha (1 - N_\parallel \beta_\alpha) 2(sns_\alpha Y_\alpha) N_\parallel; \\
 D_3 &= -\eta_\alpha (1 - N_\parallel^2) = \mu_\alpha \gamma_\alpha (1 - N_\parallel \beta_\alpha) (1 - N_\parallel^2). \tag{A.18}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h, s; f_\alpha) &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h (2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m-1-i)} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} \\
 &\times \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \{ (l_\alpha+m+i-1)! [C_1 + C_2 u_\parallel + C_3 (2\gamma_\parallel)] \}
 \end{aligned}$$

$$+ [D_1 + D_2 u_{\parallel} + D_3 u_{\parallel}^2] \times \left[\Theta(l_{\alpha} + m + i - 1) \sum_{p=0}^{l_{\alpha} + m + i - 2} (l_{\alpha} + m + i - 2 - p)! x_{sn}^p + x_{sn}^{l_{\alpha} + m + i - 1} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \}.$$

Podemos definir as seguintes integrais auxiliares,

$$G(a, b, c) = \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^a (2\gamma_{\parallel})^b e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} x_{sn}^c;$$

$$H(a, b, c) = \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^a (2\gamma_{\parallel})^b e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} x_{sn}^c e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}), \quad (\text{A.19})$$

e escrever a integral J como segue,

$$J(n, m, h, s; f_{\alpha}) = 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha} + m - 1} \binom{l_{\alpha} + m - 1}{i} \frac{1}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})^{l_{\alpha} + m + i - 1}}$$

$$\times \left\{ (l_{\alpha} + m + i - 1)! [C_1 G(h, l_{\alpha} + m - 1 - i, 0) + C_2 G(h + 1, l_{\alpha} + m - 1 - i, 0) + C_3 G(h, l_{\alpha} + m - i, 0)] \right.$$

$$+ \left[\Theta(l_{\alpha} + m + i - 1) \sum_{p=0}^{l_{\alpha} + m + i - 2} (l_{\alpha} + m + i - 2 - p)! [D_1 G(h, l_{\alpha} + m - 1 - i, p) + D_2 G(h + 1, l_{\alpha} + m - 1 - i, p) + D_3 G(h + 2, l_{\alpha} + m - 1 - i, p)] \right.$$

$$+ [D_1 H(h, l_{\alpha} + m - 1 - i, l_{\alpha} + m + i - 1) + D_2 H(h + 1, l_{\alpha} + m - 1 - i, l_{\alpha} + m + i - 1) + D_3 H(h + 2, l_{\alpha} + m - 1 - i, l_{\alpha} + m + i - 1)] \left. \right\}. \quad (\text{A.20})$$

Na Eq. (A.14) temos

$$[L_{sn}(l_{\alpha} + m + i + 1) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_{\alpha} + m + i)].$$

Definimos $j = l_{\alpha} + m + i$ e escrevemos

$$[L_{sn}(j + 1) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(j)] = \frac{(j)!}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})^{j+1}} - \xi L_{sn}(j) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(j) = \frac{(j)!}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})^{j+1}} + (sn s_{\alpha} Y_{\alpha} + N_{\parallel} u_{\parallel}) L_{sn}(j)$$

$$= \frac{1}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})^j} \left\{ \frac{(j)!}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})} + (sn s_{\alpha} Y_{\alpha} + N_{\parallel} u_{\parallel}) \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j - 1 - p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\}.$$

O termo correspondente na Eq. (A.14) pode portanto ser escrito como

$$-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_{\alpha} 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha} + m} \binom{l_{\alpha} + m}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^i e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})}$$

$$\times \frac{1}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})^{l_{\alpha} + m + i}} \left\{ \frac{(l_{\alpha} + m + i)!}{(\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha})} + (sn s_{\alpha} Y_{\alpha} + N_{\parallel} u_{\parallel}) [\Theta(l_{\alpha} + m + i)] \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left. \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^{l_\alpha+m+i} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \Bigg\} \\
 & = -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) \eta_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \\
 & \times \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} G(h, 0, 0) + \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! (sns_\alpha Y_\alpha G(h, 0, p) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + N_\parallel G(h+1, 0, p)) \right] \right. \\
 & \quad \left. + (sns_\alpha Y_\alpha H(h, 0, l_\alpha+m+i) + N_\parallel H(h+1, 0, l_\alpha+m+i)) \right\}.
 \end{aligned}$$

Na Eq. (A.14) também temos

$$[L_{sn}(l_\alpha+m+1+i) + 2\gamma_\parallel L_{sn}(l_\alpha+m+i) + \gamma_\parallel^2 L_{sn}(l_\alpha+m-1+i)].$$

Definimos $j = l_\alpha + m + i - 1$ e escrevemos

$$\begin{aligned}
 & [L_{sn}(j+2) + 2\gamma_\parallel L_{sn}(j+1) + \gamma_\parallel^2 L_{sn}(j)] \\
 & = \left[\frac{(j+1)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+2}} - \xi L_{sn}(j+1) + 2\gamma_\parallel \left(\frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+1}} - \xi L_{sn}(j) \right) + \gamma_\parallel^2 L_{sn}(j) \right] \\
 & = \left[\frac{(j+1)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+2}} - \xi \left(\frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+1}} - \xi L_{sn}(j) \right) + 2\gamma_\parallel \left(\frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+1}} - \xi L_{sn}(j) \right) + \gamma_\parallel^2 L_{sn}(j) \right] \\
 & = \frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} - (\xi - 2\gamma_\parallel) \right] + (\xi(\xi - 2\gamma_\parallel) + \gamma_\parallel^2) L_{sn}(j) \\
 & = \frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} - (-\gamma_\parallel - sns_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel) \right] \\
 & \quad + ((\gamma_\parallel - sns_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel)(-\gamma_\parallel - sns_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel) + \gamma_\parallel^2) L_{sn}(j) \\
 & = \frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} + (\gamma_\parallel + sns_\alpha Y_\alpha + N_\parallel u_\parallel) \right] + (-[\gamma_\parallel^2 - (sns_\alpha Y_\alpha + N_\parallel u_\parallel)^2] + \gamma_\parallel^2) L_{sn}(j) \\
 & = \frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{j+1}} \left[\frac{(j+1)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} + sns_\alpha Y_\alpha + N_\parallel u_\parallel + \frac{1}{2}(2\gamma_\parallel) \right] + (n^2 Y_\alpha^2 + 2(sns_\alpha Y_\alpha) N_\parallel u_\parallel + N_\parallel u_\parallel^2) L_{sn}(j) \\
 & = \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^j} \left\{ \frac{(j)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} \left[\frac{(j+1)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} + sns_\alpha Y_\alpha + N_\parallel u_\parallel + \frac{1}{2}(2\gamma_\parallel) \right] \right. \\
 & \quad \left. + (n^2 Y_\alpha^2 + 2(sns_\alpha Y_\alpha) N_\parallel u_\parallel + N_\parallel^2 u_\parallel^2) \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

O termo correspondente na Eq. (A.14) pode portanto ser escrito como

$$\begin{aligned}
 & -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^i e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} \\
 & \times (2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m-1-i)} [L_{sn}(l_\alpha+m+1+i) + 2\gamma_\parallel L_{sn}(l_\alpha+m+i) + \gamma_\parallel^2 L_{sn}(l_\alpha+m-1+i)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^i e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\times (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-1-i)} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} \left[\frac{(l_\alpha+m+i)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} + sn s_\alpha Y_\alpha + N_{\parallel} u_{\parallel} + \frac{1}{2}(2\gamma_{\parallel}) \right] \right. \\
 &+ (n^2 Y_\alpha^2 + 2(sn s_\alpha Y_\alpha) N_{\parallel} u_{\parallel} + N_{\parallel} u_{\parallel}^2) \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! x_{sn}^p \right. \\
 &\quad \left. \left. + x_{sn}^{l_\alpha+m+i-1} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \right\} \\
 &= -\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \\
 &\times \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} \left[\left(\frac{(l_\alpha+m+i)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} + sn s_\alpha Y_\alpha \right) G(h, l_\alpha+m-i-1, 0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + N_{\parallel} G(h+1, l_\alpha+m-i-1, 0) + \frac{1}{2} G(h, l_\alpha+m-i, 0) \right] \right. \\
 &+ \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! (n^2 Y_\alpha^2 G(h, l_\alpha+m-i-1, p) \right. \\
 &\quad \left. + 2(sn s_\alpha Y_\alpha) N_{\parallel} G(h+1, l_\alpha+m-i-1, p) + N_{\parallel}^2 G(h+2, l_\alpha+m-i-1, p)) \right. \\
 &\quad \left. + (n^2 Y_\alpha^2 H(h, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) \right. \\
 &\quad \left. + 2(sn s_\alpha Y_\alpha) N_{\parallel} H(h+1, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) \right. \\
 &\quad \left. + N_{\parallel}^2 H(h+2, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Na Eq. (A.14) também temos

$$[L_{sn}(l_\alpha+m+i) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha+m-1+i)].$$

