

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE
LINEAR 3D COM AVALIAÇÃO DIRETA DAS INTEGRAIS SINGULARES**

por

Cristiano João Brizzi Ubessi

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Abril de 2014.

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE LINEAR 3D COM AVALIAÇÃO DIRETA DAS INTEGRAIS SINGULARES

por

Cristiano João Brizzi Ubessi

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Ney Augusto Dumont (Departamento de Engenharia Civil - PUC/Rio de Janeiro)

Prof. Dr. Otávio Augusto Alves da Silveira (Departamento de Engenharia Civil - UFSC/Florianópolis)

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca (Departamento de Engenharia Mecânica - UFRGS/Porto Alegre)

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 17 de Abril de 2014.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao Professor Rogério pela sua disponibilidade e dedicação na orientação deste trabalho, e por todos os ensinamentos que foram me passados, sem os quais não seria possível a realização deste trabalho.

Agradeço também aos membros da banca de avaliação, Professores Jun, Ney e Otávio, pelo tempo dedicado na avaliação deste trabalho e pela suas contribuições nas correções e sugestões.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante o período do mestrado.

Agradeço aos meus pais por possibilitarem que essa jornada fosse realizada.

Finalmente, agradeço a minha esposa Caroline por seu amor incondicional e companheirismo. Por estar do meu lado em todos os momentos, me dando apoio, carinho e motivação. Por ser esta pessoa extremamente altruísta e por possibilitar que eu pudesse me dedicar totalmente a este trabalho. Agradeço também à vida, por ter me dado a pessoa mais incrível deste mundo.

RESUMO

Este trabalho apresenta a formulação e implementação numérica do método dos elementos de contorno (MEC) para elasticidade linear tri-dimensional, com avaliação direta das integrais fracamente e fortemente singulares. A implementação segue a formulação tradicional do MEC direto, e a discretização do contorno das variáveis do problema é realizada com elementos descontínuos, permitindo o uso de malhas desconectadas ao longo das superfícies. O cálculo das integrais singulares é realizado através do uso de expansões assintóticas calculadas em torno de um ponto singular genérico. As expressões analíticas destas expansões são apresentadas no trabalho. Estas expansões serão subtraídas do núcleo original regularizando-o e a parte singular é integrada analiticamente, restando apenas uma integral regular, tornando ambas as integrais possíveis de serem calculadas com quadraturas de Gauss. É concluído que o presente método requer menos pontos de integração para o mesmo nível de erro quando comparado com outras técnicas. Alguns casos de elasticidade são resolvidos para ilustrar a eficiência e precisão do método.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno, Integrais Singulares, Regularização, Elasticidade Tridimensional.

ABSTRACT

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR 3D LINEAR ELASTICITY WITH DIRECT EVALUATION OF SINGULAR INTEGRALS

This work presents the formulation and implementation of the boundary element method (BEM) to three dimensional linear elastostatics, with the direct evaluation of the strongly singular integral equations. The implementation follows the traditional direct BEM formulation, and the discretization of the boundary is carried out with discontinuous elements, enabling the use of disconnected meshes along the surfaces. The computation of the singular integral equations is accomplished by using the asymptotic expansions derived around a generic singular point. The analytical expressions for these expansions are presented in this work. The expansions are subtracted from the kernel to regularize it. This subtracted part is then added by computing a regular line integral along the boundary of the element. Both the integrals can be calculated with Gauss-type quadratures. It's observed that the present method needs less integration points for the same level of error when compared with other techniques. Several elasticity benchmarks are solved to demonstrate the efficiency and the accuracy of the present method.

Keywords: Boundary Element Method, Regularization, Singular Integrals, Tridimensional Elasticity.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão Bibliográfica	2
1.2	Objetivos	6
1.3	Organização do Trabalho	6
2	EQUAÇÕES INTEGRAIS APLICADAS À ELASTICIDADE LINEAR TRIDIMENSIONAL	8
2.1	Elasticidade Linear	8
2.2	Formulação Integral de Contorno	10
2.2.1	Soluções fundamentais	12
3	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	16
3.1	Interpolação da geometria	16
3.2	Discretização das variáveis físicas e carregamentos	17
3.2.1	Transformação de coordenadas	20
3.3	Discretização das equações integrais	21
3.4	Integração numérica das matrizes G e H	23
3.4.1	Imposição de Movimento de Corpo Rígido (IMCR)	23
3.4.2	Integração numérica de núcleos fracamente singulares	24
4	O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA DE NÚCLEOS SINGULARES	26
4.1	Revisão do método	26
4.2	Expansões assintóticas para os tensores da elasticidade linear 3D	29
4.2.1	Aplicação às equações da elasticidade linear	33
4.3	Implementação numérica do método de integração direta	36
4.4	Verificação numérica	38
5	RESULTADOS	44
5.1	Viga em balanço	44

5.2 Placa com furo central	46
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

LISTA DE SÍMBOLOS

•*	Solução particular; Solução fundamental
×	Operador produto vetorial
a, b, c, d	Parâmetros da quadratura de Telles
A	Matriz de coeficientes agrupados na solução do problema
$A_i(\theta)$	Componente do vetor A , função trigonométrica de θ $A_i(\theta) = \left(\frac{\delta x_i}{\delta \xi_1} \Big _{\varepsilon=\eta} \cos \theta + \frac{\delta x_i}{\delta \xi_2} \Big _{\varepsilon=\eta} \operatorname{sen} \theta \right)$
$A(\theta)$	Módulo do vetor A_i (função trigonométrica de θ)
b	Forças de corpo $[N/m^3]$
c	Denominador da equação (3.5) das funções de interpolação descontínuas
\mathbf{c}^i	Matriz dos termos livres do nó 'i'
d	Distância do centro do elemento até os nós físicos
λ	Primeira constante de lamé, $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.
μ	Segunda constante de lamé; $\mu = G$
E	Módulo de elasticidade $[N/m^2]$
F	Vetor de condições de contorno arranjadas para solução do problema
$\mathbf{F}_{-1}, \mathbf{F}_{-2}$	Expansões assintóticas de um tensor em torno do ponto singular
G	Matriz de coeficientes de deslocamentos
G	Módulo de cisalhamento transversal, $G = \mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$.
G_i	Direção i do vetor de Galerkin
H	Matriz resultante da integral de T sobre os elementos de contorno
i	Índice que varia de 1 até 3
I	Matriz Identidade
j	Índice que varia de 1 até n nos
J	Jacobiano de uma transformação
\mathbf{J}_Ω	Jacobiano de uma transformação de volume
k	índice que varia de 1 até 3; índice que varia de 1 até K
K	número de pontos de integração

m	Índice que varia de 1 até n nos
M	Número de células de domínio
n	Índice que varia de 1 até N , Índice que varia de 1 até n nos
\mathbf{n}	Vetor unitário normal à superfície de um elemento
n_i	Componente na direção i do vetor \mathbf{n}
N	número real qualquer
NE	Número de elementos
$nelem$	Número de elementos
$nnos$	Número de nós
p_i	Componente de tração no contorno do sólido
\bar{p}_i	Valores prescritos de p_i (condição de contorno)
\mathbf{P}	Tensor representativo do campo de trações da solução fundamental
\mathbf{r}	Raio, distância do ponto fonte ao ponto campo
R	Representação da região Γ no espaço normalizado
$recuo$	Percentual de retração dos nós físicos
t	Espessura da placa ensaiada
\mathbf{T}	Tensor representativo do campo de trações da solução fundamental
u_i	Componente de deslocamento no contorno do sólido
\bar{u}_i	Valores prescritos de u_i (condição de contorno)
\mathbf{U}	Tensor representativo do campo de deslocamentos da solução fundamental
x, y, z	Sistema de coordenadas
\mathbf{x}	Vetor posição
α	raio da vizinhança distorcida do ponto fonte
δ_{ij}	Símbolo de Kroenecker
Δ_l	Função delta de dirac na direção l
e_ϵ	Região de exclusão no domínio geral
ξ	Sistema de coordenadas locais do elemento; Coordenadas do ponto campo no sistema local
η	Coordenadas do ponto fonte no sistema local
γ	Coordenadas resultantes da transformação de Telles
Γ	Contorno de um sólido

Γ_s	Contorno de um elemento
ν_{ij}	Coefficiente de Poisson
ξ	Sistema de coordenadas do elemento
ρ	Raio do sistema de coordenadas locais polares do elemento
$\bar{\rho}$	Raio das arestas do elemento, função do ângulo
σ	Tensor tensão de Cauchy
σ_{ij}	Componente do tensor de Cauchy no plano i na direção j
θ	Ângulo do sistema de coordenadas locais polares do elemento
Ω	Domínio ocupado por um corpo $[m^3]$
Φ	Função de interpolação
Φ	Matriz funções de interpolação dos nós do elemento
φ	Função de interpolação
ζ	Sistema de coordenadas originais na transformação de Telles

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

EPT	Estado Plano de Tensões
IMCR	Imposição de Movimento de Corpo Rígido
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
PART	Projeção Angular e Radial Transformadas
TC	Transformação Cúbica

LISTA DE FIGURAS

2.1	Definição das tensões e deslocamentos, em um cubo unitário	8
2.2	Representação do limite avaliado pela equação (2.17).	12
2.3	Representação da força considerada na solução fundamental.	15
3.1	Elemento retangular em: (a) domínio geral e (b) domínio normalizado.	17
3.2	Elementos descontínuos (a) Linear e (b) Quadrático.	18
4.1	Representação das variáveis consideradas, do elemento e da região de exclusão, em coordenadas polares.	27
4.2	Representação da divisão do elemento em triângulos.	37
4.3	Elemento a ser integrado.	39
4.4	Exemplo do tensor contendo p^* , no ponto 1 do elemento da figura 4.3 (a) tensor original, (b) expansão assintótica e (c) tensor regularizado.	40
4.5	Corte ao longo de $\xi_2 = 0,7$ no núcleo regularizado, e sobreposição da solução fundamental e da expansão assintótica desenvolvida no presente trabalho.	41
4.6	Núcleo contendo \mathbf{u}^* , do ponto 1 ($\eta = (-0.7, -0.7)$) do elemento da figura 4.3 (a) núcleo original, (b) Núcleo avaliado em coordenadas polares.	41
5.1	Viga em balanço.	45
5.2	Tensão σ_{xx} ao longo do engaste da viga.	45
5.3	Deslocamento máximo da viga para as malhas testadas e erro em relação à solução obtida com MEF.	46
5.4	Tensão σ_{xx} máxima da viga e erro em relação à solução do MEF para as malhas estudadas.	46
5.5	Placa sob carga de tração uniaxial com furo central.	47
5.6	Discretização de 1/4 da placa com elementos lineares.	47
5.7	Deslocamentos ao longo da aresta do furo, na placa com espessura $t = 0,4m$, e erro em relação à solução analítica [Szabó e Babuska, 1991].	48
5.8	Tensões na aresta $(0, y, 0)$, na placa com espessura $t = 0,4m$, e erro em relação à solução com o MEF.	48

5.9	Tensão máxima normalizada e erro em relação à solução analítica, em função da espessura da placa.	50
-----	--	----

LISTA DE TABELAS

3.1	Coordenadas locais do elemento linear (nós 1-4) e quadrático (nós 1-8).	18
4.1	Equações para o cálculo dos intervalos de integração e das coordenadas locais para cada região triangular da integração polar.	38
4.2	Resultados para a integração do termo H_{12} , do nó 1 do elemento da figura 4.3	42
4.3	Resultados para a integração do termo G_{12} , do nó 1 do elemento da figura 4.3	43
4.4	Pontos de integração para obtenção de erro menor que $1 \cdot 10^{-6}$ na integração da submatriz G_{ii}	43
5.1	Valores máximos de tensão e erro relativo à solução analítica, em $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$, na placa com espessura $t = 0,4\text{m}$, para os diversos casos do MEC, e MEF 3D.	49

1. INTRODUÇÃO

Desde a década de 60 o método dos elementos de contorno (MEC) teve um crescimento expressivo, mas apesar dos esforços empreendidos nas últimas décadas, o MEC continua sendo considerado um método de nicho, tendo sua utilização limitada às pesquisas acadêmicas e às indústrias de alto desenvolvimento científico.

As características que tornam o MEC atraente à aplicação em problemas de engenharia vêm da sua fundamentação matemática: As equações integrais que resultam no método são de contorno, reduzindo uma dimensão na discretização do problema, e a seu caráter misto, que considera os deslocamentos e as trações no contorno em sua formulação.

Em contrapartida deve ser citado que este método gera matrizes cheias e não simétricas, que podem ser mal condicionadas devido à união de grandezas diferentes, com um alto número de operações envolvidas para solução do sistema de equações, proporcionais a $O(n^2)$. À partir da aplicação do método das expansões em multipolos em Peirce e Napier, 1995, o número de graus de liberdade resolvidos pelo MEC superou o método dos elementos finitos (MEF), com a vantagem destes graus de liberdade estarem no contorno da malha, e não no domínio, permitindo resolução de problemas de grandes escalas com menor custo computacional em relação ao MEC convencional.

Outro problema que surge no MEC é o custo computacional na integração das suas matrizes. Apesar da possibilidade do uso de métodos de integração analítica ou semianalítica para o cálculo das matrizes do método, esta prática geralmente limita o tipo de elemento que pode ser usado para discretizar o contorno, obrigando o uso de elementos constantes, que precisam uma discretização com maior número de elementos para obter uma representação das variáveis físicas do problema com a mesma qualidade que elementos lineares ou de maior ordem.

A integração numérica possibilita o uso elementos lineares ou de maior ordem, porém não se tem conhecimento de um método que não exija uma quantidade muito elevada de pontos de integração para obter uma boa precisão no cálculo das matrizes, principalmente para o caso 3D, e as recorrentes propostas de novos métodos para a integração numérica no MEC apontam que esta dificuldade ainda não foi completamente superada.

1.1 Revisão Bibliográfica

O surgimento do MEC como método computacional pode ser atribuído aos trabalhos de Jawson, 1963, e Symm, 1963, realizados para problemas potenciais 2D e, a partir destes trabalhos, é que as primeiras aplicações do MEC em elasticidade foram realizadas por Rizzo, 1967, em 2D e Cruse, 1969, com o primeiro trabalho relevante com o MEC direto em elasticidade 3D, onde o Autor utilizou elementos triangulares de um nó, para representar as variáveis físicas, de forma que as mesmas eram constantes em todo o elemento. Os núcleos não singulares eram integrados numericamente e os núcleos singulares eram integrados analiticamente. Os problemas testados neste trabalho foram cubos com cargas simples aplicadas, e um caso de concentração de tensões teve os resultados próximos aos analíticos.

Na década de 70, Cruse, 1973, comparou o MEC com o MEF em alguns problemas simples de elasticidade, analisando as diferenças nos resultados, memória e tempo computacional, demonstrou a capacidade do MEC de resolver problemas de elasticidade 3D, e o potencial superior em problemas de concentração de tensões. Dando continuidade ao seu primeiro trabalho, Cruse, 1974, implementou elementos triangulares lineares, mas a integração ainda era feita analiticamente, através da redução da integral bi-dimensional a uma integral de linha. Os termos livres decorrentes da descontinuidade das tensões nos cantos e elementos não coplanares eram calculados por integração analítica.

Com o intuito de integrar numericamente os núcleos fortemente singulares, Kutt, 1975, desenvolveu um método numérico para calcular integrais de parte finita através de uma quadratura especial, resultando em boa precisão e menor esforço computacional que outras quadraturas desenvolvidas até então. Entretanto esta implementação é útil apenas para o caso 2D. Posteriormente, Paget, 1981a, analisou os tipos de singularidades envolvidas nas integrais de parte finita de Hadamard, e sugeriu uma quadratura adaptada para avaliação destes tipos de integrais em Paget, 1981b.

No mesmo sentido das integrais de Hadamard, fugindo do uso da quadratura de Gauss, Linz, 1985, investigou métodos numéricos para cálculo aproximado destas integrais com dois polos de singularidade. Aliabadi et al., 1985, tratou os problemas de integração da elasticidade 3D com expansões de Taylor no sistema de coordenadas local do elemento, integrando a parte singular em forma fechada e a integral cuja singularidade fora extraída era integrada por quadratura Gaussiana repetidamente. Aliabadi e Hall, 1987b, investigaram

vários tipos de quadraturas para avaliar as integrais singulares do caso da elasticidade linear 3D. Os autores citam que nenhum dos métodos testados obteve o nível de exatidão obtido pelos métodos de expansões publicados em Aliabadi e Hall, 1987a.

