UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Propriedades genéricas de lagrangianos e problemas variacionais holonômicos em sistemas de funções iteradas

Elismar da Rosa Oliveira

Porto Alegre - RS - Brasil, 27 de agosto de 2007

Tese submetida por Elismar R. Oliveira *, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Artur O. Lopes

Professor Co-orientador:

Prof. Dr. Gonzalo Contreras (CIMAT-AC)

Banca examinadora:

Prof. Dr. Artur O. Lopes(IMAT-UFRGS, ORIENTADOR)

Prof. Dr. Alexandre Baraviera (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Jairo da Silva Bochi (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Mário Jorge Carneiro(IMAT-UFMG)

Prof. Dr. Rafael Ruggiero (PUC-RJ)

*Bolsista da CAPES-Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal

À minha esposa,
Lisiane
e à minha mãe,
Neiva(in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa pelo apoio, companheirismo e dedicação incondicional sem os quais não teria sido possível completar esta jornada.

Não tenho palavras para descrever o quanto sou agradecido ao meu orientador, professor Artur Lopes, por seu apoio e dedicação em cuidar de todos os aspectos da minha formação nestes 6 anos em que tive o prazer de ser seu aluno de mestrado e doutorado.

Agradeço ao meu co-orientador, professor Gonzalo Contreras, pela acolhida no CIMAT onde parte deste trabalho foi desenvolvida.

Agradeço a todos os integrantes da banca examinadora pelas suas sugestões de melhorias no manuscrito original.

Resumo

Este trabalho é composto por duas partes, Propriedades genéricas de lagrangianos e problemas variacionais holonômicos em sistemas de funções iteradas.

Na primeira parte, nosso principal resultado é o teorema de Kupka-Smale, no contexto de lagrangianos, afirmando que, para um valor fixado $k \in \mathbb{R}$, genericamente (no sentido de Mañé, isto é, existe um subconjunto residual (em topologia C^∞) de potenciais suaves, $\mathcal{O}$, tais que $L + f$ tem a propriedade desejada, para todo $f \in \mathcal{O}$), para um lagrangiano convexo e superlinear numa variedade compacta, o nível de energia k é regular e todas as órbitas periódicas, neste nível, são não degeneradas de todas as ordens (isto é, a aplicação de Poincaré linearizada, restrita a este nível de energia, não tem raízes da unidade como autovalores). Além disso, todas as interseções heteroclínicas neste nível são transversais. Todos os resultados que nós apresentamos são verdadeiros em dimensão $n \geq 2$, exceto para teorema de perturbação local para aumentar a ordem de não- degeneração, cuja prova é conhecida somente em dimensão 2.

Na segunda parte nós consideramos sistemas de funções iteradas (IFS). Associado a um IFS podemos consider o skew-product contínuo $\hat{\sigma}$ que descreve o comportamento global do IFS. Em seguida analisamos ρ-sistemas com pesos para os quais faz sentido definir uma teoria de formalismo termodinâmico. Para tal introduzimos, no contexto de IFS, o conceito (já conhecido para shifts [20]) de probabilidade holonômica em $[0, 1] \times \Sigma$. Tal conjunto de probabilidades tem a propriedade de descrever, via desintegração, todos as probabilidades estacionárias para o IFS quando este é visto com um processo de Markov. Também consideramos probabilidades holonômicas ergódicas e apresentamos o correspondente ao teorema ergódico (que é apenas uma adaptação do Teorema Ergódico de J. Elton). Para uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}$ no $[0, 1] \times \Sigma$ definimos os conceitos adequados de entropia e pressão obtendo um princípio variacional. Finalmente, nós analisamos o problema de maximizar a integral de um potencial dado.

Abstract

In this work we consider two subjects: generic properties of lagrangians and variational holonomical problems on iterated functions systems.

In the first part, our main result is the Theorem of Kupka-Smale, in the lagrangian setting, claiming that, for a fixed value fixed $k \in \mathbb{R}$, generically (in Mañé sense, that is, there exists a residual subset (in C^∞ topology) of smooth potentials, $\mathcal{O}$, such that $L + f$ have the desired property, for all $f \in \mathcal{O}$), for a convex and superlinear lagrangian defined in a compact surface, the energy level k is regular and all the periodic orbits, in this level, are nondegenerated of all orders (that is, the linearizated Poincaré map, restricted to the energy level, does't have roots of unity as eigenvalues). Moreover, all the heteroclinic intersections in this level are transversal. All the results that we present here are true in dim $n \geq 2$, except for a theorem of local perturbation, that increase the order of non-degeneration, whose proof we are able to obtain just for dimension 2.

In the second part we consider iterated function systems. Associated to a IFS one can consider a continuous map $\hat{\sigma}$ which describes the global behavior of the IFS. We introduce, on the IFS setting, the concept (considered before in [20] for shifts) of holonomic probability on $[0, 1] \times \Sigma$ that is closely related with the stationary probabilities for the IFS under the stochastic point of view. We consider the concepts of entropy and pressure for ρ-weighted systems, getting a variational principle. Also we consider holonomic ergodic probabilities and we present the corresponding Ergodic Theorem (which is just an adaptation of a previous result by J. Elton). Finally, we analyze the problem of maximizing the integral of a potential.

Índice

Introdução **1**

Capítulo 1 **3**

1 Pré-requisitos **3**

1.1 Topologia Diferencial . . . 3

1.2 Dinâmica Lagrangiana . . . 4

1.3 Dinâmica Hamiltoniana . . . 6

1.4 Ação da diferencial do fluxo hamiltoniano e o campo normal Y^H . . . 7

1.5 Perturbação de Subvariedades Lagrangianas . . . 9

Capítulo 2 **11**

2 Teorema de Kupka-Smale **11**

2.1 Introdução . . . 11

2.2 O Lema de Não-Degeneração (N-D) . . . 12

2.2.1 Abertura de $\mathcal{G}_k^{n,n}$ . . . 13

2.2.2 Densidade de $\mathcal{G}_k^{n,n}$ . . . 13

2.3 Prova do Teorema de Kupka-Smale (K-S) . . . 28

2.3.1 Abertura de $\mathcal{K}_k^a$ . . . 29

2.3.2 Densidade de $\mathcal{K}_k^n$ . . . 29

Capítulo 3 **33**

3 Problemas variacionais holonômicos em sistemas de funções iteradas **33**

3.1 IFS e probabilidade holonômicas . . . 33

3.2 Probabilidades Holonômicas . . . 35

3.3 Caracterização de probabilidades holonômicas . . . 36

3.4 Invariância de probabilidades holonômicas em IFS . . . 37

3.5 Ergodicidade de probabilidades holonômicas . . . 38

3.6 Construção de probabilidades holonômicas para ρ-sistemas com pesos 40
3.7 Entropia e princípio variacional para ρ-sistemas com pesos 41
3.8 Um ponto de vista alternativo para o conceito de entropia e pressão para um IFS 45

Bibliografia **49**

Introdução

Nosso principal objetivo na primeira parte é obter propriedades genéricas, no sentido de Mañé (ver [11], [26]), para um lagrangiano convexo e superlinear, em uma variedade Riemanniana suave compacta M sem bordo.

O principal resultado apresentado é o Teorema de Kupka-Smale (Teorema 2.2) , afirmando que, para um valor fixo $k \in \mathbb{R}$ (um nível de energia), genericamente, este nível k é regular (isto é, k é um valor regular da função energia associada a este lagrangiano), e todas as órbitas periódicas neste nível são não degeneradas com interseções heteroclínicas transversais.

Para a prova do Teorema de Kupka-Smale, o lema de não degeneração (Lema 2.7) e um lema de perturbação para subvariedades lagrangianas (ver Contreras & Paternain [13], Lema A3) para obter a transversalidade das subvariedades invariantes.

O teorema de Kupka-Smale, nesta formulação, relembra o teorema das métricas bumpy, para fluxos geodésicos, formulado por R. Abraham em 1968, cuja prova completa foi dada por D. V. Anosov em 1983 (Anosov, [6]).

O trabalho de W. Klingenberg e F. Takens [25] no teorema das métricas bumpy foi então corrigido por Anosov [6] usando o método de indução similar ao usado por M. Peixoto [31] na prova do teorema de Kupka-Smale original.

Em nosso trabalho, seguimos as mesmas linhas de Anosov [6], adaptadas à perturbações por potenciais. Também, introduzimos uma modificação no argumento padrão da Teoria do Controle para equações diferenciais (inicialmente usado por Klingenberg [24], no contexto de perturbação de fluxos geodésicos, e depois J. A. Miranda [27] para fluxos magnéticos em superfícies e também Contreras [9] para a prova do Lema de Franks em fluxos geodésicos.) para que tal argumento pudesse ser aplicado com sucesso ao caso de perturbação por potenciais. Neste caso nós não dispomos de coordenadas especiais (como coordenadas de Fermi) como em [24], [27] e [9] então nós introduzimos uma nova aproximação sem o uso de vizinhanças tubulares (ver Teorema 2.17). no começo desta prova nós utilizamos um argumento similar ao usado por Robinson [33], Lemma 19, Pg. 592, mas nossa prova é bastante diferente.

Observemos que as propriedades genéricas no sentido de Mañé não podem ser deduzidas do trabalho pioneiro de Robinson no contexto geral de perturbação de hamiltonianos (ver [33] e [34]) pois tal conjunto é muito maior que o conjunto dos potências onde devemos efetuar todas as perturbações.

Já a transversalidade é mais fácil de ser obtida. Para isto é suficiente seguir os mesmos passos de Contreras & Paternain [13], Lemma 2.6 ou J.A. Miranda [27], Lemma 3.9. A diferença neste caso é como construir o potencial explícito que realiza a perturbação desejada (Lema 2.23).

Finalmente, enfatizamos que a obstrução para a prova do teorema de Kupka-Smale na nossa formulação, em dimensões mais altas é ligado com a natureza da perturbação que aparece no Teorema 2.17.

Como em Contreras [9], Lemma 7.3 and 7.4, nós precisamos resolver uma equação matricial na álgebra de Lie de $S_p(n) = \{\text{matrizes simpléticas } 2n \times 2n\}$. Por sua vez a solubilidade desta equação é fortemente relacionada com as propriedades espectrais da matriz em coordenadas locais de H_{pp}. Todavia, esta matriz não pode ser alterada através de perturbações por potenciais. Além disso, em casos não geodésicos a equação citada acima é muito complexa.

Gostaríamos de salientar que, embora em dimensão 2, este resultado se aplica a um conjunto muito grande de objetos, mesmos em níveis de energia subcríticos para a Teoria de Aubry-Mather (ver [11] para uma exposição desta teoria).

Na segunda parte nós consideramos sistemas de funções iteradas (IFS). Um IFS (iterated function system), $([0,1], \tau_i)$, no intervalo $[0,1]$, é uma família de funções contínuas $\tau_0, \tau_1, ..., \tau_{d-1} : [0,1] \to [0,1]$ tais que $\bigcup_{i=0}^{d-1} \tau_i([0,1]) = [0,1]$.

Associado a um IFS podemos considerar o skew-product contínuo $\hat{\sigma} : [0,1] \times \Sigma \to [0,1] \times \Sigma$, definido por $\hat{\sigma}(x,w) = (\tau_{X_1(w)}(x), \sigma(w))$ onde $\Sigma = \{0,1,...,d-1\}^{\mathbb{N}}$, $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ é dado por $\sigma(w_1, w_2, w_3, ...) = (w_2, w_3, w_4...)$ e $X_k : \Sigma \to \{0,1,...,n-1\}$ é a projeção na coordenada k.

Um ρ-sistema com pesos, $\rho \geq 0$, é um sistema com pesos $([0,1], \tau_i, u_i)$ tal que existe uma função positiva mensurável limitada $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ e uma probabilidade ν no $[0,1]$ satisfazendo $P_u(h) = \rho h, \quad P_u^*(\nu) = \rho\nu$.

Não há sentido em perguntar se uma probabilidade ν no $[0,1]$ aparecendo em um IFS é invariante para um sistema dinâmico, mas, nós podemos perguntar se esta probabilidade $\hat{\nu}$ no espaço $[0,1] \times \Sigma$ é holonômica para $\hat{\sigma}$.

Uma probabilidade $\hat{\nu}$ no $[0,1] \times \Sigma$ é chamada holonômica para $\hat{\sigma}$ se $\int g \circ \hat{\sigma}\, d\hat{\nu} = \int g\, d\hat{\nu}$, $\forall g \in C([0,1])$. Denotaremos o conjunto de todas as probabilidades holonômicas por $\mathcal{H}$.

Através de desintegração, probabilidades holonômicas $\hat{\nu}$ no $[0,1] \times \Sigma$ são naturalmente associadas à ρ-sistemas com pesos. Mais precisamente, existe uma probabilidade ν no $[0,1]$ e $u_i, i \in \{0,1,2,..,d-1\}$ no $[0,1]$, tal que $P_u^*(\nu) = \nu$.

Nós consideramos probabilidades holonômicas ergódicas e apresentamos o correspondente ao teorema ergódico (que é apenas uma adaptação do Teorema Ergódico de J. Elton).

Para uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}$ no $[0,1] \times \Sigma$ definimos a entropia

$$h(\hat{\nu}) = \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\psi f}{\psi f}) d\hat{\nu} \geq 0$$

onde $\psi \in \mathbb{B}^+$ é qualquer potencial positivo fixado.

Finalmente, nós analisamos o problema: dado $\phi \in \mathbb{B}^+$, encontrar a solução $\hat{\nu}$ do problema de maximização

$$p(\phi) = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} \{\, h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu} \,\}$$

Capítulo 1

Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é introduzir definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Para os nossos propósitos vamos fixar a seguinte notação, uma estrutura suave será sempre uma estrutura C^∞ e uma variedade $\mathbb{X}$ será sempre uma variedade de Banach suave com dimensão possivelmente infinita, se nada for dito em contrário.

1.1 Topologia Diferencial

Definição 1.1. *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variedades e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$uma aplicação suave. Dado $x \in \mathbb{X}$, diremos que f é:*
i) submersiva em x, se $D_x f$ é sobrejetora e $Ker(D_x f)$ tem codimensão finita em $T_x\mathbb{X}$;
ii) imersiva em x, se $D_x f$ é injetora e o fecho de $Im(D_x f)$ tem codimensão finita em $T_{f(x)}\mathbb{Y}$.

A aplicação f será dita uma submersão(respec. imersão) se for submersiva (respec. imersiva) em x, $\forall x \in \mathbb{X}$. Uma imersão injetiva é denominada uma mergulho. Um valor $y \in \mathbb{Y}$ é dito valor regular de f se f é submersiva em $f^{-1}(y)$.

Definição 1.2. *Seja $\mathcal{X}$ um espaço topológico. Um subconjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$ é dito genérico se $\mathcal{R}$ é uma intersecção enumerável de abertos densos. O espaço $\mathcal{X}$ será dito de Baire se todo o subconjunto genérico for denso.*

Definição 1.3. *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variedades. Uma aplicação $\rho : \mathcal{B} \to C^\infty(\mathbb{X};\mathbb{Y})$, tal que, $\rho(\varphi) := \rho_\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{B}$, é dita uma representação se a sua valoração $ev_\rho : \mathcal{B} \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ dada por $ev_\rho(\varphi, x) = \rho_\varphi(x)$ é suave.*

Definição 1.4. *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variedades e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ suave. Dados $W \subseteq \mathbb{X}$ um subconjunto qualquer e $S \subseteq \mathbb{Y}$ uma subvariedade. Diremos que f é transversal à S em W e denotaremos $f \pitchfork_W S$, se $\forall x \in W$ temos $f(x) \notin S$ ou, se $f(x) \in S$ então*

i) $d_x f(T_x\mathbb{X}) + T_{f(x)}S = T_{f(x)}\mathbb{Y}$;

ii) $(d_x f)^{-1}(T_{f(x)}S)$ tem codimensão finita em $T_x\mathbb{X}$.

Teorema 1.5. *([2], pg. 45, Corolário 17.2)*

Sejam $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ variedades e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ suave. Dada $S \subseteq \mathbb{Y}$ uma subvariedade, se $f \pitchfork S$ então
i) $f^{-1}(S) \subseteq \mathbb{X}$ é uma subvariedade;

ii) Se $x \in f^{-1}(S)$ e $y = f(x)$ então

$$(d_x f)^{-1}(T_y S) = T_x f^{-1}(S)$$

iii) S e $f^{-1}(S)$ tem a mesma codimensão;
iv) Se S é fechada e $f^{-1}(S) \subseteq K$, $K \subseteq \mathbb{X}$ um compacto, então $f^{-1}(S)$ tem um número finito de componentes conexas.

A demonstração de *(i)*, *(ii)* e *(iii)* é dada como em [2], entretanto, *(iv)* é mais geral e merece um comentário. De fato, analisando a argumentação de [2], podemos ver que somente necessitamos que $f^{-1}(S)$ esteja contida em um compacto e não que $\mathbb{X}$ seja compacto.

Teorema 1.6. *([2], pg. 48, Transversalidade paramétrica de Abraham)*

Sejam $\mathbb{X}$ uma variedade de dimensão finita (com bordo ou sem bordo), $\mathbb{Y}$ variedade sem bordo e $S \subseteq \mathbb{Y}$ uma subvariedade de codimensão finita. Considere $\mathcal{B}$ uma variedade sem bordo, $\rho : \mathcal{B} \to C^\infty(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ uma representação suave e sua valoração $ev_\rho : \mathcal{B} \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. Se $\mathbb{X}$, $\mathcal{B}$ são espaços de Baire e $ev_\rho \pitchfork S$ então o conjunto $\mathcal{R} = \{\varphi \in \mathcal{B} \mid \rho_\varphi \pitchfork S\}$ é um subconjunto genérico (e portanto denso) de $\mathcal{B}$.

Para resultados adicionais de Topologia Diferencial ver [4].

1.2 Dinâmica Lagrangiana

Consideramos sempre (M, g) uma variedade riemanniana, n-dimensional, sem bordo, completa.

Definição 1.7. *Um lagrangiano (autônomo) em M é uma função suave (C^∞), $L : TM \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Convexidade: A hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x, v)$ calculada nas coordenadas lineares da fibra $T_x M$, é uniformemente positiva definida, $\forall (x, v) \in TM$, ou seja, existe $A > 0$, tal que,

$$w \cdot L_{vv}(x, v) \cdot w \geq A|w|^2$$

para todo $(x, v) \in TM$ e para todo $w \in T_x M$.

(ii) Superlinearidade: Para todo $A > 0$ existe $B \in \mathbb{R}$, tal que,

$$L(x, v) \geq A\,|v| - B,\ \forall (x, v) \in TM.$$

Que implica a condição

$$\lim_{|v| \to +\infty} \frac{L(x, v)}{|v|} = +\infty,$$

uniformemente em $x \in M$;

(iii) Boundedness: Para todo $r > 0$,

$$\ell(r) = \sup_{\substack{(x,v) \in TM \\ |v| < r}} L(x, v) < +\infty;$$

$$g(r) = \sup_{\substack{|w| = 1 \\ |(x,v)| \leq r}} w \cdot L_{vv}(x, v) \cdot w < +\infty.$$

A equação de Euler-Lagrange (E-L) associada ao lagrangiano L é

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x}) \qquad \text{(E-L)}$$

Definição 1.8. *Seja L um lagrangiano em M. Definimos por $\phi_t^L : TM \times \mathbb{R} \to TM$ o fluxo em TM associado ao campo lagrangiano $X^L : TM \to TTM$. A condição(iii) da definição 1.7, implica que o fluxo gerado por L em TM é completo.*

Definição 1.9. *Seja L um lagrangiano em M. Dado $\theta \in TM$ diremos que θ é um ponto fixo para o fluxo ϕ_t^L se $\phi_t^L(\theta) = \theta, \forall t \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente, se $X^L(\theta) = 0$.*

Se $\phi_T^L(\theta) = \theta$ para algum $T > 0$ e θ não é ponto fixo, diremos que θ é um ponto periódico de período positivo T e denominaremos seu período minimal por $T_{min}(\theta) = min\{t > 0 \mid \phi_t^L(\theta) = \theta\}$. É claro que qualquer período positivo T é um múltiplo natural do período minimal.

Definição 1.10. *Seja L um lagrangiano em M. Definimos a sua função energia $E_L : TM \to \mathbb{R}$ por $E_L(x,v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v) \cdot v - L(x,v)$. Dado $k \in \mathbb{R}$ definimos o seu nível de energia como sendo o conjunto*

$$\varepsilon_L^k = \{\theta = (x,v) \in TM \mid E_L(\theta) = k\}.$$

Da análise sabemos que se k é valor regular de E_L então ε_L^k é uma hipersuperfície de codimensão 1 em TM, invariante pelo fluxo lagrangiano pois L é autônomo. Ainda pela convexidade e superlinearidade de L temos que ε_L^k, já que M é compacta.

Definição 1.11. *Seja L um lagrangiano em M e θ um ponto periódico de período positivo, T_{min}. Fixada uma seção transversal ao fluxo, Σ contida no nível de energia de θ, existe uma função suave $\tau : U \subset \Sigma \to \mathbb{R}$, tal que, $\tau(\theta) = T_{min}$, que é o tempo de primeiro retorno à Σ, tal que a aplicação $P(\Sigma,\theta) : U \to \Sigma$ dada por*

$$P(\Sigma,\theta)(\theta) = \phi_{\tau(\theta)}^L(\theta)$$

é um difeomorfismo local, que deixa θ fixo. Esta aplicação é denominada aplicação de primeiro retorno de Poincaré e os autovalores da sua diferencial independem da seção transversal escolhida.

Definição 1.12. *Seja L um lagrangiano em M e θ um ponto periódico de período positivo, T_{min}. Diremos que θ é uma órbita não-degenerada de ordem 1 para L se*

$$Ker(d_\theta P(\Sigma,\theta) - Id) = 0.$$

Respectivamente θ é não-degenerada de ordem $m \geq 1$ para L se

$$Ker((d_\theta P(\Sigma,\theta))^m - Id) = 0.$$

A propriedade de ser não-degenerada de ordem m, diz que $d_\theta P(\Sigma,\theta)$ não possui como autovalores, m-raízes da unidade.

Para mais detalhes sobre dinâmica lagrangiana e definições em coontextos mais gerias de aplicação de Poincaré ver [3].

1.3 Dinâmica Hamiltoniana

Aqui estamos interessados no ponto de vista hamiltoniano da dinâmica lagrangiana descrita anteriormente.

Primeiramente introduzimos um sistema de coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$ em M e consideramos sempre a métrica riemanniana $\}$ em M, então teremos $\theta = (x, v)$ um sistema de coordenadas em TM onde $v := \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Analogamente temos $\vartheta = (x, p)$ um sistema de coordenadas no fibrado cotangente T^*M onde $p := \sum p_i dx_i$.

Adicionalmente introduzimos a forma simplética canônica em T^*M dada por

$$\omega = -d\Theta.$$

onde $\Theta = pdx$ é a 1-forma de Liouville em T^*M. Nessas coordenadas

$$\omega = \sum dx_i \wedge dp_i.$$

Denominando a matriz simplética canônica por $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ temos que $\omega(u_1, u_2) = u_1^{\perp} J u_2$.

Consideramos então o hamiltoniano H associado a L dado pela transformada de Fenchel na velocidade, isto é,

$$H(x, p) = \max_{v \in T_x M} \{pv - L(x, v)\}.$$

Definimos então o campo hamiltoniano como o único campo X^H em T^*M tal que $\omega_\vartheta(X^H(\vartheta), \xi) = d_\vartheta H \xi$ para todo $\xi \in T_\vartheta T^*M$. Nas coordenadas locais (x, p)

$$X^H = H_p \frac{\partial}{\partial x} - H_x \frac{\partial}{\partial p}$$

Denotamos por $\psi_t^H : T^*M \times \mathbb{R} \to T^*M$ o fluxo em T^*M associado ao campo hamiltoniano $X^H : T^*M \to TT^*M$. Este fluxo preserva a forma simplética ω.