Este termo é similar ao termo anteriormente desenvolvido. Utilizamos o resultado anterior, com $j = l_\alpha + m + i - 1$ no lugar de $j = l_\alpha + m + i$:

$$\begin{aligned}
 &[L_{sn}(l_\alpha+m+i) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha+m-1+i)] \\
 &= \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} + (sn s_\alpha Y_\alpha + N_{\parallel} u_{\parallel}) \right. \\
 &\times \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^{l_\alpha+m+i-1} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

O termo correspondente na Eq. (A.14) pode portanto ser escrito como

$$\begin{aligned}
 &\mu_\alpha \gamma_\alpha N_{\parallel} (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^{h+1} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\times [L_{sn}(l_\alpha+m+i) + \gamma_{\parallel} L_{sn}(l_\alpha+m-1+i)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu_\alpha \gamma_\alpha N_\parallel (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^{h+1} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} \\
 &\quad \times \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} + (sn s_\alpha Y_\alpha + N_\parallel u_\parallel) \right. \\
 &\quad \times \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^{l_\alpha+m+i-1} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \left. \right\} \\
 &= \mu_\alpha \gamma_\alpha N_\parallel (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \\
 &\quad \times \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} G(h+1, 0, 0) \right. \\
 &\quad + \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! [(sn s_\alpha Y_\alpha) G(h+1, 0, p) + N_\parallel G(h+2, 0, p)] \right. \\
 &\quad \left. \left. + (sn s_\alpha Y_\alpha) H(h+1, 0, l_\alpha+m+i-1) + N_\parallel H(h+2, 0, l_\alpha+m+i-1) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

No último termo da Eq. (A.14) temos

$$\begin{aligned}
 L_{sn}(l_\alpha+m+i) &= \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! x_{sn}^p \right. \\
 &\quad \left. + x_{sn}^{l_\alpha+m+i} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right].
 \end{aligned}$$

O termo correspondente na Eq. (A.14) pode portanto ser escrito como

$$\begin{aligned}
 &[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_\parallel \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} (2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m-i)} L_{sn}(l_\alpha+m+i) \\
 &= [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_\parallel \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} (2\gamma_\parallel)^{(l_\alpha+m-i)} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \\
 &\quad \times \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^{l_\alpha+m+i} e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right] \\
 &= [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_\parallel \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \\
 &\quad \times \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! G(h, l_\alpha+m-i, p) \right. \\
 &\quad \left. + H(h, l_\alpha+m-i, l_\alpha+m+i) \right].
 \end{aligned}$$

Coletando os resultados obtidos e os utilizando na Eq. (A.14), obtemos

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h, s; (c/\omega)f_\alpha^l) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h, s; f_\alpha) \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 - 1) \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha} \right] J(n, m, h+1, s; f_\alpha) \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \\
 &\times \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} G(h, 0, 0) + \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! (sn s_\alpha Y_\alpha G(h, 0, p) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + N_{\parallel} G(h+1, 0, p)) \right] + [sn s_\alpha Y_\alpha H(h, 0, l_\alpha+m+i) + N_{\parallel} H(h+1, 0, l_\alpha+m+i)] \right\} \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} \left[\left(\frac{(l_\alpha+m+i)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} + sn s_\alpha Y_\alpha \right) G(h, l_\alpha+m-i-1, 0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + N_{\parallel} G(h+1, l_\alpha+m-i-1, 0) + \frac{1}{2} G(h, l_\alpha+m-i, 0) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! (n^2 Y_\alpha^2 G(h, l_\alpha+m-i-1, p) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(sn s_\alpha Y_\alpha) N_{\parallel} G(h+1, l_\alpha+m-i-1, p) + N_{\parallel}^2 G(h+2, l_\alpha+m-i-1, p)) \right] \right. \\
 &\quad \left. + [n^2 Y_\alpha^2 H(h, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) \right. \\
 &\quad \left. + 2(sn s_\alpha Y_\alpha) N_{\parallel} H(h+1, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) \right. \\
 &\quad \left. + N_{\parallel}^2 H(h+2, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1)] \right\} \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha N_{\parallel} (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \\
 &\quad \times \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} G(h+1, 0, 0) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! \left((sn s_\alpha Y_\alpha) G(h+1, 0, p) + N_{\parallel} G(h+2, 0, p) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[(sn s_\alpha Y_\alpha) H(h+1, 0, l_\alpha+m+i-1) + N_{\parallel} H(h+2, 0, l_\alpha+m+i-1) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Continuação:

$$\begin{aligned}
 & + [(\gamma_\alpha^2/\beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_{\parallel} \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \\
 & \times \left\{ \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! G(h, l_\alpha+m-i, p) \right] \right. \\
 & \quad \left. + H(h, l_\alpha+m-i, l_\alpha+m+i) \right\}. \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

A.5 Operadores diferenciais aplicados à função distribuição modelo

Da Eq. (4.55) temos a função distribuição modelo,

$$\begin{aligned}
 f_\alpha(\vec{u}, x) &= n_\alpha(x) A_\alpha(x) u_\perp^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha(x) \mu_\alpha(x) [\gamma - \beta_\alpha(x) u_\parallel]}, \\
 \mathcal{L}(f_\alpha) &= \left(u_\parallel \frac{\partial}{\partial u_\perp} - u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \right) (f_\alpha) \\
 &= \left(u_\parallel \frac{\partial}{\partial u_\perp} - u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \right) n_\alpha A_\alpha u_\perp^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel)} \\
 &= 2l_\alpha \frac{u_\parallel}{u_\perp} f_\alpha - u_\parallel \mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial u_\perp} f_\alpha + u_\perp \mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{\partial \gamma}{\partial u_\parallel} f_\alpha - u_\perp \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha f_\alpha \\
 &= 2l_\alpha \frac{u_\parallel}{u_\perp} f_\alpha - u_\parallel \mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{u_\perp}{\gamma} f_\alpha + u_\perp \mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{u_\parallel}{\gamma} f_\alpha - u_\perp \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha f_\alpha, \\
 \mathcal{L}(f_\alpha) &= 2l_\alpha \frac{u_\parallel}{u_\perp} f_\alpha - u_\perp \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha f_\alpha. \tag{A.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(f_\alpha) &= \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) \frac{\partial}{\partial u_\perp} + N_{\parallel} u_\perp \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \right] (f_\alpha) \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) \left(2l_\alpha \frac{1}{u_\perp} - \mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{u_\perp}{\gamma} \right) - N_{\parallel} u_\perp \left(\mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{u_\parallel}{\gamma} - \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha \right) \right] f_\alpha \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) 2l_\alpha \frac{1}{u_\perp} - (\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) \mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{u_\perp}{\gamma} - N_{\parallel} u_\perp \left(\mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{u_\parallel}{\gamma} - \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha \right) \right] f_\alpha \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) 2l_\alpha \frac{1}{u_\perp} - \gamma \mu_\alpha \gamma_\alpha \frac{u_\perp}{\gamma} + N_{\parallel} u_\perp \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta_\alpha \right] f_\alpha \\
 &= \frac{1}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) 2l_\alpha \frac{1}{u_\perp} - \gamma_\alpha \mu_\alpha u_\perp (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha) \right] f_\alpha, \\
 L(f_\alpha) &= \frac{1}{\gamma u_\perp} [(\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) 2l_\alpha - \gamma_\alpha \mu_\alpha u_\perp^2 (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha)] f_\alpha. \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