Telles, 1987, desenvolveu uma transformação autoadaptativa, à medida que o ponto de colocação se afasta do elemento, para avaliar integrais fracamente singulares tanto no elemento quanto fora do elemento. Posteriores melhorias foram sugeridas em Telles e Oliveira, 1994, para que a transformação se adaptasse a singularidades mais fortes.

Hayami e Brebbia, 1987, propuseram uma transformação das coordenadas de um elemento curvo, mapeando-o em um elemento plano e transformando o sistema cartesiano para polar centrado no ponto mais próximo da singularidade com uma transformação no sentido radial para elimina-la. Melhorias neste método apareceram em Hayami, 1992, para avaliação de integrais quase singulares, e posteriormente em Hayami e Matsumoto, 1994a. Especialmente em Hayami e Matsumoto, 1994b, a convergência de várias quadraturas foi exaustivamente testada através da teoria das funções complexas, variando a distância do ponto fonte ao elemento, entre outros parâmetros, e é mostrado que algumas quadraturas necessitam de até 100 x 100 pontos de integração para obter erros menores que 10^{-6} . Através do uso de transformações em coordenadas polares Yong-hui e Xin-sen, 1988, sugeriram uma nova forma de remover as singularidades do MEC explicitamente.

À partir do trabalho sobre integrais singulares multidimensionais de Mikhlin, 1965, Guiggiani e Casalini, 1987, sugeriram uma forma para o cálculo direto destas integrais, eliminando a singularidade através da subtração de expansões assintóticas e integração analítica da parte puramente singular, sem nenhuma aproximação até o momento da aplicação da integração numérica. Testes foram realizados com elasticidade 2D. Posteriormente outros trabalhos foram publicados neste sentido, em Guiggiani e Gigante, 1990, onde a expansão assintótica para um caso potencial 3D genérico é demonstrada. Pereira e Parreira, 1994, aplicaram este método à elasticidade 3D com elementos contínuos, e a expansão assintótica para a matriz \mathbf{H} foi publicada. Os testes restringiram-se a problemas envolvendo meios infinitos ou semi-infinitos.

Rudolphi, 1991, utilizou soluções simplificadas em um domínio arbitrário para regularizar as equações integrais hipersingulares do MEC. Neste trabalho foi observado que a formulação hipersingular resulta em sistemas de equações mais bem condicionadas.

Uma forma unificada de integração singular foi sugerida por Rosen e Cormack, 1993, onde a integral n-dimensional é mapeada em uma integral no contorno do domínio de integração original, através de uma integração unidimensional analítica independente do tipo de problema. De acordo com os autores a integral de superfície singular é vista como um limite de uma 'continuação' de uma integral não singular. Em Rosen e Cormack, 1994, uma formulação para elementos curvos foi proposta, e resultados na integração de núcleos fracamente singulares são apresentados. Em Rosen e Cormack, 1995 o tratamento de cantos foi revisto com a técnica desenvolvida.

Kim-Chuan e Mukherjee, 1994, propuseram uma nova definição das integrais hiper-singulares de parte finita de Hadamard, sem envolver um processo de limite, completamente geral e válida para múltiplas dimensões, porém reduzindo as integrais a uma integral de valor principal de Cauchy, uma integral fracamente singular.

Dumont, 1994, desenvolveu um método para o cálculo de integrais quase singulares, ou com polo complexo, conforme descrito pelo autor. Baseados na técnica de Dumont, 1994, Granados e Gallego, 2001, desenvolveram uma forma de regularizar os integrandos quase singulares através de uma técnica com variáveis complexas.

Klees, 1996, utilizou métodos semianalíticos e puramente numéricos para integrais fracamente singulares em superfícies curvas suaves, em problemas geodésicos. Os autores concluíram que para este caso os métodos semianalíticos foram superiores aos puramente numéricos.

Zhu et al., 1996, desenvolveram técnicas multidomínio para o cálculo de integrais fracamente singulares e hipersingulares, aplicando a problemas de propagação de ondas em materiais com fraturas.

Hui e Mukherjee, 1997, sugeriram o tratamento das integrais singulares do MEC 2D, através de análises com variáveis complexas.

Liu e Rudolphi, 1999, desenvolveram identidades das quais foi obtida uma forma não singular das equações integrais de contorno convencionais, resultando na remoção de ambas as integrais fracamente singulares e fortemente singulares, através de uma subtração de dois termos.

No MEC para elasticidade 2D, Johnston, 1999, aplicou uma transformação sigmoïdal para integrais fracamente singulares, porém a mesma mostrou resultados variados da

mesma ordem de erro que a transformação de Telles. Posteriormente Johnston e Elliott, 2001, propuseram uma melhoria na transformação original de Telles, para que a quadratura de Gauss padrão fosse utilizada para o cálculo de integrais fracamente singulares. Johnston e Johnston, 2004, adicionaram o método de subtração de singularidade à transformação não linear de coordenadas, obtendo resultados superiores a todas as transformações realizadas até então. Salvadori, 2002, realizou uma implementação de MEC 2D com integração analítica de todos os núcleos, utilizando apenas elementos retos, mas com funções de interpolação de grau qualquer. Ainda para o caso 2D, Gao, 2006, desenvolveu um método para avaliação de integrais fracamente, fortemente, e hipersingulares através da remoção analítica das singularidades, expressando-as como polinômios da distância r do ponto fonte ao ponto campo. Singh e Tanaka, 2007, apresentaram soluções analíticas necessárias para implementação do método da subtração de singularidade.

Carley, 2009, desenvolveu um método para criar quadraturas para funções fracamente singulares sem ter que avaliar explicitamente a singularidade da função, ou separá-la em seus componentes.

Scuderi, 2009, apresentou uma nova estratégia de suavização para calcular integrais singulares no MEC 3D sobre triângulos planos que estão muito próximos um do outro, através de transformações de coordenadas não lineares. Gao, 2010, apresenta um método numérico robusto para avaliar integrais singulares no MEC 2D e 3D, através do uso de expansões de séries de potências e do método de integração radial previamente desenvolvido em Gao, 2002, transformando a integral de superfície em uma integral de linha sobre o contorno do elemento.

Para o cálculo de integrais fracamente singulares, Qin et al., 2011, desenvolveram transformações de coordenadas cartesianas em polares, aliada a uma subdivisão avançada dos elementos com razão de aspecto elevada, elevando a eficiência do cálculo. Uma expansão de Taylor de primeira ordem é empregada no cálculo da transformação.

Li e Ram-Mohan, 2012, aplicaram o método da continuação para isolar a parte singular de algumas integrais, de forma a computar a parte finita das integrais de uma maneira consistente. Os autores concluem que as integrais associadas a problemas potenciais 3D podem ser reduzidas a integrais unidimensionais finitas, que podem ser avaliadas diretamente.

No campo da acústica, afim de beneficiar-se da maior precisão no uso de elementos

curvos de alta ordem, em um sistema de integração realizado em coordenadas polares, Rong et al., 2013, propuseram a adição de mais duas transformações de variáveis: uma conforme para superar a dificuldade de integração em coordenadas polares à medida que a razão de aspecto do elemento é alterada, e uma sigmoidal para aliviar a singularidade à medida que o ponto se aproxima do elemento. Utilizando ainda o método de Guiggiani para avaliação direta das integrais fortemente singulares, o autor chega a uma metodologia robusta para avaliar todo tipo de integral presente no MEC. O método mostrou-se eficaz, apesar de sua aplicação ter se restringido a problemas da acústica.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é a implementação do método de integração direta de núcleos singulares de Guiggiani, 1998, no MEC para elasticidade linear 3D. Através deste método será possível avaliar as integrais singulares do MEC sem rotinas de imposição de movimento de corpo rígido (IMCR), atingindo-se assim uma precisão esperada no cálculo dos valores das subdiagonais das matrizes do MEC, independentemente da discretização do problema. Para alcançar o objetivo geral deste trabalho, são necessários os seguintes objetivos específicos:

- Implementação computacional do MEC 3D para elasticidade de acordo com Brebbia e Dominguez, 1989, com uso de elementos descontínuos.
- Desenvolver as expansões assintóticas dos núcleos que resultam nas matrizes da elasticidade linear 3D.
- Implementação do método de Guiggiani para a matriz do MEC \mathbf{H} , e integração em coordenadas polares da matriz \mathbf{G} , gerando assim um código generalizado e de fácil aplicação e extensão a outros problemas físicos de engenharia.
- Resolver alguns *benchmarks* para verificar a taxa de convergência do método de Guiggiani para problemas da elasticidade.

1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos. No capítulo 2, é dada uma introdução dos principais conceitos da teoria elasticidade e a formulação integral de contorno na

qual o MEC é baseado é apresentada. No capítulo 3 é apresentada a implementação numérica do MEC, onde é descrita a forma como a geometria e as variáveis físicas do problema são discretizadas numericamente, a passagem da formulação integral para uma formulação discretizada em elementos, e os métodos tradicionais de integração dos termos singulares das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} são descritos. No capítulo 4, o método de avaliação direta de integrais singulares de Guiggiani é apresentado, as expansões assintóticas dos núcleos singulares da elasticidade são desenvolvidas e a implementação do método é discutida, resultados preliminares da que demonstram a regularização dos núcleos, e a convergência da integração numérica é demonstrada. No capítulo 5 alguns problemas de engenharia são resolvidos com ambas as implementações apresentadas no trabalho, verificando a convergência do método. No capítulo 6 são discutidas as conclusões obtidas no decorrer do trabalho, e sugestões para continuidade do trabalho são propostas.

2. EQUAÇÕES INTEGRAIS APLICADAS À ELASTICIDADE LINEAR TRIDIMENSIONAL

Este capítulo apresenta o desenvolvimento das equações integrais que dão origem ao MEC direto, conforme apresentado por Brebbia e Dominguez, 1989. Afim de melhor fundamentar a apresentação MEC, sua aplicação na elasticidade linear tridimensional, e as soluções fundamentais, este capítulo traz uma seção com uma revisão de alguns conceitos da teoria da elasticidade.

2.1 Elasticidade Linear

Um dos intuitos do estudo da elasticidade na engenharia é a análise das tensões que atuam sobre um determinado objeto. A equação de equilíbrio que rege a teoria da elasticidade surge da análise das tensões atuantes em um ponto no interior de um corpo contínuo. O estado de tensões neste ponto pode ser representado pelas tensões atuantes em um cubo infinitesimal, conforme ilustrado na figura 2.1.

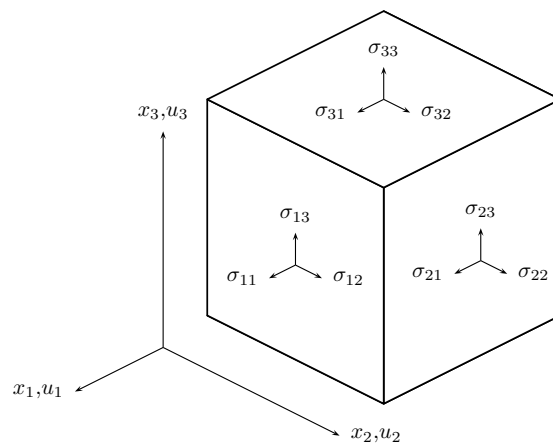


Figura 2.1 – Definição das tensões e deslocamentos, em um cubo unitário

As tensões mostradas na figura 2.1 são equilibradas por valores de igual magnitude e direção contrária, na face oposta deste cubo. Desta forma tem-se o seguinte tensor de

segunda ordem:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

que, para respeitar o equilíbrio dos momentos em torno de todos os eixos, deve ser simétrico, resultando em:

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23}. \quad (2.2)$$

Para respeitar o equilíbrio das forças nas 3 direções, x_1 , x_2 e x_3 , a seguinte relação deve ser válida em todo domínio Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde b_i são as forças atuantes no domínio (ex. gravitacional, magnética). A equação (2.3), é a equação geral de equilíbrio da elasticidade. Em notação indicial:

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.4)$$

As deformações infinitesimais ou lineares podem ser calculadas em função dos deslocamentos de acordo com a seguinte equação (em notação indicial):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.5)$$

A relação constitutiva para um material isotrópico linear, é dada pela seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.6)$$

O modulo de elasticidade longitudinal, E , e o coeficiente de Poisson, ν , relacionam-se com as constantes de Lamé, λ e μ , através das equações:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.7)$$

2.2 Formulação Integral de Contorno

A formulação do MEC direto para elasticidade foi apresentada primeiramente por Rizzo, 1967. O procedimento de obtenção desta formulação será ilustrado conforme Brebbia e Dominguez, 1989, através da aplicação do método de resíduos ponderados. Multiplicando a equação (2.4) por funções peso do tipo u_k^* , e ortogonalizando este produto, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0. \quad (2.8)$$

Integrando por partes o primeiro termo, e agrupando as integrais de contorno para o lado direito da igualdade obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj} u_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma. \quad (2.9)$$

Integrando por partes novamente o primeiro termo da equação (2.9) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma, \quad (2.10)$$

que corresponde ao teorema recíproco de Betti. A equação (2.8) deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u_k &= \bar{u}_k & \text{em } \Gamma_1, \\ p_k &= \bar{p}_k & \text{em } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dividindo o contorno Γ em Γ_1 e Γ_2 para aplicar as condições de contorno nessas duas partes tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \quad (2.12)$$

onde as barras representam os valores conhecidos de deslocamentos e trações no contorno. Integrando por partes duas vezes o primeiro termo à esquerda da equação (2.12) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é um teorema generalizado que pode ser utilizado para obter as equações integrais no contorno. Aplicando como funções peso as soluções fundamentais obtidas para uma carga pontual $b_l = \Delta^i$ ao longo da direção do vetor unitário e_l , à primeira integral de domínio da equação (2.12), esta simplifica-se em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lj,j}^* u_l d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i u_l e_l d\Omega = -u_l^i e_l. \quad (2.14)$$

A equação (2.12) pode ser escrita para representar as três componentes de deslocamento em i . Tomando-se as três direções independentemente resulta em:

$$u_l^i + \int_{\Gamma_1} p_{lk}^* \bar{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma_1} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_{lk}^* \bar{p}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega, \quad (2.15)$$

que pode ser escrita mais sucintamente sem separar as incógnitas e as condições de contorno:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega. \quad (2.16)$$

A equação (2.16), conhecida como *identidade de Somigliana*, é válida para qualquer força aplicada a um ponto 'i' do domínio Ω . Através desta identidade é possível calcular analiticamente o deslocamento em quaisquer pontos internos em termos dos valores no contorno, das forças de domínio e das soluções fundamentais. Quando (2.16) é avaliada no contorno, surgem singularidades que precisam ser isoladas, para um hemisfério de raio ε , de superfície Γ_ε , em torno da singularidade (figura 2.2), tomando-se então um limite em todas as integrais de (2.16), conforme o seguinte exemplo [Brebbia e Dominguez, 1989]:

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\}, \quad (2.17)$$

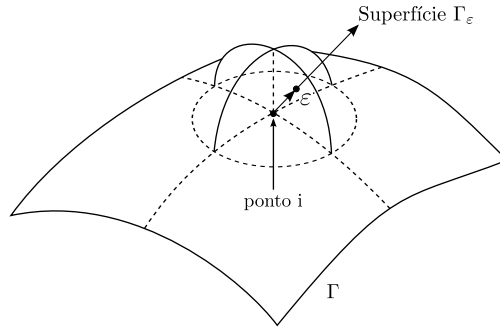


Figura 2.2 – Representação do limite avaliado pela equação (2.17).

pode-se provar que, em pontos onde o contorno é suave, (2.17) simplifica-se em:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{lk}^* d\Gamma \right\} = -\frac{1}{2} \delta_{lk}, \quad (2.18)$$

e todas as outras integrais tendem a zero. O lado esquerdo da equação (2.17) resulta em:

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} \delta_{lk} u_k^i = \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_l^i. \quad (2.19)$$

Chamando o termo livre de c_{lk} a equação (2.16) pode ser escrita como:

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega. \quad (2.20)$$

Em pontos onde o contorno não é suave (arestas e vértices) o termo livre c_{lk} torna-se dependente de formulações que não são objeto de estudo neste trabalho.