Definindo a transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ por $\mathcal{L}(x, v) = (x, L_v(x, v))$ pode-se mostrar que $\mathcal{L}$ é uma conjugação entre os fluxos lagrangiano e o hamiltoniano e que $H = E_L \circ \mathcal{L}^{-1}$.

Sendo L convexo e superlinear obtemos que H é convexo e superlinear. Usando a transformada de Legendre obtemos que

$$p = L_v(x, v) \text{ e } v = H_p(x, p),$$

portanto, $H_{pp}(x, p)$ é positiva definida em T_x^*M, uniformemente em $x \in M$.

Finalmente, note que a transformada de Legendre associa o nível de energia ε_k^L com o conjunto de nível $H^{-1}(k)$. Portanto se k é valor regular de E_L então k é valor regular de H, ou seja, $H^{-1}(k)$ é uma hipersuperfície de codimensão 1 em T^*M, invariante pelo fluxo hamiltoniano. Assim podemos definir a aplicação de primeiro retorno de Poincaré correspondente em T^*M.

Seja ϑ um ponto periódico para ψ_t^H em T^*M de período positivo, $T_{min}(\vartheta)$. Fixada uma seção transversal ao fluxo, Σ contida no nível de energia de ϑ, $H^{-1}(k)$. Existe uma função suave $\tau : U \subset \Sigma \to \mathbb{R}$ que é o tempo de primeiro retorno à Σ, tal que a aplicação $P(\Sigma, \vartheta) : U \to \Sigma$ dada por

$$P(\Sigma, \vartheta)(\vartheta) = \psi_{\tau(\vartheta)}^H(\vartheta).$$

Note que pela propriedade de conjugação, a não-degeneração de uma órbita independe do ponto de vista hamiltoniano.

É possível mostrar que a forma simplética ω restrita à $T_\vartheta\Sigma$ é ainda não-degenerada e fechada, logo a aplicação de Poincaré é simplética.

Mais ainda, $d_\vartheta\psi^H_{T_{min}}(\xi) = -d_\vartheta\tau(\xi)X^H + d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)(\xi),\ \forall\xi\in T_\vartheta\Sigma$. Portanto temos que

$$d_\vartheta\psi^H_{T_{min}}\ |_{T_\vartheta H^{-1}(k)} = \begin{bmatrix} 1 & d_\vartheta\tau \\ 0 & d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)\end{bmatrix}$$

em particular, para $T = mT_{min}$
$d_\vartheta\psi^H_T(\xi) = -d_\vartheta\tau(\sum_{i=0}^{m-1} d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)^i)(\xi)X^H + d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)^m(\xi),\ \forall\xi\in T_\vartheta\Sigma$

Logo, a condição de que ϑ é não-degenerada de ordem $m\geq 1$, é equivalente a dizer que a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ como autovalor de $d_\vartheta\psi^H_T\ |_{T_\vartheta H^{-1}(k)}$ é igual a 1. Já que os polinômios característicos estão relacionados por:

$$\mathfrak{p}_{d_\vartheta\psi^H_T}(\lambda) = (1-\lambda)\cdot\mathfrak{p}_{d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)^m}(\lambda)$$

Para mais detalhes sobre dinâmica hamiltoniana e demonstrações dos resultados apresentados nesta seção ver [11] e [3].

1.4 Ação da diferencial do fluxo hamiltoniano e o campo normal Y^H

Para o estudo da aplicação de Poincaré é de fundamental importância entender como a diferencial do fluxo hamiltoniano atua em TT^*M.

Seja $\xi\in T_\vartheta T^*M$ e $\gamma(t) = \psi^H_t(\vartheta)$ curva integral do campo X^H. Então a ação de $d_\vartheta\psi^H_t$ gera um campo ao longo de γ que denotaremos por:

$$Z_\xi(t) := d_\vartheta\psi^H_t\xi.$$

Usando a equação que define o campo hamiltoniano e a comutatividade das derivadas parciais podemos concluir que $Z_\xi(t)$ é solução de um problema de valores inicias da forma:

$$\begin{cases} \dot Z_\xi(t) = J\mathcal{H}(\gamma(t))Z_\xi(t) \\ Z_\xi(0) = \xi \end{cases}$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0\end{bmatrix}$ e $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xp} \\ H_{px} & H_{pp}\end{bmatrix}$.

Definição 1.13. *Dado o hamiltoniano H definimos o campo normal associado, como sendo o campo gradiente $Y^H = \nabla H$ em T^*M dado por*

$$Y^H = H_x\frac{\partial}{\partial x} + H_p\frac{\partial}{\partial p}$$

Note que $JY^H = X^H$. Denotamos por $\psi^{H^\perp}_s : T^*M\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to T^*M$ o fluxo em T^*M associado ao campo normal.

Vamos entender as propriedades do campo normal. Em primeiro lugar note que $\omega_\vartheta(Y^H, X^H) = H_x^2 + H_p^2$, $\forall \vartheta \in T^*M$. Portanto, se $X^H(\vartheta) \neq 0$ então $0 \neq Y^H(\vartheta) \notin T_\vartheta H^{-1}(k)$ onde $k = H(\vartheta)$, ou seja Y^H aponta para fora do nível de energia.

Pela compacidade do nível de energia $H^{-1}(k)$ temos que o fluxo do campo normal restrito à $H^{-1}(k)$ está definido em $H^{-1}(k) \times (-\varepsilon(H), \varepsilon(H))$ onde $\varepsilon(H) > 0$ é uniformemente definido em $H^{-1}(k)$. Daí segue que o fluxo do campo normal está definido em uma vizinhança do nível $H^{-1}(k)$.

Finalmente resta analisar a ação da diferencial do fluxo normal ao longo de uma órbita.

Primeiramente, notemos que, definindo $\gamma(s) = \psi_s^{H^\perp}(\vartheta)$ curva integral do campo Y^H com $\gamma(0) \in H^{-1}(k)$ a ação de $d_\vartheta \psi_s^{H^\perp}$ em $Y^H(\vartheta)$ gera campo ao longo de γ que denotaremos por:

$$Z^H(s) := d_\vartheta \psi_s^{H^\perp} Y^H(\vartheta).$$

Pelo visto acima temos que este campo $Z^H(s)$ é solução de um problema de valores inicias da forma:

$$\begin{cases} \dot{Z}^H(s) = \mathcal{H}(\gamma(s)) Z^H(s) \\ Z^H(0) = Y^H(\vartheta) \end{cases}$$

A propriedade mais importante de Y^H é gerar uma decomposição simplética especial de $T_\vartheta T^*M$, definida na seguinte proposição.

Proposição 1.14. *Considere o campo normal Y^H associado à H no nível de energia, regular, $H^{-1}(k)$. Então, para cada $\vartheta \in H^{-1}(k)$ periódico de período $T > 0$, existe uma base simplética $\{u_1, ..., u_n, u_1^*, ..., u_n^*\}$ de $T_\vartheta T^*M$ com as seguintes propriedades:*
(i) $u_1 = X^H$ e $u_1^* = -\frac{1}{H_x^2 + H_p^2} Y^H$;
(ii) $\mathcal{W}_1 = \langle u_1, u_1^* \rangle^\perp \subset T_\vartheta H^{-1}(k)$ em particular, $T_\vartheta H^{-1}(k) = \langle u_1 \rangle \oplus \mathcal{W}_1$;
(iii) Se $\Sigma \subset H^{-1}(k)$ é uma seção transversal ao fluxo, tal que, $T_\vartheta \Sigma = \mathcal{W}_1$, temos que $\mathcal{W}_1$ é invariante pela diferencial da aplicação de Poincaré correspondente, isto é, $d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_1$;
(iv) Seja $T = mT_{min}(\vartheta)$, então

$$d_\vartheta \psi_T^H u_1 = u_1 \ \text{ e } \ d_\vartheta \psi_T^H u_1^* = c u_1 + u_1^* + \xi, \ \xi \in \mathcal{W}_1.$$

Em particular, $(d_\vartheta \psi_T^H - Id)(T_\vartheta T^*M) \subseteq \langle u_1 \rangle \oplus \mathcal{W}_1 = T_\vartheta H^{-1}(k)$.
(v) Existe, $\varepsilon > 0$ uniforme em $\vartheta \in H^{-1}(k)$, tal que, a aplicação $e_\vartheta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$e_\vartheta(s) = H \circ \psi_s^{H^\perp}(\vartheta)$$

é injetiva com $e_\vartheta(0) = k$.

Demonstração:

i) Em primeiro lugar consideremos $u_1 = X^H$ e $u_1^* = -\frac{1}{H_x^2 + H_p^2} Y^H$, note que, $\omega_\vartheta(u_1, u_1^*) = 1$.

Defina $\mathcal{W}_1 = \langle u_1, u_1^* \rangle^\perp = \{v \in T_\vartheta T^*M \mid \omega(u_1, v) = 0 = \omega(u_1^*, v)\}$, então $T_\vartheta T^*M = \langle u_1, u_1^* \rangle \oplus \mathcal{W}_1$, $dim(\mathcal{W}_1) = 2n - 2$ e a forma ω restrita a este espaço é ainda simplética. Agora basta seguir o procedimento padrão para escolher os demais vetores da base simplética.

ii) Para ver que $\mathcal{W}_1 = \langle u_1, u_1^* \rangle^\perp \subset T_\vartheta H^{-1}(k)$, note que sendo o nível de energia regular temos que $dim Ker(d_\vartheta H) = 2n - 1$, ou seja, $Ker(d_\vartheta H) = T_\vartheta H^{-1}(k)$.

Agora tome $v \in \mathcal{W}_1$ então $d_\vartheta H v = \omega_\vartheta(u_1 = X^H, v) = 0$ portanto teremos $v \in T_\vartheta H^{-1}(k)$.

iii) Esta propriedade segue diretamente da definição da aplicação de Poincaré.

iv) De fato, $d_\vartheta \psi_T^H u_1 = u_1$ pois $u_1 = X^H$ e escrevendo $d_\vartheta \psi_T^H u_1^*$ na base simplética temos $d_\vartheta \psi_T^H u_1^* = cu_1 + c^* u_1^* + \xi$, $\xi \in \mathcal{W}_1$. Daí, segue que
$c = \omega(d_\vartheta \psi_T^H u_1^*, u_1^*)$ e
$c^* = -\omega(d_\vartheta \psi_T^H u_1^*, u_1) = -\omega(d_\vartheta \psi_T^H u_1^*, d_\vartheta \psi_T^H u_1) = -\omega(u_1^*, u_1) = 1$.

Para ver que $(d_\vartheta \psi_T^H - Id)(T_\vartheta T^*M) \subseteq \langle u_1 \rangle \oplus \mathcal{W}_1 = T_\vartheta H^{-1}(k)$, tome qualquer $Au_1 + Bu_1^* + \zeta \in T_\vartheta T^*M$, com $\zeta \in \mathcal{W}_1$, então
$(d_\vartheta \psi_T^H - Id)(Au_1 + Bu_1^* + \zeta) =$
$= (d_\vartheta \psi_T^H - Id)(Bu_1^* + \zeta) =$
$= B(d_\vartheta \psi_T^H - Id)u_1^* + (d_\vartheta \psi_T^H - Id)(\zeta) =$
$= B(cu_1 + \xi) + \tau_0 u_1 + (d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)^m - Id)(\zeta) =$
$= (Bc + \tau_0)u_1 + \{\xi + (d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)^m - Id)(\zeta)\} \in \langle u_1 \rangle \oplus \mathcal{W}_1$.
Onde $\tau_0 = d_\vartheta \tau(\sum_{i=0}^{m-1} d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)^i)(\zeta)$.

(v) Para ver isto, basta notar que,

$$\tfrac{d}{ds} e_\vartheta(s) \mid_{s=0} = d_\vartheta H(Y^H) \neq 0,$$

e usar a compacidade de $H^{-1}(k)$, para escolher o ε adequado.

■

1.5 Perturbação de Subvariedades Lagrangianas

Definição 1.15. *Uma variedade $\mathcal{M}^{2n}$ junto com uma forma simplética ω em $\mathcal{M}^{2n}$, formam um par $(\mathcal{M}^{2n}, \omega)$ denominado variedade simplética. Um hamiltoniano em $\mathcal{M}^{2n}$ é qualquer função suave $H : \mathcal{M}^{2n} \to \mathbb{R}$. A cada hamiltoniano H associamos um único campo hamiltoniano X^H:*

$$i_\omega(X^H) = dH$$

Definição 1.16. *Seja $(\mathcal{M}^{2n}, \omega)$ uma variedade simplética e $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^{2n}$ uma subvariedade. Diremos que $\mathcal{N}$ é uma subvariedade lagrangiana se $dim(\mathcal{N}) = n$ e $\omega \mid_\mathcal{N} \equiv 0$.*

Lema 1.17. *Seja $(\mathcal{M}^{2n}, \omega)$ uma variedade simplética, $H : \mathcal{M}^{2n} \to \mathbb{R}$ um hamiltoniano suave e $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^{2n}$ uma subvariedade lagrangiana. Se $\mathcal{N} \subset H^{-1}(k)$ então $X^H \mid_\mathcal{N} \in T\mathcal{N}$. Em particular $\mathcal{N}$ é uma união de órbitas do fluxo hamiltoniano associado.*

Lema 1.18. *([13], Lema A2) Seja $(\mathcal{M}^{2n}, \omega)$ uma variedade simplética, $H : \mathcal{M}^{2n} \to \mathbb{R}$ um hamiltoniano suave e $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^{2n}$ uma subvariedade lagrangiana, tal que, $\mathcal{N} \subset H^{-1}(k)$. Dado $\vartheta \in \mathcal{N}$, tal que, $X^H(\vartheta) \neq 0$, existe uma vizinhança U de ϑ em $\mathcal{M}$, e um sistema de coordenadas $(x_0, x, p) := (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, p_0, ..., p_{n-1}) : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tal que*
a) $\omega = \sum_{i=0}^{n-1} dx_i \wedge dp_i$;
b) $\mathcal{N} \cap U = \{(x_0, x, 0)\}$;
c) $X^H \mid_\mathcal{N} = 1 \frac{\partial}{\partial x_0}$.

Lema 1.19. *([13], Lema A3) Seja $(\mathcal{M}^{2n}, \omega)$ uma variedade simplética, $H : \mathcal{M}^{2n} \to \mathbb{R}$ um hamiltoniano suave e $\mathcal{N}, \mathcal{K} \subset \mathcal{M}^{2n}$ subvariedades lagrangianas, tais que, $\mathcal{N}, \mathcal{K} \subset H^{-1}(k)$. Dado $\vartheta \in \mathcal{N}$, tal que, $X^H(\vartheta) \neq 0$, e um sistema de coordenadas de Darboux, $(t = x_0, x, p)$ em uma vizinhança de ϑ como no lema 1.18, tais que $0 \leq t \leq 1$ e $\|x\| < \varepsilon$, escolha $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Então, existe uma sequência $\mathcal{N}_n$ de subvariedades lagrangianas de $\mathcal{M}^{2n}$, tais que,*
a) $\mathcal{N}_n \to \mathcal{N}$ in the C^∞ topology;

b) $\mathcal{N}_n \cap A = \mathcal{N} \cap A$ *onde,* $A = \{(t,x,p) \mid \max_i |x_i| \geq \varepsilon_1 \text{ ou } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\}$
c) $H(\mathcal{N}_n \cap B) = k$ *onde,* $B = A \cup \{(t,x,p) \mid \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$
d) $(\mathcal{N}_n \cap D) \pitchfork_D \mathcal{K}$ *onde,* $D = \{(t,x,p) \mid \max_i |x_i| < \varepsilon_2 \text{ e } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$

Capítulo 2

Teorema de Kupka-Smale

2.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos um teorema de Kupka-Smale para um lagrangiano fixado L (suave, convexo, superlinear), fazendo perturbações através de potenciais C^∞.

No que segue consideramos sempre $(M; g)$ uma variedade riemanniana, compacta n-dimensional, $L : TM \to \mathbb{R}$, um lagrangiano em M, e $H : T^*M \to \mathbb{R}$ o seu hamiltoniano associado.

Definição 2.1. *Dado $L : TM \to \mathbb{R}$, um lagrangiano em M. Diremos que uma propriedade $\mathcal{P}$ é genérica (no sentido de Mañé, ver [11], [26]) para L se existir um conjunto genérico $\mathcal{O} \subset C^\infty(M; \mathbb{R})$, tal que, para todo $f \in \mathcal{O}$, $L + f$ tem a propriedade $\mathcal{P}$.*

Teorema 2.2. *(**Kupka-Smale**)*

Fixado $k \in \mathbb{R}$, a propriedade
i) $\varepsilon_L^k = \{(x, v) \in TM \mid E_L(x, v) = k\}$ é regular;
ii) Qualquer órbita periódica no nível ε_L^k é não-degenerada para todas as ordens.
iii) Toda interseção heteroclínica, no nível ε_L^k, é transversal.
é genérica para L.

Definição 2.3. *Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos o conjunto dos potenciais regulares para k, como sendo*

$$\mathcal{R}(k) = \{\ f \in C^\infty(M; \mathbb{R}) \mid \varepsilon_f^k := (H + f)^{-1}(k) \text{ é regular } \}$$

Onde H é o hamiltoniano associado a L pela transformada de Legendre.

Lema 2.4. *Dados $k \in \mathbb{R}$, e $f_0 \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. Para cada seqüência $f_n \to f_0$ em $C^\infty(M; \mathbb{R})$ e pontos $\vartheta_n = (x_n, p_n) \in \varepsilon_{f_n}^k$ existe uma subseqüência $\vartheta_{n_i} \to \vartheta_0 \in \varepsilon_{f_0}^k$.*

Demonstração: De fato, considerando a seqüência $\pi(\vartheta_n) \in M$ e passando a uma subseqüência podemos supor que $\pi\vartheta_n \to x_0 \in M$. Ainda $(H + f_0)(\vartheta_n) = H(\vartheta_n) - f_0(\pi(\vartheta_n)) = (H + f_n)(\vartheta_n) + (f_n - f_0)(\pi(\vartheta_n))$ portanto $|(H + f_0)(\vartheta_n) - k| = |(f_n - f_0)(\pi(\vartheta_n))| \to 0$, ou seja, $(H + f_0)(\vartheta_n) \to k$, o que implica pela superlinearidade de H que:

Se $|p_n| \leq \ell_0$, $\forall n$, então ϑ_n possui uma subseqüência convergente $\vartheta_{n_i} \to \vartheta_0 \in T^*M$. Por continuidade $(H + f_0)(\vartheta_{n_i}) \to (H + f_0)(\vartheta_0)$, dai $\vartheta_0 \in \varepsilon_{f_0}^k$.

Assim basta supor por absurdo que $|p_n| \to +\infty$. Note que, para cada $x \in M$ e para cada $p \in T_x^*M \backslash \{0\}$ temos que $(H + f_0)(x, sp) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$. Usando a compacidade de M

podemos escolher $c > 0$ tal que, $\forall\, x \in M$, $\forall p \in T_x^*M$ com $|p| > c$ tenhamos $(H+f_0)(x,p) \geq k+1$. Logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall\, n \geq N$ tem-se $|p_n| > c$, ou seja, $(H+f_0)(\vartheta_n) \not\to k$, contradição.

■

Teorema 2.5. *(Regularidade do nível de energia)*

Dado $k \in \mathbb{R}$, o subconjunto $\mathcal{R}(k)$ é aberto e denso em $C^\infty(M;\mathbb{R})$.

Demonstração: A abertura do conjunto $\mathcal{R}(k)$ segue diretamente do lema 2.4 pois, se $\mathcal{R}(k)$ não for aberto vai existir uma $f_0 \in \mathcal{R}(k)$ e uma seqüência $\mathcal{R}(k) \not\ni f_n \to f_0$ em $C^\infty(M;\mathbb{R})$ com pontos $\vartheta_n \in \varepsilon^k_{f_n}$ tais que, $d_{\vartheta_n}(H+f_n) \equiv 0$. Logo podemos destacar uma subseqüência $\vartheta_{n_i} \to \vartheta_0 \in \varepsilon^k_{f_0}$. Pela convergência das f_n em $C^\infty(M;\mathbb{R})$ temos que $d_{\vartheta_n}(H+f_n) \to d_{\vartheta_0}(H+f_0) \equiv 0$. Absurdo pois, $f_0 \in \mathcal{R}(k)$.

Para ver a densidade de $\mathcal{R}(k)$ em $C^\infty(M;\mathbb{R})$, considere $f_0 \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ e $\mathcal{U}$, uma vizinhança aberta arbitrária contendo uma bola de raio $\varepsilon > 0$ e centro em f_0. Afirmamos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{R}(k) \neq \varnothing$.

De fato, suponha, por absurdo, que $\mathcal{U} \cap \mathcal{R}(k) = \varnothing$ e considere o hamiltoniano perturbado da forma $H_\delta := H + (f_0+\delta)$, para $\delta \in (0,\varepsilon)$. Tomando $f_\delta := f_0 + \delta \in \mathcal{U}$, vemos que $\varepsilon^k_{f_\delta} = \varepsilon^{k+\delta}_{f_0}$. Como $\mathcal{U} \cap \mathcal{R}(k) = \varnothing$, temos que $\varepsilon^k_{f_\delta}$ não é um nível regular, logo existe $\vartheta \in \varepsilon^k_{f_\delta}$, tal que, $d_\vartheta(H+f_\delta) \equiv 0$. Note que, $d_\vartheta(H+f_0) = d_\vartheta(H+f_\delta) \equiv 0$ e $\vartheta \in \varepsilon^{k+\delta}_{f_0}$, ou seja, $k+\delta$ não é valor regular de $(H+f_0)$ para todo $\delta \in (0,\varepsilon)$, contradizendo o teorema de Sard. ■

2.2 O Lema de Não-Degeneração (N-D)

Definição 2.6. *Dados $k \in \mathbb{R}$ e $0 < a \leq b \in \mathbb{R}$, definimos o conjunto $\mathcal{G}^{a,b}_k \subseteq \mathcal{R}(k)$ dado por*

$\mathcal{G}^{a,b}_k = \{f \in \mathcal{R}(k) \mid$ toda órbita periódica $\vartheta \in (H+f)^{-1}(k)$, com período mínimo $T_{min}(\vartheta) \leq a$ é não-degenerada de ordem m para $H+f$, $\forall\, m \leq \frac{b}{T_{min}}\}$.

Observe que, se temos $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, tais que, $0 < a, a' < \infty$, $a \leq a'$ e $b \leq b'$, então $\mathcal{G}^{a',b'}_k \subseteq \mathcal{G}^{a,b}_k$.

Lema 2.7. *(**Não-Degeneração**)*

Fixado $k \in \mathbb{R}$, a propriedade
i) $\varepsilon^k_L = \{(x,v) \in TM \mid E_L(x,v) = k\}$ é regular;
ii) Qualquer órbita periódica de período positivo no nível ε^k_L é não-degenerada para todas as ordens.
é genérica para L.

Definição 2.8. *Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos $\mathcal{G}(k) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{G}^{n,n}_k$. Então $\mathcal{G}(k)$ é o conjunto onde todos os potenciais $f \in \mathcal{R}(k)$ tais que toda órbita periódica de período positivo no nível de energia $(H+f)^{-1}(k)$ é não-degenerada de todas as ordens para $H+f$.*

Para provar o Lema de Não-Degeneração, basta mostrar que $\mathcal{G}(k)$ é genérico em $C^\infty(M;\mathbb{R})$, ou seja, que cada, $\mathcal{G}^{n,n}_k$ é aberto $C^\infty(M;\mathbb{R})$ e denso em $\mathcal{R}(k)$, pois pelo Teorema 2.5, temos que $\mathcal{R}(k)$ é denso em $C^\infty(M;\mathbb{R})$.

Vamos primeiro à prova da abertura dos conjuntos $\mathcal{G}^{n,n}_k$.