Podemos obter uma forma diferente definindo a quantidade η_α :

$$\begin{aligned}
 \eta_\alpha &= -\gamma_\alpha \mu_\alpha (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha), \\
 L(f_\alpha) &= \eta_\alpha \frac{1}{\gamma u_\perp} \left[u_\perp^2 + (\gamma - N_{\parallel} u_\parallel) \frac{2l_\alpha}{\eta_\alpha} \right] f_\alpha. \tag{A.24}
 \end{aligned}$$

A.6 Derivadas espaciais aplicadas à função distribuição modelo

Da Eq. (4.55) temos a função distribuição modelo,

$$f_\alpha(\vec{u}, x) = n_\alpha(x) A_\alpha(x) u_\perp^{2l_\alpha} e^{-\gamma_\alpha(x) \mu_\alpha(x) [\gamma - \beta_\alpha(x) u_\parallel]}.$$

Na contribuição inhomogênea ao tensor dielétrico, a função distribuição aparece na forma $(c/\omega) f'_\alpha$. Utilizando esta forma explícita da função distribuição,

$$\frac{c}{\omega} f'_\alpha(\vec{u}, x) = \frac{c}{\omega} \frac{n'_\alpha}{n_\alpha} f_\alpha + \frac{c}{\omega} \frac{A'_\alpha}{A_\alpha} f_\alpha - \frac{c}{\omega} (\gamma'_\alpha \mu_\alpha + \mu'_\alpha \gamma_\alpha) (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel) f_\alpha + \frac{c}{\omega} \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta'_\alpha u_\parallel f_\alpha.$$

Vamos prosseguir com o cálculo das derivadas,

$$\begin{aligned} A'_\alpha(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{\mu_\alpha^{l_\alpha+1}(x)}{4\pi 2^{l_\alpha} l_\alpha! \gamma_\alpha(x) K_{l_\alpha+2}(\mu_\alpha(x))} \right] \\ &= (l_\alpha + 1) \frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} A_\alpha - \frac{\gamma'_\alpha}{\gamma_\alpha} A_\alpha - \frac{(d/d\mu_\alpha) K_{l_\alpha+2}}{K_{l_\alpha+2}} \mu'_\alpha A_\alpha \\ &= \left[(l_\alpha + 1) \frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} - \frac{\gamma'_\alpha}{\gamma_\alpha} - \frac{\mu_\alpha (d/d\mu_\alpha) K_{l_\alpha+2}}{K_{l_\alpha+2}} \frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} \right] A_\alpha \\ &= \left[(l_\alpha + 1) \frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} - \frac{\gamma'_\alpha}{\gamma_\alpha} - \frac{(l_\alpha + 2) K_{l_\alpha+2} - \mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} \right] A_\alpha, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a propriedade [75]

$$x K'_n(x) = n K_n(x) - x K_{n+1}(x),$$

onde a derivada é com respeito ao argumento de K_n .

Portanto,

$$A'_\alpha(x) = \left[-\frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} - \frac{\gamma'_\alpha}{\gamma_\alpha} + \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} \right] A_\alpha.$$

Ademais,

$$\frac{\mu'_\alpha}{\mu_\alpha} = -\frac{m_e c^2}{\mu_\alpha T_\alpha^2} \frac{dT_\alpha}{dx} = -\frac{T'_\alpha}{T_\alpha},$$

onde usamos m_e no lugar de m_α porque estas expressões são aplicáveis somente a populações eletrônicas diferentes. Ainda,

$$\frac{\gamma'_\alpha}{\gamma_\alpha} = -\frac{1}{2} \gamma_\alpha^2 (-2\beta_\alpha \beta'_\alpha) = \beta_\alpha^2 \gamma_\alpha^2 \frac{\beta'_\alpha}{\beta_\alpha} = \beta_\alpha^2 \gamma_\alpha^2 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha}.$$

Utilizando estes resultados nas expressões para A'_α e f'_α ,

$$A'_\alpha(x) = \left[\frac{T'_\alpha}{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} \right] A_\alpha;$$

$$\begin{aligned}
 \frac{c}{\omega} f'_\alpha(\vec{u}, x) &= \frac{c}{\omega} \frac{n'_\alpha}{n_\alpha} f_\alpha + \frac{c}{\omega} \left[\frac{T'_\alpha}{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} \right] f_\alpha \\
 &\quad - \frac{c}{\omega} \left(\mu_\alpha \beta_\alpha^2 \gamma_\alpha^3 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} - \frac{T'_\alpha}{T_\alpha} \mu_\alpha \gamma_\alpha \right) (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel) f_\alpha + \frac{c}{\omega} \gamma_\alpha \mu_\alpha \beta'_\alpha u_\parallel f_\alpha, \\
 \frac{c}{\omega} f'_\alpha(\vec{u}, x) &= \frac{c}{\omega} \frac{n'_\alpha}{n_\alpha} f_\alpha + \frac{c}{\omega} \left[\frac{T'_\alpha}{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} \right] f_\alpha \\
 &\quad - \frac{c}{\omega} \mu_\alpha \gamma_\alpha \left(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} - \frac{T'_\alpha}{T_\alpha} \right) (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel) f_\alpha + \frac{c}{\omega} \gamma_\alpha \beta_\alpha \mu_\alpha \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} u_\parallel f_\alpha, \\
 \frac{c}{\omega} f'_\alpha(\vec{u}, x) &= \frac{c}{\omega} f_\alpha \left\{ \frac{n'_\alpha}{n_\alpha} + \left[\frac{T'_\alpha}{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mu_\alpha \gamma_\alpha \left[\left(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} - \frac{T'_\alpha}{T_\alpha} \right) (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel) + \beta_\alpha \frac{v'_\alpha}{v_\alpha} u_\parallel \right] \right\}. \tag{A.25}
 \end{aligned}$$

Podemos definir as derivadas adimensionais,

$$\epsilon_{n\alpha} = \frac{c}{\omega} \frac{n'_\alpha}{n_\alpha}, \quad \epsilon_{T\alpha} = \frac{c}{\omega} \frac{T'_\alpha}{T_\alpha}, \quad \epsilon_{v\alpha} = \frac{c}{\omega} \frac{v'_\alpha}{v_\alpha}, \tag{A.26}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{c}{\omega} f'_\alpha(\vec{u}, x) &= f_\alpha \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \mu_\alpha \gamma_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_\alpha u_\parallel) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_\parallel \right] \right\}. \tag{A.27}
 \end{aligned}$$

A.7 Notação alternativa para as componentes χ_{ij}

Podemos tomar as Eqs. (A.4), (A.6), (A.7) e incorporar novamente o sinal s no índice de soma n , tal que $sn \rightarrow n$, com n assumindo valores positivos, negativos e nulo,

$$\begin{aligned}
 \chi_{yz} &= -i \sum_\alpha \frac{1}{Y_\alpha} s_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y_\alpha} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|)(m) J(n, m, 1; f_\alpha) \\
 &\quad + \frac{1}{2N_\perp} \sum_\alpha s_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \frac{1}{Y_\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y_\alpha} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m \left[\left(\frac{N_\perp}{Y_\alpha} \right)^2 a(|n|, m - |n|) J(n, m + 1, 1; (c/\omega) f'_\alpha) \right. \\
 &\quad \left. + [a(|n|, m - |n|)(m - n^2) + b(|n|, m - |n|)] J(n, m, 1; (c/\omega) f'_\alpha) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2N_\perp} \sum_\alpha s_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \frac{1}{Y_\alpha} a(0, 0) J(0, 1, 1; (c/\omega) f'_\alpha) + \frac{1}{N_\perp} \sum_\alpha \frac{X_\alpha}{n_\alpha} \frac{c}{\Omega_\alpha} \int d^3 u u_\perp \frac{1}{\gamma} \frac{u_\parallel}{u_\perp} f'_\alpha, \tag{A.28}
 \end{aligned}$$

onde definiu-se

$$J(n, m, h; g_\alpha) \equiv \int d^3 u \frac{u_\parallel^h u_\perp^{2(m-1)} u_\perp L(g_\alpha)}{\gamma - n s_\alpha Y_\alpha - N_\parallel u_\parallel}. \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned} \chi_{zz} = & \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}^2} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|) J(n, m, 2; f_{\alpha}) \\ & + \frac{1}{N_{\perp}^2} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} a(0, 0) J(0, 0, 2; f_{\alpha}); \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$e_{zz} = - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}), \quad (\text{A.31})$$

Na componente χ_{yz} , o termo com $m = 0$ na "contribuição homogênea" se anula por ser proporcional a m . Na "contribuição inhomogênea", termos com $b(0, 0)$ se anulam, já que $b(0, 0) = 0$, bem como o termo com $(m)a(0, m)$, para $m = 0$, mas um termo com $a(0, 0)$ permanece.