2.2.1 Soluções fundamentais

Para a obtenção das soluções fundamentais de deslocamentos u_{lk}^* e trações p_{lk}^* , é preciso obter as equações de equilíbrio em função dos deslocamentos. Substituindo na equação (2.4) a equação (2.6), que relaciona tensões e deformações, e a equação (2.5), que relaciona as deformações e deslocamentos, é obtida a equação de equilíbrio conhecida como equação de Navier [Brebbia e Dominguez, 1989]:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu} \right) u_{j,jk} + u_{k,jj} + \frac{1}{\mu} b_k = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.21)$$

A solução fundamental de Kelvin então é obtida a partir da equação (2.21), aplicando-se uma carga unitária concentrada em um ponto i na direção na direção do vetor unitário e_l , tem-se então que:

$$b_l = \Delta^i e_l, \quad (2.22)$$

e pode ser obtida representando os deslocamentos em termos do vetor de Galerkin, G , tal que:

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm}. \quad (2.23)$$

Substituem-se então as equações (2.23) e (2.22) na equação (2.21) que resulta em

$$G_{l,mmjj} - \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0, \quad (2.24)$$

ou,

$$\nabla^2(\nabla^2 G_l) - \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0, \quad (2.25)$$

que pode ser escrito também como:

$$\nabla^2(F_l) - \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0, \quad (2.26)$$

onde:

$$F_l = \nabla^2 G_l. \quad (2.27)$$

A solução da equação (2.26) para problemas tri-dimensionais é dada por:

$$F_l = \frac{1}{4\pi r \mu} e_l. \quad (2.28)$$

Onde r é a distância entre o ponto i , onde está sendo aplicado o Delta, e qualquer outro ponto. Substituindo (2.28) em (2.26) resulta em:

$$\nabla^2 G_l = \frac{1}{4\pi \mu r} e_l. \quad (2.29)$$

A solução para a equação (2.29) é dada por:

$$G_l = G \cdot e_l, \quad (2.30)$$

onde:

$$G = \frac{1}{8\pi\mu} r. \quad (2.31)$$

Tomando cada carga como independente pode-se escrever que G_{lk} é o componente k do vetor de Galerkin em qualquer ponto quando uma carga unitária é aplicada em i na direção l :

$$G_{lk} = G\delta_{lk}. \quad (2.32)$$

De forma análoga, u_{lk}^* representa o deslocamento em qualquer ponto na direção k quando uma carga é aplicada em i na direção l :

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l. \quad (2.33)$$

Em acordo com a equação (2.23) pode ser escrito:

$$u_{lk}^* = G_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{lm,km}. \quad (2.34)$$

Substituindo (2.32) e (2.33) em (2.34) obtém-se finalmente:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} ((3-4\nu)\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}), \quad (2.35)$$

que é a solução fundamental para o deslocamento na direção k , quando uma carga unitária é aplicada na direção l (figura 2.3).

As trações na superfície Γ podem ser escritas como:

$$p_k^* = p_{lk}^* e_l, \quad (2.36)$$

levando à solução fundamental para a tração na direção k , para uma carga unitária aplicada na direção l , no ponto i :

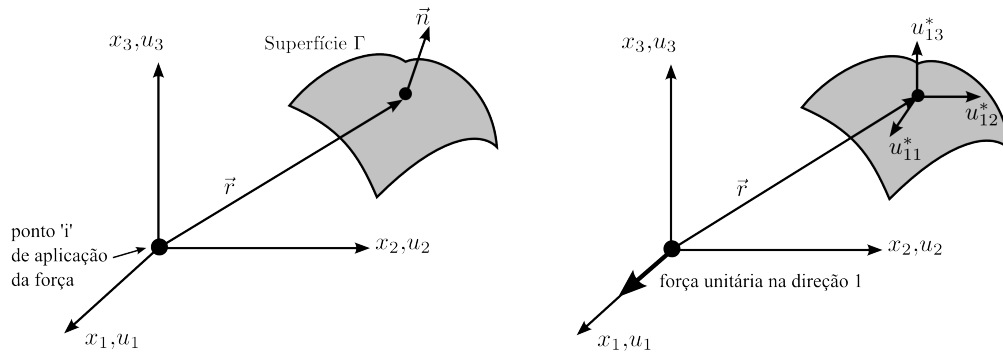


Figura 2.3 – Representação da força considerada na solução fundamental.

$$p_{lk}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,l}r_{,k}) + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - r_{,l}n_k) \right), \quad (2.37)$$

onde n_l é a componente na direção l do vetor normal à superfície Γ no ponto j , $\partial r/\partial n$ é a derivada do vetor r , em relação à normal n .

3. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo será descrita a passagem da formulação integral para uma abordagem discreta (divisão em elementos), que resulta em um sistema de equações algébricas. A interpolação da geometria é feita com elementos retangulares contínuos. Já as variáveis físicas são interpoladas por meio de elementos descontínuos, o que simplifica a montagem das matrizes do problema e permite malhas não-conformes, devido à não necessidade de coincidência dos nós ao longo da malha [Rüberg e Schanz, 2009]. O equacionamento do MEC Direto é descrito de acordo com Brebbia e Dominguez, 1989. Finalmente são abordados os métodos de integração mais comumente utilizados para a construção das matrizes, para uma futura comparação com o Método de Integração Direta que será implementado neste trabalho.

3.1 Interpolação da geometria

A interpolação do vetor de coordenadas cartesianas \mathbf{x} de um ponto p com coordenadas locais (ξ_1, ξ_2) é calculada através da seguinte equação:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{nnos} \phi_n(\xi_1, \xi_2) x_n^j, \quad (3.1)$$

onde $nnos$ é o número de nós que o elemento possui, ϕ_n é o valor da n -ésima função de interpolação do elemento em (ξ_1, ξ_2) , e x_n^j são as coordenadas do n -ésimo nó do elemento j . Este somatório é resumido em forma matricial conforme o produto:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j, \quad (3.2)$$

onde ϕ é o vetor com as $nnos$ funções de interpolação em (ξ_1, ξ_2) , e \mathbf{x}^j é uma matriz de dimensões $3 \times nnos$, contendo as coordenadas \mathbf{x} de cada nós geométricos do elemento j .

Neste trabalho optou-se pelo uso de elementos retangulares com um sistema de coordenadas normalizado (ξ_1, ξ_2) que varia de $[-1,1]$, conforme a figura 3.1. As funções de interpolação do elemento linear podem ser descritas pelas seguinte equação:

$$\phi_n = \frac{1}{2}(1 + \xi_1^n \xi_1) \frac{1}{2}(1 + \xi_2^n \xi_2). \quad (3.3)$$

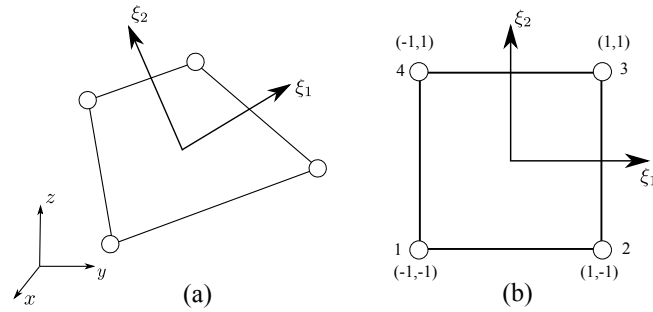


Figura 3.1 – Elemento retangular em: (a) domínio geral e (b) domínio normalizado.

Adicionando nós intermediários nas arestas do elemento, entre os nós existentes, obtém-se o elemento quadrático *serendipity*, cujas coordenadas dos nós são descritas na Tabela 3.1. As funções de interpolação deste elemento são:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(-\xi_1 - \xi_2 - 1), & \phi_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2), \\ \phi_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 - 1), & \phi_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2), \\ \phi_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 1), & \phi_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2), \\ \phi_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(-\xi_1 + \xi_2 - 1), & \phi_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

As coordenadas locais do elemento quadrático, e algumas destas também compartilhadas com o elemento linear, são trazidas na Tabela 3.1.

3.2 Discretização das variáveis físicas e carregamentos

Neste trabalho serão empregados elementos descontínuos para discretizar as variáveis físicas, devido à sua flexibilidade computacional. Este tipo de elemento foi primeiramente sugerido para uso no MEC por Patterson e Sheikh, 1981. A posição dos nós cujas variáveis físicas serão calculadas, os nós físicos, estarão recuados de uma certa distância dos nós geométricos dos elementos conforme a figura 3.2.

Tabela 3.1 – Coordenadas locais do elemento linear (nós 1-4) e quadrático (nós 1-8).

n	ξ_1	ξ_2
1	-1.0	-1.0
2	1.0	-1.0
3	1.0	1.0
4	-1.0	1.0
5	0.0	-1.0
6	1.0	0.0
7	0.0	1.0
8	-1.0	0.0

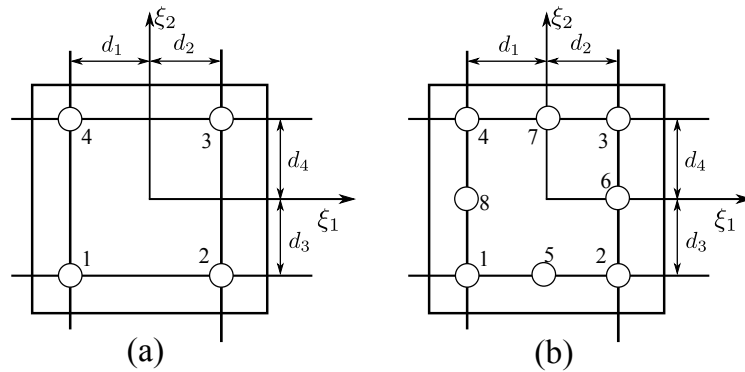


Figura 3.2 – Elementos descontínuos (a) Linear e (b) Quadrático.

As funções de interpolação para estes elementos podem ser obtidas adequando as funções originais, multiplicando-as por uma matriz de transformação, porém é possível obtê-las parametrizando essas funções, para que se adequem conforme o recuo dos nós [Beer et al., 2008]. As funções do elemento linear ficam então:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_1 &= \frac{1}{c}(d_1 - \xi_1)(d_3 - \xi_2), & \bar{\phi}_2 &= \frac{1}{c}(d_2 + \xi_1)(d_3 - \xi_2), \\
 \bar{\phi}_3 &= \frac{1}{c}(d_2 + \xi_1)(d_4 + \xi_2), & \bar{\phi}_4 &= \frac{1}{c}(d_1 - \xi_1)(d_4 + \xi_2), \\
 c &= (d_1 + d_2)(d_3 + d_4).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

E as funções do elemento quadrático são

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_1 &= \frac{1}{c}(d_1 - \xi_1)(d_3 - \xi_2)\left(-1 - \frac{\xi_1}{d_2} - \frac{\xi_2}{d_4}\right), \\
\bar{\phi}_2 &= \frac{1}{c}(d_2 + \xi_1)(d_3 - \xi_2)\left(-1 - \frac{\xi_1}{d_1} - \frac{\xi_2}{d_4}\right), \\
\bar{\phi}_3 &= \frac{1}{c}(d_2 + \xi_1)(d_4 + \xi_2)\left(-1 - \frac{\xi_1}{d_1} - \frac{\xi_2}{d_3}\right), \\
\bar{\phi}_4 &= \frac{1}{c}(d_1 - \xi_1)(d_4 + \xi_2)\left(-1 - \frac{\xi_1}{d_2} - \frac{\xi_2}{d_3}\right), \\
\bar{\phi}_5 &= \frac{(d_1 - \xi_1)(d_2 - \xi_1)(d_3 - \xi_2)}{d_1 d_2 (d_3 + d_4)}, \\
\bar{\phi}_6 &= \frac{(d_2 - \xi_1)(d_3 + \xi_1)(d_4 - \xi_2)}{d_3 d_4 (d_1 + d_2)}, \\
\bar{\phi}_7 &= \frac{(d_1 - \xi_1)(d_2 - \xi_1)(d_4 + \xi_2)}{d_1 d_2 (d_3 + d_4)}, \\
\bar{\phi}_8 &= \frac{(d_1 - \xi_1)(d_3 - \xi_2)(d_4 - \xi_2)}{d_3 d_4 (d_1 + d_2)},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

que facilmente retornam às equações (3.3) e (3.4), quando d_i são todos iguais a unidade.

A fim de simplificar o código computacional, será definido que a distância de retração para todos os nós físicos de um mesmo elemento é igual, e chamada de *recuo*:

$$d = d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv d_4. \tag{3.7}$$

$$recuo = (1 - d). \tag{3.8}$$

Com base nas funções de interpolação definidas anteriormente, os deslocamentos e trações nos elementos poderão ser calculadas então para um elemento j :

$$\mathbf{u} = \bar{\Phi} \mathbf{u}^j, \tag{3.9a}$$

$$\mathbf{p} = \bar{\Phi} \mathbf{p}^j, \tag{3.9b}$$

onde os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} são os deslocamentos e trações em um ponto p qualquer do contorno Γ :

$$\mathbf{u} = \left\{ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \right\}^T, \tag{3.10a}$$

$$\mathbf{p} = \left\{ p_1 \quad p_2 \quad p_3 \right\}^T, \tag{3.10b}$$

as matrizes das variáveis nodais do elemento j têm a seguinte forma:

$$\mathbf{u}^j = \left\{ u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \vdots \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad u_1^{nnos} \quad u_2^{nnos} \quad u_3^{nnos} \right\}^T, \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{p}^j = \left\{ p_1^1 \quad p_2^1 \quad p_3^1 \quad \vdots \quad p_1^2 \quad p_2^2 \quad p_3^2 \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad p_1^{nnos} \quad p_2^{nnos} \quad p_3^{nnos} \right\}^T, \quad (3.11b)$$

as matrizes $\bar{\Phi}$ e Φ , contém as funções de interpolação para cada um dos nós da partição física e geométrica do elemento:

$$\bar{\Phi} = \left\{ \bar{\varphi}^1 \quad \bar{\varphi}^2 \quad \dots \quad \bar{\varphi}^{nnos} \right\}^T, \quad (3.12a)$$

$$\Phi = \left\{ \varphi^1 \quad \varphi^2 \quad \dots \quad \varphi^{nnos} \right\}^T, \quad (3.12b)$$

onde as matrizes $\bar{\varphi}^j$ e φ^j , são definidas em notação indicial por:

$$\bar{\varphi}_{ab}^j = \bar{\phi}_j \delta_{ab}, \quad (3.13a)$$

$$\varphi_{ab}^j = \phi_j \delta_{ab}, \quad (3.13b)$$

onde δ_{ab} é o delta de Kroenecker, e $\bar{\phi}_j$ e ϕ_j são os valores das respectivas funções de interpolação avaliadas no nó j do elemento.

3.2.1 Transformação de coordenadas

Devido à transformação do sistema de coordenadas global para o sistema local do elemento, deve ser calculado o Jacobiano da transformação, que no caso 3D, Beer et al., 2008, definem como sendo o valor da área real de um segmento de tamanho 1x1 no sistema de coordenadas local. Primeiramente, definem-se os vetores direcionais v_1 e v_2 :

$$v_{1i} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}, \quad v_{2i} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i}. \quad (3.14)$$

De posse destes vetores, é possível calcular o vetor normal à superfície do elemento, v_3 :

$$v_3 = v_1 \times v_2, \quad (3.15)$$

e o Jacobiano será definido através da norma do vetor v_3 :

$$J = \|v_3\|. \quad (3.16)$$

3.3 Discretização das equações integrais

A partir da formulação integral já desenvolvida, é possível obter uma solução exata para o problema, porém inviável até mesmo para casos simples. A discretização do contorno em elementos permite a resolução do problema numericamente, obtendo uma solução para o problema aproximado. Neste trabalho somente será abordado o caso tridimensional, por isso o número de dimensões cartesianas das variáveis será sempre 3. A equação (2.20) pode ser reescrita na forma matricial:

$$c^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega, \quad (3.17)$$

onde $c^i = \frac{1}{2} \mathbf{I}$. [Brebbia e Dominguez, 1989], e as soluções fundamentais expressadas matricialmente tem a seguinte forma:

$$\mathbf{u}^* = \left\{ u_{11}^* \quad u_{12}^* \quad u_{13}^* \quad \vdots \quad u_{21}^* \quad u_{22}^* \quad u_{23}^* \quad \vdots \quad u_{31}^* \quad u_{32}^* \quad u_{33}^* \right\}, \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{p}^* = \left\{ p_{11}^* \quad p_{12}^* \quad p_{13}^* \quad \vdots \quad p_{21}^* \quad p_{22}^* \quad p_{23}^* \quad \vdots \quad p_{31}^* \quad p_{32}^* \quad p_{33}^* \right\}. \quad (3.18b)$$

Discretizando o contorno em elementos, aplicam-se as funções de interpolação (3.12) na equação (3.17), e as integrais que eram realizadas sobre todo contorno, tornam-se somatórios de integrais sobre os elementos:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \right\}, \quad (3.19)$$

onde NE indica que a soma será feita sobre todos os elementos no contorno, Γ_j é a superfície, e \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j são os deslocamentos e trações, do elemento j . A integral no domínio Ω_s requer uma discretização do mesmo em M células de domínio para que seja realizada a integração numérica, porém, isso pode ser evitado levando as forças de corpo para o contorno, conforme proposto primeiramente por Pape e Banerjee, 1987 [Brebbia e Dominguez, 1989].