2.2.1 Abertura de $\mathcal{G}_k^{n,n}$

Vamos provar que o $\mathcal{G}_k^{n,n}$ é aberto em $C^\infty(M;\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.9. *Dados $k \in \mathbb{R}$ e $f_0 \in \mathcal{R}(k)$ existe $\mathcal{U}$ vizinhança de f_0 em $C^\infty(M;\mathbb{R})$ e $0 < \alpha := \alpha(\mathcal{U}, f_0)$ tais que, para todo $f \in \mathcal{U}$, toda órbita periódica de $H + f$ no nível $(H+f)^{-1}(k)$ tem período maior ou igual a α.*

Demonstração: Primeiramente vamos introduzir uma métrica $\mathbf{g}$ em T^*M, tal que, $\|X^{H+f_0}(\vartheta)\| \leq \mathcal{K}$, $\forall \vartheta \in T^*M$ (basta decompor TT^*M nos espaços horizontal e vertical e estender a métrica de M a uma métrica produto em T^*M, então esta condição segue da compacidade de M). Assim, podemos encontrar uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f_0, tal que, para todo $f \in \mathcal{U}$ temos que $\|X^{H+f}(\vartheta)\| \leq 2\mathcal{K}$, $\forall \vartheta \in T^*M$.

Agora, supondo que a afirmação do lema seja falsa, então existem seqüências, $\mathcal{U} \ni f_n \to f_0$, $T_n > 0$ com $T_n \to 0$ e $\vartheta_n \in (H + f_n)^{-1}(k)$ tais que $\psi_{T_n}^{H+f_n}(\vartheta_n) = \vartheta_n$.

Pelo lema 2.4, escolhendo uma subseqüência adequada, podemos supor que $\vartheta_n \to \vartheta_0 \in (H + f_0)^{-1}(k)$. Note que, fixado $t > 0$, para todo n tal que, $T_n \leq t$, temos

$$d_{T^*M}(\psi_t^{H+f_n}(\vartheta_n), \vartheta_n) \leq \int_0^{T_n} \|\frac{d}{ds}(\psi_s^{H+f_n}(\vartheta_n))\|\, ds = \int_0^{T_n} \|X^{H+f_n}(\psi_s^{H+f_n}(\vartheta_n))\|\, ds \leq 2\mathcal{K}T_n,$$

daí segue que $d_{T^*M}(\psi_t^{H+f_n}(\vartheta_0), \vartheta_0) = 0$, $\forall t > 0$, isto é, $\vartheta_0 \in (H + f_0)^{-1}(k)$ é um ponto fixo, contradizendo $f_0 \in \mathcal{R}(k)$. ∎

Lema 2.10. *Dados $k \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a \leq b < \infty$, o conjunto $\mathcal{G}_k^{a,b}$ é aberto em $C^\infty(M;\mathbb{R})$.*

Demonstração: Caso, $\mathcal{G}_k^{a,b} \neq \varnothing$, tome qualquer $f_0 \in \mathcal{G}_k^{a,b}$, se f_0 não é ponto interior, temos que existe uma seqüência $f_n \to f_0$ com $f_n \notin \mathcal{G}_k^{a,b}$. Portanto existem $\vartheta_n \in (H + f_n)^{-1}(k)$, $T_n = T_{min}(\vartheta_n) \in (0; a]$ e números naturais $\ell_n \geq 1$ tais que, $\ell_n T_n \leq b$, $\psi_{\ell_n T_n}^{H+f_n}(\vartheta_n) = \vartheta_n$ e $d_{\vartheta_n}\psi_{\ell_n T_n}^{H+f_n}$ restrita ao espaço tangente ao nível de energia correspondente tem 1 como autovalor de multiplicidade algébrica maior que 1.

Considere $\mathcal{U}_0$ e $0 < \alpha := \alpha(\mathcal{U}_0, f_0) < a$ como no lema 2.9. Passando a uma subseqüência podemos supor que $f_n \in \mathcal{U}_0$ e portanto que $T_n \in [\alpha; a]$, com

$$\vartheta_n \to \vartheta_0 \in \varepsilon_{f_0}^k,\ T_n \to T_0,\ \ell_n = \ell_0,\ 0 < \alpha \leq T_0 \leq a \ \text{ e } \ \ell_0 T_0 \leq b.$$

Então $\psi_{\ell_0 T_0}^{L+f_0}(\vartheta_0) = \vartheta_0$ e e $d_{\vartheta_0}\psi_{\ell_0 T_0}^{H+f_0}$ tem 1 como autovalor de multiplicidade algébrica maior que 1, ou seja, ϑ_0 é uma órbita periódica com período minimal $\leq a$, degenerada de ordem $\ell_0 \leq \frac{b}{T_0}$, contradizendo $f_0 \in \mathcal{G}_k^{a,b}$. ∎

2.2.2 Densidade de $\mathcal{G}_k^{n,n}$

Vamos provar que o $\mathcal{G}_k^{c,c}$ é denso em $C^\infty(M;\mathbb{R})$, $\forall c \in \mathbb{R}_+$. De fato, basta mostrar que, $\mathcal{G}_k^{c,c}$ é denso em $\mathcal{R}(k)$. Ainda, podemos reduzir esta demonstração a um tratamento local. Mais precisamente, a afirmação é consequência direta do seguinte lema de redução.

Lema 2.11. *Fixado $c \in \mathbb{R}_+$, para todo $f_0 \in \mathcal{R}(k)$, existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U}_{f_0}$ de f_0, tal que, $\mathcal{G}_k^{c,c} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{U}_{f_0}$.*

Para a demonstração do lema 2.11 vamos seguir o método de indução usado em [6], fazendo uso de argumentos de transversalidade em [1] e [2]. Sendo a prova consequência da série de lemas a seguir:

Proposição 2.12. *Dados $k \in \mathbb{R}$, $0 < a < b < +\infty$, e $f_0 \in \mathcal{R}(k)$. Considere o campo normal Y^{H+f_0} conforme definição 1.13, $\varepsilon = \varepsilon(H + f_0) > 0$ definido pela proposição 1.14 (v), e defina os seguintes conjuntos, $\mathcal{U}_{f_0} \subset \mathcal{R}(k)$ vizinhança C^∞ de f_0, $\alpha = \alpha(\mathcal{U}_{f_0}) > 0$ de acordo com o lema 2.9, $\mathbb{X} = T^*M \times (a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\mathbb{Y} = T^*M \times T^*M \times \mathbb{R}$. Então a aplicação $\rho : \mathcal{U}_{f_0} \to C^\infty(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$ dada por $\rho(f) := \rho_f$, onde*

$$\rho_f(\vartheta, t, s) = (\psi_s^{H+f^\perp}(\vartheta), \psi_t^{H+f}(\vartheta), (H + f)(\vartheta) - k)$$

é uma representação injetiva.

Demonstração: Em primeiro lugar vemos que ρ esta bem definida, pois $\mathbb{Y}$ tem a estrutura de variedade produto e, escrevendo $\rho_f = (\rho_f^1, \rho_f^2, \rho_f^3)$, com

$$\begin{aligned}\rho_f^1(\vartheta, t, s) &= \psi_s^{H+f^\perp}(\vartheta)\\ \rho_f^2(\vartheta, t, s) &= \psi_t^{L+f}(\vartheta)\\ \rho_f^3(\vartheta, t, s) &= (H + f)(\vartheta) - k\end{aligned}$$

vemos que cada função coordenada é suave e portanto $\rho_f \in C^\infty(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$.

Note que ρ é injetiva. De fato, se $\rho_{f_1} = \rho_{f_2}$ então, em particular, $(H + f_1)(\vartheta) - k = (H + f_2)(\vartheta) - k$, para todo $\vartheta \in T^*M$, assim $f_1(x) = f_2(x)$, para todo $x \in M$. Logo $f_1 = f_2$.

Resta verificar que $ev_\rho : \mathcal{U}_{f_0} \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é suave. Para tanto observemos que, devido à estrutura de variedade produto de $\mathcal{U}_{f_0} \times \mathbb{X}$, podemos escrever

$$d_{(f,x)} ev_\rho := \tfrac{\partial ev_\rho}{\partial f}(f, x) + \tfrac{\partial ev_\rho}{\partial x}(f, x),\ \forall (f, x) \in \mathcal{U}_{f_0} \times \mathbb{X}$$

É claro que $\frac{\partial ev_\rho}{\partial x}(f, x)$ sempre está definida sendo dada por

$$\tfrac{\partial ev_\rho}{\partial x}(f, x) = d_x \rho_f$$

Mais precisamente, dados $(\xi, \dot{t}, \dot{s}) \in T_{x=(\vartheta,T,S)}\mathbb{X}$ temos
$\frac{\partial ev_\rho}{\partial x}(f, x)(\xi, \dot{t}, \dot{s}) = d_x \rho_f(\xi, \dot{t}, \dot{s}) = \frac{d}{dr}\rho_f(\vartheta(r), t(r), s(r)) \mid_{r=0}=$
$= \frac{d}{dr}(\psi_{s(r)}^{H+f^\perp}(\vartheta(r)), \psi_{t(r)}^{H+f}(\vartheta(r)), (H + f)(\vartheta(r)) - k) \mid_{r=0}=$
$(d_\vartheta \psi_S^{H+f^\perp}(\xi) + \dot{s}Y^{H+f}(\psi_S^{H+f^\perp}(\vartheta)), d_\vartheta \psi_T^{H+f}(\xi) + \dot{t}X^{H+f}(\psi_S^{H+f}(\vartheta)), d_\vartheta(H + f)(\xi))$

Observe que, se $S = 0$ e $\psi_S^{H+f}(\vartheta) = \vartheta$, então
$\frac{\partial ev_\rho}{\partial x}(f, x)(\xi, \dot{t}, \dot{s}) = (\xi + \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta), d_\vartheta \psi_T^{H+f}(\xi) + \dot{t}X^{H+f}(\vartheta), d_\vartheta(H + f)(\xi))$.

Todavia devemos mostrar que $\frac{\partial ev_\rho}{\partial f}(f, x)$ sempre está definida. Pela estrutura de $C^\infty(M; \mathbb{R})$ temos que isto é equivalente a mostrar que sempre existem

$$\tfrac{d}{dr}\psi_S^{H+f+rh^\perp}(\vartheta) \mid_{r=0},\ \tfrac{d}{dr}\psi_T^{H+f+rh}(\vartheta) \mid_{r=0} \text{ e } \tfrac{d}{dr}(H + f + rh)(\vartheta) \mid_{r=0}$$

para quaisquer $h \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ e $x = (\vartheta, T, S) \in \mathbb{X}$.

a) Para calcular $\frac{d}{dr}(H + f + rh)(\vartheta) \mid_{r=0}$, procedemos diretamente, obtendo $\frac{d}{dr}(H + f + rh)(\vartheta) \mid_{r=0} = h \circ \pi(\vartheta)$

b) Para calcular, $\frac{d}{dr}\psi_T^{H+f+rh}(\vartheta) \mid_{r=0}$ começamos definindo a curva integral $\gamma_0(t) = \psi_t^{H+f}(\vartheta)$ e definimos o campo $Z_h(t)$ ao longo de γ_0 dado por:

$$Z_h(t) = \tfrac{d}{dr}\psi_t^{H+f+rh}(\vartheta) \mid_{r=0}$$

Fazendo $\gamma(r,t) = \psi_t^{H+f+rh}(\vartheta)$ teremos

$$Z_h(t) = \tfrac{\partial}{\partial r}\gamma(r,t) \mid_{r=0}$$

Usando o fato de $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}$ temos que $Z_h(t)$ satisfaz o seguinte problema de condições iniciais:

$$\begin{cases} \dot{Z}_h(t) = J\mathcal{H}^{H+f}(\gamma_0(t))Z_h(t) + b_h(t) \\ Z_h(0) = 0 \end{cases}$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{H}^{H+f} = \begin{bmatrix} (H+f)_{xx} & (H+f)_{xp} \\ (H+f)_{px} & (H+f)_{pp} \end{bmatrix}$,
e $b_h = \begin{bmatrix} 0 \\ -h_x \end{bmatrix}$.

Usando, técnicas de variação de parâmetros (ver [21], pg. 46) e o fato de que na seção 1.4 vimos que $\frac{d}{dt}d_\vartheta\psi_t^{H+f} = J\mathcal{H}^{H+f}(\gamma_0(t))d_\vartheta\psi_t^{H+f}$, temos que o campo $Z_h(t)$ é dado por:

$$Z_h(t) = d_\vartheta\psi_t^{H+f}\int_0^t (d_\vartheta\psi_r^{H+f})^{-1}b_h(r)dr$$

Assim $\dfrac{d}{dr}\psi_T^{H+f+rh}(\vartheta) \mid_{r=0} = Z_h(T) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}\displaystyle\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}b_h(t)dt.$

c) Para calcular, $\frac{d}{dr}\psi_T^{(H+f+rh)^\perp}(\vartheta) \mid_{r=0}$ começamos definindo a curva integral $\gamma_0(s) = \psi_s^{H+f^\perp}(\vartheta)$ e definimos o campo $Z^h(t)$ ao longo de γ_0 dado por:

$$Z^h(s) = \tfrac{d}{dr}\psi_s^{H+f+rh^\perp}(\vartheta) \mid_{r=0}$$

Fazendo $\gamma(r,s) = \psi_s^{H+f+rh^\perp}(\vartheta)$ teremos

$$Z^h(s) = \tfrac{\partial}{\partial r}\gamma(r,s) \mid_{r=0}$$

Usando o fato de $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial r}$ temos que $Z_h(s)$ satisfaz o seguinte problema de condições iniciais:

$$\begin{cases} \dot{Z}^h(s) = \mathcal{H}^{H+f}(\gamma_0(s))Z^h(s) + b^h(s) \\ Z_h(0) = 0 \end{cases}$$

onde $b^h = \begin{bmatrix} h_x \\ 0 \end{bmatrix}$.

Usando, técnicas de variação de parâmetros (ver [21], pg. 46) e o fato de que na seção 1.4 vimos que $\frac{d}{ds}d_\vartheta\psi_s^{H+f^\perp} = \mathcal{H}^{H+f}(\gamma_0(s))d_\vartheta\psi_s^{H+f^\perp}$, temos que o campo $Z^h(s)$ é dado por:

$$Z^h(s) = d_\vartheta\psi_s^{H+f^\perp}\int_0^s (d_\vartheta\psi_r^{H+f})^{-1}b_h(r)dr$$

Assim $\dfrac{d}{dr}\psi_S^{H+f+rh^\perp}(\vartheta)\mid_{r=0}= Z^h(S) = d_\vartheta\psi_S^{H+f^\perp}\displaystyle\int_0^S (d_\vartheta\psi_s^{H+f^\perp})^{-1}b^h(s)ds.$

De (a), (b) e (c) concluímos que:

$$\frac{\partial ev_\rho}{\partial f}(f,x)(h) =$$
$$(d_\vartheta\psi_S^{H+f^\perp}\int_0^S (d_\vartheta\psi_s^{H+f^\perp})^{-1}b^h(s)ds\ ,\ d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}b_h(t)dt\ ,\ h\circ\pi(\vartheta))$$

Observe que, se $S=0$ e $\psi_S^{H+f}(\vartheta)=\vartheta$, então

$$\frac{\partial ev_\rho}{\partial f}(f,x)(h) = (0,\ d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}b_h(t)dt\ ,\ h\circ\pi(\vartheta)).$$

Com isto concluímos que ev_ρ é suave e portanto ρ é uma representação.

■

Para traduzir a propriedade de não-degeneração em termos de transversalidade a uma variedade introduzimos a diagonal nula $\Delta_0 \subseteq \mathbb{Y} = T^*M\times T^*M\times\mathbb{R}$ dada por $\Delta_0 = \{(\vartheta,\vartheta,0)\mid \vartheta\in T^*M\}$. Então podemos provar o seguinte lema:

Lema 2.13. *Com as mesmas notações da proposição 2.12, temos que, $\forall f\in\mathcal{U}_{f_0}$, com $T\in(a,b)$ e $S\in(-\varepsilon,\varepsilon)$,*

i) Se ϑ é uma órbita periódica de período positivo T para $H+f$ no nível $(H+f)^{-1}(k)$ então, $\rho_f(\vartheta,T,0)\in\Delta_0$. Reciprocamente, se $\rho_f(\vartheta,T,S)\in\Delta_0$ então, $S=0$ e ϑ é uma órbita periódica de período positivo T para $H+f$ no nível $(H+f)^{-1}(k)$.

ii) Se ϑ é uma órbita periódica de período positivo, para $H+f$ no nível $(H+f)^{-1}(k)$. Então, ϑ é não-degenerada de ordem $m=\frac{T}{T_{min}(\vartheta)}$ se, e somente se, $\rho_f \pitchfork_{(\vartheta,T,0)} \Delta_0$.

Demonstração: i) Sabemos que se ϑ é uma órbita periódica de período positivo T para $H+f$ no nível $(H+f)^{-1}(k)$ então $\psi_T^{H+f}(\vartheta)=\vartheta$ e $(H+f)(\vartheta)=k$ logo $\rho_f(\vartheta,T,0)=(\vartheta,\vartheta,0)$, ou seja, $\rho_f(\vartheta,T,0)\in\Delta_0$.

Reciprocamente, se $\rho_f(\vartheta,T,S)\in\Delta_0$ temos que $\psi_S^{H+f^\perp}(\vartheta)=\psi_T^{H+f}(\vartheta)$ e $(H+f)(\vartheta)=k$. Pela proposição 1.14 (v), temos que
$S=e_\vartheta^{-1}((H+f)(\psi_S^{H+f^\perp}(\vartheta)))=e_\vartheta^{-1}((H+f)(\psi_T^{H+f}(\vartheta)))=e_\vartheta^{-1}((H+f)(\vartheta))=e_\vartheta^{-1}(k)=0$. Portanto $\psi_T^{H+f}(\vartheta)=\psi_0^{H+f^\perp}(\vartheta)=\vartheta$.

ii) Por (i), temos que $\rho_f(\vartheta,T,0)\in\Delta_0$. Consideremos a ação de $d_{(\vartheta,T,0)}\rho_f$ em $T_{(\vartheta,T,0)}\,\mathbb{X}$. Pela proposição 2.12 sabemos que

$$d_{(\vartheta,T,0)}\rho_f(\xi,\dot t,\dot s) = (\xi+\dot sY^{H+f}(\vartheta), d_\vartheta\psi_T^{H+f}(\xi)+\dot tX^{L+f}(\vartheta), d_\vartheta(H+f)(\xi)).$$

Note que, $T_{(\vartheta,\vartheta,0)}\Delta_0=\{(\zeta,\zeta,0)\mid\zeta\in T_\vartheta M\}$, portanto $\rho_f\pitchfork_{(\vartheta,T,0)}\Delta_0$ se o sistema,

$$(\xi + \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta) + \zeta, d_\vartheta\psi_T^{H+f}(\xi) + \dot{t}X^{H+f}(\vartheta) + \zeta, d_\vartheta(H+f)(\xi)) = (u, v, w).$$

sempre tem solução.

De fato, escolhendo $\zeta = u - \xi - \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta)$ temos que o sistema sempre tem solução se:
$\dot{t}X^{H+f}(\vartheta) - \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta) + (d_\vartheta\psi_T^{H+f} - id)(\xi) = v - u, \quad (1)$
$d_\vartheta(H+f)(\xi) = w. \quad (2)$

Usando as coordenadas da proposição 1.14, vamos definir o conjunto das soluções da equação (2):
$\mathcal{V}_w = \{\xi = aX^{H+f}(\vartheta) + bY^{H+f}(\vartheta) + U \mid a, b \in \mathbb{R},$
$U \in \langle X^{H+f}(\vartheta), Y^{H+f}(\vartheta)\rangle^\perp$ (lembre que $^\perp$ representa o complemento simplético) e $d_\vartheta(H+f)(\xi) = w\}$.

Que é uma variedade afim, $2n-1$ dimensional, dada por:
$\mathcal{V}_w = \{\xi = aX^{H+f}(\vartheta) + b_0Y^{H+f}(\vartheta) + U \mid \ b_0 = \frac{w}{d_\vartheta(H+f)(Y^{H+f}(\vartheta))}\}$.

Portanto a equação (1) restrita a $\mathcal{V}_w$ fica,

$$\dot{t}X^{H+f}(\vartheta) - \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta) + (d_\vartheta\psi_T^{H+f} - id)(aX^{H+f}(\vartheta) + b_0Y^{H+f}(\vartheta) + U) = v - u$$

Pela proposição 1.14 podemos escrever
$v - u = \tilde{a}X^{L+f}(\vartheta) + \tilde{b}Y^{H+f}(\vartheta) + \bar{U}$,
$(d_\vartheta\psi_T^{H+f} - id)(Y^{H+f}(\vartheta)) = cX^{H+f}(\vartheta) + c^*Y^{H+f}(\vartheta) + U_0$ e
$(d_\vartheta\psi_T^{H+f} - id)(U) = \tau_0X^{H+f}(\vartheta) + (d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)^m - Id)(U)$.

Assim a equação (1) restrita a $\mathcal{V}_w$ fica,
$(\dot{t} + b_0c + \tau_0)X^{H+f}(\vartheta) + (c^* - \dot{s})Y^{H+f}(\vartheta) + (d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)^m - Id)(U) + b_0U_0 =$
$\tilde{a}X^{L+f}(\vartheta) + \tilde{b}Y^{H+f}(\vartheta) + \bar{U}$

Fazendo $\dot{t} = \tilde{a} - (b_0c + \tau_0)$ e $\dot{s} = c^* - \tilde{b}$ vemos que a equação (1) restrita a $\mathcal{V}_w$ tem sempre solução pois, ϑ é não-degenerada de ordem m se, e somente se, $d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)^m - Id$ é invertível, e portanto sempre existe U tal que,

$$(d_\vartheta P(\Sigma, \vartheta)^m - Id)(U) = \bar{U} - b_0U_0 \quad (3)$$

$\forall \bar{U} \in \langle X^{H+f}(\vartheta), Y^{H+f}(\vartheta)\rangle^\perp = T_\vartheta\Sigma$.

Reciprocamente, se $\rho_f \pitchfork_{(\vartheta,T,0)} \Delta_0$. Como $\rho_f(\vartheta, T, 0) \in \Delta_0$, da definição de transversalidade, temos que o sistema

$$(\xi + \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta) + \zeta, d_\vartheta\psi_T^{H+f}(\xi) + \dot{t}X^{H+f}(\vartheta) + \zeta, d_\vartheta(H+f)(\xi)) = (u, v, w).$$

sempre tem solução. Pelo visto acima, isto implica que a equação (3) sempre tem solução, ou seja, que ϑ é não-degenerada.

$\blacksquare$

Corolário 2.14. *Com as mesmas notações do lema 2.13 temos que, dada $f \in \mathcal{U}_{f_0}$, toda órbita periódica de período positivo ϑ, com $T_{min}(\vartheta) \in (a, b)$, no nível $(H+f)^{-1}(k)$, é não-degenerada para $H+f$ de ordem m, $\forall m \leq \frac{b}{T_{min}}$ se, e somente se, $\rho_f \pitchfork \Delta_0$.*

Demonstração:

Suponha que toda órbita periódica ϑ de período positivo $T = mT_{min}(\vartheta) \in (a, b)$, no nível $(H+f)^{-1}(k)$, é não-degenerada de ordem m, para $H+f$. Dado (ϑ, T, S) temos que se $\rho_f(\vartheta, T, S) \notin$

Δ_0 não há nada a fazer. Por outro lado, se $\rho_f(\vartheta, T, S) \in \Delta_0$ então, pelo lema 2.13 (i) temos $S = 0$ e por (ii), temos que $\rho_f \pitchfork_{(\vartheta,T,0)} \Delta_0$. Logo $\rho_f \pitchfork \Delta_0$.