A.7.1 Definição alternativa para a componente ε_{zz}

Podemos escrever

$$\varepsilon_{zz} = 1 + e_{zz0} + N_{\perp}^2 \chi_{zz}, \quad (\text{A.32})$$

onde

$$\begin{aligned} \chi_{zz} = & \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}^2} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|) J(n, m, 2; f_{\alpha}), \\ e_{zz0} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} a(0, 0) J(0, 0, 2; f_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}). \end{aligned}$$

Note-se que χ_{zz} na Eq. (A.32) não é o mesmo χ_{zz} que na Eq. (A.30). Para avaliar e_{zz0} podemos escrever

$$\begin{aligned} e_{zz0} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \frac{u_{\perp} L(f_{\alpha})}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}), \\ e_{zz0} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \left[\frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} \frac{1}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{u_{\perp}}{\gamma} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\perp}} + N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[u_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\perp}} - u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} \right] \right], \\ e_{zz0} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[\frac{u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} \left[(\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\perp}} + N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} \right] - u_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\perp}} + u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} \right], \\ e_{zz0} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[u_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\perp}} + \frac{u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} - u_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\perp}} + u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} \right], \\ e_{zz0} = & \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \left[\frac{u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} N_{\parallel} u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} + u_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{zz0} &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{u_{\parallel}}{\gamma} \left[\frac{N_{\parallel} u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} + \frac{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} \right], \\
 e_{zz0} &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3u \frac{u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}},
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

que corresponde à quantidade e_{zz} encontrada após a Eq. (2) da Ref. [39].

Avaliação de e_{zz0} da "forma alternativa"

Utilizando a função distribuição, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial u_{\parallel}} &= -\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left(\frac{u_{\parallel}}{\gamma} - \beta_{\alpha} \right) f_{\alpha}; \\
 e_{zz0} &= - \sum_{\alpha} X_{\alpha} A_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \int d^3u \frac{u_{\parallel}}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} \left(\frac{u_{\parallel}}{\gamma} - \beta_{\alpha} \right) u_{\perp}^{2l_{\alpha}} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma - \beta_{\alpha} u_{\parallel})}, \\
 e_{zz0} &= -2\pi \sum_{\alpha} X_{\alpha} A_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} e^{\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \int_0^{\infty} du_{\perp} \frac{u_{\perp}}{\gamma} \frac{1}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} (u_{\parallel} - \beta_{\alpha} \gamma) u_{\perp}^{2l_{\alpha}} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \gamma}, \\
 e_{zz0} &= 2\pi \sum_{\alpha} X_{\alpha} A_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} e^{\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \int_{\gamma_{\parallel}}^{\infty} d\gamma \frac{1}{\gamma - N_{\parallel} u_{\parallel}} (\beta_{\alpha} \gamma - u_{\parallel}) (\gamma^2 - \gamma_{\parallel}^2)^{l_{\alpha}} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \gamma}. \\
 &\quad x = \gamma - \gamma_{\parallel}, \quad dx = d\gamma, \quad \gamma = x + \gamma_{\parallel}, \\
 e_{zz0} &= 2\pi \sum_{\alpha} X_{\alpha} A_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} \int_0^{\infty} dx \frac{\beta_{\alpha} x + \beta_{\alpha} \gamma_{\parallel} - u_{\parallel}}{x + \xi_0} (x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{l_{\alpha}} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} x},
 \end{aligned}$$

onde $\xi_0 = \gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}$.

A integral em x pode ser escrita como segue,

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} dx \frac{\beta_{\alpha} x + \beta_{\alpha} \gamma_{\parallel} - u_{\parallel}}{x + \xi_0} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}} \binom{l_{\alpha}}{i} (2\gamma_{\parallel})^{l_{\alpha}-i} x^{l_{\alpha}+i} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} x} \\
 &= \sum_{i=0}^{l_{\alpha}} \binom{l_{\alpha}}{i} (2\gamma_{\parallel})^{l_{\alpha}-i} [\beta_{\alpha} L_0(l_{\alpha} + i + 1) + (\beta_{\alpha} \gamma_{\parallel} - u_{\parallel}) L_0(l_{\alpha} + i)].
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 e_{zz0} &= 2\pi \sum_{\alpha} X_{\alpha} A_{\alpha} \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}} \binom{l_{\alpha}}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} (2\gamma_{\parallel})^{l_{\alpha}-i} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} \\
 &\quad \times [\beta_{\alpha} L_0(l_{\alpha} + i + 1) + (\beta_{\alpha} \gamma_{\parallel} - u_{\parallel}) L_0(l_{\alpha} + i)].
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

Consideremos agora o seguinte,

$$\begin{aligned}
 &[\beta_{\alpha} L_0(l_{\alpha} + i + 1) + (\beta_{\alpha} \gamma_{\parallel} - u_{\parallel}) L_0(l_{\alpha} + i)] \\
 &= \beta_{\alpha} \left[\frac{(l_{\alpha} + i)!}{(\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha})^{l_{\alpha}+i+1}} - \xi_0 L_0(l_{\alpha} + i) \right] + (\beta_{\alpha} \gamma_{\parallel} - u_{\parallel}) L_0(l_{\alpha} + i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \beta_\alpha \frac{(l_\alpha + i)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha + i + 1}} + [\beta_\alpha (\gamma_\parallel - \xi_0) - u_\parallel] L_0(l_\alpha + i) \\
 &= \beta_\alpha \frac{(l_\alpha + i)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha + i + 1}} + [\beta_\alpha N_\parallel u_\parallel - u_\parallel] L_0(l_\alpha + i).
 \end{aligned}$$

Usando a Eq. (A.15),

$$\begin{aligned}
 L_{sn}(j) &= \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_{sn}^p + x_{sn}^j e^{-x_{sn}} E_1(-x_{sn}) \right]; \\
 \rightarrow \beta_\alpha \frac{(l_\alpha + i)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha + i + 1}} + [\beta_\alpha N_\parallel u_\parallel - u_\parallel] &\frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha + i}} \left[\Theta(l_\alpha + i) \sum_{p=0}^{l_\alpha + i - 1} (l_\alpha + i - 1 - p)! x_0^p \right. \\
 &\left. + x_0^{l_\alpha + i - 2} e^{-x_0} E_1(-x_0) \right].
 \end{aligned}$$

Usando este resultado na Eq. (A.34),

$$\begin{aligned}
 e_{zz0} &= 2\pi \sum_\alpha X_\alpha A_\alpha \mu_\alpha \gamma_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha} \binom{l_\alpha}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha + i + 1}} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel u_\parallel (2\gamma_\parallel)^{l_\alpha - i} e^{-\mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\parallel - \beta_\alpha u_\parallel)} \\
 &\times \left\{ \beta_\alpha (l_\alpha + i)! + \gamma_\alpha \mu_\alpha [\beta_\alpha N_\parallel u_\parallel - u_\parallel] \left[\Theta(l_\alpha + i) \sum_{p=0}^{l_\alpha + i - 1} (l_\alpha + i - 1 - p)! x_0^p + x_0^{l_\alpha + i} e^{-x_0} E_1(-x_0) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{zz0} &= 2\pi \sum_\alpha X_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha} \binom{l_\alpha}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha + i}} \\
 &\times \left\{ \beta_\alpha (l_\alpha + i)! G(1, l_\alpha - i, 0) + \eta_\alpha \left[\Theta(l_\alpha + i) \sum_{p=0}^{l_\alpha + i - 1} (l_\alpha + i - 1 - p)! G(2, l_\alpha - i, p) \right. \right. \\
 &\left. \left. + H(2, l_\alpha - i, l_\alpha + i) \right] \right\}. \tag{A.35}
 \end{aligned}$$

A.7.2 Caso particular: elétrons

Para aplicação à AKR, os íons podem ser considerados como um fundo neutralizante, apenas os elétrons aparecem na relação de dispersão. Portanto, embora tenhamos um somatório sobre as diferentes populações, \sum_α , $s_\alpha = -1$ para todas as populações.