Finalmente, é realizada uma transformação das coordenadas globais para as coordenadas locais dos elementos. Sendo assim, $d\Gamma_x = J d\Gamma_{\xi}$, e $d\Omega_x = J_{\Omega} d\Omega_{\xi}$, onde então se

reescreve (3.19) como:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_1^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{p}^* \Phi J d\Gamma_\xi \right\} \mathbf{u}^j = \sum_1^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{u}^* \Phi J d\Gamma_\xi \right\} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_\xi} \mathbf{u}^* \mathbf{b} J_\Omega d\Omega_\xi \right\}. \quad (3.20)$$

Como a equação (3.20) é válida para um nó 'i', uma vez integrada, a mesma pode ser montada da seguinte maneira:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{nos} \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{nos} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is}, \quad (3.21)$$

onde

$$\mathbf{G}^{ij} = \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{u}^* \Phi J d\Gamma_\xi \quad (3.22a)$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{ij} = \int_{\Gamma_\xi} \mathbf{p}^* \Phi J d\Gamma_\xi \quad (3.22b)$$

$$\mathbf{B}^{is} = \int_{\Omega_\xi} \mathbf{u}^* \mathbf{b} J_\Omega d\Omega_\xi. \quad (3.22c)$$

Então chamando

$$\mathbf{H}^{ij} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{ij}, & \text{se } i \neq j, \\ \hat{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{c}^i, & \text{se } i = j, \end{cases} \quad (3.23)$$

simplifica-se a equação (3.22a) em:

$$\sum_{j=1}^{nos} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{nos} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is}. \quad (3.24)$$

Arranjando-se todas as submatrizes para todos os nós da discretização forma-se então o sistema de equações:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{B}. \quad (3.25)$$

Fazendo então uma troca entre as colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} para arranjar as incógnitas em um mesmo vetor \mathbf{X} , e efetuando a multiplicação da matriz e do vetor onde todas as variáveis são conhecidas, e somando o vetor \mathbf{B} ao resultado desta multiplicação, resulta no seguinte

sistema de equações:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (3.26)$$

que será resolvido algebricamente para obter os deslocamentos e trações não conhecidos no contorno.

3.4 Integração numérica das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H}

Para calcular os termos das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , quando $i \neq j$ e os elementos estão suficientemente afastados, as integrais são regulares, podendo assim ser calculadas por quadratura Gaussiana padrão [Beer et al., 2008]. Desta forma as equações (3.22) simplificam-se em:

$$\mathbf{G}^{ij} = \sum_{k_1=1}^{K_1} \sum_{k_2=1}^{K_2} \mathbf{u}^*(p^i, q_{\mathbf{k}}^j(\boldsymbol{\xi})) \Phi(q_{\mathbf{k}}^j(\boldsymbol{\xi})) J(q_{\mathbf{k}}^j(\boldsymbol{\xi})) W_{k_1} W_{k_2} \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{H}^{ij} = \sum_{k_1=1}^{K_1} \sum_{k_2=1}^{K_2} \mathbf{p}^*(p^i, q_{\mathbf{k}}^j(\boldsymbol{\xi})) \Phi(q_{\mathbf{k}}^j(\boldsymbol{\xi})) J(q_{\mathbf{k}}^j(\boldsymbol{\xi})) W_{k_1} W_{k_2} \quad (3.27b)$$

onde $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, K_1 e K_2 são o número de abscissas da quadratura de Gauss para cada direção do sistema de coordenadas local do elemento, p^i é o ponto fonte, $q_{\mathbf{k}}^j(\boldsymbol{\xi})$ é o ponto \mathbf{k} da quadratura (ponto campo) e W_{k_1} e W_{k_2} são os vetores que contém os pesos correspondentes a cada direção da quadratura.

3.4.1 Imposição de Movimento de Corpo Rígido (IMCR)

A forma mais simples de obtenção das submatrizes $\mathbf{H}^{\mathbf{q}}$ em \mathbf{H} , devido à dificuldade inerente de calculá-las via integrais analíticas ou mesmo com integração numérica, é através da imposição de uma translação de corpo rígido em cada uma das direções [Brebbia e Dominguez, 1989], resultando em:

$$\mathbf{H}\mathbf{I}^{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

onde $\mathbf{I}^{\mathbf{q}}$ é um vetor com deslocamentos unitários em todos os nós ao longo da direção q , e zero nas outras duas direções. Como a equação (3.28) deve ser respeitada para qualquer direção q , pode se escrever:

$$\mathbf{H}^{ii} = - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \quad \text{para } j \neq i \quad (3.29)$$

que leva às submatrizes diagonais em termos das outras submatrizes de \mathbf{H} .

De acordo com Brebbia e Dominguez, 1989, a equação (3.29) é válida somente para um domínio fechado. Para um domínio sem fronteira (ex: domínio infinito), deve ser utilizada a seguinte relação:

$$\mathbf{H}^{ii} = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \quad \text{para } j \neq i \quad (3.30)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 .

3.4.2 Integração numérica de núcleos fracamente singulares

Os termos da diagonal da matriz \mathbf{G}^{ii} podem ser difíceis de ser calculados, uma vez que a solução fundamental de deslocamentos é de natureza fracamente singular. Apesar da existência de quadraturas de Gauss com funções peso logarítmicas como a descritas em Stroud e Secrest, 1966, que integram com excelente precisão este tipo de singularidade, as mesmas requerem um isolamento da parcela logarítmica do integrando, e são válidas para um intervalo normalizado no intervalo $[0,1]$. Muitas propostas já foram feitas ao longo dos anos para integrar numericamente tais funções, e um dos métodos mais eficientes para integração numérica de núcleos fracamente singulares é o descrito por Telles, 1987, sendo este amplamente utilizado.

O método aplica uma transformação cúbica (TC) de coordenadas no elemento, de forma que as abscissas da quadratura concentram-se em torno da singularidade, e faz com que o Jacobiano desta transformação se anule no ponto singular. A transformação de coordenadas ocorre tal que a integral a ser calculada modifica-se conforme:

$$\int_{-1}^1 f(\gamma) d\gamma = \int_{-1}^1 f(\zeta) J(\zeta) d\zeta, \quad (3.31)$$

onde:

$$\zeta = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d, \quad (3.32)$$

e $J(\gamma)$, o Jacobiano desta transformação, é dado por:

$$J(\gamma) = 3a\gamma^2 + 2b\gamma + c, \quad (3.33)$$

onde os parâmetros a , b , c e d , são descritos em Telles, 1987. Como pôde ser observado, a formulação apresentada é unidimensional, porém a extensão para duas ou três dimensões é direta, pois cada conjunto de abscissas é transformado separadamente e os pesos multiplicados pelo Jacobiano, e depois utilizados conforme ocorre na extensão da quadratura de Gauss-Legendre para duas dimensões, descrita na Seção 3.4.

4. O MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA DE NÚCLEOS SINGULARES

Neste capítulo é abordado o método de integração direta que será testado como alternativa a imposição de movimento de corpo rígido (IMCR), descrito na Seção 3.4.1, para a integração dos núcleos singulares. Este método foi primeiramente aplicado ao MEC por Guiggiani e Casalini, 1987, fundamentado na teoria de integrais singulares multidimensionais de Mikhlin, 1965. O método baseia-se em extrair a parte singular do núcleo para que a mesma seja integrada analiticamente. Isto é feito de forma generalizada e considerando o mapeamento dos elementos, não dependendo de formulações específicas para cada tipo de elemento, e a integração analítica é independente do núcleo tornando o método robusto e simplificado, tanto do ponto de vista matemático quanto computacional. Primeiramente apresenta-se a fundamentação matemática deste método, conforme apresentado em Guiggiani, 1998. Após, são desenvolvidas as expansões em séries de Taylor das variáveis envolvidas nos núcleos singulares, para que finalmente construam-se as expansões assintóticas dos núcleos contendo os tensores de deslocamentos e trações da elasticidade linear 3D.

A implementação do método é discutida e alguns resultados preliminares são apresentados, em comparação com TC e IMCR. Por fim é verificado o número de pontos de integração em função da variação na razão de aspecto do elemento, e comparados com resultados obtidos da literatura.

4.1 Revisão do método

No método de integração direta a parte singular da integração é realizada analiticamente durante o desenvolvimento do método. O único requerimento matemático para a aplicação deste método é o desenvolvimento das expansões assintóticas em torno do ponto singular. O restante da integração é regular e pode ser feita numericamente da mesma maneira que as rotinas existentes nos programas do MEC já a realizam [Guiggiani, 1998].

Considerando-se elementos descontínuos, uma porção do contorno Γ que contém o ponto de colocação singular \mathbf{q} é o contorno de um elemento qualquer Γ_S . A equação integral que precisa ser calculada computacionalmente para este ponto tem a seguinte forma:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{(\Gamma_s - e_\varepsilon)} K_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \phi_a(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma + \phi_a(\boldsymbol{\eta}) \frac{b_{ij}(\mathbf{q})}{\varepsilon} \right\}, \quad (4.1)$$

onde $K_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é um tensor singular, \mathbf{q} é o ponto campo e \mathbf{p} o ponto fonte, ϕ_a é o vetor com as funções de interpolação em $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$, que são as coordenadas do ponto campo \mathbf{q} no plano local, e $b_{ij}(\mathbf{q})$ é um termo referente às forças atuantes sobre o domínio. A região e_ε é a região de exclusão, uma vizinhança circular em torno do ponto fonte \mathbf{q} , cujo raio, ε , tende a zero.

Por meio das funções de interpolação e do Jacobiano da transformação, o elemento Γ_S é mapeado em um elemento retangular padrão, R_s . De acordo com isso, a vizinhança simétrica e_ε , no espaço real, é mapeada em uma região σ_ε no espaço $\boldsymbol{\xi}$. Apesar de não ser mais um círculo, a região continua com seu raio ε tendendo a zero. No espaço das coordenadas locais, a integral torna-se então:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{(R_s - \sigma_\varepsilon)} K_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \phi_a(\boldsymbol{\eta}) J(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 + \phi_a(\boldsymbol{\eta}) \frac{b_{ij}(\mathbf{q})}{\varepsilon} \right\}. \quad (4.2)$$

Seguindo uma prática comum no MEC, coordenadas polares (ρ, θ) centradas em $\boldsymbol{\eta}$, são definidas no espaço de $\boldsymbol{\xi}$ (Figura 4.1):

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 + \rho \cos \theta \\ \xi_2 = \eta_2 + \rho \sin \theta, \end{cases} \quad (4.3)$$

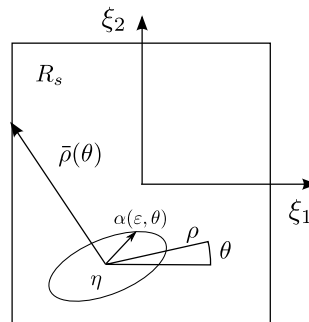


Figura 4.1 – Representação das variáveis consideradas, do elemento e da região de exclusão, em coordenadas polares.

tal que $d\xi_1 d\xi_2 = \rho d\rho d\theta$, então a equação (4.2) torna-se:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\bar{\rho}(\theta)} F_{ij}(\rho, \theta) d\rho d\theta + \phi_a(\eta) \frac{b_{ij}(q)}{\varepsilon} \right\}, \quad (4.4)$$

onde $F_{ij}(\rho, \theta) = K_{ij} \phi_a J \rho = O(\rho^{-2})$ é o integrando singular, $\rho = \alpha(\varepsilon, \theta)$ é a equação em coordenadas polares da vizinhança distorcida, e $\rho = \bar{\rho}(\theta)$ é a equação em coordenadas polares do contorno da região R_s .

Analisando a função singular F_{ij} , sendo a mesma de ordem ρ^{-2} , é possível realizar uma expansão em série de Laurent em função de ρ , na forma de:

$$F_{ij}(\rho, \theta) = \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho^1} + O(1), \quad (4.5)$$

A dependência de θ é crucial para F_{-1} e F_{-2} representarem o comportamento assintótico de F_{ij} quando $\rho \rightarrow 0$ [Guiggiani, 1998]. Neste ponto do desenvolvimento, torna-se importante a expansão em série de Taylor de ρ , o raio r no plano local:

$$\rho = \alpha(\varepsilon, \theta) = \varepsilon \cdot \beta(\theta) + \varepsilon^2 \cdot \gamma(\theta) + O(\varepsilon^3). \quad (4.6)$$

As equações analíticas para obtenção das variáveis $\beta(\theta)$ e $\gamma(\theta)$ serão definidas durante a obtenção das expansões assintóticas F_{-1} e F_{-2} .

Adicionando e subtraindo os primeiros termos da equação (4.4) em (4.5) resulta em:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\bar{\rho}(\theta)} \left[F_{ij}(\rho, \theta) - \left(\frac{F_{-2}}{\rho^2} + \frac{F_{-1}}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\bar{\rho}(\theta)} \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta \\ & + \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\bar{\rho}(\theta)} \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} d\rho d\theta + \phi_a(\eta) \frac{b_{ij}(q)}{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \\ = I_0 + I_{-1} + I_{-2}.$$

Analisando cada equação separadamente, os limites tornam-se então:

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\rho}(\theta)} \left[F_{ij}(\rho, \theta) - \left(\frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta, \quad (4.7)$$

que pode ser avaliada por quadraturas padrão transformadas às coordenadas polares. I_{-1} ,

pode ser integrada analiticamente em ρ , restando apenas uma integral 1D e regular:

$$\begin{aligned}
I_{-1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\bar{\rho}(\theta)} \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) [\ln |\bar{\rho}(\theta)| - \ln |\alpha(\varepsilon, \theta)|] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) [\ln |\bar{\rho}(\theta)|] d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) \ln |\varepsilon \beta(\theta)| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\bar{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) d\theta \right\} \\
&= \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\bar{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Um tratamento similar pode ser aplicado a I_{-2} :

$$\begin{aligned}
I_{-2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\bar{\rho}(\theta)} \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} d\rho d\theta + \phi_a(\eta) \frac{b_{ikj}(y)}{\varepsilon} \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} F_{-2}(\theta) \left[-\frac{1}{\bar{\rho}(\theta)} + \frac{1}{\alpha(\varepsilon, \theta)} \right] d\theta + \phi_a(\eta) \frac{b_{ikj}(y)}{\varepsilon} \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{F_{-2}(\theta)}{\varepsilon \beta(\theta)} \left[1 - \varepsilon \frac{\gamma(\theta)}{\beta(\theta)} \right] d\theta + \phi_a(\eta) \frac{b_{ikj}(y)}{\varepsilon} \right\} - \int_0^{2\pi} \frac{F_{-2}(\theta)}{\bar{\rho}(\theta)} d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{F_{-2}(\theta)}{\beta(\theta)} d\theta + \phi_a(\eta) b_{ikj}(y) \right\} - \int_0^{2\pi} F_{-2}(\theta) \left[\frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\bar{\rho}(\theta)} \right] d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} F_{-2}(\theta) \left[\frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\bar{\rho}(\theta)} \right] d\theta.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Então, reunindo as equações (4.7), (4.8) e (4.9), a integral I será resumida em:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\rho}(\theta)} \left[F_{ij}(\rho, \theta) - \left(\frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta + \\
&\quad \int_0^{2\pi} \left\{ F_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\bar{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - F_{-2}(\theta) \left[\frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\bar{\rho}(\theta)} \right] \right\} d\theta.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2 Expansões assintóticas para os tensores da elasticidade linear 3D