Reciprocamente, se $\rho_f \pitchfork \Delta_0$. Então, para qualquer órbita periódica ϑ de período positivo $T = mT_{min}(\vartheta) \in (a, b)$ temos que $\rho_f(\vartheta, T, 0) \in \Delta_0$. Logo, pelo lema 2.13 (ii), ϑ é não-degenerada de ordem m, para $H + f$. ■

O lema anterior mostra que a condição de não-degeneração das órbitas periódicas de período positivo em um intervalo (a, b) para um dado nível de energia $(H+f)^{-1}(k)$ é equivalente à transversalidade da aplicação ρ_f em relação à diagonal Δ_0.

O elemento chave para a demonstração do lema 2.11 é o seguinte lema.

Lema 2.15. *Considere a representação ρ conforme a proposição 2.12 e a sua valoração em $\mathcal{U}_{f_0}$, isto é, $ev : \mathcal{U}_{f_0} \times \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, dada por $ev(f, \vartheta, t, s) = \rho_f(\vartheta, t, s)$. Suponha $ev(f, \vartheta, T, S) \in \Delta_0$ então,*

i) Se ϑ é não-degenerada de ordem $m = \frac{T}{T_{min}}$ para $H + f$ então $ev \pitchfork_{(f,\vartheta,T,S)} \Delta_0$;

ii) Se $T = T_{min}(\vartheta)$ então, $ev \pitchfork_{(f,\vartheta,T,S)} \Delta_0$.

Demonstração:

i) Sabemos que $ev(f, \vartheta, T, S) = \rho_f(\vartheta, T, S)$ portanto $\rho_f(\vartheta, T, S) \in \Delta_0$, logo $S = 0$. Já que ϑ é não-degenerada de ordem $m = \frac{T}{T_{min}}$ para $H + f$, então, pelo lema 2.13 (ii), $\rho_f \pitchfork_{(\vartheta,T,0)} \Delta_0$, em particular $ev \pitchfork_{(f,\vartheta,T,0)} \Delta_0$.

ii) Como $ev(f, \vartheta, T, S) \in \Delta_0$ devemos mostrar que

$$d_{(f,\vartheta,T,0)} ev T_{(f,\vartheta,T,0)}(\mathcal{U}_{f_0} \times \mathbb{X}) + T_{(\vartheta,\vartheta,0)}\Delta_0 = T_{(\vartheta,\vartheta,0)}\mathbb{Y}$$

Para tanto, tomemos quaisquer $(u, v, w) \in T_{(\vartheta,\vartheta,0)}\mathbb{Y}$, $(\zeta, \zeta, 0) \in T_{(\vartheta,\vartheta,0)}\Delta_0$ e $(h, \xi, \dot{t}, \dot{s}) \in T_{(f,\vartheta,T,0)}(\mathcal{U}_{f_0} \times \mathbb{X})$. Pela proposição 2.12 temos que

$$\begin{aligned} & d_{(f,\vartheta,T,0)} ev_\rho(h, \xi, \dot{t}, \dot{s}) = (0,\ d_\vartheta\psi_T^{H+f} \textstyle\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1} b_h(t)dt\ ,\ h \circ \pi(\vartheta)) + \\ & (\xi + \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta), d_\vartheta\psi_T^{H+f}(\xi) + \dot{t}X^{H+f}(\vartheta), d_\vartheta(H + f)(\xi)) = \\ & = (\xi + \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta),\ d_\vartheta\psi_T^{H+f}(\xi) + \dot{t}X^{H+f}(\vartheta) + d_\vartheta\psi_T^{H+f} \textstyle\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1} b_h(t)dt\ ,\ h \circ \pi(\vartheta) + \\ & d_\vartheta(H + f)(\xi)) \end{aligned}$$

Portanto $ev_\rho \pitchfork_{(f,\vartheta,T,0)} \Delta_0$ se, e somente se, o sistema

$$\begin{cases} u = \xi + \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta) + \zeta & (1) \\ v = d_\vartheta\psi_T^{H+f}(\xi) + \dot{t}X^{H+f}(\vartheta) + d_\vartheta\psi_T^{H+f} \int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1} b_h(t)dt + \zeta & (2) \\ w = h \circ \pi(\vartheta) + d_\vartheta(H + f)(\xi) & (3) \end{cases}$$

sempre tem solução.

Usando as coordenadas da proposição 1.14 e fazendo $\zeta = u - \xi - \dot{s}Y^{H+f}(\vartheta)$ temos que a equação (2) restrita ao conjunto das soluções de (3),

$$\mathcal{V}_w = \{h \in C^\infty(M, \mathbb{R}),\ \xi = aX^{H+f}(\vartheta) + b_0Y^{H+f}(\vartheta) + U \mid\ b_0 = \frac{w - h \circ \pi(\vartheta)}{d_\vartheta(H + f)(Y^{H+f}(\vartheta))}\}$$

terá a forma
$(\dot{t}+b_0c+\tau_0)X^{H+f}(\vartheta)+(c^*-\dot{s})Y^{H+f}(\vartheta)+(d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)-Id)(U)+b_0U_0+$
$d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T(d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}b_h(t)dt=\tilde{a}X^{L+f}(\vartheta)+\tilde{b}Y^{H+f}(\vartheta)+\bar{U}$,

onde
$v-u=\tilde{a}X^{L+f}(\vartheta)+\tilde{b}Y^{H+f}(\vartheta)+\bar{U}$,
$(d_\vartheta\psi_T^{H+f}-id)(Y^{H+f}(\vartheta))=cX^{H+f}(\vartheta)+c^*Y^{H+f}(\vartheta)+U_0$ e
$(d_\vartheta\psi_T^{H+f}-id)(U)=\tau_0X^{H+f}(\vartheta)+(d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)-Id)(U)$.

Em outras palavras, o sistema sempre tem solução, se a representação,

$$(\dot{t}+b_0c+\tau_0)X^{H+f}(\vartheta)+(c^*-\dot{s})Y^{H+f}(\vartheta)+(d_\vartheta P(\Sigma,\vartheta)-Id)(U)+b_0U_0+d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T(d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}b_h(t)dt$$

for sobrejetiva em $T_\vartheta T^*M$.

Para isto basta mostrar que $d_\vartheta\psi_T^{H+f}\displaystyle\int_0^T(d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}b_h(t)dt$ gera um espaço de dimensão $2n-2$ complementar à $\langle X^{H+f}(\vartheta),Y^{H+f}(\vartheta)\rangle$ em $T_\vartheta T^*M$, que é a afirmação do próximo lema.

■

Lema 2.16. *Com as mesmas notações acima, a aplicação $\mathcal{B}:C^\infty(M;\mathbb{R})\to T_\vartheta T^*M$ dada por,*

$$\mathcal{B}(h)=-d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T(d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}b_h(t)dt$$

gera um espaço complementar à $\langle X^{H+f}(\vartheta),Y^{H+f}(\vartheta)\rangle$.

Demonstração:

Para ver isto basta restringir a aplicação $\mathcal{B}$ a um subespaço adequado de $C^\infty(M;\mathbb{R})$.

Em primeiro lugar, dados $t_0\in(0,T)$ e $\varepsilon>0$, denotemos por $\mathcal{A}_{t_0}$, o seguinte espaço de funções

$$\mathcal{A}_{t_0}=\{\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n-1}\mid\alpha(t)=(a_1(t),...,a_{n-1}(t))\neq 0,\ \forall t\in(t_0-\varepsilon,t_0-\varepsilon)\}$$

Vamos fixar $t_0\in(0,T)$ e $\varepsilon>0$, tais que, $x(t)=\pi(\gamma(t))$, onde $\gamma(t)=\psi_t^{H+f}(\vartheta)$, não contenha autointerseções para $t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$, ou seja, que $H_p(\gamma(t))=d\pi X^{H+f}(\gamma(t))\neq 0$. Então existe um sistema de coordenadas tubulares em uma vizinhança $\mathcal{V}$ de $\pi(\gamma(t_0))$, $F:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^n$, tal que,
i) $F(x)=(t,z_1,...,z_{n-1})$;
ii) $F(x(t))=(t,0,...,0)$.

Note que, por construção, $d_{x(t)}FH_p(\gamma(t))=(1,0,...0)$.

Introduzimos uma função bump $\sigma:M\to\mathbb{R}$, tal que,
i) $supp(\sigma)\subset\mathcal{V}$;
ii) $\sigma\mid_{\mathcal{V}_0}\equiv 1$,
com $x(t_0)\in\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}$.

Definimos então nosso espaço de perturbação $\mathcal{F}_{t_0}\subset C^\infty(M;\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{F}_{t_0}=\{h_{\alpha,\beta}(x)=\tilde{h}_{\alpha,\beta}(x)\cdot\sigma(x)\ \mid\ \alpha,\beta\in\mathcal{A}_{t_0}\}$$

onde, $\tilde{h}_{\alpha,\beta}(x)=\langle\alpha(t)\delta_{t_0}(t)+\beta(t)\dot{\delta}_{t_0}(t)\ ,\ z\rangle$, $F(x)=(t,z)$ e δ_{t_0} é uma aproximação suave da delta de Dirac no ponto $t=t_0$.

Em primeiro lugar, dada $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_{t_0}$ vamos calcular $d_{x(t)}h_{\alpha,\beta}$:

$$d_x h_{\alpha,\beta} = d_x \tilde{h}_{\alpha,\beta} \cdot \sigma(x) + \tilde{h}_{\alpha,\beta} \cdot d_x\sigma(x)$$

Por outro lado

$$d_x\tilde{h}_{\alpha,\beta} = (\langle \frac{d}{dt}(\alpha(t)\delta_{t_0}(t) + \beta(t)\dot{\delta}_{t_0}(t)), z\rangle, \alpha(t)\delta_{t_0}(t) + \beta(t)\dot{\delta}_{t_0}(t))d_x F$$

Avaliando em $x(t)$ e usando o fato de que $h_{\alpha,\beta}(x(t)) = 0$ e $\sigma(x(t)) = 1$, temos que:

$$d_{x(t)}h_{\alpha,\beta} = (0, \alpha(t)\delta_{t_0}(t) + \beta(t)\dot{\delta}_{t_0}(t))d_{x(t)}F$$

Em particular,

$$d_{x(t)}h_{\alpha,\beta}H_p(\gamma(t)) = (0, \langle\alpha(t)\delta_{t_0}(t) + \beta(t)\dot{\delta}_{t_0}(t))d_{x(t)}FH_p(\gamma(t)) = 0$$

para qualquer, $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}_{t_0}$.

Afirmamos que,

1) $\mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_0}) \subset T(H+f)^{-1}(k)$;
2) $X^{H+f}(\vartheta) \notin \mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_0})$;
3) $dim(\mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_0})) = 2n-2$;
4) Em particular, $\mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_0})$ gera um espaço complementar à $\langle X^{H+f}(\vartheta), Y^{H+f}(\vartheta)\rangle$.

Para ver (1) defina,

$$\alpha_0 = d_{x(t)}h_{\alpha,0} = (0, \alpha(t)\delta_{t_0}(t))d_{x(t)}F = \alpha_1\delta_{t_0}(t)$$

$$\beta_0 = d_{x(t)}h_{0,\beta} = (0, \beta(t)\dot{\delta}_{t_0}(t))d_{x(t)}F = \beta_1\dot{\delta}_{t_0}(t)$$

Então,

$$\mathcal{B}(h_\alpha) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \alpha_0\end{bmatrix}dt$$

$$\mathcal{B}(h_\beta) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \beta_0\end{bmatrix}dt$$

Note que,

$$\omega(\begin{bmatrix}0\\ \alpha_0\end{bmatrix}, X^{H+f}(\gamma(t))) = \alpha_0 H_p(\gamma(t)) = 0$$

analogamente

$$\omega(\begin{bmatrix}0\\ \beta_0\end{bmatrix}, X^{H+f}(\gamma(t))) = \beta_0 H_p(\gamma(t)) = 0$$

logo $\begin{bmatrix}0\\ \alpha_0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\ \beta_0\end{bmatrix}$ estão em $T(H+f)^{-1}(k)$.

Portanto, $\mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_0}) \subset T(H+f)^{-1}(k)$.

Para ver (2), primeiramente vamos fazer $\delta_{t_0} \to \delta_{Dirac}$ e escrever $\mathcal{B}(h_\alpha)$ e $\mathcal{B}(h_\beta)$ do seguinte modo,

$\mathcal{B}(h_\alpha) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \alpha_0\end{bmatrix}dt =$

$d_\vartheta\psi_T^{H+f}\displaystyle\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \alpha_1\end{bmatrix}\delta_{t_0}(t)dt =$
$d_\vartheta\psi_T^{H+f}(d_\vartheta\psi_{t_0}^{H+f})^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \alpha_1(t_0)\end{bmatrix}$

Analogamente, usando integração por partes obtemos,
$\mathcal{B}(h_\beta) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}\displaystyle\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \beta_0\end{bmatrix}dt =$
$d_\vartheta\psi_T^{H+f}\displaystyle\int_0^T (d_\vartheta\psi_t^{H+f})^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \beta_1\end{bmatrix}\dot\delta_{t_0}(t)dt =$
$d_\vartheta\psi_T^{H+f}(d_\vartheta\psi_{t_0}^{H+f})^{-1}\left\{J\mathcal{H}^{H+f}(t_0)\begin{bmatrix}0\\ \beta_1(t_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \dot\beta_1(t_0)\end{bmatrix}\right\}$

Portanto, supondo por absurdo que, $X^{H+f}(\gamma(t)) = \mathcal{B}(h_\alpha) + \mathcal{B}(h_\beta)$ teremos
$X^{H+f}(\gamma(t)) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}(d_\vartheta\psi_{t_0}^{H+f})^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0\\ \alpha_1(t_0)\end{bmatrix} + J\mathcal{H}^{H+f}(t_0)\begin{bmatrix}0\\ \beta_1(t_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \dot\beta_1(t_0)\end{bmatrix}\right\}$, ou equivalentemente
$X^{H+f}(\gamma(t_0)) = \left\{\begin{bmatrix}0\\ \alpha_1(t_0)\end{bmatrix} + J\mathcal{H}^{H+f}(t_0)\begin{bmatrix}0\\ \beta_1(t_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \dot\beta_1(t_0)\end{bmatrix}\right\}$

Desta igualdade segue que,

$$H_p(\gamma(t_0)) = H_{pp}(\gamma(t_0))\beta_1(t_0)$$

Como $H_p(\gamma(t_0)) \neq 0$ fica claro que temos $n-1$ escolhas LI para $\beta_1(t_0)$.

De fato, dF é um isomorfismo e para todo $\beta(t_0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ temos

$$\beta_1(t_0)H_p(\gamma(t_0)) = (0, \beta(t_0))dFH_p(\gamma(t_0)) = 0$$

Assim,

$$0 = \beta_1(t_0)H_p(\gamma(t_0)) = \beta_1(t_0)H_{pp}(\gamma(t_0))\beta_1(t_0)$$

contradizendo a convexidade de H.

Para ver (3) note que, em (2) obtivemos a representação limite

$$\mathcal{B}(h_\alpha) + \mathcal{B}(h_\beta) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}(d_\vartheta\psi_{t_0}^{H+f})^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0\\ \alpha_1(t_0)\end{bmatrix} + J\mathcal{H}^{H+f}(t_0)\begin{bmatrix}0\\ \beta_1(t_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \dot\beta_1(t_0)\end{bmatrix}\right\}$$

que pode ser reescrita, como

$$\mathcal{B}(h_\alpha) + \mathcal{B}(h_\beta) = d_\vartheta\psi_T^{H+f}(d_\vartheta\psi_{t_0}^{H+f})^{-1}\left\{\begin{bmatrix}0 & H_{pp}(\gamma(t_0))\\ I_n & -H_{xp}(\gamma(t_0))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1(t_0)\\ \beta_1(t_0)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ \dot\beta_1(t_0)\end{bmatrix}\right\}$$

Da equação acima fica evidente que $dim(\{\mathcal{B}(h_\alpha) + \mathcal{B}(h_\beta)\}) = dim(\{\alpha_1(t_0), \beta_1(t_0)\} = 2n-2$, pois $\begin{bmatrix}0 & H_{pp}(\gamma(t_0))\\ I_n & -H_{xp}(\gamma(t_0))\end{bmatrix}$ é um isomorfismo.

Para concluir devemos notar que, a afirmação (1) é verdadeira independentemente da aproximação δ_{t_0} da delta de Dirac no ponto $t = t_0$. Além disso as afirmações (2) e (3) são de independência linear, e portanto continuam válidas para δ_{t_0}, suficientemente próxima da delta de Dirac. ■

O teorema a seguir mostra como perturbar localmente uma órbita periódica não-degenerada de ordem $\leq m$ para que ela se torne não-degenerada de ordem $\leq 2m$. A prova apresentada é apenas em dimensão 2, ficando o caso n-dimensional em aberto. O argumento é válido para o caso n-dimensional, mas não sabemos como mostrar a sobrejetividade da representação obtida.

Teorema 2.17. *(Perturbação local de órbitas periódicas) Seja M superfície suave, $\mathbb{H} : T^*M \to \mathbb{R}$ um hamiltoniano suave e $\gamma = \{\psi_t^{\mathbb{H}}(\vartheta_0) \mid 0 \leq t \leq T\} \subseteq \mathbb{H}^{-1}(k)$ nível regular, onde T é o período minimal de γ, não degenerada de ordem $\leq m \in \mathbb{N}$. Então existe um potencial $f_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ arbitrariamente próximo de zero, com supp$(f_0) \subset \mathcal{U}$ aberto arbitrariamente pequeno em M, tal que, γ é não degenerada de ordem $2m$.*

Demonstração:

Escolha $t_0 \in (0, T)$ e $E(0) = \{e_1(0), e_2(0), e_1^*(0), e_2^*(0)\}$ referencial simplético em $\gamma(t_0)$ com $e_1(0) = X^{\mathbb{H}}(\gamma(t_0))$. Defina então, $E(t) = \{e_1(t), e_2(t), e_1^*(t), e_2^*(t)\}$, onde $\xi(t) = d_{\gamma(t_0)}\psi_{-t}^{\mathbb{H}}\xi(0)$, $\forall \xi(0) \in E(0)$, para $t \in (0, r)$ com $r > 0$ arbitrariamente pequeno.

Então podemos decompor a matriz da diferencial do fluxo em relação à base $E(0)$, $[d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)} \in Sp(2)$, como

$$[d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)} = [d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(r)} \cdot [d_{\gamma(t_0)}\psi_{T-r}^{\mathbb{H}}]_{E(r)}^{E(0)}$$

Note que por construção temos que $[d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(r)} = I_4$, portanto

$$[d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)} = [d_{\gamma(t_0)}\psi_{T-r}^{\mathbb{H}}]_{E(r)}^{E(0)} \qquad (1)$$

Agora consideremos U uma vizinhança arbitrariamente pequena de $\gamma(t_0)$ em T^*M e r suficientemente pequeno para que $\hat{\gamma} = \{\psi_t^{\mathbb{H}}(\vartheta_0) \mid t \in (t_0 - r, t_0)\} \subseteq \mathbb{H}^{-1}(k) \cap U$. Fixe $t_1 \in (t_0 - r, t_0)$ e V uma vizinhança de $\gamma(t_1)$ em T^*M, suficientemente pequena para que $V \subset U$ e que $\gamma(t_0), \gamma(t_0 - r) \notin \overline{V}$.

Suponha que tenhamos $\tilde{\mathbb{H}} : T^*M \to \mathbb{R}$ um hamiltoniano suave representando uma perturbação suave de $\mathbb{H}$, tal que, *supp*$(\tilde{\mathbb{H}} - \mathbb{H}) \subset V$ e que $jet_1(\tilde{\mathbb{H}}) \mid_{\gamma(t)} = jet_1(\mathbb{H}) \mid_{\gamma(t)}$, então

$$[d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)} = [d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(r)} \cdot [d_{\gamma(t_0)}\psi_{T-r}^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(r)}^{E(0)}$$

Como *supp*$(\tilde{\mathbb{H}} - \mathbb{H}) \subset V$ temos que $[d_{\gamma(t_0)}\psi_{T-r}^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(r)}^{E(0)} = [d_{\gamma(t_0)}\psi_{T-r}^{\mathbb{H}}]_{E(r)}^{E(0)}$. Por (1) temos que $[d_{\gamma(t_0)}\psi_{T-r}^{\mathbb{H}}]_{E(r)}^{E(0)} = [d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)}$, logo

$$[d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)} = [d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(r)} \cdot [d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)} \qquad (2)$$

Pela construção da perturbação temos que $[d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)}$ tem a seguinte forma

$$[d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \sigma & \beta \\ 0 & A & \hat{\alpha} & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C & \hat{\beta} & D \end{bmatrix} \in Sp(2)$$

Isto acontece pois, o nível de energia em $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_0 - r)$é o mesmo para $\tilde{\mathbb{H}}$ e para $\mathbb{H}$, sendo portanto invariante pela ação do fluxo de ambos hamiltonianos.

Definimos então o seguinte subgrupo de $Sp(2)$,

$$\hat{Sp(2)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \sigma & \beta \\ 0 & A & \hat{\alpha} & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C & \hat{\beta} & D \end{bmatrix} \in SL(4) \, com \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in Sp(1) \, e \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^* \right\}$$

e a projeção $\pi : \hat{Sp(2)} \to Sp(1)$ dada por

$$\pi\left(\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \sigma & \beta \\ 0 & A & \hat{\alpha} & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & C & \hat{\beta} & D \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

que é um homomorfismo de grupos de Lie.

Note que $[d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(r)}, [d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)} \in \hat{Sp(2)}$ e que

$$det([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)} - \lambda I_4) = (\lambda - 1)^2 det(\pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)}) - \lambda I_2)$$

Portanto podemos concluir que γ será uma órbita não degenerada de ordem $\leq 2m$, para o hamiltoniano perturbado, se $\pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)})$ não possuir raízes da unidade de ordem $\leq 2m$. Já que, as matrizes simpléticas que são $2m$-elementares * (e portanto não possuem raízes da unidade de ordem $\leq 2m$), formam um subconjunto aberto e denso de $Sp(1)$, basta mostrar que, para uma certa escolha do espaço de perturbação, a correspondência

$$\tilde{\mathbb{H}} \to \pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)})$$

aplicada a uma vizinhança de $\mathbb{H}$, produz uma vizinhança aberta de $\pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)})$ em $Sp(1)$.

Usando a propriedade de homomorfismo temos que

$$\pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(0)}) = \pi([d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(r)}) \cdot \pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)})$$

defina $\mathbb{X}_0 = \pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(0)})$ e $\hat{S}(\tilde{\mathbb{H}}) = \pi([d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\tilde{\mathbb{H}}}]_{E(0)}^{E(r)})$

Já que a translação $\mathbb{X} \to \mathbb{X} \cdot \mathbb{X}_0$ é um isomorfismo do grupo do Lie $Sp(1)$, basta mostrar que a aplicação $\tilde{\mathbb{H}} \to \hat{S}(\tilde{\mathbb{H}})$ aplicada a uma vizinhança de $\mathbb{H}$, gera uma vizinhança aberta de I_2 em $Sp(1)$.

Para a construção do espaço de perturbação vamos considerar $\mathcal{N} \subset \mathbb{H}^{-1}(k)$ subvariedade lagrangiana local em $\gamma(t_0)$. Podemos reduzir, se necessário, o tamanho da vizinhança U de $\gamma(t_0)$ escolhida anteriormente para que U admita a parametrização $(x = (x_1, x_2), p = (p_1, p_2)) : U \to \mathbb{R}^{2+2}$ conforme o lema 1.18, ou seja,

a) $\mathcal{N} \cap U = \{(x, 0)\}$;

b) $\omega = dx \wedge dp$;

c) $X^{\mathbb{H}}|_{\mathcal{N} \cap U} = 1\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Nestas coordenadas vemos que $\hat{\gamma} = \{(t, 0, 0, 0) \mid t \in (t_0 - r, t_0)\}$. Defina, o seguinte espaço de perturbação,

$$\hat{\mathcal{F}} = \{f : T^*M \to \mathbb{R} \mid supp(f) \subset \hat{W} \subset W\}$$

onde $W = \mathcal{N} \cap V$ e $\hat{W}$ é um compacto contido em W contendo $\gamma(t_1)$ no seu interior.