Portanto, particularizamos as expressões para as componentes do tensor dielétrico, para o caso dos elétrons. Por conveniência, também trocamos n por $-n$ (esta é uma operação válida, uma vez que n é um índice de soma que assume valores positivos e negativos).

Das Eqs. (A.28) e (A.31), fazendo $s_\alpha = -1$ e $n \rightarrow -n$,

$$\begin{aligned}
 \chi_{yz} = & i \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|) (m) J(n, m, 1; f_{\alpha}) \\
 & - \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m \left[\left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^2 a(|n|, m - |n|) J(n, m + 1, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right. \\
 & \quad \left. + [a(|n|, m - |n|)(m - n^2) + b(|n|, m - |n|)] J(n, m, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) \right] \\
 & - \frac{1}{2N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} a(0, 0) J(0, 1, 1; (c/\omega) f'_{\alpha}) + \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3 u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha}; \quad (\text{A.36})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{zz} = & \sum_{\alpha} \frac{1}{Y_{\alpha}^2} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y_{\alpha}} \right)^{2(m-1)} \sum_{n=-m}^m a(|n|, m - |n|) J(n, m, 2; f_{\alpha}) \\
 & + \frac{1}{N_{\perp}^2} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} a(0, 0) J(0, 0, 2; f_{\alpha}); \quad (\text{A.37})
 \end{aligned}$$

$$e_{zz} = - \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 u \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \mathcal{L}(f_{\alpha}), \quad (\text{A.38})$$

onde usamos

$$J(n, m, h; g_{\alpha}) \equiv \int d^3 u \frac{u_{\parallel}^h u_{\perp}^{2(m-1)} u_{\perp} L(g_{\alpha})}{\gamma - n Y_{\alpha} - N_{\parallel} u_{\parallel}}. \quad (\text{A.39})$$

A expressão alternativa para e_{zz} , Eq. (A.33), não é afetada pelas operações $s_{\alpha} = -1$ e $n \rightarrow -n$.

A integral J pode ser obtida das Eqs. (A.12) e (A.14) ou (A.20) e (A.21), convenientemente modificadas,

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h; f_{\alpha}) = & 2\pi n_{\alpha} A_{\alpha} \eta_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}+m-1} \binom{l_{\alpha}+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h (2\gamma_{\parallel})^{(l_{\alpha}+m-1-i)} e^{-\gamma_{\alpha} \mu_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} \\
 & \times \left[L_n(l_{\alpha} + m + i + 1) + \left(2\gamma_{\parallel} + \frac{2l_{\alpha}}{\eta} \right) L_n(l_{\alpha} + m + i) + (\gamma_{\parallel} - N_{\parallel} u_{\parallel}) \frac{2l_{\alpha}}{\eta_{\alpha}} L_n(l_{\alpha} + m + i - 1) \right]; \quad (\text{A.40})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h; (c/\omega)f'_\alpha) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T_\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h; f_\alpha) \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 - 1) \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha} \right] J(n, m, h+1; f_\alpha) \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) \eta_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\quad \times [L_n(l_\alpha + m + i + 1) + \gamma_{\parallel} L_n(l_\alpha + m + i)] \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\quad \times (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-1-i)} [L_n(l_\alpha + m + 1 + i) + 2\gamma_{\parallel} L_n(l_\alpha + m + i) + \gamma_{\parallel}^2 L_n(l_\alpha + m - 1 + i)] \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha N_{\parallel} (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^{h+1} e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} \\
 &\quad \times [L_n(l_\alpha + m + i) + \gamma_{\parallel} L_n(l_\alpha + m - 1 + i)] \\
 &\quad + [(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T_\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_{\parallel} \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha}] 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^h e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} (2\gamma_{\parallel})^{(l_\alpha+m-i)} L_n(l_\alpha + m + i); \tag{A.41}
 \end{aligned}$$

$$L_n(j) = \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^j} \left[\Theta(j) \sum_{p=0}^{j-1} (j-1-p)! x_n^p + x_n^j e^{-x_n} E_1(-x_n) \right], \tag{A.42}$$

$$x_n = -\gamma_\alpha \mu_\alpha \xi, \quad \xi = \gamma_{\parallel} - nY_\alpha - N_{\parallel} u_{\parallel}.$$

Podemos também definir as seguintes integrais auxiliares,

$$\begin{aligned}
 G(a, b, c) &= \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^a (2\gamma_{\parallel})^b e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} x_n^c; \\
 H(a, b, c) &= \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel}^a (2\gamma_{\parallel})^b e^{-\gamma_\alpha \mu_\alpha (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel})} x_n^c e^{-x_n} E_1(-x_n), \tag{A.43}
 \end{aligned}$$

e escrever a integral J como segue:

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h; f_\alpha) &= 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \\
 &\times \left\{ (l_\alpha+m+i-1)! [C_1 G(h, l+m-1-i, 0) + C_2 G(h+1, l+m-1-i, 0) \right. \\
 &\quad \left. + C_3 G(h, l+m-i, 0)] \right. \\
 &+ \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! [D_1 G(h, l+m-1-i, p) \right. \\
 &\quad \left. + D_2 G(h+1, l+m-1-i, p) \right. \\
 &\quad \left. + D_3 G(h+2, l+m-1-i, p)] + [D_1 H(h, l+m-1-i, l_\alpha+m+i-1) \right. \\
 &\quad \left. + D_2 H(h+1, l+m-1-i, l_\alpha+m+i-1) + D_3 H(h+2, l+m-1-i, l_\alpha+m+i-1)] \right\}, \\
 &\hspace{15em} (A.44)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} [2l_\alpha + \eta_\alpha n Y_\alpha - (l_\alpha + m + i)(1 - N_{\parallel} \beta_\alpha)]; \\
 C_2 &= \frac{1}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \eta_\alpha N_{\parallel} = -N_{\parallel} (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha); \\
 C_3 &= \frac{1}{\mu_\alpha \gamma_\alpha} \frac{\eta_\alpha}{2} = -\frac{1}{2} (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha); \\
 D_1 &= 2l_\alpha n Y_\alpha - \eta_\alpha (1 - n^2 Y_\alpha^2) = 2l_\alpha n Y_\alpha + \mu_\alpha \gamma_\alpha (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha) (1 - n^2 Y_\alpha^2); \\
 D_2 &= \eta_\alpha 2 n Y_\alpha N_{\parallel} = -\mu_\alpha \gamma_\alpha (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha) 2 n Y_\alpha N_{\parallel}; \\
 D_3 &= -\eta_\alpha (1 - N_{\parallel}^2) = \mu_\alpha \gamma_\alpha (1 - N_{\parallel} \beta_\alpha) (1 - N_{\parallel}^2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J(n, m, h; (c/\omega)f'_\alpha) &= \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right\} J(n, m, h; f_\alpha) \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha \beta_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 - 1) \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha} \right] J(n, m, h+1; f_\alpha) \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \\
 &\times \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} G(h, 0, 0) + \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (nY_\alpha G(h, 0, p) + N_{\parallel} G(h+1, 0, p)) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[nY_\alpha H(h, 0, l_\alpha+m+i) + N_{\parallel} H(h+1, 0, l_\alpha+m+i) \right] \right\} \\
 &\quad - \mu_\alpha \gamma_\alpha (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} \left[\left(\frac{(l_\alpha+m+i)}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)} + nY_\alpha \right) G(h, l_\alpha+m-i-1, 0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + N_{\parallel} G(h+1, l_\alpha+m-i-1, 0) + \frac{1}{2} G(h, l_\alpha+m-i, 0) \right] \right. \\
 &\quad + \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! \left(n^2 Y_\alpha^2 G(h, l_\alpha+m-i-1, p) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(nY_\alpha) N_{\parallel} G(h+1, l_\alpha+m-i-1, p) + N_{\parallel}^2 G(h+2, l_\alpha+m-i-1, p) \right) \right] \\
 &\quad + \left[n^2 Y_\alpha^2 H(h, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) + 2(nY_\alpha) N_{\parallel} H(h+1, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) \right. \\
 &\quad \left. \left. + N_{\parallel}^2 H(h+2, l_\alpha+m-i-1, l_\alpha+m+i-1) \right] \right\} \\
 &\quad + \mu_\alpha \gamma_\alpha N_{\parallel} (\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) 2l_\alpha 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m-1} \binom{l_\alpha+m-1}{i} \frac{1}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)^{l_\alpha+m+i-1}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{(l_\alpha+m+i-1)!}{(\gamma_\alpha \mu_\alpha)} G(h+1, 0, 0) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\Theta(l_\alpha+m+i-1) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-2} (l_\alpha+m+i-2-p)! \left((nY_\alpha) G(h+1, 0, p) + N_{\parallel} G(h+2, 0, p) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[(nY_\alpha) H(h+1, 0, l_\alpha+m+i-1) + N_{\parallel} H(h+2, 0, l_\alpha+m+i-1) \right] \right\} \\
 &\quad + \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \eta_\alpha - \mu_\alpha N_{\parallel} \gamma_\alpha \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} \right] 2\pi n_\alpha A_\alpha \sum_{i=0}^{l_\alpha+m} \binom{l_\alpha+m}{i} \frac{1}{(\mu_\alpha \gamma_\alpha)^{l_\alpha+m+i}} \\
 &\quad \times \left\{ \left[\Theta(l_\alpha+m+i) \sum_{p=0}^{l_\alpha+m+i-1} (l_\alpha+m+i-1-p)! G(h, l_\alpha+m-i, p) \right] \right. \\
 &\quad \left. + H(h, l_\alpha+m-i, l_\alpha+m+i) \right\}. \tag{A.45}
 \end{aligned}$$

A.8 Termo adicional na contribuição inhomogênea da componente χ_{yz}

Na contribuição inhomogênea de χ_{yz} , o último termo é o seguinte,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3u u_{\perp} \frac{1}{\gamma} \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} f'_{\alpha} \\ &= \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{(-1)}{Y_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} u_{\parallel} \left(\frac{c}{\omega} f'_{\alpha} \right), \end{aligned}$$

onde foi usado $s_{\alpha} = -1$, uma vez que a expressão é válida somente para elétrons.

Usando a Eq. (A.27), obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{Y_{\alpha}} \int d^3u \frac{1}{\gamma} u_{\parallel} f_{\alpha} \\ & \times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_{\alpha} K_{l_{\alpha}+3}}{K_{l_{\alpha}+2}} \right) - \gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} \right] - \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left[(\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_{\alpha} u_{\parallel}) + \beta_{\alpha} \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\}, \\ & = -(2\pi) \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} A_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} e^{\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \int_0^{\infty} du_{\perp} \frac{u_{\perp}}{\gamma} u_{\perp}^{2l_{\alpha}} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \gamma} \\ & \times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_{\alpha} K_{l_{\alpha}+3}}{K_{l_{\alpha}+2}} \right) - \gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} \right] - \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left[(\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_{\alpha} u_{\parallel}) + \beta_{\alpha} \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\}, \\ & = -(2\pi) \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} A_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} e^{\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \int_{\gamma_{\parallel}}^{\infty} d\gamma (\gamma^2 - \gamma_{\parallel}^2)^{l_{\alpha}} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \gamma} \\ & \times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_{\alpha} K_{l_{\alpha}+3}}{K_{l_{\alpha}+2}} \right) - \gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} \right] - \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left[(\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma - \beta_{\alpha} u_{\parallel}) + \beta_{\alpha} \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\}, \\ & = -(2\pi) \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} A_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} e^{\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} u_{\parallel}} \int_0^{\infty} dx (x^2 + 2\gamma_{\parallel} x)^{l_{\alpha}} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (x + \gamma_{\parallel})} \\ & \quad \times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_{\alpha} K_{l_{\alpha}+3}}{K_{l_{\alpha}+2}} \right) - \gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right. \\ & \quad \left. - \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left[(\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (x + \gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel}) + \beta_{\alpha} \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\}, \\ & = -(2\pi) \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}} \binom{l_{\alpha}}{i} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} (2\gamma_{\parallel})^{l_{\alpha}-i} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} \int_0^{\infty} dx x^{l_{\alpha}+i} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} x} \\ & \quad \times \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_{\alpha} K_{l_{\alpha}+3}}{K_{l_{\alpha}+2}} \right) - \gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} \right] \right. \\ & \quad \left. - \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left[(\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (x + \gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel}) + \beta_{\alpha} \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\}, \\ & = -\frac{2\pi}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}} \binom{l_{\alpha}}{i} \frac{(l_{\alpha} + i)!}{(\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha})^{l_{\alpha}+i+1}} \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} u_{\parallel} (2\gamma_{\parallel})^{l_{\alpha}-i} e^{-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\parallel} - \beta_{\alpha} u_{\parallel})} \\ & \quad \times \left[-\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) \frac{(l_{\alpha} + i + 1)}{\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \right] \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \epsilon_{n\alpha} + \left[\epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_\alpha K_{l_\alpha+3}}{K_{l_\alpha+2}} \right) - \gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} \right] - \mu_\alpha \gamma_\alpha \left[(\gamma_\alpha^2 \beta_\alpha^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (\gamma_{\parallel} - \beta_\alpha u_{\parallel}) + \beta_\alpha \epsilon_{v\alpha} u_{\parallel} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow -\frac{2\pi}{N_{\perp}} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} A_{\alpha} \sum_{i=0}^{l_{\alpha}} \binom{l_{\alpha}}{i} \frac{(l_{\alpha} + i)!}{(\mu_{\alpha} \gamma_{\alpha})^{l_{\alpha} + i + 1}} \\ & \times \left\{ \left[-(\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) (l_{\alpha} + i + 1) + \epsilon_{n\alpha} + \epsilon_{T\alpha} \left(1 - \frac{\mu_{\alpha} K_{l_{\alpha} + 3}}{K_{l_{\alpha} + 2}} \right) - \gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} \right] G(1, l_{\alpha} - i, 0) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} (\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) G(1, l_{\alpha} - i + 1, 0) + \mu_{\alpha} \gamma_{\alpha} \beta_{\alpha} \left[(\gamma_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^2 \epsilon_{v\alpha} - \epsilon_{T\alpha}) - \epsilon_{v\alpha} \right] G(2, l_{\alpha} - i, 0) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Esta é a forma explícita a ser utilizada para o último termo encontrado na Eq. (A.36).