Para desenvolver as expansões assintóticas dos núcleos singulares, é preciso expandir todas as variáveis envolvidas em séries de Taylor, para então separar cada parte dos núcleos assintoticamente. A expansão de Taylor do raio $r_i = (x_i - y_i)$, em torno de $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, coordenadas locais do ponto fonte \mathbf{q} , é:

$$\begin{aligned}
r_i = x_i - y_i = & \left(\frac{\delta x_i}{\delta \xi_1} \Big|_{\varepsilon=\eta} (\xi_1 - \eta_1) + \frac{\delta x_i}{\delta \xi_2} \Big|_{\varepsilon=\eta} (\xi_2 - \eta_2) \right) + \\
& \left(\frac{\delta^2 x_i}{\delta \xi_1^2} \Big|_{\varepsilon=\eta} (\xi_1 - \eta_1)^2 + \frac{\delta^2 x_i}{\delta \xi_1 \delta \xi_2} \Big|_{\varepsilon=\eta} (\xi_1 - \eta_1) (\xi_2 - \eta_2) + \frac{\delta^2 x_i}{\delta \xi_2^2} \Big|_{\varepsilon=\eta} (\xi_2 - \eta_2)^2 \right) + \dots
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Com o emprego das coordenadas polares em (4.11), consegue-se isolar o raio ρ :

$$\begin{aligned}
r_i = \rho & \left(\frac{\delta x_i}{\delta \xi_1} \Big|_{\varepsilon=\eta} \cos \theta + \frac{\delta x_i}{\delta \xi_2} \Big|_{\varepsilon=\eta} \sen \theta \right) + \\
\rho^2 & \left(\frac{\delta^2 x_i}{\delta \xi_1^2} \Big|_{\varepsilon=\eta} \frac{\cos^2 \theta}{2} + \frac{\delta^2 x_i}{\delta \xi_1 \delta \xi_2} \Big|_{\varepsilon=\eta} \sen \theta \cos \theta + \frac{\delta^2 x_i}{\delta \xi_2^2} \Big|_{\varepsilon=\eta} \frac{\sen^2 \theta}{2} \right) + O(\rho^3),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ou seja,

$$r_i = \rho A_i(\theta) + \rho^2 B_i(\theta) + O(\rho^3). \tag{4.13}$$

Nota-se que A_i e B_i são simples funções trigonométricas de θ . Torna-se conveniente definir:

$$A(\theta) = \sqrt{\sum_{k=1}^3 [A_k(\theta)]^2} > 0, \tag{4.14}$$

$$C(\theta) = \sum_{k=1}^3 A_k(\theta) B_k(\theta). \tag{4.15}$$

Ou seja, $A(\theta)$ e $C(\theta)$, são escalares. A expansão de J_i será dada por:

$$\begin{aligned}
J_i = J_i(\eta) + \rho & \left[\frac{\partial J_i}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} \cos \theta + \frac{\partial J_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} \sen \theta \right] + O(\rho^2) \\
= J_{i0} + \rho J_{i1}(\theta) + O(\rho^2).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Importante também definição dada por Guiggiani et al., 1992:

$$A_i J_{i0} \equiv 0, \tag{4.17}$$

pois no ponto onde ocorre a singularidade, A_i deve ser perpendicular ao vetor J_{i0} , que tem o seu módulo definido por:

$$J = \sqrt{\sum_{k=1}^3 J_k^2}. \quad (4.18)$$

Define-se então a expansão das potências de r :

$$r^n = \rho^n A^n \left(1 + n\rho \frac{C}{A^2} \right) + O(\rho^{n+2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.19)$$

e as derivadas do vetor r_i :

$$\begin{aligned} r_{,i} &= \frac{x_i - y_i}{r} \\ &= \frac{\rho A_i + \rho^2 B_i + O(\rho^3)}{\rho A(1 + \rho \frac{C}{A^2}) + O(\rho^2)} \\ &= \frac{A_i}{A} + \rho \left(\frac{B_i}{A} - A_i \frac{C}{A^3} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

resumido então em:

$$r_{,i} = d_{i0} + \rho d_{i1} + O(\rho^3), \quad (4.21)$$

onde:

$$d_{i0} = \frac{A_i}{A} \quad (4.22)$$

$$d_{i1} = \frac{B_i}{A} - A_i \frac{C}{A^3}. \quad (4.23)$$

Por último se requer a expansão das funções de interpolação:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \phi_a(\eta) + \rho \left[\frac{\partial \phi_a}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} \cos \theta + \frac{\partial \phi_a}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} \sen \theta \right] + O(\rho^2) \\ &= \phi_{a0} + \rho \phi_{a1}(\theta) + O(\rho^2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Fazendo-se uso das relações anteriores, é possível estabelecer algumas relações úteis para a construção das expansões:

$$r_{,n} = r_{,i}n_i \quad (4.25a)$$

$$r_{,n}J = r_{,i}J_i \quad (4.25b)$$

$$r_{,i}J_i = \rho f_1 + O(\rho^2) \quad (4.25c)$$

$$r_{,k}(r_{,i}J_i) = \rho g_{k1} + O(\rho^2) \quad (4.25d)$$

$$r_{,n}r_{,i}r_{,j}J = \rho h_{jk1} + O(\rho^2) \quad (4.25e)$$

$$n_i r_{,j}J = l_{ij0} + \rho l_{ij1} + O(\rho^2), \quad (4.25f)$$

onde:

$$f_1 = \left(\frac{B_i J_{i0} + A_i J_{i1}}{A} \right) \quad (4.26)$$

$$g_{i1} = \frac{A_i}{A} f_1 \quad (4.27)$$

$$h_{jk1} = \frac{A_k}{A} g_{j1} \quad (4.28)$$

$$l_{ij0} = \frac{J_{i0} A_j}{A} \quad (4.29)$$

$$l_{ij1} = J_{i0} \left(\frac{B_j}{A} - \frac{A_j C}{A^3} \right). \quad (4.30)$$

Para realizar o processo de limite da região de exclusão, é preciso calcular a expansão de $\alpha(\varepsilon, \theta)$:

$$\varepsilon = \rho A(\theta) + \rho^2 \frac{C(\theta)}{A(\theta)} + O(\rho^3). \quad (4.31)$$

Usando uma reversão da série da equação (4.31), obtém-se a expansão em potências de ε da equação em coordenadas polares do contorno de σ_ε , a imagem de e_s :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\varepsilon}{A(\theta)} - \varepsilon^2 \frac{C(\theta)}{A^4(\theta)} + O(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon \cdot \beta(\theta) + \varepsilon^2 \cdot \gamma(\theta) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $\beta(\theta)$ e $\gamma(\theta)$ ficam então definidos:

$$\beta(\theta) = \frac{1}{A(\theta)} \quad (4.33)$$

$$\gamma(\theta) = -\frac{C(\theta)}{A^4(\theta)}. \quad (4.34)$$

E ainda define-se que $\beta(\theta) = \beta(\theta + \pi)$ e $\gamma(\theta) = -\gamma(\theta + \pi)$.

4.2.1 Aplicação às equações da elasticidade linear

Solução fundamental de deslocamentos

A solução fundamental de deslocamentos para o caso 3D é a equação (2.35). Ao ser integrada em coordenadas polares, o núcleo contendo $u_{\alpha\beta}^*$ fica escrito como:

$${}^u F_{\alpha\beta} = u_{\alpha\beta}^* \cdot \phi_a \cdot J \cdot \rho, \quad (4.35)$$

que, agrupando os termos fica:

$${}^u F_{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} ((3-4\nu) A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}), \quad (4.36)$$

onde:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\phi_n J \delta_{\alpha\beta}}{r} \rho \quad (4.37)$$

$$B_{\alpha\beta} = r_{,\alpha} r_{,\beta} \frac{\phi_n J}{r} \rho. \quad (4.38)$$

Desenvolvendo cada termo separadamente resulta em:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \rho (\phi_{n0} + \rho\phi_{n1}) J \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{\rho A} - \frac{C}{A^3} \right) \\ &= \rho \left(\frac{\phi_{n0} J \delta_{\alpha\beta}}{A} \right) \frac{1}{\rho} + O(1) + O(\rho) \\ &= O(1) + O(\rho), \end{aligned} \quad (4.39)$$

e

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= \rho (d_{\alpha 0} + \rho d_{\alpha 1}) (d_{\beta 0} + \rho d_{\beta 1}) (\phi_{n0} + \rho\phi_{n1}) \left(\frac{1}{\rho A} - \frac{C}{A^3} \right) J \\ &= \rho \frac{d_{\alpha 0} d_{\beta 0} \phi_{n0}}{\rho A} J + O(1) + O(\rho) + O(\rho^2) \\ &= \rho \left(\frac{A_\alpha A_\beta \phi_{n0} J}{A^3} \right) \frac{1}{\rho} + O(1) + O(\rho) + O(\rho^2) \\ &= O(1) + O(\rho) + O(\rho^2). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Comparando com a série de Laurent, equação (4.5), conclui-se que:

$$\begin{aligned} F_{-2}^A &= 0, & F_{-1}^A &= 0, \\ F_{-2}^B &= 0, & F_{-1}^B &= 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

o que resulta nas seguintes expansões para o núcleo contendo u^* :

$${}^u F_{-1} = 0, \quad (4.42)$$

$${}^u F_{-2} = 0. \quad (4.43)$$

Concluindo que o núcleo contendo a solução fundamental de deslocamentos torna-se regular, se avaliado em coordenadas polares, não restando termo assintótico a ser subtraído devido à sua singularidade fraca, confirmando o fato salientado por Guiggiani et al., 1992.

Solução fundamental de trações

Apesar da expansão assintótica para o núcleo de trações já ter sido apresentada em Pereira e Parreira, 1994, não foi publicado o desenvolvimento desta expansão no trabalho citado, portanto ela será desenvolvida aqui. A solução fundamental de trações 3D, conforme Brebbia e Dominguez, 1989, é a equação (2.37). Um núcleo ${}^p F_{\alpha\beta}$, que contém a solução fundamental p^* pode ser escrito como:

$${}^p F_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}^* \cdot \phi_a \cdot J \cdot \rho, \quad (4.44)$$

ou:

$${}^p F_{\alpha\beta} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} ((1-2\nu) A_{\alpha\beta} + 3B_{\alpha\beta} + (1-2\nu) C_{\alpha\beta}), \quad (4.45)$$

onde:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{r_{,n} \phi_a J \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \rho \quad (4.46)$$

$$B_{\alpha\beta} = r_{,n} r_{,\alpha} r_{,\beta} \frac{\phi_a J}{r^2} \rho \quad (4.47)$$

$$C_{\alpha\beta} = (n_{\alpha} r_{,\beta} - n_{\beta} r_{,\alpha}) \frac{\phi_a J}{r^2} \rho. \quad (4.48)$$

Desenvolvendo cada termo da equação (4.48) separadamente resulta em:

$$\begin{aligned}
A_{\alpha\beta} &= \rho \frac{r, \gamma J_\gamma \phi_a \delta_{\alpha\beta}}{r^2} \\
&= \rho^2 f_1 (\phi_{a0} + \rho \phi_{a1}) \left(\frac{1}{\rho^2 A^2} - \frac{2C}{\rho A^4} \right) \delta_{\alpha\beta} \\
&= (\phi_{a0} + \rho \phi_{a1}) \left(\frac{f_1}{A^2} - \rho f_1 \frac{2C}{A^4} \right) \delta_{\alpha\beta} \\
&= O(1) + O(\rho) + O(\rho^2),
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\beta} &= \rho r, n r, \alpha r, \beta \frac{\phi_a J}{r^2} \\
&= \rho^2 h_{\alpha\beta 1} \frac{\phi_a}{r^2} \\
&= \rho^2 h_{\alpha\beta 1} (\phi_{a0} + \rho \phi_{a1}) \left(\frac{1}{\rho^2 A^2} - \frac{2C}{\rho A^4} \right) \\
&= (\phi_{a0} + \rho \phi_{a1}) \left(\frac{h_{\alpha\beta 1}}{A^2} - \frac{\rho h_{\alpha\beta 1} 2C}{A^4} \right) \\
&= O(1) + O(\rho) + O(\rho^2),
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta} &= \rho (n_{\alpha r, \beta} - n_{\beta r, \alpha}) \frac{\phi_a J}{r^2} \\
&= \rho (n_{\alpha} J r, \beta - n_{\beta} J r, \alpha) \frac{\phi_a}{r^2} \\
&= \rho (l_{\alpha\beta 0} + \rho l_{\alpha\beta 1} - l_{\beta\alpha 0} - \rho l_{\beta\alpha 1}) \frac{\phi_a}{r^2} \\
&= \rho (m_{\alpha\beta 0} + \rho m_{\alpha\beta 1}) (\phi_{a0} + \rho \phi_{a1}) \left(\frac{1}{\rho^2 A^2} - \frac{2C}{\rho A^4} \right) \\
&= \rho (m_{\alpha\beta 0} + \rho m_{\alpha\beta 1}) \left(\frac{\phi_{a0}}{\rho^2 A^2} - \frac{\phi_{a0} 2C}{\rho A^4} + \frac{\phi_{a1}}{\rho A^2} - \frac{\phi_{a1} 2C}{A^4} \right) \\
&= \left(\frac{m_{\alpha\beta 0} \phi_{a0}}{A^2} \right) \frac{1}{\rho} + O(1) + O(\rho) + O(\rho^2),
\end{aligned} \tag{4.51}$$

que, comparados com a série de Laurent da equação (4.5), levam à conclusão de que:

$$\begin{aligned}
F_{-2}^A &= 0, & F_{-1}^A &= 0, \\
F_{-2}^B &= 0, & F_{-1}^B &= 0, \\
F_{-2}^C &= 0.
\end{aligned}$$

Como $F_{-n} = F_{-nA} + F_{-nB} + F_{-nC}$, F_{-1} resulta em:

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{-(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{m_{\alpha\beta 0} \phi_{a0}}{A^2} \right) \\
&= \frac{-(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} (l_{\alpha\beta 0} - l_{\beta\alpha 0}) \frac{\phi_{a0}}{A^2} \\
&= \frac{-(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} (J_{\alpha 0} A_\beta - J_{\beta 0} A_\alpha) \frac{\phi_{a0}}{A^3} \\
&= \frac{-(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} (n_\alpha A_\beta - n_\beta A_\alpha) \frac{\phi_{a0} J}{A^3}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Portanto, as expansões do núcleo contendo p^* serão dadas por:

$${}^P F_{-1} = \frac{-(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} (n_\alpha(\eta) A_\beta(\theta) - n_\beta(\eta) A_\alpha(\theta)) \frac{\phi_{a0}(\eta) J(\eta)}{A(\theta)^3}, \tag{4.53}$$

$${}^P F_{-2} = 0. \tag{4.54}$$

A equação (4.53) concorda com a expansão apresentada por Pereira e Parreira, 1994.

4.3 Implementação numérica do método de integração direta

Como já visto anteriormente, para realizar a integração numérica dos núcleos singulares através da integração direta, torna-se necessária a avaliação numérica das integrais em coordenadas polares, centradas no ponto singular. A idéia de transformar o sistema cartesiano para um sistema de coordenadas polares antes de aplicar a integração numérica origina-se de Rizzo e Shippy, 1977. O equacionamento necessário para este procedimento é completamente apresentado no trabalho de Koizumi e Utamura, 1991, onde a integração em coordenadas polares puramente numérica, com uma posterior correção de erros, é utilizada para integração dos núcleos fortemente singular e hipersingular necessários para o cálculo das variáveis físicas em pontos dentro do domínio no MEC.

A integral que precisa ser avaliada em coordenadas polares no presente trabalho é:

$$I_o = \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\rho}(\theta)} \left[K_{\alpha\beta}(\rho, \theta) N^\alpha J \rho - \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta. \tag{4.55}$$

Dividindo o elemento em 4 triângulos, com coordenadas locais (ρ_l, θ_l) , conforme a figura 4.2, a equação (4.55) resulta em:

$$I_o = \sum_{reg=1}^4 \int_0^{\theta_{reg}} \int_0^{\bar{\rho}_{reg}(\theta_{reg})} \left[K_{\alpha\beta}(\rho_l, \theta_l) N^a J \rho - \frac{F_{-1}(\theta_l)}{\rho_l} \right] d\rho d\theta. \quad (4.56)$$

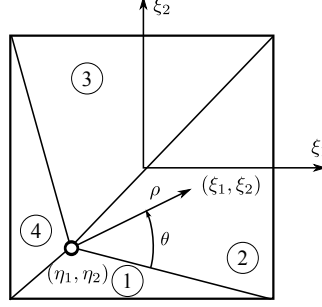


Figura 4.2 – Representação da divisão do elemento em triângulos.

Para tornar possível a integração numérica deve-se transformar o intervalo de integração de $[0, 0]$ até $[\bar{\rho}_{reg}, \theta_{reg}]$ para $[-1, -1]$ até $[1, 1]$, através de uma transformação de variáveis, tal que: $\theta_l = \frac{\theta'_{reg}}{2}(\xi'_1 + 1)$ e $\rho_l = \frac{\rho'_{reg}}{2}(\xi'_2 + 1)$. Obtém-se então:

$$I_o = \sum_{reg=1}^4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[K_{\alpha\beta}(\rho_l(\xi'_1), \theta_l(\xi'_2)) N^a J \rho_l - \frac{F_{-1}(\theta_l(\xi'_2))}{\rho_l(\xi'_1)} \right] \frac{\rho_{reg}}{2} \frac{\theta_{reg}}{2} d\rho_l d\theta_l, \quad (4.57)$$

onde (ξ'_1, ξ'_2) são as coordenadas locais dos triângulos, nas quais se utilizarão os pontos da quadratura de Gauss. Resta somente retornar das coordenadas locais de cada triângulo para o sistema de coordenadas local $\boldsymbol{\xi}$ do elemento, onde será avaliado o valor do núcleo da integral, e aplicar a integração numérica, obtendo-se:

$$I_o = \sum_{reg=1}^4 \sum_{k_1=1}^{n_\theta} \sum_{k_2=1}^{n_\rho} \left[K_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}_{k_1 k_2}^{reg}) N^a J \rho_{k_1 k_2}^{reg} - \frac{F_{-1}(\boldsymbol{\xi}_{k_1 k_2}^{reg})}{\rho_{k_1 k_2}^{reg}} \right] \frac{\rho_{reg}}{2} \frac{\theta_{reg}}{2} W_k W_l. \quad (4.58)$$

O equacionamento necessário para distribuir os pontos da quadratura de Gauss em cada uma das regiões triangulares é oriundo simplesmente de relações trigonométricas e transformações de coordenadas, entretanto é trazido na tabela 4.1.