Note que, $\hat{\mathcal{F}}$ pode ser identificado com $C^\infty(\hat{W}, \mathbb{R})$, portanto $\hat{\mathcal{F}}$ é um espaço vetorial. Vamos construir o seguinte subespaço de dimensão finita $\mathcal{F} \subset \hat{\mathcal{F}}$

$$\mathcal{F} = \{f : T^*M \to \mathbb{R} \mid f(x, p) = \eta(x)(a\delta_{t_1}(x_1) + b\delta'_{t_1}(x_1) + c\delta''_{t_1}(x_1))\frac{1}{2}x_2^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

*Uma matriz simplética é N-elementar se seus autovalores principais (os autovalores λ tais que $\|\lambda\| < 1$ ou $Re(\lambda) \geq 0$) são multiplicativamente independentes sobre os inteiros isto é se $\Pi\lambda_i^{p_i} = 1$, onde $\sum p_i = N$ então $p_i = 0, \forall i$.

onde η é uma função fixa com $supp(\eta) \subset \hat{W}$ e $\eta \equiv 1$, em alguma vizinhança de $\gamma(t_1)$ em $\mathcal{N}$. Ainda, δ_{t_1} é uma aproximação suave da delta de Dirac no ponto t_1.

Agora estamos em condição de definir a seguinte aplicação diferenciável

$$S : \mathcal{F} \to Sp(1)$$

dada por $S(f) = \hat{S}(\mathbb{H} + f) = \pi([d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}+f}]_{E(0)}^{E(r)})$. Note que $dim(\mathcal{F}) = 3 = dim(Sp(1))$ e $S(0) = \hat{S}(\mathbb{H} + 0) = \pi([d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(r)}) = I_2$.

Finalmente, basta mostrar que,

$$d_0\mathcal{F} : T_0\mathcal{F} \cong \mathcal{F} \to T_{Id_{2\times 2}}Sp(1) \cong sp(1)$$

é sobrejetora.

Para tanto vamos calcular $d_0\mathcal{F}$. Dado $h \in \mathcal{F}$ temos

$$d_0\mathcal{F}(h) = \frac{d}{dl}S(lh)|_{l=0} = \frac{d}{dl}\pi([d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}+lh}]_{E(0)}^{E(r)})|_{l=0} = \pi(\frac{d}{dl}[d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}+lh}]_{E(0)}^{E(r)}|_{l=0})$$

Seja $\xi \in T_{\gamma(t_0-r)}T^*M$, para $t \in (0, r)$ definimos $\xi(t, l) = d_{\gamma(t_0-r)}\psi_t^{\mathbb{H}+lh}\xi$. Para l fixo definimos um campo ao longo de γ que verifica a seguinte equação

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t, l) = JHess(\mathbb{H} + lh)(\gamma(t))\xi(t, l) \\ \xi(0, l) = \xi \end{cases}$$

Derivando a equação acima em relação a l e usando a comutatividade das derivadas, vem que

$$\frac{d}{dt}(\frac{d}{dl}\xi(t, l)|_{l=0}) = JHess(h)\xi(t, l)|_{l=0} + JHess(\mathbb{H})\frac{d}{dl}\xi(t, l)|_{l=0}$$

Fazendo $\mathcal{H} = Hess(\mathbb{H})$, $\xi(t) = \xi(t, l)|_{l=0}$ e $\mathbb{Y}(t) = \frac{d}{dl}\xi(t, l)|_{l=0}$, temos a seguinte equação

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{Y}}(t) = J\mathcal{H}\mathbb{Y}(t) + JHess(h)\xi(t) \\ \mathbb{Y}(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando o método de variação de constantes, e usando o fato de que,

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = J\mathcal{H}(\gamma(t))\xi(t) \\ \xi(0) = \xi \end{cases}$$

teremos

$$\mathbb{Y}(t) = d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}} \int_0^r d_{\gamma(t_0-r)}\psi_{-t}^{\mathbb{H}} JHess(h) d_{\gamma(t_0-r)}\psi_t^{\mathbb{H}}\xi dt$$

Lembramos que $\mathbb{Y}(r) = \frac{d}{dl}\xi(r, l)|_{l=0} = \frac{d}{dl}d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}+lh}(\xi)|_{l=0}$, portanto

$$\frac{d}{dl}d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}+lh}|_{l=0} = d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}} \int_0^r d_{\gamma(t_0-r)}\psi_{-t}^{\mathbb{H}} JHess(h) d_{\gamma(t_0-r)}\psi_t^{\mathbb{H}} dt$$

logo

$$d_0\mathcal{F}(h) = \pi\left([d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}} \int_0^r d_{\gamma(t_0-r)}\psi_{-t}^{\mathbb{H}} JHess(h) d_{\gamma(t_0-r)}\psi_t^{\mathbb{H}} dt]_{E(0)}^{E(r)}\right) \tag{3}$$

Para o cálculo da expressão (3) necessitamos primeiramente efetuar o cálculo de $JHess(h)$. Na prática todas as integrais serão efetuadas com a delta de Dirac e não com as aproximações, entretanto as mesmas conclusões são válidas para uma aproximação suficientemente boa.

Defina $\tilde{h}(x) = (a\delta_{t_1}(x_1) + b\delta'_{t_1}(x_1) + c\delta''_{t_1}(x_1))\frac{1}{2}x_2^2$, e consequentemente $h(x) = \eta(x)\tilde{h}(x)$ logo

$$dh = \eta d\tilde{h} + \tilde{h}d\eta$$

$$d^2h = \eta d^2\tilde{h} + d\tilde{h}^* d\eta + d\eta^* d\tilde{h} + \tilde{h}d^2\eta$$

Como, $Hess(h)(\gamma) = d^2_\gamma h$ e $jet_1(h)|_\gamma = 0$ temos que $Hess(h)(\gamma) = \eta(\gamma)d^2_\gamma\tilde{h}$.

Por outro lado,

$$d^2_\gamma\tilde{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a\delta_{t_1}(t_0 - r + t) + b\delta'_{t_1}(t_0 - r + t) + c\delta''_{t_1}(t_0 - r + t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta_{t_1}(t_0 - r + t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta'_{t_1}(t_0 - r + t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta''_{t_1}(t_0 - r + t) \quad (4)$$

Considerando o x_1-suporte de δ_{t_1} suficientemente pequeno, podemos supor que

$$JHess(h)(\gamma) = \hat{A}\delta_{t_1}(t_0 - r + t) + \hat{B}\delta'_{t_1}(t_0 - r + t) + \hat{C}\delta''_{t_1}(t_0 - r + t)$$

onde

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \, \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denotemos por,
$\hat{I}_1 = d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r \int_0^r d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-t}\ \hat{A}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_t\ \delta_{t_1}(t_0 - r + t)dt$
$\hat{I}_2 = d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r \int_0^r d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-t}\ \hat{B}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_t\ \delta'_{t_1}(t_0 - r + t)dt$
$\hat{I}_3 = d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r \int_0^r d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-t}\ \hat{C}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_t\ \delta''_{t_1}(t_0 - r + t)dt$

Calculando $\hat{I}_1$ obtemos
$\hat{I}_1 = d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-(t_1-t_0+r)}\ \hat{A}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}$

Para $\hat{I}_2$ obtemos
$\hat{I}_2 = -d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-(t_1-t_0+r)}\ \hat{B}J\mathcal{H} - J\mathcal{H}\hat{B}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}$
$= -d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-(t_1-t_0+r)}\ [\hat{B}, J\mathcal{H}]\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}$

Finalmente, $\hat{I}_3$ possui a seguinte expressão,
$\hat{I}_3 = d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-(t_1-t_0+r)}\ ([[\hat{C}, J\mathcal{H}], J\mathcal{H}] + [\hat{C}, J\dot{\mathcal{H}}])\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}$

Façamos $\mathcal{Z} = \hat{A} - [\hat{B}, J\mathcal{H}] + [\hat{C}, J\dot{\mathcal{H}}] + [[\hat{C}, J\mathcal{H}], J\mathcal{H}]$. Então,

$$d_0\mathcal{F}(h) = \pi\left([d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_r\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-(t_1-t_0+r)}\ \mathcal{Z}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}]^{E(r)}_{E(0)}\right) \quad (5)$$

É fácil ver que, escrevendo nas bases em cada ponto da curva teremos,
$[d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-(t_1-t_0+r)}\ \mathcal{Z}\ d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}]_{E(0)}^{E(r)} =$
$= [d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(r)}\ [d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{-(t_1-t_0+r)}]_{E(r)}^{E(t_0-t_1)}\ [\mathcal{Z}]_{E(t_0-t_1)}^{E(t_0-t_1)}\ [d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}]_{E(t_0-t_1)}^{E(r)}$

Além disso $[d_{\gamma(t_0-r)}\psi_r^{\mathbb{H}}]_{E(0)}^{E(r)} = I_4$ e existe uma conjugação simplética $\mathbb{G} \in Sp(2)$ entre a base $E(t_0 - t_1)$ e a base simplética canônica, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\gamma(t_1)), \frac{\partial}{\partial x_2}(\gamma(t_1)), \frac{\partial}{\partial p_1}(\gamma(t_1)), \frac{\partial}{\partial p_2}(\gamma(t_1))\}$ tal que, $[\mathcal{Z}]_{E(t_0-t_1)}^{E(t_0-t_1)} = \mathbb{G}^{-1}\mathcal{Z}\mathbb{G}$.

Concluímos assim que,

$$d_0\mathcal{F}(h) = \pi\left(\mathbb{G}[d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}]_{E(r)}^{E(t_0-t_1)}\right)^{-1}\pi\left(\mathcal{Z}\right)\pi\left(\mathbb{G}[d_{\gamma(t_0-r)}\psi^{\mathbb{H}}_{(t_1-t_0+r)}]_{E(r)}^{E(t_0-t_1)}\right)$$

ou seja, basta mostrar que $\pi(\mathcal{Z})$ é sobrejetora em $sp(1)$.

Um simples cálculo mostra que,

$$\pi(\mathcal{Z}) = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

onde
$z_{11} = -b\mathbb{H}_{p_2p_2} + 2c\mathbb{H}_{p_2p_2}\mathbb{H}_{x_2p_2} + \dot{\mathbb{H}}_{p_2p_2}$
$z_{12} = 2c(\mathbb{H}_{p_2p_2})^2$
$z_{21} = -a + 2b\mathbb{H}_{x_2p_2} + 2c\mathbb{H}_{p_1p_2}\mathbb{H}_{x_1x_2} + 2c\mathbb{H}_{p_2p_2}\mathbb{H}_{x_2x_2} - 2c\mathbb{H}_{x_2p_1}\mathbb{H}_{x_1p_2} - 4c(\mathbb{H}_{x_2p_2})^2 - 2c\dot{\mathbb{H}}_{x_2p_2}$
$z_{22} = b\mathbb{H}_{p_2p_2} - 2c\mathbb{H}_{p_2p_2}\mathbb{H}_{x_2p_2} - \dot{\mathbb{H}}_{p_2p_2}$

Lembrando que,

$$sp(1) = \left\{ \begin{bmatrix} B & C \\ A & -B \end{bmatrix} |A, B, C, D \in \mathbb{R}, \right\}$$

e que $\mathbb{H}_{p_2p_2} \neq 0$, temos a sobrejetividade.

Para concluir a demonstração do teorema devemos realizar nossa perturbação através de potenciais. Seja $f \in \mathcal{F}$ arbitrariamente proximo de zero, tal que, $\pi([d_{\gamma(t_0)}\psi_T^{\mathbb{H}+f}]_{E(0)}^{E(0)})$ é não-degenerada de ordem $\leq 2m$. Lembremos que o x-suporte de f, esta contido em W, vizinhança arbitrariamente pequena de $\gamma(t_1)$ em $\mathcal{N}$.

Consideremos $(\hat{x}, \hat{p})$ coordenadas simpléticas canônicas em $\gamma(t_1)$, e $\hat{\pi} : T^*M \to M$ dada por, $\hat{\pi}(\hat{x}, \hat{p}) = \hat{x}$. Como temos a liberdade de deslocar o ponto t_1 por um ε arbitrariamente pequeno, podemos usar a propriedade twist do fibrado vertical conforme lema 2.22, para afirmar que $\hat{\pi}|_{\mathcal{N}}$ é um difeomorfismo local em $\gamma(t_1)$.

Definimos então um difeomorfismo $q : W \subset \mathcal{N} \to M$, dado por $q(x) = \hat{x}$, onde $(x, 0) \equiv (\hat{x}, \hat{p})$ em $\mathcal{N}$. Finalmente o potencial procurado será:

$$f_0(\hat{x}) = \begin{cases} f(q^{-1}(\hat{x})) & x \in \hat{\pi}(W) \\ 0 & x \notin \hat{\pi}(W) \end{cases}$$

Por construção, o hamiltoniano, $\mathbb{H}(\hat{x}, \hat{p}) + f_0(\hat{x})$ tem a propriedade desejada. ■

Lema 2.18. *Dados $k \in \mathbb{R}$, $f_0 \in \mathcal{R}(k)$, $\mathcal{U}_{f_0} \subseteq \mathcal{R}$ vizinhança C^∞ de f_0, $\alpha = \alpha(\mathcal{U}_{f_0}) > 0$ conforme lema 2.9, $a \in \mathcal{R}$ com $0 < a < \infty$, com $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \neq \varnothing$, temos que $\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$.*

Demonstração:

Seja $f \in \mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ e qualquer vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de f. Devemos mostrar que $\mathcal{U} \cap (\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}) \neq \emptyset$.

Pela definição de $\mathcal{G}_k^{a,a}$ temos que toda órbita periódica para $H + f$ no nível k, de período minimal $\leq a$ é não degenerada de ordem $m \leq \frac{a}{T_{min}}$.

Tomando $\rho_f : T^*M \times (0, a) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to T^*M \times T^*M \times \mathbb{R}$ temos, pelo corolário 2.14, que $\rho_f \pitchfork \Delta_0$.

Ainda, pelo lema 2.13 (i), temos que

$$\rho_f^{-1}(\Delta_0) = \{(\vartheta, T, 0) \mid \vartheta \in (H + f)^{-1}(k),\ T \in (0, a), \psi_T^{H+f}(\vartheta) = \vartheta\}$$

Note que $\rho_f^{-1}(\Delta_0) \subset (H + f)^{-1}(k) \times [0, a] \times \{0\}$ que é um compacto. Como Δ_0 é fechada temos, pelo teorema 1.5, que $\rho_f^{-1}(\Delta_0)$ é uma subvariedade de dimensão 1, com um número finito de componentes conexas. Sendo que cada órbita periódica, $\{\psi_t^{H+f}(\vartheta) \mid t \in [0, T],\ (\vartheta, T, 0) \in \rho_f^{-1}(\Delta_0)\} \subset \rho_f^{-1}(\Delta_0)$, é uma componente conexa de dimensão 1 temos que o número de órbitas periódicas para $H + f$ no nível k, de período minimal $\leq a$ distintas, é finito.

Vamos denotar, $\{\psi_t^{H+f}(\vartheta_i) \mid t \in [0, T_i = T_{min}(\vartheta_i)],\ (\vartheta_i, T_i, 0) \in \rho_f^{-1}(\Delta_0)\}$, para $i = 1, ..N$. As N órbitas periódicas para $H + f$ no nível k, com seus respectivos períodos minimais. Pelo teorema 2.17 podemos encontrar uma soma de N potenciais $f_0 = f_1 + ... + f_N$ arbitrariamente próxima de 0, tal que, todas as órbitas são não-degeneradas de ordem $\leq 2m$ para $(H + f) + f_0$. Concluimos assim que, $f + f_0 \in \mathcal{U} \cap (\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0})$. ■

Lema 2.19. *Com a mesma notação do lema 2.18, se* $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \neq \emptyset$*, temos que* $ev_\rho : \mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \times T^*M \times (0, 2a) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to T^*M \times T^*M \times \mathbb{R}$ *é transversal à* Δ_0*.*

Demonstração:

De fato, dado $(f, \vartheta, T, S) \in \mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \times T^*M \times (0, 2a) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, se $ev(f, \vartheta, T, S) \notin \Delta_0$ está pronto, portanto vamos assumir que $ev(f, \vartheta, T, S) \in \Delta_0$, ou seja, ϑ é uma órbita periódica para $H + f$ no nível k com período minimal, $T_{min} = T_{min}(\vartheta)$ e $S = 0$.

Se $T = T_{min}$ então $ev \pitchfork_{(f,\vartheta,T,0)} \Delta_0$ pelo lema 2.15, (ii). Por outro lado, se $T = mT_{min}$, $m \geq 2$ temos que $m \leq 2a/T_{min}$, isto é, $T_{min} \leq 2a/m < a$, portanto ϑ é não-degenerada de ordem m, pois $f \in \mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$. Logo $ev \pitchfork_{(f,\vartheta,T,S)} \Delta_0$ pelo lema 2.15, (i).

■

Lema 2.20. *Com a mesma notação do lema 2.18, se* $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \neq \emptyset$*, temos que* $(\mathcal{G}_k^{3a/2,3a/2} \cap \mathcal{U}_{f_0}) \cap (\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0})$ *é denso em* $\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$*.*

Demonstração: Consideremos $\mathcal{B} = \mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$, que é uma subvariedade de $C^\infty(M; \mathbb{R})$ pois é aberto. Pelo lema 2.19 temos que $ev_\rho : \mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \times T^*M \times (0, 2a) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to T^*M \times T^*M \times \mathbb{R}$ é transversal à Δ_0. Então, pelo teorema 1.6 temos que $\mathfrak{R} = \{f \in \mathcal{G}_k^{a,2a} \mid \rho_f \pitchfork \Delta_0\}$ é um subconjunto genérico, e portanto denso, de $\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$. Afirmamos que $\mathfrak{R} \subset (\mathcal{G}_k^{3a/2,3a/2} \cap \mathcal{U}_{f_0}) \cap (\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0})$.

De fato, tome $f \in \mathfrak{R}$, então pelo corolário 2.14 toda órbita periódica para $H + f$ no nível k, de período minimal T_{min} é não-degenerada de ordem $m \leq \frac{2a}{T_{min}}$, já que $\rho_f \pitchfork \Delta_0$.

Assim, se temos uma órbita periódica para $H+f$ no nível k, de período minimal $T_{min} \leq 3a/2$, suponha $m' \leq \frac{3a/2}{T_{min}} = \frac{2a}{4/3T_{min}} \leq \frac{2a}{T_{min}}$, daí segue que esta órbita é não-degenerada de ordem m' em particular $f \in \mathcal{G}_k^{3a/2,3a/2} \cap \mathcal{U}_{f_0}$. Logo $(\mathcal{G}_k^{3a/2,3a/2} \cap \mathcal{U}_{f_0}) \cap (\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0})$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$. ∎

Lema 2.21. *Com a mesma notação do lema 2.18, se $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \neq \varnothing$, temos que $(\mathcal{G}_k^{3a/2,3a/2} \cap \mathcal{U}_{f_0})$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$.*

Demonstração: Pelo lema 2.20 temos que $(\mathcal{G}_k^{3a/2,3a/2} \cap \mathcal{U}_{f_0}) \cap (\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0})$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ e pelo lema 2.18 $\mathcal{G}_k^{a,2a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ portanto, $\mathcal{G}_k^{3a/2,3a/2} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$. ∎

Prova do lema de redução 2.11

Dados $k \in \mathbb{R}$, $f_0 \in \mathcal{R}(k)$, $\mathcal{U}_{f_0} \subseteq \mathcal{R}$ vizinhança C^∞ de f_0, $\alpha = \alpha(\mathcal{U}_{f_0}) > 0$ conforme lema 2.9. Tome $c \in \mathbb{R}_+$, se $c < \alpha$ então $\mathcal{G}_k^{c,c} \cap \mathcal{U}_{f_0} = \mathcal{U}_{f_0}$ pelo lema 2.9. Assumimos então $c \in \mathbb{R}_+$, com $c \geq \alpha > a > 0$.

Afirmamos que, $\mathcal{G}_k^{(\frac{3}{2})^\ell a,(\frac{3}{2})^\ell a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$. A prova des afirmacão é por indução em ℓ.

Para $\ell = 1$ note que, $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0} = \mathcal{U}_{f_0} \neq \varnothing$, pois $\alpha > a > 0$. Logo $\mathcal{G}_k^{\frac{3}{2}a,\frac{3}{2}a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ pelo lema 2.21.

Agora suponha que, $\mathcal{G}_k^{(\frac{3}{2})^\ell a,(\frac{3}{2})^\ell a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$, $\ell \geq 1$. Então, $\mathcal{G}_k^{(\frac{3}{2})^\ell a,(\frac{3}{2})^\ell a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \neq \varnothing$, pela densidade, e tomando $a' = (\frac{3}{2})^\ell a$, teremos que $\mathcal{G}_k^{\frac{3}{2}a',\frac{3}{2}a'} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a',a'} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ pelo lema 2.21. Portanto $\mathcal{G}_k^{(\frac{3}{2})^{\ell+1} a,(\frac{3}{2})^{\ell+1} a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$. O que conclui a prova da afirmação.

Agora, tomemos ℓ_0, tal que, $(\frac{3}{2})^{\ell_0} a > c$. Então, $\mathcal{G}_k^{(\frac{3}{2})^{\ell_0} a,(\frac{3}{2})^{\ell_0} a} \cap \mathcal{U}_{f_0} \subset \mathcal{G}_k^{n,n} \cap \mathcal{U}_{f_0} \subset \mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0} = \mathcal{U}_{f_0}$. Como $\mathcal{G}_k^{(\frac{3}{2})^{\ell_0} a,(\frac{3}{2})^{\ell_0} a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{G}_k^{a,a} \cap \mathcal{U}_{f_0}$, concluímos que $\mathcal{G}_k^{c,c} \cap \mathcal{U}_{f_0}$ é denso em $\mathcal{U}_{f_0}$. ∎

2.3 Prova do Teorema de Kupka-Smale (K-S)

Consideremos uma órbita periódica $\gamma = \{\phi_t^L(\theta_0),\ 0 \leq t \leq T\} \subseteq H^{-1}(k)$, em TM, onde H esta associado a L pela transformada de Legendre. Diremos que esta órbita é hiperbólica se a aplicação de Poincaré associada não possui autovalor de norma 1.

Definimos as variedades, estável forte e instável forte de γ em $\theta_0 = \gamma(0)$, como:

$$W^{ss}(\theta_0) = \{\theta \in H^{-1}(k) \mid \lim_{t \to +\infty} d(\phi_t^L(\theta_0), \phi_t^L(\theta)) = 0\}$$

$$W^{us}(\theta_0) = \{\theta \in H^{-1}(k) \mid \lim_{t \to -\infty} d(\phi_t^L(\theta_0), \phi_t^L(\theta)) = 0\}$$

Respectivamente definimos as variedades estável e instável (fracas) de γ como:

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^L(W^{ss}(\theta_0)), \quad W^u(\gamma) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^L(W^{us}(\theta_0))$$

Da teoria geral dos sistemas lagrangianos sabemos que, $W^s(\gamma), W^u(\gamma) \subset H^{-1}(k)$ são subvariedades lagrangianas de TM, com a forma simplética twist, dada por:

$$\omega(\xi, \zeta) = \langle (\xi_h, \xi_v)^*, J(\zeta_h, \zeta_v)^* \rangle$$

em coordenadas locais.