A.9 Expansões úteis

Expansões em série úteis das funções de Bessel,

$$\begin{aligned} J_n^2(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) \rho^{2(|n|+m)}; \\ [J'_n(\rho)]^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} b(n, m) \rho^{2(|n|+m-1)}; \\ J_n(\rho) J'_n(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) \rho^{2(|n|+m)-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

onde

$$\begin{aligned} a(n, m) &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2(|n|+m)} \frac{(-1)^m [2(|n| + m)]!}{[(|n| + m)!]^2 (2|n| + m)! m!}, \\ b(n, m) &= \begin{cases} a(1, m - 2), & \text{para } n = 0 \\ \frac{1}{4} \left[a(n - 1, m) + a(n + 1, m - 2) - 2 \frac{|n|+m-1}{|n|+m} a(n, m - 1) \right], & \text{para } n > 0, \end{cases} \\ \frac{1}{(-m)!} &= 0, \quad \text{para } m \geq 1. \end{aligned}$$

A terceira equação das Eqs. (A.47) é demonstrada como segue,

$$J_n(\rho) J'_n(\rho) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} J_n^2(\rho) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) \rho^{2(|n|+m)} = \sum_{m=0}^{\infty} a(n, m) (|n| + m) \rho^{2(|n|+m)-1}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards, 5th edition, August, 1966.
- [2] AKASOFU, S. -I.; CORRICK, G. K. A modeling of magnetic field variations during magnetospheric substorms. *Planetary and Space Science*, v. 28:749–755, 1980.
- [3] AKASOFU, S. -I.; COVEY, D. N. Effects of the interplanetary magnetic field on the magnetotail structure: Large-scale changes of the plasma sheet during magnetospheric substorms. *Planetary and Space Science*, v. 28:757–762, 1980.
- [4] BAKER, D. N. et al. Substorms: A global instability of the magnetosphere-ionosphere system. *Journal of Geophysical Research*, v. 104(n. A7):14601–14611, July 1, 1999.
- [5] BARBOSA, D. D. High-latitude field-aligned current sources and induced electric fields. *Journal of Geophysical Research*, v. 84(n. A9), September 1, 1979.
- [6] BEKEFI, G. *Radiation processes in plasmas*. John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- [7] BENSON, R. F.; CALVERT, W. ISIS1 observations at the source of auroral kilometric radiation. *Geophysical Research Letters*, v. 6(n. 6), June, 1979.
- [8] BERNSTEIN, I. B.; GREENE, J. M.; KRUSKAL, M. D. Exact nonlinear plasma oscillations. *Physical Review*, v. 108(n. 3), November 1, 1957.
- [9] BESKIN, V. S.; GUREVICH, A. V.; ISTOMIN, Ya. I. Permittivity of a weakly inhomogeneous plasma. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 65(4), April, 1987.
- [10] BINGHAM, R.; CAIRNS, R. A. Generation of auroral kilometric radiation by electron horseshoe distributions. *Physics of Plasmas*, v. 7(n. 7), July, 2000.
- [11] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. Springer-Verlag, 3rd edition, 2004.

- [12] BLOCK, L. P. A double layer review. *Astrophysics and Space Science*, (55):59–83, 1978.
- [13] BLOCK, L. P.; FÄLTHAMMAR, C. -G. The role of magnetic-field-aligned electric fields in auroral acceleration. *Journal of Geophysical Research*, v. 95(n. A5):5877–5888, May 1, 1990.
- [14] BRYANT, D. A.; BINGHAM, R.; DE ANGELIS, U. Double layers are not particle accelerators. *Physical Review Letters*, v. 68(n. 1), January 6, 1992.
- [15] BUDDEN, K. G. *The propagation of radio waves*. Cambridge University Press, 1985.
- [16] CALDELA FILHO, R. A. *Efeitos de inhomogeneidades no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetizados*. Tese (Doutorado em Física). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1990.
- [17] CALDELA FILHO, R. A.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. The dispersion relation and the dielectric tensor of inhomogeneous magnetized plasmas. *Journal of Plasma Physics*, v. 42:165–175, 1989.
- [18] CALVERT, W. The auroral plasma cavity. *Geophysical Research Letters*, v. 8(n. 8):919–921, August, 1981.
- [19] CALVERT, W. A feedback model for the source of auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, v. 87(n. 10):8199–8214, October 1, 1982.
- [20] CALVERT, W. An explanation for auroral structure and the triggering of auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, v. 100(n. A8):14887–14894, August 1, 1995.
- [21] CAVALCANTI, C. J. H. *Emissão, propagação e amplificação da radiação quilométrica das auroras nas subcavidades aurorais*. Tese (Doutorado em Física). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.
- [22] CAVALCANTI, C. J. H.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Emission and propagation of auroral kilometric radiation in the density depletions of the auroral region. *Journal of Geophysical Research*, v. 101(n. A11):24557–24564, November 1, 1996.
- [23] CHIU, Y. T.; SCHULZ, M. Self-consistent particle and parallel electrostatic field distributions in the magnetospheric-ionospheric auroral region. *Journal of Geophysical Research*, v. 83(n. A2), February 1, 1978.

- [24] COSTA JUNIOR, E. *A influência dos parâmetros do vento solar na emissão da AKR durante tempestades magnéticas*. Dissertação (Mestrado em Geofísica Espacial), Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006.
- [25] DELORY, G. T. et al. FAST observations of electron distributions within AKR sources. *Geophysical Research Letters*, v. 25(n. 12):2069–2072, June 15, 1998.
- [26] DMSP. Defense meteorological satellite program. Disponível em: <http://ghrc.msfc.nasa.gov:5721/source_documents/dmsp_f8.html> Acesso em: 11 setembro 2007.
- [27] DORY, R. A.; GUEST, G. E.; HARRIS, E. G. Unstable electrostatic plasma waves propagating perpendicular to a magnetic field. *Physical Review Letters*, v. 14(n. 5), February 1, 1965.
- [28] DREMUKHINA, L. A. et al. Structure of the magnetospheric magnetic field during magnetic storms. *Journal of Geophysical Research*, v. 104(n. A12):28351–28360, December 1, 1999.
- [29] ERGUN, R. E. et al. FAST satellite observations of electric field structures in the auroral zone. *Geophysical Research Letters*, v. 25(n. 12):2025–2028, June 15, 1998.
- [30] ERGUN, R. E. et al. FAST satellite wave observations in the AKR source region. *Geophysical Research Letters*, v. 25(n. 12):2061–2064, June 15, 1998.
- [31] ERGUN, R. E. et al. Electron-cyclotron maser driven by charged-particle acceleration from magnetic field-aligned electric fields. *The Astrophysical Journal*, (538):456–466, July 20, 2000.
- [32] ERGUN, R. E. et al. Auroral particle acceleration by strong double layers: The upward current region. *Journal of Geophysical Research*, v. 109, 2004.
- [33] HÅLAND, S. et al. Magnetospheric and ionospheric response to a substorm: Geotail HEP-LD and Polar PIXIE observations. *Journal of Geophysical Research*, v. 104(n. A12):28459–28474, December 1, 1999.
- [34] HANASZ, J. et al. Occurrence distributions of the auroral kilometric radiation ordinary and extraordinary wave modes. *Journal of Geophysical Research*, v. 108(n. A11), 2003.

- [35] KASABA, Y. et al. The angular distribution of auroral kilometric radiation observed by the GEOTAIL spacecraft. *Geophysical Research Letters*, v. 24(n. 20):2483–2486, October 15, 1997.
- [36] FUNG, S. F.; VIÑAS, A. F. Excitation of high-frequency electromagnetic waves by energetic electrons with a loss cone distribution in a field-aligned potential drop. *Journal of Geophysical Research*, v. 99(n. A5):8671–8686, May 1, 1994.
- [37] GAELZER, R. *O maser de elétron-cíclotron como mecanismo gerador da radiação quilométrica das auroras*. Dissertação (Mestrado em Física). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1991.
- [38] GAELZER, R.; ZIEBELL, L. F.; SCHNEIDER, R. S. Propagation and amplification of auroral kilometric radiation in finite width auroral cavities. *Journal of Geophysical Research*, v. 97(n. A12):19299–19310, December 1, 1992.
- [39] GAELZER, R.; ZIEBELL, L. F.; SCHNEIDER, R. S. Ray tracing studies on auroral kilometric radiation in finite width auroral cavities. *Journal of Geophysical Research*, v. 99(n. A5):8905–8916, May 1, 1994.
- [40] GOERTZ, C. K. Double layers and electrostatic shocks in space. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 17(n. 3), May, 1979.
- [41] GRABBE, C. L. Auroral kilometric radiation: A theoretical review. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, v. 19(n. 4):627–633, November, 1981.
- [42] GREEN, J. L.; GURNETT, D. A.; HOFFMAN, R. A. A correlation between auroral kilometric radiation and inverted V electron precipitation. *Journal of Geophysical Research*, v. 84(n. A9), September 1, 1979.
- [43] GURNETT, D. A. The earth as a radio source: Terrestrial kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, v. 79(n. 28), October 1, 1974.
- [44] HASHIMOTO, K.; CALVERT, W.; MATSUMOTO, H. Kilometric continuum detected by Geotail. *Journal of Geophysical Research*, v. 104(n. A12):28645–28656, December 1, 1999.
- [45] HILGERS, A.; ROUX, A.; LUNDIN, R. Characteristics of akr sources; a statistical description. *Geophysical Research Letters*, v. 18(n. 8):1493–1496, August 1991.