As integrais I_{-1} e I_{-2} já foram integradas analiticamente ao longo do raio, restando apenas integrá-las numericamente de $\theta = 0$ até $\theta = 2\pi$ da mesma maneira que as equações (4.55) até (4.58), exemplificado aqui apenas em I_{-1} (equação (4.8)), já que neste trabalho não será necessário o uso de I_{-2} (equação (4.9)):

Tabela 4.1 – Equações para o cálculo dos intervalos de integração e das coordenadas locais para cada região triangular da integração polar.

Região	Intervalo de integração	Coordenadas Locais
1	$\theta_{reg} = \pi - (\theta_1 + \theta_2)$ $\rho_{reg} = \frac{1 + \eta_2}{\text{sen}(\theta + \theta_1)}$	$\xi_{1kl} = \eta_1 - \rho_k \cos(\theta_l + \theta_1)$ $\xi_{2kl} = \eta_2 - \rho_k \text{sen}(\theta_l + \theta_1)$
2	$\theta_{reg} = \theta_2 + \theta_3$ $\rho_{reg} = \frac{1 - \eta_1}{\cos(\theta_2 - \theta)}$	$\xi_{1kl} = \eta_1 + \rho_k \cos(\theta_l - \theta_2)$ $\xi_{2kl} = \eta_2 + \rho_k \text{sen}(\theta_l - \theta_2)$
3	$\theta_{reg} = \pi - (\theta_4 + \theta_3)$ $\rho_{reg} = \frac{1 - \eta_2}{\text{sen}(\theta + \theta_3)}$	$\xi_{1kl} = \eta_1 + \rho_k \cos(\theta_l + \theta_3)$ $\xi_{2kl} = \eta_2 + \rho_k \text{sen}(\theta_l + \theta_3)$
4	$\theta_{reg} = \theta_1 + \theta_4$ $\rho_{reg} = \frac{1 + \eta_1}{\cos(\theta_4 - \theta)}$	$\xi_{1kl} = \eta_1 - \rho_k \cos(\theta_l - \theta_4)$ $\xi_{2kl} = \eta_2 - \rho_k \text{sen}(\theta_l - \theta_4)$

Fonte: Adaptado de Koizumi e Utamura, 1991.

$$\begin{aligned}
I_{-1} &= \int_0^{2\pi} F_{-1}(\bar{\rho}(\theta), \theta) \ln \left| \frac{\bar{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta \\
&= \sum_{reg=1}^4 \int_0^{\theta_{reg}} F_{-1}(\bar{\rho}_l(\theta_l), \theta_l) \ln \left| \frac{\bar{\rho}_l(\theta_l)}{\beta(\theta_l)} \right| d\theta \\
&= \sum_{reg=1}^4 \int_{-1}^1 F_{-1}(\xi'_1, \xi'_2) \ln \left| \frac{\bar{\rho}(\xi'_1, \xi'_2)}{\beta(\xi'_1, \xi'_2)} \right| \frac{\theta_{reg}}{2} d\xi'_1 \\
&= \sum_{reg=1}^4 \sum_{k=1}^n F_{-1}(\xi_{1k}, \xi_{2k}) \ln \left| \frac{\bar{\rho}_{[k,reg]}(\xi_{1k}, \xi_{2k})}{\beta(\xi_{1k}, \xi_{2k})} \right| \frac{\theta_{reg}}{2} W_{[k,reg]} \quad (4.59)
\end{aligned}$$

4.4 Verificação numérica

Nesta seção será avaliada a regularização dos núcleos obtida através do método das expansões assintóticas. A integração numérica dos núcleos regularizados, que será realizada em um sistema de coordenadas polares, será comparada com os métodos tradicionalmente utilizados no MEC. Finalmente, uma verificação da consistência topológica da integração é feita, comparando com resultados da literatura. As avaliações citadas serão realizadas considerando o nó 1 do elemento da figura 4.3, com $recuo = 0,15$.

Uma verificação inicial da eficiência da regularização através do método das expansões assintóticas é graficar o núcleo original contra a expansão assintótica, e o núcleo regula-

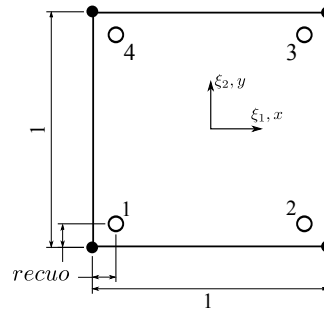


Figura 4.3 – Elemento a ser integrado.

rizado. Na figura 4.4 isso é feito limitando o valor máximo do núcleo entre $[-0,05; 0,05]$, pois em pequenas regiões o valor do núcleo tende ao infinito, o que dificultaria a visualização do real comportamento do mesmo, e no gráfico do tensor regularizado, é aumentada a escala do eixo z em 100%, para que possa ser melhor visualizada a variação que ainda resta no núcleo regularizado.

Agrupando os três núcleos da figura 4.4 em apenas um gráfico e realizando um corte ao longo da coordenada $\xi_2 = 0,70$ é possível verificar como ocorre a regularização (figura 4.5).

Na figura 4.6 é demonstrada a regularização no núcleo de deslocamentos decorrente da avaliação do mesmo em coordenadas polares. Neste caso não há um cancelamento, mas sim uma redução nos valores do núcleo próximo ao ponto regular, pois os mesmos são multiplicados por ρ .

Em relação à integração numérica, é importante realizar uma comparação do método de integração direta com a IMCR. Desta maneira é possível verificar a relação entre o número de pontos de integração e o erro na integração através destes métodos. Na tabela 4.2, são trazidos os resultados da integração do termo H_{12} , do nó 1 do elemento da figura 4.3, através de integração direta, e de IMCR, em função dos pontos de integração utilizados na direção radial k_r , e nas quatro direções tangenciais k_t , e do número resultante de pontos de integração k_{total} . Como o cômputo das subdiagonais da matriz H através da IMCR depende do número de elementos da malha que será analisada, na tabela é trazido o número de pontos de Gauss utilizados na integração do restante da malha. A malha utilizada para o cálculo indireto da matriz H^{ii} neste caso foi a malha de um cubo unitário, com 6 elementos, o que pode ser a possível causa da baixa exatidão deste método. A integração direta convergiu rapidamente, o que mostra a eficiência do método.

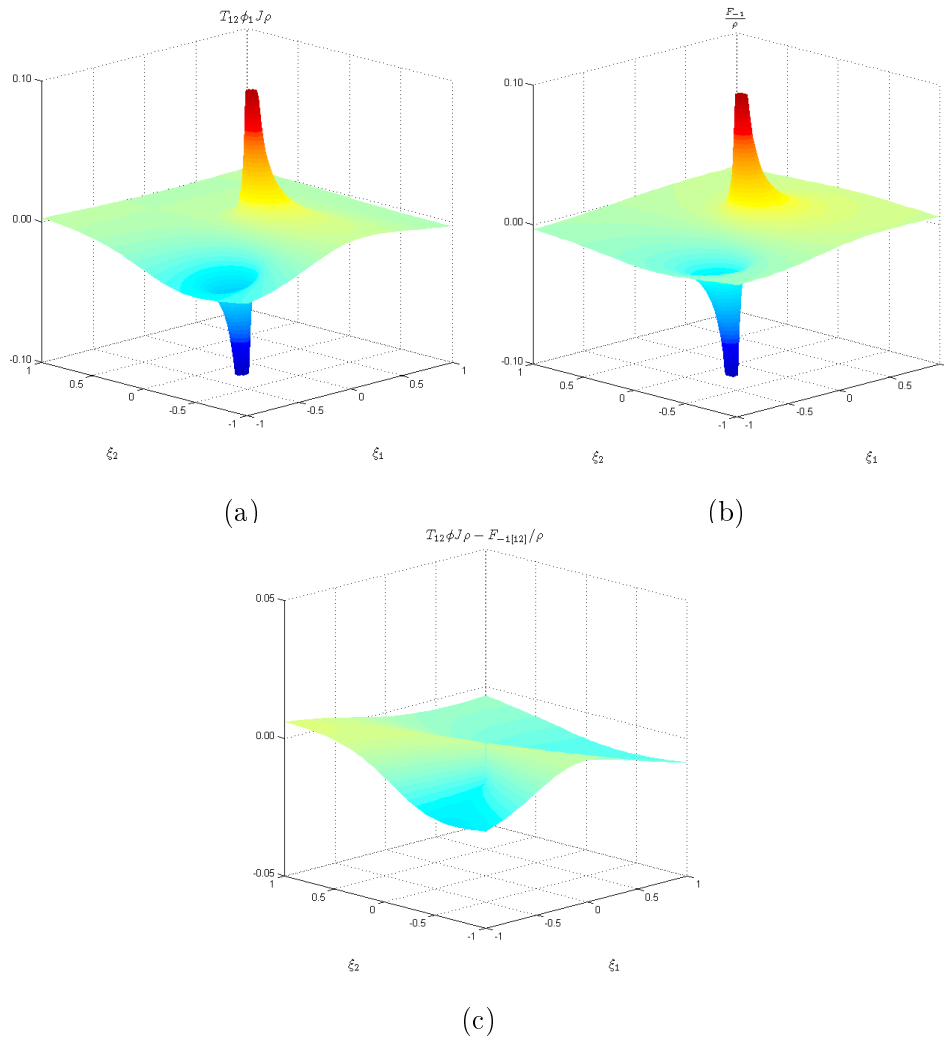


Figura 4.4 – Exemplo do tensor contendo p^* , no ponto 1 do elemento da figura 4.3 (a) tensor original, (b) expansão assintótica e (c) tensor regularizado.

A integração direta pode ser comparada também com a quadratura de Telles, já que a matriz G pode ser integrada na mesma rotina, considerando $F_{-1} = 0$ e $F_{-2} = 0$. Como foi mostrado na figura 4.6 há uma regularização quando avalia-se a integral em coordenadas polares. Esta comparação é importante pois calculando ambas as submatrizes na mesma rotina é reduzido o custo computacional para o cálculo das matrizes. Na tabela 4.3 são trazidos os resultados da integração do termo G_{12} , com o uso de coordenadas polares (integração direta) e com quadratura de Telles (Transformação Cúbica). É possível verificar na tabela que a integração direta obteve uma rápida convergência em comparação com a transformação de Telles, necessitando menor número de pontos de integração para obter os mesmos níveis de exatidão.

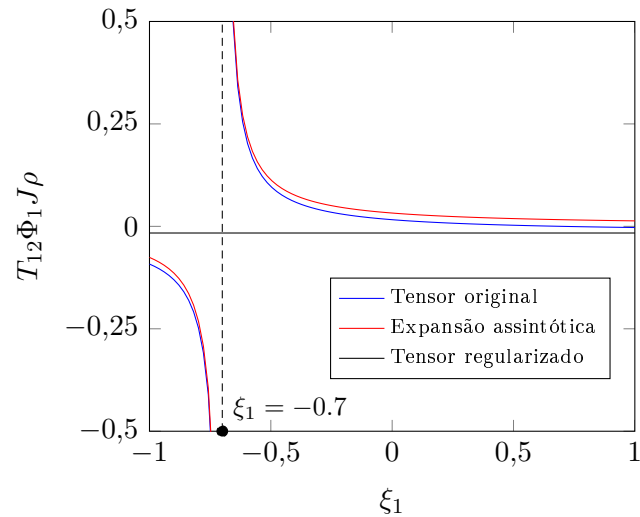


Figura 4.5 – Corte ao longo de $\xi_2 = 0,7$ no núcleo regularizado, e sobreposição da solução fundamental e da expansão assintótica desenvolvida no presente trabalho.

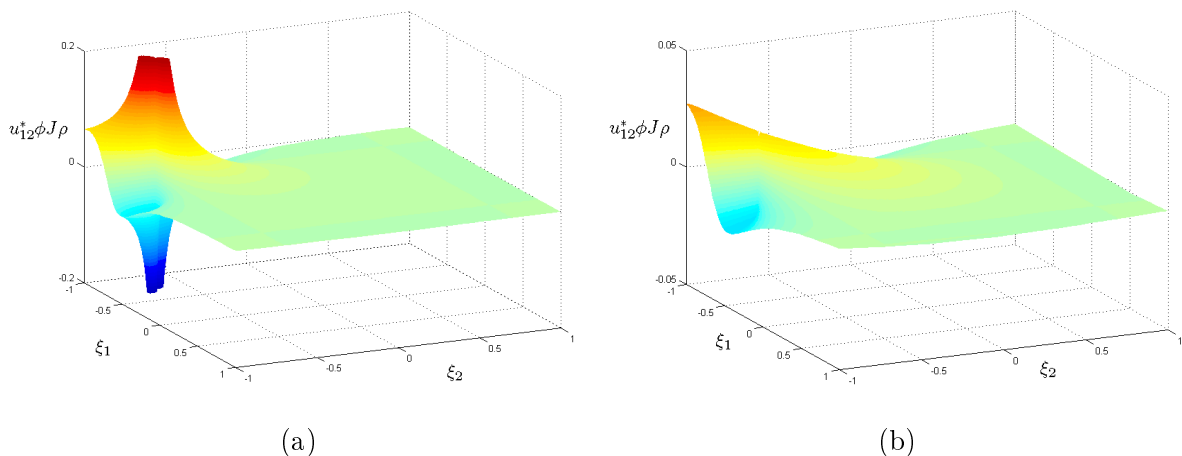


Figura 4.6 – Núcleo contendo \mathbf{u}^* , do ponto 1 ($\eta = (-0.7, -0.7)$) do elemento da figura 4.3 (a) núcleo original, (b) Núcleo avaliado em coordenadas polares.

De acordo com Hayami e Matsumoto, 1994a, a integração em coordenadas polares pode ser dificultada quando o elemento tem sua razão de aspecto alterada, fazendo com que os triângulos com maior ângulo interno necessitem de mais pontos de integração para uma mesma exatidão. Uma avaliação da consistência topológica da integração direta então será proposta, para comparação com os resultados obtidos pelo autor, com uma melhoria proposta ao método PART (Projeção e Transformações Angular e Radial) de Hayami e Brebbia, 1988. O termo G_{12} do elemento da figura 4.3 foi calculado, alterando a razão de aspecto do elemento. A integração foi realizada com vários conjuntos de pontos de integração, variando de 2 até 64 pontos, e na tabela 4.4 é trazido o número mínimo de pontos necessários para ser

Tabela 4.2 – Resultados para a integração do termo H_{12} , do nó 1 do elemento da figura 4.3

Método Direto					IMCR		
k_r	k_t	k_{total}	H_{12}	erro	k_{total}	H_{12}	erro
2	2	16	0,00248001784	2×10^{-1}	4	-0,03734397994	-1×10^1
2	4	32	0,00305845303	4×10^{-2}	16	0,00311920823	6×10^{-2}
2	6	48	0,00295738388	6×10^{-3}	36	-0,00053316094	-1
2	8	64	0,00294302124	7×10^{-4}	64	0,00202242677	-3×10^{-1}
2	10	80	0,00294129324	8×10^{-5}	100	0,00166095011	-4×10^{-1}
2	12	96	0,00294109623	8×10^{-6}	144	0,00210578089	-3×10^{-1}
2	14	112	0,00294107429	9×10^{-7}	196	0,00254692476	-1×10^{-1}
2	16	128	0,00294107188	1×10^{-7}	256	0,00289439218	-2×10^{-2}
2	20	160	0,00294107159	1×10^{-9}	400	0,00276447610	-6×10^{-2}
2	24	192	0,00294107159	2×10^{-11}	576	0,00281758570	-4×10^{-2}
2	32	256	0,00294107159	2×10^{-12}	1024	0,00290808177	-1×10^{-2}
2	48	384	0,00294107159	2×10^{-12}	2304	0,00293517083	-2×10^{-3}

obtido um erro relativo menor que 1×10^{-6} , para diversas razões de aspecto $\frac{a}{b}$, sendo k_r os pontos de integração na direção radial, k_{θ_a} os pontos de integração na direção do ângulo dos triângulos menores, k_{θ_b} os pontos de integração na direção do ângulo dos triângulos maiores e k_{total} o total de pontos de integração.