Um ponto $\theta \in H^{-1}(k)$ é dito heteroclinico se $\theta \in W^s(\gamma_1) \cap W^u(\gamma_2)$ onde $\gamma_1, \gamma_2 \subset H^{-1}(k)$ são órbitas periódicas hiperbólicas. Adicionalmente, se $T_\theta W^s(\gamma_1) + T_\theta W^s(\gamma_2) = T_\theta H^{-1}(k)$, isto é, se $W^s(\gamma_1) \pitchfork_\theta W^u(\gamma_2)$ então θ será denominado um ponto heteroclínico transversal.

Um domínio fundamental para $W^s(\gamma)$ (ou $W^u(\gamma)$) é um subconjunto compacto $\mathcal{D} \subset W^s(\gamma)$, tal que, toda a órbita em $W^s(\gamma)$ intercepta $\mathcal{D}$. É possível mostrar que, existem domínios fundamentais arbitrariamente pequenos e próximos de γ.

Fixado $a > 0$ definimos as variedades estável e instável locais de γ como:

$$W_a^s(\gamma) = \{\theta \in W^{ss}(\gamma) \mid d_{W^{ss}(\gamma)}(\theta, \gamma) < a\}$$

$$W_a^u(\gamma) = \{\theta \in W^{us}(\gamma) \mid d_{W^{us}(\gamma)}(\theta, \gamma) < a\}$$

que também são subvariedades lagrangianas de TM.

Na direção de provar o Teorema (K-S), definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{K}_k^a = \{f \in \mathcal{G}_k^{a,a} \mid \forall \gamma_1, \gamma_2 \subset (H+f)^{-1}(k), \text{ órbitas periódicas hiperbólicas} \\ \text{para o lagrangiano } L+f, \text{ de período } \leq a,\ W_a^s(\gamma_1) \pitchfork W_a^u(\gamma_2)\}$$

Definimos então o seguinte conjunto

$$\mathcal{K}(k) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_k^n$$

É fácil ver que, para todo $f \in \mathcal{K}(k)$ valem as propriedades (i) e (ii) do Teorema (K-S). Assim para concluir a demonstração do Teorema (K-S), basta mostrar que $\mathcal{K}(k)$ é genérico, ou equivalentemente, que cada, $\mathcal{K}_k^n$ é aberto e denso.

2.3.1 Abertura de $\mathcal{K}_k^a$

Isto segue do fato de que as variedades estável e instável, dependem continuamente, em topologia C^1 nas partes compactas, do campo lagrangiano.

2.3.2 Densidade de $\mathcal{K}_k^n$

Lema 2.22. *([30],Prop 2.11, Pg34, Propriedade Twist do Fibrado Vertical)*
Seja L um lagrangiano suave, convexo, superlinear, em M, $\theta \in TM$ e $F \subset T_\theta TM$ um subespaço lagrangiano para a forma twist em TM. Então, o conjunto,

$$\mathcal{Z}_E = \{t \in \mathbb{R} \mid d_\theta \phi_t^L(E) \cap V(\phi_t^L(\theta)) \neq \varnothing\}$$

é discreto, onde V é o fibrado vertical em M.

Demonstração: Suponhamos que $t_0 \in \mathcal{Z}_E$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que, $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \backslash \{t_0\} \cap \mathcal{Z}_E = \varnothing$, consideremos $t_0 = 0$ por simplicidade.

Denotamos a projeção ortogonal no espaço horizontal por $P : T_\theta TM \to H(\theta)$ dada por $P(\xi) = P(\xi_h, \xi_v) = (\xi_h, 0)$, então, $P(E) = (J(E \cap V(\theta)))^\perp$ em $H(\theta)$.

De fato, dados $\xi \in E$ e $\eta \in E \cap V(\theta)$ temos que

$$0 = \omega(\xi, \zeta) = \langle(\xi_h, \xi_v)^*, J(\zeta_h, \zeta_v)^*\rangle = \langle \xi_h, \zeta_v\rangle = \langle\langle P(\xi), J\eta\rangle\rangle$$

Isto mostra que $P(E) \subseteq (J(E \cap V(\theta)))^{\perp}$, para ver a igualdade, note que, pela ortogonalidade, vem

$$dim(P(E)) + dim(J(E \cap V(\theta))) = dim(P(E)) + dim(KerP|_E) = dim(E) = dim(H(\theta))$$

pois J é um isomorfismo.

Escolha, $\eta_i = (e_i, 0),\ i = 1, ..m$, base de $P(E)$ e $\xi_j = (0, w_j),\ j = 1, ..k$, base de ortonormal $E \cap V(\theta)$, pelo visto acima, $m + k = dim(H(\theta))$ e portanto

$$\{\eta_1, ..., \eta_m, J\xi_1, ..., J\xi_k\}$$

forma uma base de $H(\theta)$.

Considere a extensão natural da projeção horizontal P na órbita de θ, $P_t : T_{\phi_t^L(\theta)}TM \to H(\phi_t^L(\theta))$, com P é suave, temos que para t suficientemente próximo de 0 podemos escolher $\eta_i(t) = (e_i(t), 0),\ i = 1, ..m$, base de $P_t(d_\theta \phi_t^L E)$.

Por outro lado consideremos os seguintes campos de Jacobi, ao longo da órbita de θ, $Y_j(t) = d_\theta \phi_t^L(\xi_j) = (Y_j^h(t), Y_j^v(t))$, que satisfazem

$$\begin{cases} \dot{Y}_j^h(t) = Y_j^v(t) \\ Y_j(0) = \xi_j \end{cases}$$

Como, $\dot{Y}_j^h(0) = Y_j^v(0) \neq 0$, temos que existe $\delta_j > 0$, tal que, para todo $t \in (-\delta_j, \delta_j) \backslash \{0\}$, $Y_j^h(t) \neq 0$.

Defina então, para cada j, um novo campo $W_j(t)$ dado por

$$W_j(t) = \begin{cases} (\ Y_j^h(t)/\|Y_j^h(t)\|,\ 0),\ para\, t > 0 \\ (-Y_j^v(t)/\|Y_j^v(t)\|, 0),\ para\, t < 0 \end{cases}$$

É fácil ver que,

$$\{\eta_1(t), ..., \eta_m(t), W_1(t), ..., W_k(t)\} \subset P_t(d_\theta \phi_t^L E)$$

Além disso,

$$\lim_{t \to 0} W_j(t) = (\dot{Y}_j^h(0), 0) = J\xi_j$$

ou seja,

$$\lim_{t \to 0} \{\eta_1(t), ..., \eta_m(t), W_1(t), ..., W_k(t)\} = \{\eta_1, ..., \eta_m, J\xi_1, ..., J\xi_k\}$$

Portanto, para todo t suficientemente próximo de 0 temos que

$$P_t(d_\theta \phi_t^L E) = H(\phi_t^L(\theta))$$

isto é, $t \notin \mathcal{Z}_F$. ■

O próximo lema permite perturbar localmente um potencial f para tornar as variedades estável e instável transversais em um ponto heteroclínico.

Lema 2.23. *Sejam L um lagrangiano, e $f : M \to \mathbb{R}$ um potencial $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dados $\gamma_1, \gamma_2 \subset (H - f)^{-1}(k)$ órbitas periódicas hiperbólicas de período $\leq a$ e $\theta \in W_a^u(\gamma_2)$, tais que, a projeção canônica $\pi\, |_{W_a^u(\gamma_2)}$ seja um difeomorfismo local em θ e U, V, vizinhanças suficientemente pequenas de θ em TM, tais que, $\theta \in V \subset \bar{V} \subset U$. Então, existe $\bar{f} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, tal que,*
i) $\bar{f}$ está C^∞ próximo de f;
ii) $supp(f - \bar{f}) \subset \pi(U)$;
iii) $\gamma_1, \gamma_2 \subset (H - \bar{f})^{-1}(k)$ são órbitas periódicas hiperbólicas de período para $\bar{f}$ igual ao período para$f$;
iv) A componente conexa de $W_a^u(\gamma_2) \cap V$ que contém θ é transversal à $W^s(\gamma_1)$.

Demonstração: Em primeiro lugar consideramos o hamiltoniano $H - f$ associado ao lagrangiano $L + f$ pela transformada de Legendre $\mathcal{L}$:

$$H - f(x,p) = \sup_{v \in T_xM} \{p(v) - (L+f)(x,v)\}$$

com a forma simplética canônica de T^*M,

$$\omega = \sum dx_i \wedge dp_i.$$

Sabemos, da teoria geral dos sistemas hamiltonianos, que γ_1, γ_2 são levadas pela transformada de Legendre em órbitas periódicas hiperbólicas de mesmo período $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2} \subset (H-f)^{-1}(k)$ para o fluxo hamiltoniano ψ_t^{H-f}, denominamos então as suas variedades invariantes por $\tilde{W}^u(\tilde{\gamma_2})$ e $\tilde{W}^s(\tilde{\gamma_1})$, que serão subvariedades lagrangianas de T^*M, e $\vartheta = \mathcal{L}(\theta) \in \tilde{W}^u(\tilde{\gamma_2})$.

Note que, se $\pi : TM \to M$ e $\pi^* : T^*M \to M$ são as projeções canônicas, então

$$d_\vartheta \pi^* = d_\theta \pi \circ (d_\theta \mathcal{L})^{-1}$$

logo a projeção canônica $\pi^* \mid_{\tilde{W}^u(\tilde{\gamma_2})}$ é um difeomorfismo local em ϑ. Além disso, $X^{H-f}(\vartheta) = d_\theta \mathcal{L} \circ X^{L+f}(\theta) \neq 0$. Sendo assim podemos provar o lema, do ponto de vista hamiltoniano.

Pelo Lema 1.19 podemos encontrar uma vizinhança U de ϑ, e $V \subset U$, tais que, $V \subset \bar{V} \subset U$, e uma subvariedade lagrangiana, $\mathcal{N}$, C^∞ próxima de $\tilde{W}^u(\tilde{\gamma_2})$, satisfazendo as seguintes condições
1) $\vartheta \in \{U \backslash \bar{V}\}$
2) $\mathcal{N} \cap \{U \backslash \bar{V}\} = \tilde{W}^u(\tilde{\gamma_2}) \cap \{U \backslash \bar{V}\} \subset (H-f)^{-1}(k)$;
3) $\mathcal{N} \cap \bar{V} \pitchfork \tilde{W}^s(\tilde{\gamma_1}) \cap \bar{V}$.

Como, $\mathcal{N}$ está C^∞ próxima de $\tilde{W}^u(\tilde{\gamma_2})$, temos que a projeção canônica $\pi^* \mid_{\mathcal{N}}$ é também um difeomorfismo local em ϑ. Daí segue que, se U é suficientemente pequeno então,

$$\mathcal{N} \cap U = \{(x, p(x)) \mid x \in \pi^*(u)\}$$

ou seja, $\mathcal{N} \mid_U$ é um gráfico $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Definimos então, o seguinte potencial, $\bar{f} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dado por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in \pi^*(U)^C \\ H(x, p(x)) - k & se\ x \in \pi^*(U) \end{cases}$$

Note que, $supp(f - \bar{f}) \subset \pi^*(U)$ e $\vartheta \notin supp(f - \bar{f})$, além disso, escolhendo U suficientemente pequeno, teremos que $\pi^*(U) \cap \{\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}\} = \varnothing$ e portanto $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}$ são ainda, órbitas periódicas hiperbólicas de mesmo período contidas em $(H - \bar{f})^{-1}(k)$ para o fluxo hamiltoniano $\psi_t^{H-\bar{f}}$.

Denominamos por $\bar{W}^u(\tilde{\gamma_2})$ e $\bar{W}^s(\tilde{\gamma_1})$ as suas variedades invariantes em relação ao novo fluxo $\psi_t^{H-\bar{f}}$.

É fácil ver que $(H - \bar{f})(\mathcal{N}) = k$. Pelo Lema 1.17 temos que $\mathcal{N}$ é $\psi_t^{H-\bar{f}}$ invariante. Ainda, $\bar{W}^u(\tilde{\gamma_2})$ só depende de tempos negativos e, a componente conexa de $\bar{W}^u(\tilde{\gamma_2}) \cap U$ que contém ϑ e $\mathcal{N}$ coincidem numa vizinhança de $\tilde{\gamma_2}$ disjunta de $supp(f - \bar{f})$, logo, $\mathcal{N} = \bar{W}^u(\tilde{\gamma_2})$.

Por outro lado, como $\bar{W}^s(\tilde{\gamma_1})$ só depende de tempos positivos e $f = \bar{f}$ em $\{U \backslash \bar{V}\}$, temos que $\bar{W}^s(\tilde{\gamma_1}) = \tilde{W}^s(\tilde{\gamma_1})$. Já que $\mathcal{N} \cap \bar{V} \pitchfork \tilde{W}^s(\tilde{\gamma_1}) \cap \bar{V}$, temos que

$$\bar{W}^u(\tilde{\gamma_2}) \cap \bar{V} \pitchfork \tilde{W}^s(\tilde{\gamma_1}) \cap \bar{V}.$$

Agora basta escolher $L + \bar{f}$ para obter as afirmações do lema.

■

Lema 2.24. *O conjunto, $\mathcal{K}_k^n$ é denso em $C^\infty(M,\mathbb{R})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Tome $f_0 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, pelo lema (N-D) podemos aproximar arbitrariamente f_0 por $f' \in \mathcal{G}_k^{n,n}$ que é aberto e denso. Assim, basta encontrar f arbitrariamente próximo de f', tal que, para quaisquer $\gamma_1,\gamma_2 \subset (H-f)^{-1}(k)$, órbitas periódicas hiperbólicas de período $\leq n$, tenhamos $W_n^s(\gamma_1) \pitchfork W_n^u(\gamma_2)$. Então, $f \in \mathcal{K}_k^n$ e f está arbitrariamente próximo de f_0.

Note que, dadas $\gamma_1,\gamma_2 \subset (H+f')^{-1}(k)$ órbitas periódicas hiperbólicas de período $\leq n$, para ver que $W_n^s(\gamma_1) \pitchfork W_n^u(\gamma_2)$ basta ver que $W_n^s(\gamma_1) \pitchfork_{\mathcal{D}} W_n^u(\gamma_2)$ com $\mathcal{D}$ um domínio fundamental para $W^u(\gamma_2)$, já que, se $W^s(\gamma_1) \pitchfork_\theta W^u(\gamma_2)$ então $W^s(\gamma_1) \pitchfork_{\phi_t^{L+f'}(\theta)} W^u(\gamma_2)$, $\forall t$.

Tome $\mathcal{D}$ um domínio fundamental para $W^u(\gamma_2)$ e $\theta \in \mathcal{D}$. Pelo teorema da função inversa sabemos que $\pi|_{W^u(\gamma_2)}$ é um difeomorfismo local em θ se, e somente se, $T_\theta W^u(\gamma_2) \cap Kerd_\theta\pi = 0$. Como $W^u(\gamma_2)$ é uma subvariedade lagrangiana, temos do lema 2.22, que o conjunto,

$$\{t \in \mathbb{R} \mid d_\theta\phi_t^L(T_\theta W^u(\gamma_2)) \cap Ker\, d_{\phi_t^{L+f'}(\theta)}\pi \neq \varnothing\}$$

é discreto, logo existe $t(\theta)$ arbitrariamente próximo de 0, tal que, $\pi|_{W^u(\gamma_2)}$ é um difeomorfismo local em $\tilde{\theta} = \phi_{t(\theta)}^{L+f'}(\theta)$.

Como, $f' \in \mathcal{G}_k^{n,n}$, podemos escolher, $t(\theta)$, tal que, $\pi(\tilde{\theta})$ não intercepta qualquer órbita periódica de período $\leq n$. Fixamos então uma vizinhança arbitrariamente pequena U de $\tilde{\theta}$, tal que, $\pi(U)$ não intercepta qualquer órbita periódica de período $\leq n$. Tome V vizinhança de $\tilde{\theta}$, tal que, $V \subset \bar{V} \subset U$ como no Lema 2.23, podemos então encontrar $f_1 = f'$ em $\pi(U)^C$, de tal forma que a componente conexa de $W_n^u(\gamma_2) \cap \bar{V}$ (em relação ao novo fluxo) contendo $\tilde{\theta}$, é transversal $W^s(\gamma_1)$ (em relação ao novo fluxo). Tomando $\bar{V}_1 = \phi_{t'}^{L+f_1}(\bar{V})$ teremos que $W_n^u(\gamma_2) \pitchfork W^s(\gamma_1)$.

Podemos então cobrir o domínio fundamental $\mathcal{D}$ por um número finito de vizinhanças do tipo, $\bar{V}_1$, digamos, $W_1,\ldots,W_s$. Já que a transversalidade é uma condição aberta e as variedades estáveis(instáveis) locais são continuas em compactos, podemos escolher sucessivamente os W_{i+1} tal que a transversalidade nos W_j, $j \leq i$, se preserve. Concluímos assim, que $W_n^u(\gamma_2) \pitchfork W_n^s(\gamma_1)$.

■

Capítulo 3

Problemas variacionais holonômicos em sistemas de funções iteradas

3.1 IFS e probabilidade holonômicas

Neste capítulo vamos estudar os conceitos de entropia e pressão em IFS (Iterated function systems) no contexto de probabilidades holonômicas [20].

Nosso principal ponto de vista é o seguinte: o estudo de probabilidades holonômicas permite entender todos os operadores de transferência P_u e seus respectivos estados de equilíbrio, quando o IFS é visto como um processo estocástico.

Definição 3.1. *Um IFS (iterated function system),* $([0,1],\tau_i)$*, no intervalo* $[0,1]$*, é uma família de funções contínuas* $\tau_0,\tau_1,...,\tau_{d-1}:[0,1]\to[0,1]$ *tal que* $\bigcup_{i=0}^{d-1}\tau_i([0,1])=[0,1]$.

Associado a um IFS podemos considerar a aplicação contínua $\hat{\sigma}:[0,1]\times\Sigma\to[0,1]\times\Sigma$, definida por

$$\hat{\sigma}(x,w)=(\tau_{X_1(w)}(x),\sigma(w))$$

onde $\Sigma=\{0,1,...,d-1\}^{\mathbb{N}}$, $\sigma:\Sigma\to\Sigma$ é dado por $\sigma(w_1,w_2,w_3,...)=(w_2,w_3,w_4...)$ and $X_k:\Sigma\to\{0,1,...,d-1\}$ é a projeção da k-ésima coordenada. Nesta direção, podemos ver um IFS como um processo estocástico [14], [22], [7], [18], [29], [17].

Se nós consideramos um IFS como sendo múltiplos sistemas dinâmicos (várias aplicações) então, para um único ponto x teremos várias combinações de "órbitas"no IFS (usando diferentes τ_i). Considerando o *skew-product* $\hat{\sigma}$ podemos descrever o comportamento global dos iterados de x. Ainda, podemos pensar um IFS como um processo de bifurcação com índices em Σ. Mais precisamente definimos o n-ramo a partir de $x\in[0,1]$ por $w\in\Sigma$ como

$$Z_n(x,w)=\tau_{X_n(w)}\circ\tau_{X_{n-1}(w)}\circ...\tau_{X_1(w)}(x)$$

Com esta notação nós temos

$$\hat{\sigma}^n(x,w)=(Z_n(x,w),\sigma^n(w))$$

Definição 3.2. *Um sistema com pesos (ver [35], Pg. 6) é uma tripla,* $([0,1],\tau_i,u_i)$*, onde* $([0,1],\tau_i)$ *é um IFS e os* u_i*'s,* $i\in\{0,1,...,d-1\}$*, são aplicações mensuráveis não-negativas limitadas. A condição* $\sum_{i=0}^{d-1}u_i(x)=1$ *não é exigida.*

Em alguns exemplos os u_i, $i\in\{0,1,...,d-1\}$, vem de potenciais mensuráveis limitados $\phi:[0,1]\to[0,+\infty)$, isto é,

$$u_i(x)=\phi(\tau_i(x)),\ \forall i=0,...,d-1$$

A função ϕ é chamada *weight function*, (na literatura esta função é também chamada uma g-função, ver [23] por exemplo). Note que ϕ pode assumir o valor 0. Isto é útil para algumas aplicações de IFS a *wavelets* [16] [17]. Nós enfatizamos que não assumimos nesta definição geral, que $\sum_{i=0}^{d-1} u_i(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1]$.

Definição 3.3. *Um IFS com probabilidades,* $([0,1], \tau_i, u_i)$*,* $i \in \{0,1,...,d-1\}$*, é um IFS com um vetor de função mensuráveis não-negativas limitadas em* $[0,1]$*,*

$$u(x) = (u_0(x), u_1(x), ..., u_{d-1}(x))$$

tal que $\sum_{i=0}^{d-1} u_i(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1]$.

Definição 3.4. *Um IFS com probabilidades* $([0,1], \tau_i, u_i)$ *é chamado "normalizado uniforme"se existir uma função peso* ϕ *tal que* $u_i(x) = \phi(\tau_i(x))$*,* $\forall i = 0, ..., d-1$ *e*

$$\sum_{i=0}^{d-1} \phi(\tau_i(x)) = 1.$$

Neste caso, nós escrevemos IFS como $([0,1], \tau_i, u_i) = ([0,1], \tau_i, \phi)$.

A definição acima é uma restrição muito forte ao sistema com pesos. Vários problemas na teoria clássica de Formalismo Termodinâmico para um shift ou para transformações contínuas expansoras d a 1, $T : S^1 \to S^1$ podem ser analisados via um IFS com uma função peso ϕ (ver [32]). Neste caso os $\tau_i, i \in \{0,2,..,d-1\}$, são os ramos inversos de T.

Nós iremos considerar depois o problema da pressão para um sistema com função peso ϕ, que não é necessariamente normalizada.

Agora retornamos ao caso geral.

Definição 3.5. *Dado um sistema com pesos,* $([0,1], \tau_i, u_i)$*, nós iremos definir o operador de transferência (ou operador de Ruelle)* P_u *por*

$$P_u(f)(x) = \sum_{i=0}^{d-1} u_i(x) f(\tau_i(x))$$

para toda $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *função Borel mensurável limitada.*

Uma função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ será chamada P_u-harmônica se $P_u(h) = h$, [22], [14]. Uma probabilidade ν em $[0,1]$ será chamada P_u-invariante se $P_u^*(\nu) = \nu$, onde P_u^* é definida pela igualdade

$$\int P_u(f)(x) d\hat{\nu} = \int f(x) dP_u^* \hat{\nu}$$

para toda $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua.

A abordagem correta para analisar um IFS, [18], [14] [22], com probabilidades $([0,1], \tau_i, u_i)$, é considerar para cada $x \in [0,1]$, a sequência de variáveis aleatórias $(Z_n(x,.) : \Sigma \to [0,1])_{n \in \mathbb{N}}$ como uma realização do processo de Markov associado à cadeia de Markov com distribuição inicial δ_x e probabilidades de transição P_u. Além disso, nós temos uma probabilidade $\mathbb{P}_x$ no espaço de caminhos, Σ, dada por

$$\int_\Sigma g(w) d\mathbb{P}_x = \sum_{i_1,...,i_n} u_{i_1}(x) u_{i_2}(\tau_{i_1}(x)) ... u_{i_n}(\tau_{i_n} ... \tau_{i_1}(x)) g(i_1, ..., i_n)$$

quando g depende somente das n primeiras coordenadas(ver [22], para uma prova da condição de consistência de Kolmogorov).

A probabilidade no espaço de caminhos e o operador de transferência estão conectados por

$$\int_\Sigma g_x(w) d\mathbb{P}_x(w) = P_u^n(f)(x)$$

quando $g_x(w) = f(\tau_{w_n}...\tau_{w_1}(x))$ para alguma função contínua f.

Definição 3.6. *Um ρ-sistema com pesos, $\rho \geq 0$, é um sistema com pesos $([0,1], \tau_i, u_i)$ tal que existe uma função positiva limitada $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ e ν uma probabilidade satisfazendo*

$$P_u(h) = \rho h, \quad P_u^*(\nu) = \rho\nu$$

Observe que, um IFS com probabilidades é um 1-sistema com pesos (ver [17], [35] ou [7] para a existência de probabilidades P_u-invariantes e, [35], Theorem 4, ou [36] para a não unicidade de tais probabilidades). Também, um sistema com pesos, $([0,1], \tau_i, u_i)$ onde $u_0 = ... = u_{d-1} = k$ (constante) é um $d\,k$-sistema com pesos. portanto o conjunto de todos ρ-sistemas com pesos é uma grande classes de sistemas com pesos.