- [46] IIZUKA, S. et al. Buneman instability, Pierce instability, and double-layer formation in a collisionless plasma. *Physical Review Letters*, v. 43(n. 19), November 5, 1979.
- [47] KALLENRODE, M-B. *Space Physics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2001.
- [48] KAMIDE, Y. et al. Current understanding of magnetic storms: Storm-substorm relationships. *Journal of Geophysical Research*, v. 103(n. A8):17705–17728, August 1, 1998.
- [49] KRALL, N. A.; TRIVELPIECE, A. W. *Principles of Plasma Physics*. McGraw-Hill, Inc., 1973.
- [50] LAU, Y. Y.; CHU, K. R. Electron-cyclotron maser instability driven by a loss-cone distribution. *Physical Review Letters*, v. 50(n. 4), January 24, 1983.
- [51] LEE, L. C.; KAN, J. R.; WU, C. S. Generation of auroral kilometric radiation and structure of auroral acceleration region. *Planetary and Space Science*, v. 28:703–711, 1980.
- [52] McFADDEN, J. P.; CARLSON, C. W.; ERGUN, R. E. Microstructure of the auroral acceleration region as observed by FAST. *Journal of Geophysical Research*, v. 104(n. A7):14453–14480, July 1, 1999.
- [53] MELROSE, D. B.; HEWITT, R. G.; DULK, G. A. Electron-cyclotron maser emission: Relative growth and damping rates for different modes and harmonics. *Journal of Geophysical Research*, v. 89(n. A2):897–904, February 1, 1984.
- [54] MENIETTI, J. D. et al. Near-source and remote observations of kilometric continuum radiation from multispacecraft observations. *Journal of Geophysical Research*, v. 108(n. A11), 2003.
- [55] MIKHAILOVSKII, A. B. *Oscillations of an inhomogeneous plasma*, volume 3 of *Reviews of Plasma Physics*. Consultants Bureau, 1967.
- [56] MIKHAILOVSKII, A. B. *Electromagnetic instabilities in an inhomogeneous plasma*. IOP Publishing Ltd, 1992.
- [57] NEWMAN, D. L. et al. Formation of double layers and electron holes in a current-driven space plasma. *Physical Review Letters*, v. 87(n. 25), December 17, 2001.
- [58] NSSDC. Master catalog. Disponível em: <<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/database/sc-query.html>> Acesso em: 10 setembro 2007.

- [59] OMIDI, N.; GURNETT, D. A. Growth rate calculations of auroral kilometric radiation using the relativistic resonance condition. *Journal of Geophysical Research*, v. 87(n. A4):2377–2383, April 1, 1982.
- [60] OMIDI, N.; WU, C. S.; GURNETT, D. A. Generation of auroral kilometric radiation and Z mode radiation by the cyclotron maser mechanism. *Journal of Geophysical Research*, v. 89(n. A2):883–895, February 1, 1984.
- [61] PAVAN, J.; ZIEBELL, L. F. Effect of perpendicular gradients on the amplification of auroral kilometric radiation in auroral cavities with density depletions. *Journal of Geophysical Research - Space Physics*, aceito para publicação, Outubro, 2007.
- [62] POTTELETTE, R.; TREUMANN, A. Electron holes in the auroral upward current region. *Geophysical Research Letters*, v. 32, 2005.
- [63] POTTELETTE, R.; TREUMANN, R. A.; BERTHOMIER, M. Auroral plasma turbulence and the cause of auroral kilometric radiation fine structure. *Journal of Geophysical Research*, v. 106(n. A5):8465–8476, May 1, 2001.
- [64] PRITCHETT, P. L. Relativistic dispersion, the cyclotron maser instability, and auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, v. 89(n. A10):8957–8970, October 1, 1984.
- [65] PRITCHETT, P. L. et al. Free energy sources and frequency bandwidth for the auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, v. 104(n. A5):10317–10326, May 1, 1999.
- [66] PRITCHETT, P. L. et al. Generation and propagation of cyclotron maser emissions in the finite auroral kilometric radiation source cavity. *Journal of Geophysical Research*, v. 107(n. A12), 2002.
- [67] PRITCHETT, P. L.; WINGLEE, R. M. Generation and propagation of kilometric radiation in the auroral plasma cavity. *Journal of Geophysical Research*, v. 94(n. A1):129–143, January 1, 1989.
- [68] QUON, B. H.; WONG, A. Y. Formation of potential double layers in plasmas. *Physical Review Letters*, v. 37(n. 21), November 22, 1976.
- [69] RAADU, M. A. The physics of double layers and their role in astrophysics. *Physics Reports*, v. 178(n. 2), June 1989.

- [70] ROUX, A. et al. Auroral kilometric radiation sources: In situ and remote observations from Viking. *Journal of Geophysical Research*, v. 98(n. A7):11657–11670, July 1, 1993.
- [71] SCHREIBER, R. et al. Auroral kilometric radiation source characteristics using ray tracing techniques. *Journal of Geophysical Research*, v. 107(n. A11), 2002.
- [72] SEKI, T. et al. Auroral kilometric radiation and magnetosphere-ionosphere coupling process during magnetic storms. *Journal of Geophysical Research*, v. 110, 2005.
- [73] SHAFRANOV, V. D. *Electromagnetic waves in a plasma*, volume 3 of *Reviews of Plasma Physics*. Consultants Bureau, 1967.
- [74] SHAWHAN, S. D.; GURNETT, D. A. Polarization measurements of auroral kilometric radiation by Dynamics Explorer-1. *Geophysical Research Letters*, v. 9(n. 9):913–916, September, 1982.
- [75] SPIEGEL, M. R. Manual de fórmulas, métodos e tabelas de matemática. *Coleção Schaum*, 2^a ed., McGraw-Hill, 1992.
- [76] STIX, T. H. *Waves in plasmas*. Springer-Verlag, 1992.
- [77] STRANGEWAY, R. J. et al. Accelerated electrons as the source of auroral kilometric radiation. *Physics and Chemistry of the Earth (C)*, v. 26(n. 1-3):145–149, 2001.
- [78] TREUMANN, R. A. The electron-cyclotron maser for astrophysical application. *Astron. Astrophys. Rev.*, (13):229–315, July 5, 2006.
- [79] WU, C. S. et al. Generation of the auroral kilometric radiation. *Journal of Geophysical Research*, v. 87(n. A6):4476–4488, June 1, 1982.
- [80] WU, C. S.; LEE, L. C. A theory of the terrestrial kilometric radiation. *The Astrophysical Journal*, (230):621–626, June 1, 1979.
- [81] YOON, P. H.; CHANG, T. Exact dielectric tensor for relativistic magnetized plasma with loss-cone and field-aligned drift. *Journal of Plasma Physics*, v. 42(part 2):193–204, 1989.
- [82] ZIEBELL, L. F. Electron cyclotron absorption for oblique propagation in loss-cone plasmas. *Journal of Plasma Physics*, v. 39(part 3):431–446, 1988.
- [83] ZIEBELL, L. F.; SCHNEIDER, R. S. The effective dielectric tensor for electromagnetic waves in inhomogeneous magnetized plasmas and the proper formulation in the electrostatic limit. *Brazilian Journal of Physics*, v. 34(n. 3B), September, 2004.