Tabela 4.3 – Resultados para a integração do termo G_{12} , do nó 1 do elemento da figura 4.3

Método Direto					Transformação Cúbica		
k_r	k_t	k_{total}	G_{12}	erro	k_{total}	G_{12}	erro
2	2	16	0,00170517661	-3×10^{-1}	4	0,06038022812	2×10^1
2	4	32	0,00236759780	-4×10^{-2}	16	0,00587969831	1
2	6	48	0,00245622662	-4×10^{-3}	36	0,00678976305	2
2	8	64	0,00246607694	-5×10^{-4}	64	0,00629558869	2
2	10	80	0,00246715306	-5×10^{-5}	100	0,00292002397	2×10^{-1}
2	12	96	0,00246726967	-6×10^{-6}	144	0,00405074964	6×10^{-1}
2	14	112	0,00246728225	-6×10^{-7}	196	0,00321692103	3×10^{-1}
2	16	128	0,00246728361	-7×10^{-8}	256	0,00253317415	3×10^{-2}
2	20	160	0,00246728377	-8×10^{-10}	400	0,00274090883	1×10^{-1}
2	24	192	0,00246728377	-9×10^{-12}	576	0,00272038277	1×10^{-1}
2	32	256	0,00246728377	1×10^{-14}	1024	0,00248401695	7×10^{-3}
2	48	384	0,00246728377	1×10^{-14}	2304	0,00247755616	4×10^{-3}

Tabela 4.4 – Pontos de integração para obtenção de erro menor que $1 \cdot 10^{-6}$ na integração da submatriz G_{ii}

$\frac{a}{b}$	Método Direto				PART ¹
	k_r	k_{θ_a}	k_{θ_b}	k_{total}	k_{total}
1,00	2	14	14	112	200
0,50	2	16	20	144	240
0,25	2	20	40	240	360
0,10	2	20	64	336	480
0,05	2	20	64	336	-
0,01	2	16	64	320	-

¹ Fonte: Hayami e Matsumoto, 1994a.

5. RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados obtidos através da implementação computacional do método com testes de referência (*benchmarks*) que permitem a comparação dos resultados computacionais com métodos já publicados na literatura.

Na integração numérica não singular, e no cálculo das submatrizes \mathbf{G}^{ii} com transformação cúbica (TC), foi utilizada a quadratura de Gauss Legendre com 16 pontos de integração nas duas direções. Este número elevado de pontos de integração na parte não singular foi usado pois esta parte da integração não é objeto de estudo neste trabalho, garantindo assim uma maior exatidão no restante das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , e também quando as submatrizes \mathbf{H}^{ii} forem calculadas indiretamente com IMCR.

Para a integração das submatrizes \mathbf{G}^{ii} e \mathbf{H}^{ii} com integração direta, foi implementada uma rotina para a seleção da quantidade mínima de pontos de integração conforme a razão de aspecto do elemento, para obtenção de um erro menor que 10^{-6} , conforme trazido na tabela 4.4.

Primeiramente, são apresentados os resultados para um problema de viga em flexão. O segundo caso apresentado é um problema de concentração de tensões em uma placa sob tração uniaxial com um furo central. Em sua maioria os resultados são comparados com modelos de referência solucionados através do MEF, o que garante uma melhor reprodução dos problemas estudados, visto que as soluções teóricas são obtidas através de simplificações bi-dimensionais ou hipóteses que não representam fielmente os problemas que serão abordados neste capítulo.

5.1 Viga em balanço

O problema proposto aqui é o de uma viga curta em balanço com uma carga na face oposta ao engaste, ilustrada na figura 5.1. A viga tem comprimento de 5m e sua seção transversal mede 1m x 1m. O módulo de elasticidade utilizado foi $E = 1N/m^2$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0$, e a carga aplicada foi de $1N/m^2$ na face oposta ao engaste.

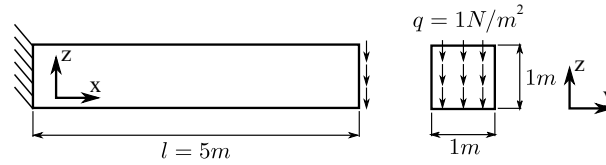


Figura 5.1 – Viga em balanço.

Para este estudo foram utilizadas 6 malhas para o MEC, desde 22 elementos (1 elemento por metro quadrado), até uma quantidade de 792 elementos (6 elementos por metro quadrado). A viga apresentada não se enquadra nas hipóteses da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, portanto, foi utilizado um modelo em MEF 3D como referência, com uma malha de 39.000 elementos sólidos tetraédricos lineares. Na figura 5.2 são trazidas as tensões normais σ_{xx} na face de engaste da viga, em função da coordenada z , para as diversas malhas testadas, como forma de ilustrar a distribuição das tensões. É possível verificar que ambos métodos obtiveram uma solução muito próxima à do MEF.

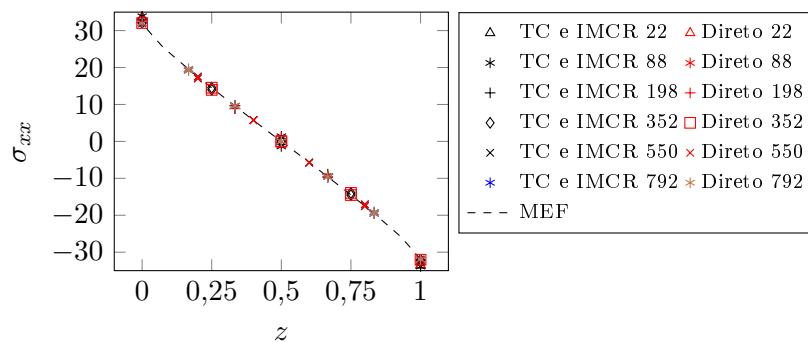


Figura 5.2 – Tensão σ_{xx} ao longo do engaste da viga.

Na figura 5.3 são trazidos os resultados de deslocamento máximo na direção z normalizado e o erro em relação ao valor obtido em MEF, em função do número de elementos utilizados na malha. O erro nos deslocamentos, considerando as malhas iguais, foi da mesma ordem para ambos os métodos, porém a integração direta obteve erro maior que TC/IMCR nas malhas mais refinadas.

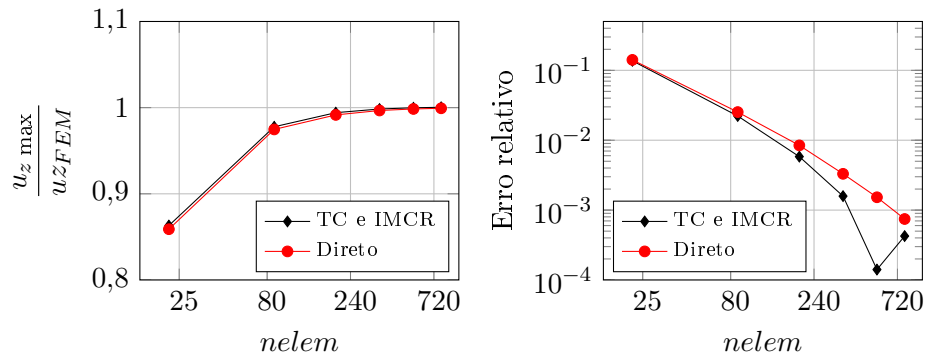


Figura 5.3 – Deslocamento máximo da viga para as malhas testadas e erro em relação à solução obtida com MEF.

Na figura 5.4 os resultados de tensão máxima normalizada e o erro em relação ao valor obtido com MEF são trazidos, em função do número de elementos da malha. Neste caso novamente ambos os métodos obtiveram erros da mesma ordem de grandeza, porém com menor erro da integração direta nas malhas iniciais.

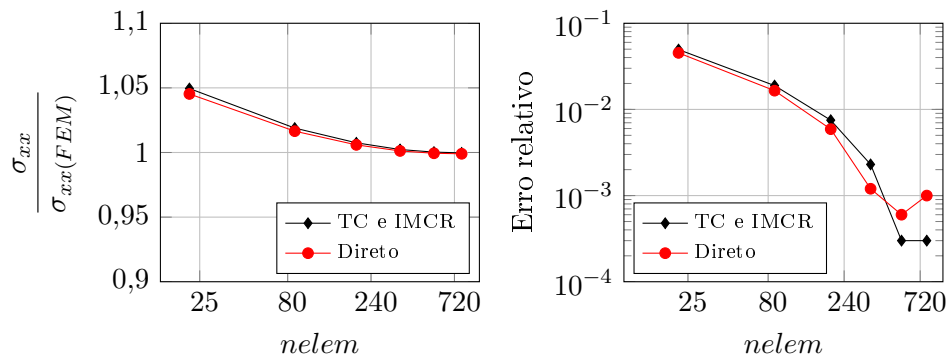


Figura 5.4 – Tensão σ_{xx} máxima da viga e erro em relação à solução do MEF para as malhas estudadas.

5.2 Placa com furo central

O problema da placa com furo central é de natureza bidimensional, mas é frequentemente empregado na literatura para avaliação da capacidade do método em calcular variações bruscas de tensões. Na modelagem para placas com espessuras muito reduzidas (ex.: menor que 1% do diâmetro do furo) a taxa de convergência em função do número de elementos pode tornar-se mais lenta para o MEC 3D, devido à distância entre alguns elementos ser muito menor que a dimensão destes elementos, dificultando as integrações numéricas que

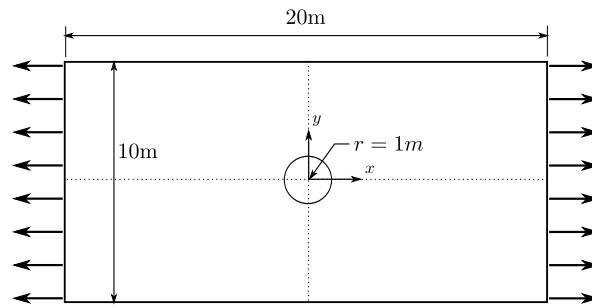


Figura 5.5 – Placa sob carga de tração uniaxial com furo central.

ainda são realizadas com a quadratura de Gauss Legendre. Desta forma, foi optado por uma placa com espessura $t = 0,4\text{m}$, raio do furo $r = 1\text{m}$, ilustrada na figura 5.5.

Este problema permite uma discretização com simetria horizontal e vertical ao longo das linhas de centro da placa. Para garantir uma boa resposta neste problema a discretização do contorno foi feita com auxílio do programa Gmsh [Geuzaine e Remacle, 2009], com as seguintes características: 10 elementos ao longo da face do furo central, 14 elementos ao longo da face de simetria em x e 10 elementos ao longo da face de simetria em y , resultando em 336 elementos, conforme a malha da figura 5.6. Os elementos das superfícies superior e inferior foram distribuídos automaticamente pelo programa.

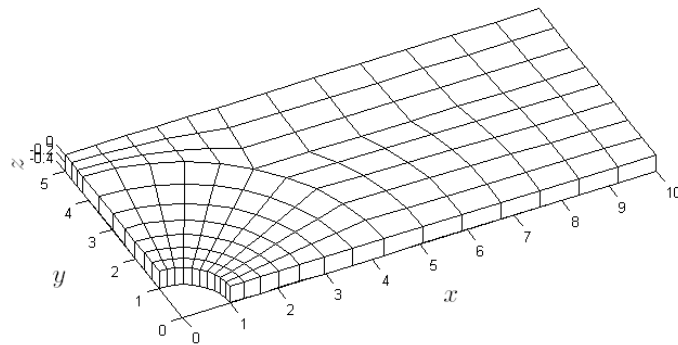


Figura 5.6 – Discretização de 1/4 da placa com elementos lineares.

Primeiramente foram comparados os deslocamentos ao longo do furo da placa com a solução analítica trazida por Szabó e Babuska, 1991. Foi avaliado o módulo dos deslocamentos nas direções x e y , ao longo dos nós da aresta do furo. Na figura 5.7 são trazidos os resultados obtidos para os deslocamentos, em função do ângulo θ , assim como o erro em relação à solução analítica. Apesar de ambos os métodos de integração resultarem em erros

da mesma ordem de grandeza, a integração direta apresentou maior erro.

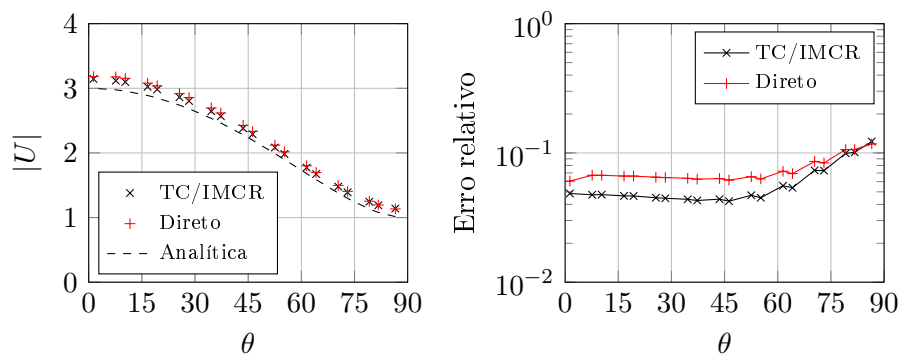


Figura 5.7 – Deslocamentos ao longo da aresta do furo, na placa com espessura $t = 0,4\text{m}$, e erro em relação à solução analítica [Szabó e Babuska, 1991].

Devido às dimensões desta placa, a solução teórica para uma placa infinita não descreverá corretamente a distribuição das tensões ao longo dos planos de simetria. Utilizou-se como referência um modelo em MEF 3D, com uma malha de 53.000 elementos tetraédricos lineares. Na figura 5.8 são trazidos os resultados de tensão normal σ_{xx} ao longo do plano de simetria vertical da placa, obtidos com TC/IMCR, e com a integração direta, e comparados com a solução do MEF. Pode-se notar uma diferença mais alta no erro entre a solução com TC/IMCR e a solução obtida com integração direta, a primeira tendo obtido menor ao longo de toda a placa, porém, na região mais próxima do furo, ambas as soluções obtiveram erros da mesma ordem de grandeza.

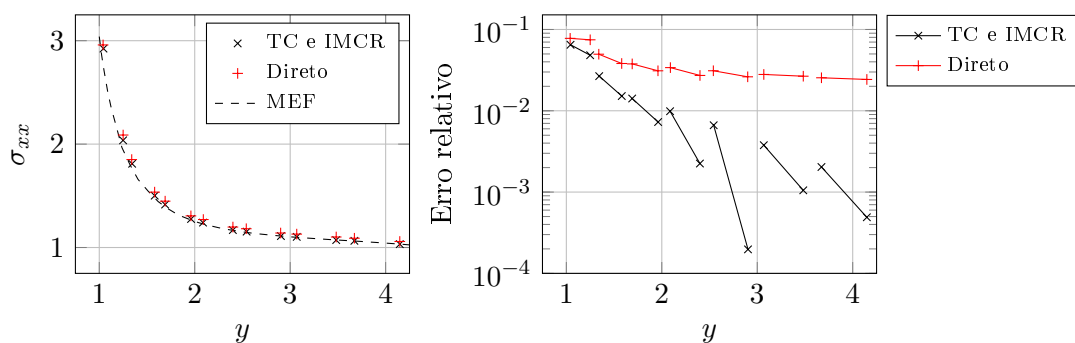


Figura 5.8 – Tensões na aresta $(0, y, 0)$, na placa com espessura $t = 0,4\text{m}$, e erro em relação à solução com o MEF.

A descontinuidade dos elementos pode assumir qualquer valor e ter influência sobre

os resultados, sendo assim, foi investigada a variação no recuo dos elementos. Valores de recuo de 10%, 15% e 20% foram avaliados, e na tabela 5.1 são trazidos os resultados obtidos para a tensão máxima σ_{xx} , extrapolados com as funções de interpolação do nó físico para o nó geométrico, no ponto $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$. Também é trazido o valor obtido com MEF, e o erro em relação à solução analítica de Pilkey e Pilkey, 2008, para uma placa de dimensões finitas como a deste exemplo. Os valores obtidos com MEC padrão foram mais próximos da solução analítica, enquanto a integração direta sofreu maior influência da variação do recuo do elemento. A solução obtida pelo MEF resultou em um maior erro em relação à solução analítica, que confirma a alta exatidão do MEC. A integração direta mostrou um erro maior em recuos menores, o que pode ser atribuído às quase-singularidades que surgem pela proximidade do ponto fonte à aresta do elemento. Ao aumentar o recuo, o erro da integração direta se aproxima do erro obtido com TC/IMCR.