Exemplos de ρ-sistemas com pesos não-triviais (e não probabilísticos) pode ser encontrados em [19] e [35] Corolário 2.

Ainda, a partir de um ρ-sistema com pesos $([0,1], \tau_i, u_i)$ nós podemos obter uma normalização $([0,1], \tau_i, v_i)$, do seguinte modo

$$v_i(x) = \frac{u_i(x)h(\tau_i(x))}{\rho h(x)}, \quad \mu = h\nu$$

Então $P_v(1) = 1$ e $P_v^*(\mu) = \mu$.

3.2 Probabilidades Holonômicas

Para estudar as invariância de probabilidades em um IFS, nós precisamos introduzir o conceito de probabilidades *holonômicas* em $[0,1] \times \Sigma$ (see [20] para definições gerais e e propriedades no contexto de dinâmica simbólica em $\Sigma \times \Sigma$). Vários resultados apresentados em [20] podem ser facilmente traduzidos para o contexto de IFS. Em [20] o principal objeto são as probabilidades maximizantes. Aqui nós estamos interessados, principalmente num princípio variacional para a pressão.

Por outro lado, alguns novos resultados que nós apresentamos aqui podem ser também traduzidos para aquele contexto (ou seja, para shifts).

Definição 3.7. *Uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}$ no $[0,1] \times \Sigma$ é uma probabilidade tal que*

$$\int f(\tau_{X_1(w)}(x)) d\hat{\nu} = \int f(x) d\hat{\nu}$$

para toda $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua.

Então o conjunto de todas as probabilidades holonômicas pode ser visto como o conjunto das probabilidades no $[0,1] \times \Sigma$ tais que

$$\int g \circ \hat{\sigma} d\hat{\nu} = \int g d\hat{\nu}, \quad \forall g \in C([0,1])$$

Deste ponto de vista é claro que o conjunto de todas as probabilidades holonômicas é maior que o conjunto das probabilidades $\hat{\sigma}$-invariantes (porque $C([0,1])$ pode ser visto como um subconjunto de $C([0,1]\times\Sigma)$).

3.3 Caracterização de probabilidades holonômicas

O problema da desintegração de probabilidades holonômicas foi considerado previamente por [16] com um diferente objetivo.

Definição 3.8. *Seja E um espaço topológico de Hausdorff. Uma medida ν em E é dita de Radon se*
i) Qualquer ponto de E tem uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ tal que $\nu(\mathcal{U})<\infty$;
ii) Para todo boreliano A,

$$\nu(A)=\sup_{K\subset A,\ compacto}\nu(K)$$

Um espaço métrico separável, (M,d) é denominado um espaço de Radon se toda probabilidade de Borel neste espaço é uma medida de Radon(ver [15], [37]).

Teorema 3.9. *([37], Prop. 6, Pg. 117) Todo espaço métrico compacto é de Radon.*

Conclui-mos assim que todos espaços aqui tratados são de Radon.

Teorema 3.10. *([5], Theorem 5.3.1, ou [15], Pg 78, (70-III), para uma demonstração) Sejam $\mathbb{X}$, X espaço métricos separáveis de Radon, $\hat{\mu}$ probabilidade no $\mathbb{X}$, $\pi:\mathbb{X}\to X$ Borel mensurável e $\mu=\pi_*\hat{\mu}$. Então existe uma família de probabilidades de Borel $\{\hat{\mu}_x\}_{x\in X}$ no $\mathbb{X}$, unicamente determinada μ-qtp, tal que,*
1) $\hat{\mu}_x(\mathbb{X}\backslash\pi^{-1}(x))=0$, μ-qtp;
2) $\int g(z)d\hat{\mu}(z)=\int_X\int_{\pi^{-1}(x)}g(z)d\hat{\mu}_x(z)d\mu(x)$.

Esta decomposição é chamada a *desintegração* da probabilidade $\hat{\mu}$.

Teorema 3.11. *(Desintegração Holonômica) Considere uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}$ no $[0,1]\times\Sigma$. Seja*

$$\int g(x,w)d\hat{\nu}=\int_{[0,1]}\int_{\{y\}\times\Sigma}g(x,w)d\hat{\nu}_y(x,w)d\nu(y),\quad\forall g$$

a desintegração dada pelo Teorema 3.10. Então ν é P_u-invariante para o IFS com probabilidades $([0,1],\tau_i,u_i)_{i=0..d-1}$, onde os u_i's são dados por,

$$u_i(y)=\hat{\nu}_y(y\times\bar{i}),\quad i=0,...,d-1.$$

Demonstração: Considere uma função contínua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ e defina $I_1=\int f(\tau_{X_1(w)}(x))d\hat{\nu}$ e $I_2=\int f(x)d\hat{\nu}$. Como $\hat{\nu}$ é holonômica nós temos, $I_1=I_2$.

Agora aplicando a desintegração a ambas integrais nós temos
$I_1=\int_{[0,1]}\int_{\{y\}\times\Sigma}f(\tau_{X_1(w)}(x))d\hat{\nu}_y(x,w)d\nu(y)=$
$=\sum_{i=0}^{d-1}\int_{[0,1]}\int_{\{y\}\times\bar{i}}f(\tau_{X_1(w)}(x))d\hat{\nu}_y(x,w)d\nu(y)=$
$=\sum_{i=0}^{d-1}\int_{[0,1]}f(\tau_{\bar{i}}(y))\hat{\nu}_y(\{y\}\times\bar{i})d\nu(y)=\int_{[0,1]}P_u(f)(y)d\nu(y)$
quando $u_i(y)=\hat{\nu}_y(y\times\bar{i}),\quad i=0,...,d-1.$

por outro lado
$I_2 = \int_{[0,1]} \int_{\{y\}\times\Sigma} f(x) d\hat{\nu}_y(x,w) d\nu(y) = \int_{[0,1]} f(y) d\nu(y)$.

Então, $\int_{[0,1]} P_u(f)(y) d\nu(y) = \int_{[0,1]} f(y) d\nu(y)$ para toda a função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, isto, ν é P_u-invariante.

■

3.4 Invariância de probabilidades holonômicas em IFS

As probabilidades holonômicas não são necessariamente invariantes para o skew-product $\hat{\sigma}$. Por outro lado, toda probabilidade $\hat{\sigma}$-invariante é holonômica. Nós agora mostramos um exemplo de probabilidade holonômica que não é $\hat{\sigma}$-invariante (ver [20] para o caso do shift bilateral).

Suponha que $x_0 \in [0,1]$, é tal que $Z_n(x_0, \bar{w}) = x_0$, para algum $\bar{w} \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$. Então podemos construir uma probabilidade do seguinte modo

$$\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\sigma^j(\bar{w})} \times \delta_{Z_j(x_0, \bar{w})}$$

Então

$$\int g(x,w) d\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(Z_j(x_0,\bar{w}), \sigma^j(\bar{w}))$$

Observe que esta probabilidade é holonômica mas não é $\hat{\sigma}$-invariante.

De fato, é suficiente ver que

$$\int g \circ \hat{\sigma}(x,w) d\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ \hat{\sigma}(Z_j(x_0,\bar{w}), \sigma^j(\bar{w})) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(Z_{j+1}(x_0,\bar{w}), \sigma^{j+1}(\bar{w}))$$

Portanto, $\int g \circ \hat{\sigma}(x,w) d\hat{\nu} - \int g(x,w) d\hat{\nu} = \frac{1}{n} g(x_0, \sigma^n(\bar{w})) - g(x_0, \bar{w}))$, que é claramente não identicamente 0, $\forall g$.

Todavia $\hat{\nu}$ é holonômica porque dada qualquer função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\int f(\tau_{X_1(w)}(x)) d\hat{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau_{X_1(\sigma^j(\bar{w}))}(Z_j(x_0,\bar{w})) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(Z_{j+1}(x_0,\bar{w})) = \int f(x) d\hat{\nu}$$

porque, $Z_n(x_0,\bar{w}) = x_0$.

3.5 Ergodicidade de probabilidades holonômicas

Dada uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}$, nós podemos associar, por desintegração holonômica, um único IFS com probabilidades $([0,1], \tau_i, u_i)$ tal que $P_u^*(\nu) = \nu$ e $\nu = \pi_* \hat{\nu}$ (lembre que π_* representa a probabilidade induzida no $[0,1]$ pela função mensurável π).

Seja $Z_n,\ n \in \mathbb{N}$, uma sequência de variáveis aleatórias no $[0,1]$. Então, nós podemos construir um processo de Markov com transição de probabilidades P_u e distribuição inicial ν, que nós iremos denotar por (Z_n, P_u, ν).

Este processo é estacionário por construção, portanto faz sentido perguntar se (Z_n, P_u, ν) é ergódico, no seguinte sentido:

Seja $\mathcal{F}$ a sigma álgebra de Borel no $[0,1]$ e $\mathcal{F}_\infty$ a sigma álgebra induzida no produto infinito $\Omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$, o espaço de caminhos para um processo a tempo discreto em $[0,1]$. Um processo de Markov a tempo discreto $Z_n,\ n \in \mathbb{N}$ tomando valores em $[0,1]$ com transição de probabilidade $p : [0,1] \times \mathcal{F} \to [0,1]$ é processo estocástico com probabilidade no espaço dos caminhos dada por

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} \in A \mid Z_n = x_n, Z_{n-1} = x_{n-1}, ..., Z_0 = x_0) = p(x_n, A),\ A \in \mathcal{F}$$

Definimos também o operador V atuando nas probabilidades do $[0,1]$ por

$$V_\nu(A) = \int p(x, A) d\nu,\ A \in \mathcal{F}$$

assim um estado inicial ν será dito estacionário se $V_\nu = \nu$.

Ainda, um evento $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_\infty$ será dito invariante, se existir $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_\infty$ tal que

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \geq 0} \sigma^-(\mathcal{C})$$

O processo $Z_n,\ n \in \mathbb{N}$ será dito ergódico se, para todo conjunto invariante $\mathcal{A}$ tivermos $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0$ ou $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1$.

No nosso caso, o processo é definido pela seguinte transição de probabilidades

$$p(x, A) = \sum_{i=0}^{d-1} u_i(x) \chi_A(\tau_i x) = \int_A 1 dP_u^*(\delta_x),\ A \in \mathcal{F}$$

que representa a probabilidade de $Z_{n+1} \in A$ dado que $Z_n = x$. Em particular $V_\nu = P_u^*(\nu)$ e portanto a distribuição ν será estacionária para o processo se ela for uma probabilidade P_u-invariante.

Assim, no contexto de probabilidades holonômicas temos a seguinte definição de ergodicidade:

Definição 3.12. *Uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}$ é dita ergódica, se o processo de Markov associado (Z_n, P_u, ν) é um processo ergódico.*

Desta definição podemos concluir diretamente de [18] que:

Lema 3.13. *(Elton,[18]) Seja $\hat{\nu}$ uma probabilidade holonômica com desintegração $([0,1], \tau_i, u_i)$. Se $\pi_* \hat{\nu}$ é a única probabilidade P_u-invariante, então $\hat{\nu}$ é ergódica.*

Em [18], J. Elton, provou um teorema ergódico para este tipo de processo de Markov definido em um IFS com probabilidades, que apresentaremos a seguir. Primeiramente necessitamos relembrar algumas definições.

Definição 3.14. *Uma função $S : [0,1] \to \mathbb{R}$ tem seu módulo de continuidade uniforme definido por*

$$\varphi(t) = \sup_{|x-y|\leq t} |S(x) - S(y)|, \ t \geq 0$$

Diremos que φ é Dini contínua (ou que φ satisfaz a condição de Dini), se existir $\delta > 0$ tal que $\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty$.

Teorema 3.15. *(Elton,[18]) Suponha que exista $r < 1$ tal que*

$$\prod_{i=0}^{d-1} |\tau_i(x) - \tau_i(y)|^{u_i(x)} \leq r|x-y|, \ \forall x, y \in [0,1] \qquad (*)$$

Assuma que exista $\delta > 0$ tal que $u_i(x) \geq \delta$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall i = 0, ..., d-1$ e que o módulo de continuidade de cada u_i satisfaz a condição de Dini. Seja ν o único estado estacionário de processo de Markov descrito acima (ver [7] para a unicidade). Então, $\forall x \in [0,1]$ existe $G_x \subseteq \Sigma$ tal que $\mathbb{P}_x(G_x) = 1$ e para cada $w \in G_x$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\hat{\sigma}^i(x,w)) \to \int f d\nu$$

para toda $f \in C([0,1])$.

Observe que a condição (*) do teorema ergódico de Elton é verificada trivialmente, se τ_i é uma contração para todo i, independentemente dos pesos u_i bastando tomar r igual ao mínimo das constantes de contração.

Por outro lado a condição de Dini impõe uma restrição, bem fraca, sobre a regularidade da família de marginais obtida na decomposição da probabilidade holonômica $\hat{\nu}$, mais precisamente, basta lembrar que u_i's são dados por,

$$u_i(y) = \hat{\nu}_y(y \times \bar{i}), \quad i = 0, ..., d-1.$$

A partir destas observações podemos enunciar o seguinte corolário do teorema ergódico de Elton, cuja prova é evidente.

Corolário 3.16. *(Teorema Ergódico Holonômico) Seja $([0,1], \tau_i)$ um IFS contrativo (contratividade significa que τ_i é uma contração para todo i) e $\hat{\nu}$ uma probabilidade holonômica com desintegração $([0,1], \tau_i, u_i)$. Suponha que $u_i \geq \delta > 0$, $\forall i = 0, ..., d-1$ e que cada u_i tenha módulo de continuidade uniforme Dini contínuo. Então, $\forall x \in [0,1]$ existe $G_x \subseteq \Sigma$ tal que $\mathbb{P}_x(G_x) = 1$ e para cada $w \in G_x$*

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\hat{\sigma}^i(x,w)) \to \int f d\hat{\nu}$$

para toda $f \in C([0,1])$. Em particular $\hat{\nu}$ é ergódica.

Por exemplo, é fácil ver que, se $d = 2$, $\tau_0 = \frac{1}{2}x, \tau_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ e $u_i(x) = \psi(\tau_i x)$, $i = 0, 1$, onde $\sum_{i=0}^{d-1} \psi(\tau_i x)$ e ψ é uma função Hölder no intervalo, verifica as condições acima. Embora o resultado se aplique a uma classe de IFS bem menos restritiva que esta.

3.6 Construção de probabilidades holonômicas para ρ-sistemas com pesos

Dado um ρ-sistema com pesos $([0,1], \tau_i, u_i)$, isto é,

$$P_u(h) = \rho h, \quad P_u^*(\nu) = \rho \nu$$

Considere a normalização $([0,1], \tau_i, v_i)$, então $P_v(1) = 1$ e $P_v^*(\mu) = \mu$.

É fácil ver que a probabilidade no $[0,1] \times \Sigma$ dada por

$$\int g(x,w) d\hat{\mu} = \int_{[0,1]} \int_{\Sigma} g(x,w) d\mathbb{P}_x(w) d\mu(x)$$

é holonômica se $\mathbb{P}_x$ obtida a partir de v (ver [16] para desintegração de medidas projetivas em IFS). A probabilidade $\hat{\mu}$ será chamada o *levantamento holonômico* de μ.

Podemos reverter este processo, começando com um IFS com probabilidades (um 1-sistema com pesos) $([0,1], \tau_i, v_i)$, isto é, $P_v(1) = 1$ e $P_v^*(\nu) = \nu$, e considere $\hat{\nu}$, o levantamento holonômico de ν.

$$\int g(x,w) d\hat{\nu} = \int_{[0,1]} \int_{\Sigma} g(y,w) d\mathbb{P}_y(w) d\nu(y)$$

Por desintegração holonômica (Teorema 3.11), podemos representar a probabilidade holonômica $\hat{\nu}$ como

$$\int g(x,w) d\hat{\nu} = \int_{[0,1]} \int_{\{y\} \times \Sigma} g(x,w) d\hat{\nu}_y(x,w) d\nu_0(y)$$

Então, ν_0 is P_u-invariante para o IFS com probabilidades $([0,1], \tau_i, u_i)_{i=0..d-1}$, onde os u_i's são dados por,

$$u_i(y) = \hat{\nu}_y(y, \bar{i}), \quad i = 0, ..., d-1$$

Ressaltamos que $\nu_0 = \nu$ (é um simples cálculo), além disso nós podemos reescrever

$$\int g(x,w) d\hat{\nu} = \int_{[0,1]} \int_{y \times \Sigma} g(x,w) d(\delta_y(x) \times \mathbb{P}_y(w)) d\nu(y)$$

Pela unicidade no Teorema 3.10 obtemos,

$$\hat{\nu}_y = \delta_y \times \mathbb{P}_y, \quad \nu - qtp$$

Então nós temos

$$u_i(y) = \hat{\nu}_y(y, \bar{i}) = (\delta_y \times \mathbb{P}_y)(y, \bar{i}) = \mathbb{P}_y(\bar{i}) = v_i(x), \quad \nu - qtp$$

Deste argumento podemos concluir a seguinte proposição

Proposição 3.17. *Seja $([0,1], \tau_i, v_i)$ um 1-sistema com pesos e $\hat{\nu}$ o levantamento holonômico da probabilidade P_v-invariante ν. Se $([0,1], \tau_i, u_i)$ é o 1-sistema com pesos obtido na desintegração holonômica de $\hat{\nu}$, então $u = v, \quad \nu - qtp$, onde $\nu = \pi_* \hat{\nu}$.*

3.7 Entropia e princípio variacional para ρ-sistemas com pesos

Vamos considerar um ρ-sistema com pesos, $([0,1], \tau_i, u_i)$. Denote por $\mathbb{B}^+$ o conjunto de todas as funções positivas Borel mensuráveis limitadas no $[0,1]$ e por $\mathcal{H}$ o conjunto de todas as probabilidades holonômicas no $[0,1] \times \Sigma$ para $\hat{\sigma}$.

A idéia central, nesta seção, é considerar a generalização da idéia de entropia para o caso de probabilidades holonômicas através do conceito naturalmente sugerido pelo Teorema 4 em [28]. Nós iremos mostrar que sob tal ponto de vista, os resultados clássicos em formalismo termodinâmico permanecem verdadeiros.

Dado $\hat{\nu} \in \mathcal{H}$ nós podemos definir o funcional $\alpha_{\hat{\nu}} : \mathbb{B}^+ \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ por

$$\alpha_{\hat{\nu}}(\psi) = \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\psi f}{\psi f}) d\hat{\nu}$$

Seja $\alpha_{\hat{\nu}}$ o funcional definido acima. Observe que $\alpha_{\hat{\nu}}$ não depende de ψ.

De fato, tomando $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{B}^+$ e $f \in \mathbb{B}^+$, defina $g \in \mathbb{B}^+$ como sendo $g = \frac{\psi_1}{\psi_2} f \in \mathbb{B}^+$, então

$$\int \ln(\frac{P_{\psi_2} g}{\psi_2 g}) d\hat{\nu} = \int \ln(\frac{P_{\psi_1} f}{\psi_1 f}) d\hat{\nu}$$

portanto $\alpha_{\hat{\nu}}(\psi_2) = \alpha_{\hat{\nu}}(\psi_1)$.

Definição 3.18. *Dado $\hat{\nu} \in \mathcal{H}$ nós definimos a Entropia de $\hat{\nu}$ por*

$$h(\hat{\nu}) = \alpha_{\hat{\nu}}$$

Pelo visto acima temos

$$h(\hat{\nu}) = \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\psi f}{\psi f}) d\hat{\nu}$$

$\forall \psi \in \mathbb{B}^+$.

Lema 3.19. *Dado $\beta \geq 1 + \alpha$ e números $a_i \in [1+\alpha, \beta]$, $i = 0, ..., d-1$ existe $\varepsilon \geq 1$ tal que*

$$\ln(\varepsilon \sum_{i=0}^{d-1} a_i) = \sum_{i=0}^{d-1} \ln(\varepsilon a_i)$$

Este lema segue da escolha $\varepsilon = exp(\frac{1}{d-1}(\ln(\sum_{i=0}^{d-1} a_i))/(\sum_{i=0}^{d-1} \ln(a_i))$ e do fato de que $a_i \geq 1+\alpha$.

Lema 3.20. *Dado $f \in \mathbb{B}^+$ e $\hat{\nu} \in \mathcal{H}$ então*

$$\sum_{i=0}^{d-1} \int f(\tau_i(x)) d\hat{\nu} \geq \int f(x) d\hat{\nu}$$

Demonstração: Como $\hat{\nu}$ é holonômica, temos

$$\int f(\tau_{X_1(w)}(x)) d\hat{\nu} = \int f(x) d\hat{\nu}.$$

Isto pode ser reescrito como

$$\int f(\tau_{X_1(w)}(x))d\hat{\nu} = \sum_{i=0}^{d-1} \int_{[0,1]\times\bar{i}} f(\tau_{X_1(w)}(x))d\hat{\nu} = \sum_{i=0}^{d-1} \int_{[0,1]\times\bar{i}} f(\tau_i(x))d\hat{\nu}$$

Observe que para cada i

$$\int f(\tau_i(x))d\hat{\nu} = \sum_{j=0}^{d-1} \int_{[0,1]\times\bar{j}} f(\tau_i(x))d\hat{\nu} \geq \int_{[0,1]\times\bar{i}} f(\tau_i(x))d\hat{\nu}$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{d-1} \int f(\tau_i(x))d\hat{\nu} \geq \sum_{i=0}^{d-1} \int_{[0,1]\times\bar{i}} f(\tau_i(x))d\hat{\nu} = \int f(x)d\hat{\nu}$$

■

Proposição 3.21. *Considere $\hat{\nu} \in \mathcal{H}$. Então*

$$0 \leq h(\hat{\nu}) \leq \ln(d)$$

Demonstração: Inicialmente, considere $\psi = 1$. Nós sabemos que $h(\hat{\nu}) = \inf_{f\in\mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_1 f}{f})d\hat{\nu} \leq \int \ln(\frac{P_1 1}{1})d\hat{\nu} = \ln(d)$.

Agora, para provar a desigualdade

$$h(\hat{\nu}) = \inf_{f\in\mathbb{B}^+} \int \ln(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{f\circ\tau_i}{f})d\hat{\nu} \geq 0$$

considere $I = \int \ln(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{f\circ\tau_i}{f})d\hat{\nu}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $1+\alpha \leq f \leq \beta$ (porque esta integral é invariante sob a ação da aplicação projetiva $f \to \lambda f$). Então, nós podemos escrever esta integral como

$$I = \int \ln(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{\varepsilon f\circ\tau_i}{\varepsilon f})d\hat{\nu} = \int \ln(\varepsilon \sum_{i=0}^{d-1} f\circ\tau_i)d\hat{\nu} - \int \ln(\varepsilon f)d\hat{\nu} \qquad (1)$$

Para usar a desigualdade obtida no Lema 3.19 denote, para cada x fixo,

$$a_i = f\circ\tau_i(x)$$

então teremos

$$\varepsilon(x) = exp(\frac{1}{d-1}\cdot\frac{\ln(\sum_{i=0}^{d-1} f\circ\tau_i)}{(\sum_{i=0}^{d-1}\ln(f\circ\tau_i))}) \geq \varepsilon_0 \geq 1$$

pela compacidade de $[0,1]$. Desta escolha nós temos

$$\ln(\varepsilon_0 \sum_{i=0}^{d-1} f\circ\tau_i) \geq \sum_{i=0}^{d-1} \ln(\varepsilon_0 f\circ\tau_i) \qquad (2)$$

Usando (2) em (1) teremos

$$I \geq \sum_{i=0}^{d-1} \int \ln(\varepsilon_0 f\circ\tau_i)d\hat{\nu} - \int \ln(\varepsilon_0 f)d\hat{\nu}$$

Além disso, usando a desigualdade do Lema 3.20 aplicada à função $\ln(\varepsilon f)$ (note que $\ln(\varepsilon_0 f) \in \mathbb{B}^+$ porquê $\varepsilon_0 \geq 1$), teremos

$$I \geq \int \ln(\varepsilon f) d\hat{\nu} - \int \ln(\varepsilon f) d\hat{\nu} = 0$$

$\blacksquare$

Definição 3.22. *Dado $\phi \in \mathbb{B}^+$ definimos a Pressão Topológica de ϕ por*

$$p(\phi) = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} \{h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}\}$$

Usando a fórmula para a entropia obtemos uma caracterização da pressão topológica como

$$p(\phi) = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} \{ \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\phi f}{\phi f}) d\hat{\nu} + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}\} = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\phi f}{f}) d\hat{\nu}$$

Definição 3.23. *Uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}_{eq}$ tal que*

$$p(\phi) = h(\hat{\nu}_{eq}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_{eq}$$

será denominada um Estado de Equilíbrio para ϕ.

No próximo teorema nós não assumimos que $\sum_{i=0}^{d-1} \phi(\tau_i(x)) = 1$.

Teorema 3.24. *Considere $\phi \in \mathbb{B}^+$ tal que $([0,1], \tau_i, \phi)$ é um ρ-sistema com pesos, para algum $\rho \geq 0$. Então, $p(\phi) = \ln(\rho)$. Em particular, o operador de transferência P_ϕ tem um único auto-valor positivo.*

Demonstração: Note que, $h(\hat{\nu}) = \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\phi f}{\phi f}) d\hat{\nu} \leq \int \ln(\frac{P_\phi h}{\phi h}) d\hat{\nu} = \int \ln(\frac{\rho}{\phi}) d\hat{\nu} = -\int \ln(\phi) d\hat{\nu} + \ln(\rho)$ assim,

$$h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu} \leq \ln(\rho), \ \forall \hat{\nu}$$

portanto $p(\phi) \leq \ln(\rho)$.

Lembremos que

$$p(\phi) = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\phi f}{f}) d\hat{\nu}$$

Seja $\hat{\nu}_0$ uma probabilidade holonômica fixada, tal que o dual do operador de transferência normalizado verifique $P_u^*(\pi_* \hat{\nu}_0) = \pi_* \hat{\nu}_0$ (sempre existe se P_u é a normalização de P_ϕ), onde $\pi(x, \omega) = x$. Portanto nós podemos escrever

$$p(\phi) \geq \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\phi f}{f}) d\hat{\nu}_0$$

Note que, a partir da propriedade de normalização, teremos

$$P_\phi(f) = P_u(\frac{f}{h}) \rho h, \quad \forall f$$

Além disso, sabemos que $\ln(P_u g) \geq P_u \ln(g), \forall g$, pela concavidade da função logaritmo.

Agora considere uma $f \in \mathbb{B}^+$ arbitrária, então

$$\int \ln(\frac{P_\phi f}{f}) d\hat{\nu}_0 = \int \ln(\frac{P_u(f/h)\rho h}{f}) d\hat{\nu}_0 = \int \ln(\frac{P_u(f/h)}{f/h}) d\hat{\nu}_0 + \ln(\rho) \geq$$

$$\geq \int P_u \ln(f/h) d\hat{\nu}_0 - \int \ln(f/h) d\hat{\nu}_0 + \ln(\rho) = \ln(\rho)$$

Logo $\inf_{f\in\mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_\phi f}{f}) d\hat{\nu}_0 \geq \ln(\rho)$, isto é $p(\phi) \geq \ln(\rho)$. Daí obtemos $p(\phi) = \ln(\rho)$.

Para obter a segunda parte da afirmação é suficiente ver que $p(\phi) = \ln(\rho)$, para todo ρ, portanto o auto-valor é único. ■

Teorema 3.25. *(Princípio Variacional) Considere $\phi \in \mathbb{B}^+$ tal que $([0,1], \tau_i, \phi)$ é um ρ-sistema com pesos, para $\rho = e^{p(\phi)} \geq 0$. Então, qualquer probabilidade holonômica $\hat{\nu}_0$ tal que o dual do operador normalizado verifique $P_u^*(\pi_* \hat{\nu}_0) = \pi_* \hat{\nu}_0$ é um estado de equilíbrio.*

Demonstração: Note que, da definição de pressão obtemos $\ln(\rho) = p(\phi) \geq h(\hat{\nu}_0) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_0$. Como $P_u^*(\pi_* \hat{\nu}_0) = \pi_* \hat{\nu}_0$, para uma $f \in \mathbb{B}^+$ arbitrária, obtemos

$$h(\hat{\nu}_0) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_0 = \int \ln(\frac{P_\phi f}{f}) d\hat{\nu}_0 \geq \ln(\rho)$$

Portanto $\ln(\rho) = h(\hat{\nu}_0) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_0$. ■

Note que, se $\hat{\nu}_0$ é um estado de equilíbrio, tal que o IFS com probabilidades $([0,1], \tau_i, v_i)$ associado a $\hat{\nu}_0$ por desintegração holonômica, é uniforme, então $P_u^*(\pi_* \hat{\nu}_0) = \pi_* \hat{\nu}_0$.

De fato, sabemos que $\ln(\rho) = h(\hat{\nu}_0) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_0$, e $P_v^*(\pi_* \hat{\nu}_0) = \pi_* \hat{\nu}_0$. Então podemos escrever

$$\ln(\rho) = h(\hat{\nu}_0) + \int P_v \ln(\phi) d\hat{\nu}_0 = h(\hat{\nu}_0) + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\phi(\tau_i)) d\hat{\nu}_0$$

Lembre que, a normalização de ϕ é dada por

$$u_i(x) = \frac{\phi(\tau_i(x)) h(\tau_i(x))}{\rho h(x)}$$

portanto

$$0 = h(\hat{\nu}_0) + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(u_i) d\hat{\nu}_0 \qquad (1)$$

Como $([0,1], \tau_i, v_i)$ é normalizado uniforme, existe uma função peso ψ tal que $v_i(x) = \phi(\tau_i(x))$, $\forall i = 0, ..., d-1$. Além disso, $p(\psi) = 0$ e $\hat{\nu}_0$ é claramente um estado de equilíbrio para ψ. Portanto

$$0 = h(\hat{\nu}_0) + \int \ln(\psi) d\hat{\nu}_0$$

Usando $P_v^*(\pi_* \hat{\nu}_0) = \pi_* \hat{\nu}_0$ obtemos

$$0 = h(\hat{\nu}_0) + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) d\hat{\nu}_0 \qquad (2)$$

É um fato bem conhecido, que

$$-\sum_{i=0}^{d-1} a_i \ln(a_i) + \sum_{i=0}^{d-1} a_i \ln(b_i) \leq 0 \qquad (*)$$

onde $\sum_{i=0}^{d-1} a_i = 1 = \sum_{i=0}^{d-1} b_i$ e $b_i \geq 0$ com a igualdade somente se $a_i = b_i$ (ver [32] para uma prova). De (1) e (2) obtemos,

$$u_i(x) = v_i(x), \quad \nu - qtp$$

e então $P_u^*(\pi_* \hat{\nu}_0) = \pi_* \hat{\nu}_0$.

Exemplos:

1) Para $\phi = 1$, teremos $P_\phi(1) = d \cdot 1$. Então, para todo estado de equilíbrio $\hat{\nu}_{eq}$ temos

$$\ln(d) = h(\hat{\nu}_{eq}) + \int \ln(1) d\hat{\nu}_{eq} = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} \inf_{f \in \mathbb{B}^+} \int \ln(\frac{P_1 f}{f}) d\hat{\nu} = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} h(\hat{\nu})$$

2) Se $P_\phi(1) = 1$, isto é, to caso de IFS com probabilidades, $p(\phi) = 0$. Então, $h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu} \leq 0$, para toda probabilidade holonômica. Além disso, qualquer estado de equilíbrio $\hat{\nu}_{eq}$ satisfaz

$$h(\hat{\nu}_{eq}) \ = - \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_{eq}$$

Definição 3.26. *Duas funções $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{B}^+$ serão ditas holonomicamente equivalentes (ou, co-homólogas) se existir uma função $h \in \mathbb{B}^+$ tal que*

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) \cdot \frac{h(\tau_{X_1(w)}(x))}{h(x)}, \ \forall (x, \omega)$$

É claro que, dois potenciais holonomicamente equivalentes ψ_1, ψ_2 terão os mesmos estados de equilíbrio.

3.8 Um ponto de vista alternativo para o conceito de entropia e pressão para um IFS

Definição 3.27. *Dado $\hat{\nu} \in \mathcal{H}$, seja $([0,1], \tau_i, v_i)$ o IFS com probabilidades que aparece associado à desintegração holonômica de $\hat{\nu}$ (ver Teorema 3.11). Definiremos a Entropia de $\hat{\nu}$ por*

$$h(\hat{\nu}) = - \sup_{\sum_{i=0}^{d-1} u_i = 1} \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(u_i) d\hat{\nu}$$

Proposição 3.28. *Considere $\hat{\nu} \in \mathcal{H}$. Então*

$$0 \leq h(\hat{\nu}) \leq \ln(d)$$

Demonstração: Inicialmente considere $u_i^0 = \frac{1}{d}, \ i = 0, ..., d-1$ então $\sum_{i=0}^{d-1} u_i^0 = 1$ e

$$-h(\hat{\nu}) = \sup_{\sum_{i=0}^{d-1} u_i = 1} \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(u_i) d\hat{\nu} \geq \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\frac{1}{d}) d\hat{\nu} = -\ln(d)$$

portanto $h(\hat{\nu}) \leq \ln(d)$.

Por outro lado $u_i \leq 1$ so $\ln(u_i) \leq 0$, e então

$$\sup_{\sum_{i=0}^{d-1} u_i = 1} \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(u_i) d\hat{\nu} \leq 0$$

Logo $0 \leq h(\hat{\nu})$. ■

Lema 3.29. *(Existência de Estados de Equilíbrio) Considere $\phi \in \mathbb{B}^+$ tal que $([0,1], \tau_i, \phi)$ é um ρ-sistema com pesos, para algum $\rho > 0$ (lembre que existe $h > 0$, tal que $P_\phi(h) = \rho h$). Denote por P_v a normalização de P_ϕ, isto é, $([0,1], \tau_i, v_i)$ é um 1-sistema com pesos, tal que $P_v(1) = 1$ e $P_v^*(\nu) = \nu$. Seja $\hat{\nu}$ o levantamento holonômico de ν. Então*

$$h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu} = \ln(\rho)$$

Demonstração: Seja $\hat{\nu}$o levantamento holonômico de ν. pela Proposição 3.17, nós sabemos que o 1-sistema com pesos associado à sua desintegração holonômica é $([0,1], \tau_i, v_i)$. Então, da definição de entropia teremos

$$h(\hat{\nu}) = -\sup_{\sum_{i=0}^{d-1} u_i = 1} \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(u_i) d\hat{\nu} = -\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) d\hat{\nu}$$

da desigualdade logarítmica (*) acima.

lembre que, a normalização de ϕ é dada por

$$v_i(x) = \frac{\phi(\tau_i(x)) h(\tau_i(x))}{\rho h(x)}$$

Substituindo esta expressão na equação para a entropia teremos

$$h(\hat{\nu}) = -\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\frac{\phi(\tau_i(x)) h(\tau_i(x))}{\rho h(x)}) d\hat{\nu} =$$

$$= -\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\phi(\tau_i(x)) d\hat{\nu} - \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\frac{h(\tau_i(x))}{h(x)}) d\hat{\nu} + \ln(\rho) =$$

$$= -\int \ln(\phi(x)) d\hat{\nu} + \ln(\rho).$$

■

Definição 3.30. *Dado $\phi \in \mathbb{B}^+$ definiremos a pressão de ϕ por*

$$p(\phi) = \sup_{\hat{\nu} \in \mathcal{H}} \{h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}\}$$

Teorema 3.31. *Consideremos $\phi \in \mathbb{B}^+$ tal que $([0,1], \tau_i, \phi)$ é um ρ-sistema com pesos, para algum $\rho \geq 0$. Então $p(\phi) = \ln(\rho)$. Em particular, o operador de transferência P_ϕ tem um único auto-valor positivo.*

Demonstração: Seja P_u a normalização de P_ϕ. Então,

$$h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu} = h(\hat{\nu}) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu} =$$

$$= -\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) d\hat{\nu} + \int P_v \ln(\phi) d\hat{\nu} =$$

$$= -\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) d\hat{\nu} + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\phi(\tau_i)) d\hat{\nu} =$$

$$= -\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) d\hat{\nu} + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\frac{\phi(\tau_i)h(\tau_i)}{\rho h} \frac{\rho h}{h(\tau_i)}) d\hat{\nu} =$$

$$= -\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) d\hat{\nu} + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(u_i \frac{\rho h}{h(\tau_i)}) d\hat{\nu} =$$

$$= \int -\sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) + \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(u_i) d\hat{\nu} + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(\frac{\rho h}{h(\tau_i)}) d\hat{\nu} \leq$$

$$= \ln(\rho) + \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(h) d\hat{\nu} - \int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(h(\tau_i)) d\hat{\nu} =$$

$$= \ln(\rho) + \int \ln(h) d\hat{\nu} - \int P_v \ln(h) d\hat{\nu} = \ln(\rho)$$

A igualdade segue do Lema 3.28 ■

Do Teorema 3.31 e do Lema 3.28, segue que existem estados de equilíbrio, mais precisamente, dado um ρ-sistema com pesos, qualquer levantamento holonômico de uma probabilidade invariante é um estado de equilíbrio.

O princípio variacional na formulação desta seção, é bem mais forte que o da seção anterior. A troca da definição da entropia permite dar uma caracterização dos estados de equilíbrio como sendo os levantamentos holonômicos de probabilidades P_u-invariantes do operador de transferência normalizado. Resultando assim numa condição de equivalência para tais estados como mostra o próximo teorema.

Teorema 3.32. *(Princípio Variacional Alternativo) Consideremos $\phi \in \mathbb{B}^+$ tal que $([0,1], \tau_i, \phi)$ é um ρ-sistema com pesos, para $\rho = e^{p(\phi)} \geq 0$. Então, uma probabilidade holonômica $\hat{\nu}_0$ é um estado de equilíbrio se, e somente se, a projeção $\hat{\nu}_0$ por desintegração holonômica é invariante para o dual do operador de transferência normalizado de P_ϕ (isto é, $P_u^*(\pi_*\hat{\nu}_0) = \pi_*\hat{\nu}_0$).*

Demonstração: Pelo Lema 3.28, segue que: se $\hat{\nu}_0$ é o levantamento holonômico da probabilidade $\pi_*\hat{\nu}_0$, então $\hat{\nu}_0$ é um estado de equilíbrio.

A recíproca também é verdadeira. De fato, suponha que $\hat{\nu}_0$ é um estado de equilíbrio, isto é,

$$h(\hat{\nu}_0) + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_0 = \ln(\rho)$$

Usando a normalização teremos,

$$-\int \sum_{i=0}^{d-1} v_i \ln(v_i) d\hat{\nu}_0 + \int \ln(\phi) d\hat{\nu}_0 = \ln(\rho)$$

onde $([0,1],\tau_i,v_i)$ é o 1-sistema com pesos associado à desintegração de $\hat{\nu}_0$. A partir da invariância de P_v teremos

$$-\int\sum_{i=0}^{d-1} v_i\ln(v_i)d\hat{\nu}_0+\int\sum_{i=0}^{d-1} v_i\ln(\phi(\tau_i))d\hat{\nu}_0=\ln(\rho)$$

Finalmente, das relações da normalização P_u de P_ϕ

$$u_i(x)=\frac{\phi(\tau_i(x))h(\tau_i(x))}{\rho h(x)}\Leftrightarrow\phi(\tau_i(x))=\frac{u_i(x)\rho h(x)}{h(\tau_i(x))}$$

temos

$$-\int\sum_{i=0}^{d-1} v_i\ln(v_i)d\hat{\nu}_0+\int\sum_{i=0}^{d-1} v_i\ln(\frac{u_i(x)\rho h(x)}{h(\tau_i(x))})d\hat{\nu}_0=\ln(\rho)$$

isto é equivalente à

$$\int\sum_{i=0}^{d-1} v_i\ln(\frac{u_i}{v_i})d\hat{\nu}_0=0$$

De,

$$\sum_{i=0}^{d-1} v_i\ln(\frac{u_i}{v_i})\leq\ln(\sum_{i=0}^{d-1} v_i\frac{u_i}{v_i})=\ln(\sum_{i=0}^{d-1} u_i)=\ln(1)=0,$$

segue que $u_i=v_i,\quad \pi_*\hat{\nu}_0-a.e.$

Como $\pi_*\hat{\nu}_0$ é P_v-invariante, teremos $P_u^*(\pi_*\hat{\nu}_0)=\pi_*\hat{\nu}_0$

■

A conveniência do uso deste tipo de definição de entropia ou outra deve depender do problema específico no qual alguém esteja interessado.

Para concluir, gostaríamos de salientar que para cada ϕ fixado podemos considerar um parâmetro real β e logo o respectivo problema variacional

$$p(\phi^\beta)=\sup_{\hat{\nu}\in\mathcal{H}}\{h(\hat{\nu})+\beta\int\ln(\phi)d\hat{\nu}\}.$$

Para cada valor β, denote por $\hat{\nu}_\beta$ a solução (portanto, normalizada) do problema variacional acima. Qualquer subsequência (limite fraco) $\hat{\nu}_{\beta_n}\to\nu$ irá determinar uma probabilidade holonômica maximizante ν (no sentido de que, realiza $\sup_{\hat{\nu}\in\mathcal{H}}\{\int\ln(\phi)d\hat{\nu}\}$) porque a entropia de qualquer probabilidade holonômica é limitada por $\ln d$. A existência de subações via limite de autofunções pode ser obtida aqui usando as mesmas técnicas empregadas em [12]. Indicamos [20] para propriedades de probabilidades holonômicas maximizantes e observamos que estes resultados também se aplicam ao contexto de IFS descrito nas seções anteriores.

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham, *"Transversality in manifolds of mappings"*, Bull. Amer. Math Soc. N$^{\underline{o}}$ 69,(1963), pp 470–474.

[2] R. Abraham and J. Robbin, *"Transversal mappings and flows"*, Benjamin, New York, 1967.

[3] Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. *"Foundations of mechanics."*, Second edition, revised and enlarged. With the assistance of Tudor Raţiu and Richard Cushman. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.

[4] R. Abraham, J. E. Marsden, T. S. Ratiou, *"Manifolds, Tensor Analysis And Applications"*, Global Analysis, Pure And Applied, Addison Wesley, London, 1983.

[5] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savare *"Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures."*, ETH Birkhauser Verlag, Basel, 2005.

[6] D. V. Anosov, *"Generic properties of closed geodesics"*, IZV. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **46**, N$^{\underline{o}}$4(1982), pp 675-709, 896.

[7] Barnsley, M. F.; Demko, S. G.; Elton, J. H.; Geronimo, J. S. *"Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities."*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24 (1988), no. 3, 367–394.

[8] K. Burns and M. Gidea, *"Differential Geometry and Topology. With a view to dynamical systems."*, Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005. x+389 pp.

[9] G. Contreras, *"Geodesic flows with positive topological entropy, twist maps and dominated splittings"*, preprint.

[10] G. Contreras & R. Iturriaga, *"Convex hamiltonians without conjugate points"*, Ergod. Th. & Dynam. Sys, (1999), 19 , 901-952.

[11] G. Contreras, R. Iturriaga, *"Global Minimizers of Autonomous Lagrangians"*, To Appear. URL: http://www.cimat.mx/%7egonzalo/.

[12] Contreras, G.; Lopes, A. O.; Thieullen, Ph. *"Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle."*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 5, 1379–1409.

[13] G. Contreras, G. P. Paternain, *"Genericity of geodesic flows with positive topological entropy on $\boldsymbol{S}^2$."*, Journal of Differential Geometry 61 (2002), N$^{\underline{o}}$ 1, 1-49.

[14] Conze, J.-P., Raugi A. *"Fonctions harmoniques pour un operateur de transition e applications."*, Bull. Soc. Math. France 118 (1990), no. 4, 273–310.

[15] Dellacherie, Claude. *"Probabilities and potential."*, Amsterdam: North-Holland, 1978. p.189.

[16] Dutkay, Dorin Ervin; Jorgensen, Palle E. T. *"Disintegration of projective measures."*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), no. 1, 169–179.

[17] Dutkay, Dorin Ervin; Jorgensen, Palle E. T. *"Iterated function systems, Ruelle operators, and invariant projective measures."*, Math. Comp. 75 (2006), no. 256, 1931–1970

[18] Elton, John H. *"An ergodic theorem for iterated maps."*, Ergodic Theory Dynam. Systems 7 (1987), no. 4, 481–488.

[19] Fan, Ai Hua; Lau, Ka-Sing *"Iterated function system and Ruelle Operator"*, J. Math. Anal. Appl. 231 (1999), no. 2, 319–344.

[20] Garibaldi E., Lopes, A. O., *On the Aubry-Mather theory for symbolic dynamics*, *preprint (2006)*, to appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems.

[21] P. Hartman, *"Ordinary differential equations"*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.

[22] Joregnsen, P. E. T., *Analysis and Probability: wavelets, signals, fractals*, Springer Verlag (2006)

[23] M. Keane *"Strongly mixing g-measures"*, Invent. Math., 16:309-324, 1972.

[24] W. Klingenberg, *"Lectures on Closed Geodesics"*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 230, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[25] Wilhelm Klingenberg and Floris Takens, *"Generic properties of geodesic flows"*, Math. Ann. 197 (1972), 323-334.

[26] R. Mañé, *"Generic properties and problems of minimizing measures of lagrangian systems."* Nonlinearity 9, (1996), N$^{\underline{0}}$ 2, 273–310.

[27] J. A. G. Miranda *"Generic properties for magnetic flows on surfaces."*, 2006 Nonlinearity 19, 1849-1874.

[28] Lopes, Artur O. *"An analogy of the charge distribution on Julia sets withthe Brownian motion."*, J. Math. Phys. 30 (1989), no. 9, 2120–2124.

[29] Mauldin, D. and Urbanski, M., *Graph Directed Markov Systems: Geometry and Dynamics of Limit Sets*, Cambridge Press

[30] G. P. Paternain, *"Geodesic Flows"*, Progress in Mathemathics, Birkhüser, Boston, Vol.180, 1999.

[31] M. M. Peixoto, *"On an approximation theorem of Kupka and Smale"*, J. Differential Equations 3, (1967), 214-227.

[32] Parry, William; Pollicott, Mark *"Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics."*, Astérsque No. 187-188 (1990), 268 pp.

[33] C. Robinson, *"Generic properties of conservative systems"*, Amer. J. Math. 92, (1970), 562-603.

[34] C. Robinson, *"Generic properties of conservative systems II"*, Amer. J. Math. 92, (1970), 897-906.

[35] Stenflo, Orjan *"Uniqueness of invariant measures for place-dependent random iterations of functions."*, Fractals in multimedia (Minneapolis, MN, 2001), 13–32, IMA Vol. Math. Appl., 132, Springer, New York, 2002.

[36] Stenflo, Orjan *"A note on a theorem of Karlin."*, Statist. Probab. Lett. 54 (2001), no. 2, 183–187.

[37] L. Schwartz, *"Radon measures in arbitrary topological spaces and cylindrical measures"*, Oxford University Press, Londres, 1973.

[38] M. Urbanski, *"Hausdorff measures versus equilibrium states of conformal infinite iterated function systems."*, International Conference on Dimension and Dynamics (Miskolc, 1998). Period. Math. Hungar. 37 (1998), no. 1-3, 153–205.