Tabela 5.1 – Valores máximos de tensão e erro relativo à solução analítica, em $\mathbf{x} = (0, 1, 0)$, na placa com espessura $t = 0,4\text{m}$, para os diversos casos do MEC, e MEF 3D.

Método		σ_{xx}	erro %
MEC	recuo %		
TC e IMCR	10	3,154	0,16
TC e IMCR	15	3,129	-0,64
TC e IMCR	20	3,119	-0,95
Direto	10	3,223	2,35
Direto	15	3,171	0,70
Direto	20	3,111	-1,21
MEF 3D		3,040	-3,46
Solução analítica ¹		3,149	

¹ Fonte: Pilkey e Pilkey, 2008.

Como forma de analisar o desempenho da integração direta em problemas de espessura reduzida, foi realizada uma comparação dos resultados obtidos com ambos os métodos à medida que varia-se a espessura da placa. A malha utilizada foi a da figura 5.6, e a espessura da placa foi variada entre 0,01m e 2m, sendo que a máxima espessura tem o mesmo valor do diâmetro do furo da placa. Na figura 5.9 são apresentados os resultados obtidos

deste estudo. Primeiramente são apresentadas as tensões máximas calculadas, normalizadas com a solução analítica, para as várias espessuras analisadas, para os métodos TC/IMCR e Direto, e em seguida é trazido o erro relativo no cálculo destas tensões. Como a solução considerada é uma solução em EPT, é esperada uma pequena divergência na tensão à medida que aumenta-se a espessura da placa.

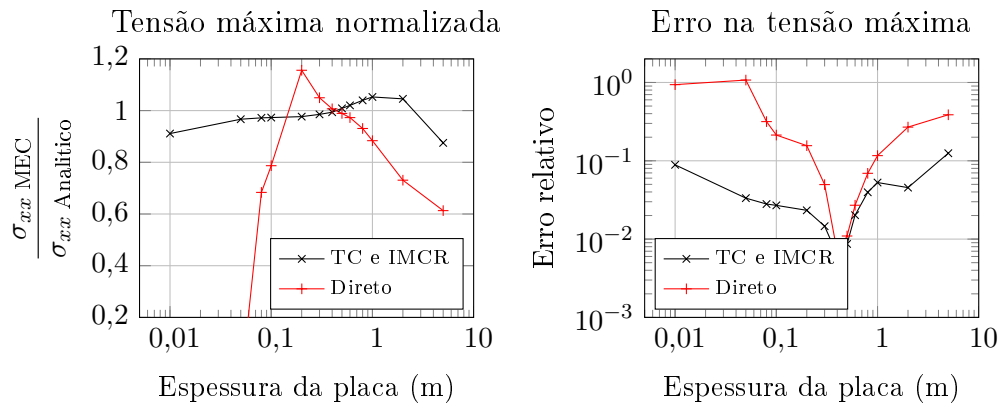


Figura 5.9 – Tensão máxima normalizada e erro em relação à solução analítica, em função da espessura da placa.

A implementação padrão obteve os erros mais baixos entre as espessuras de 0,05m e 0,6m. Para a espessura de 0,01m o erro aumentou, o que pode ser atribuído à baixa espessura da placa, que causa quase-singularidades entre os elementos muito próximos. Nas espessuras maiores que 0,6m, o aumento do erro pode ser atribuído à não adequação à hipótese de EPT. À partir da espessura de 1m, a alteração da razão de aspecto dos elementos das faces laterais da placa também pode ter causado uma redução na qualidade da solução, uma vez que a tensão calculada alterou-se consideravelmente em relação à tendência que vinha mantendo desde as espessuras mais baixas. Com a integração direta, somente houve erros próximos dos obtidos com a implementação padrão, entre as espessuras 0,4m e 0,8m, o que indica que a integração foi dificultada consideravelmente pela variação da razão de aspecto dos elementos, uma vez que este foi o único fator que alterou-se junto com a espessura da placa.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma implementação do MEC para elasticidade linear 3D, com duas diferentes abordagens para o cálculo das submatrizes singulares: A primeira através da Transformação Cúbica de Telles para as matrizes \mathbf{G}^{ii} , e imposição de movimento de corpo rígido para as matrizes \mathbf{H}^{ii} . A outra abordagem através do método de integração direta de Guiggiani para a matriz \mathbf{H}^{ii} , e a matriz \mathbf{G}^{ii} avaliada juntamente em coordenadas polares na mesma rotina.

O primeiro objetivo atingido durante a realização deste trabalho foi a implementação computacional do método dos elementos de contorno para elasticidade linear tridimensional, empregando elementos descontínuos. Esta implementação tem papel importante pois sem a mesma não seria possível o desenvolvimento do restante do trabalho, nem a comparação do método de integração direta com os métodos tradicionais de integração utilizados no MEC. Também foi possível avaliar o desempenho dos elementos descontínuos em elasticidade 3D, resultados estes escassos na literatura.

O método de integração direta de Guiggiani foi devidamente apresentado, e pode ser considerado muito robusto, no sentido de que não há restrições de grau das funções de interpolação, nem as expansões assintóticas requeridas são de difícil obtenção, podendo ser obtidas sistematicamente para qualquer que seja o problema. O método ainda apresenta vantagens como a independência do restante da malha para um determinado elemento, a possibilidade de aplicação em problemas onde não existem deslocamentos de corpo rígido, e a possibilidade de integração com quadratura gaussiana padrão. A metodologia para obtenção destas expansões foi descrita completamente neste trabalho, através da demonstração da obtenção das expansões de ambos os tensores da elasticidade. Uma metodologia de integração numérica em coordenadas polares também foi apresentada, o que é importante para o entendimento do processo de integração. A eficiência da integração direta foi demonstrada inicialmente com os resultados preliminares de integração, apresentados no Capítulo 4. Foi demonstrado que a integração direta requer menos pontos de integração do que o método PART [Hayami e Matsumoto, 1994a] quando a razão de aspecto do elemento é alterada. O objetivo principal do trabalho foi atingido, através do desenvolvimento das expansões assintóticas para os núcleos da elasticidade linear tridimensional, e da implementação computacional.

cional do método de integração direta para realização da integração dos núcleos singulares do MEC.

No capítulo 5 os resultados numéricos dos testes demonstraram a eficiência da integração direta em alguns casos práticos de engenharia. No problema da viga curta a implementação com integração direta convergiu tão rapidamente quanto a implementação com TC/IMCR, tanto no cálculo dos deslocamentos, quanto no cálculo das tensões. No problema da placa com furo, os resultados de deslocamentos e de tensões foram adequados tanto com a solução teórica quanto com a solução em MEF, porém a integração direta foi menos precisa que TC/IMCR em ambas as soluções.

Foi possível observar o comportamento da integração direta em relação à variação do recuo do elemento, que demonstrou maior erro com recuos baixos. Esta dificuldade tem causas possivelmente relacionadas ao comportamento do integrando quando o ponto fonte está muito próximo da aresta do elemento, assim como ocorre quando a razão de aspecto do elemento é alterada, sugerindo uma maior investigação da fonte destes erros para o aumento da eficiência do método.

No que diz respeito ao teste de espessura da placa, pôde-se concluir que a implementação com TC/IMCR foi suficientemente precisa para espessuras bastante reduzidas, o que é um ponto positivo para o MEC em geral, porém a integração direta não obteve os mesmos níveis de erro que TC/IMCR, o que indica que há dificuldade de integração com malhas onde a razão de aspecto de alguns elementos é desfavorável. Esta dificuldade merece uma maior investigação, pois como relatado no capítulo 5, na implementação do programa considerou-se a razão de aspecto do elemento antes da integração, aumentando o número de pontos no sentido angular para garantir um baixo erro na integração.

Em resumo, conclui-se das curvas de convergência obtidas com os problemas estudados, que o MEC com quadratura Gaussiana na integração não singular e com TC e IMCR na integração dos tensores de deslocamentos e trações, respectivamente, é aplicável a problemas de elasticidade. Sobre a implementação com a integração direta dos tensores de deslocamentos e trações, principal tema de estudo deste trabalho, conclui-se que em alguns casos a mesma obteve níveis de erro iguais aos obtidos com a implementação anterior, contudo, a mesma mostrou-se dependente da regularidade da malha, necessitando ainda de melhorias para evitar esta dependência e aumentar sua versatilidade e robustez. Sendo assim, o

trabalho atingiu seus objetivos gerais e específicos.

Sugestões para trabalhos futuros

- Estudo incluindo elementos quadráticos e de ordem mais alta, uma vez que este trabalho limitou-se aos elementos lineares.

- Investigação do uso de malhas não conformes, relacionando a não-conformidade da malha com a convergência da solução, tendo em vista que este tipo de malha permite uma maior regularidade através de refinamentos locais, sem adições de elementos fora destas regiões como ocorre nas malhas conformes.

- Investigação das fontes de erro na integração dos elementos descontínuos em coordenadas polares com o método direto, visto que, conforme apresentado no capítulo 5, não houve uma boa concordância entre os resultados apresentados para malhas onde alguns elementos estão extremamente distorcidos, como no problema da placa com espessura mais baixa. Recentemente, Rong et al., 2013, desenvolveram transformações que anulam as quase singularidades na integração polar com o método direto, causadas pela razão de aspecto dos elementos, e pela posição do nó físico muito próxima do contorno do elemento.

- Desenvolvimento de expansões assintóticas para materiais não isotrópicos, assim como outras soluções fundamentais para elasticidade tridimensional.

- Extensão do método direto para problemas não lineares e de contato entre corpos.

- Problemas fora da elasticidade onde também pode ser avaliado o método direto: piezoelectricidade, eletromagnetismo, acústica, dinâmica dos fluidos, entre outros.

- No que tange à linguagem de programação, este trabalho foi desenvolvido em Matlab. Como forma de extensão deste trabalho, pode ser realizada uma programação mais enxuta e eficiente através do uso de outras linguagens de programação, e com técnicas avançadas tais como a programação orientada a objeto. Um estudo aprofundado da implementação computacional também é de extrema importância para aumentar a eficiência do programa, a integração com outras ferramentas computacionais já existentes, e a aplicação para outros problemas físicos além da Elasticidade.

- Aplicação de técnicas de suavização de resultados que consideram os campos dos elementos vizinhos, trazendo assim campos de variáveis não apenas mais suaves, mas também enriquecidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliabadi, M. and Hall, W. Analytical removal of singularities and one-dimensional integration of three-dimensional boundary element method kernels, **Engineering Analysis**, vol. 4(1), p. 21 – 24, 1987a.

Aliabadi, M. and Hall, W. weighted gaussian methods for three-dimensional boundary element kernel integration, **Communications in Applied Numerical Methods**, vol. 3(2), p. 89–96, 1987b.

Aliabadi, M. H., Hall, W. S., and Phemister, T. G. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 21(12), p. 2221–2236, 1985.

Beer, G., Smith, I., and Duenser, C. **The Boundary Element Method with Programming**. Springer Wien, New York, 2008.

Brebbia, C. A. and Dominguez, J. **Boundary Elements - An Introductory Course**. WIT Press, 1989.

Carley, M. **Numerical quadratures for near-singular and near-hypersingular integrals in boundary element methods**. In *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, volume 109, pages 49–60. The Royal Irish Academy, 2009.

Cruse, T. A. Numerical Solutions in Three dimensional elastostatics, **International Journal Solids Structures**, vol. 5, p. 1259–1274, 1969.

Cruse, T. A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis, **Computers & Structures**, vol. 3(3), p. 509 – 527, 1973.

Cruse, T. A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis, **Computers & Structures**, vol. 4(4), p. 741 – 754, 1974.

Dumont, N. A. On the efficient numerical evaluation of integrals with complex singularity poles, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 13(2), p. 155 – 168, 1994.

Gao, X.-W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 26(10), p. 905 – 916, 2002.

Gao, X.-W. Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals—Theory and Fortran code, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, vol. 188(1), p. 44 – 64, 2006.

Gao, X.-W. An effective method for numerical evaluation of general 2D and 3D high order singular boundary integrals, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 199(45–48), p. 2856 – 2864, 2010.

Geuzaine, C. and Remacle, J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 79(11), p. 1309–1331, 2009.

Granados, J. and Gallego, R. Regularization of nearly hypersingular integrals in the boundary element method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 25(3), p. 165 – 184, 2001.

Guiggiani, M. **Formulation and numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels**. In V. Sladek, J. S., editor, *Singular integrals in boundary element methods*, volume 3 of *Advances in Boundary Elements*, pages 85–124. Computational Mechanics, 1998.

Guiggiani, M. and Casalini, P. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24(9), p. 1711–1720, 1987.

Guiggiani, M. and Gigante, A. A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 57(4), p. 906–915, 1990.

Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T. J., and Rizzo, F. J. A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations, **Transactions of ASME**, vol. 59, p. 604–614, 1992.

Hayami, K. **A Robust Numerical Integration Method for 3-D Boundary Element Analysis and Its Error Analysis using Complex Function Theory.** In Espelid, T. and Genz, A., editors, *Numerical Integration*, volume 357 of *NATO ASI Series*, pages 235–248. Springer Netherlands, 1992.

Hayami, K. and Brebbia, C. **A New Coordinate Transformation Method for Singular and Nearly Singular Integrals over General Curved Boundary Elements.** In Brebbia, C., Wendland, W., and Kuhn, G., editors, *Mathematical and Computational Aspects*, volume 9/1 of *Boundary Elements IX*, pages 375–399. Springer Berlin Heidelberg, 1987.

Hayami, K. and Brebbia, C. **Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3-D boundary element method, (Invited paper).** In *Boundary Elements X, Proc. 10th Int. Conf. on Boundary Elements*, 1988.

Hayami, K. and Matsumoto, H. Improvement of quadrature for nearly Singular Integrals in 3D-BEM, **Boundary Element Method**, vol. XIV, p. 201–210, 1994a.

Hayami, K. and Matsumoto, H. A numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 13(2), p. 143 – 154, 1994b.

Hui, C.-Y. and Mukherjee, S. Evaluation of hypersingular integrals in the boundary element method by complex variable techniques, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 34(2), p. 203–221, 1997.

Jawson, M. A. Integral Equation Methods in Potential Theory. I, **Proceedings Royal Society London**, vol. 275, p. 23–32, 1963.

Johnston, B. M. and Johnston, P. R. A modified non-linear transformation method for evaluating weakly singular boundary integrals, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 148(2), p. 519 – 535, 2004.

Johnston, P. R. Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 45(10), p. 1333–1348, 1999.

Johnston, P. R. and Elliott, D. A generalisation of Telles' method for evaluating weakly singular boundary element integrals, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, vol. 131(1-2), p. 223 – 241, 2001.

Kim-Chuan, T. and Mukherjee, S. Hypersingular and finite part integrals in the boundary element method, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 31(17), p. 2299 – 2312, 1994.

Klees, R. Numerical calculation of weakly singular surface integrals, **Journal of Geodesy**, vol. 70(11), p. 781–797, 1996.

Koizumi and Utamura. A polar coordinate integration scheme with a hierarchical correction procedure to improve numerical accuracy on the boundary element method., **Computational Mechanics**, vol. 7, p. 183–194, 1991.

Kutt, H. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration, **Numerische Mathematik**, vol. 24(3), p. 205–210, 1975.

Li, Z. and Ram-Mohan, L. R. Taming hypersingular integrals using dimensional continuation, **Phys. Rev. E**, vol. 85, p. 016706, 2012.

Linz, P. On the approximate computation of certain strongly singular integrals, **Computing**, vol. 35(3-4), p. 345–353, 1985.

Liu, Y. and Rudolphi, T. New identities for fundamental solutions and their applications to non-singular boundary element formulations, **Computational Mechanics**, vol. 24(4), p. 286–292, 1999.

Mikhlin, S. **Multidimensional singular integrals and integral equations**. International series of monographs in pure and applied mathematics. Pergamon Press, 1965.

Paget, D. The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals, **Numerische Mathematik**, vol. 36(4), p. 447–453, 1981a.

Paget, D. A quadrature rule for finite-part integrals, **BIT Numerical Mathematics**, vol. 21(2), p. 212–220, 1981b.

Pape, D. A. and Banerjee, P. K. Treatment of Body Forces in 2D Elastostatic BEM Using Particular Integrals, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 54, p. 866, 1987.

Patterson, C. and Sheikh, M. **Non-Conforming Boundary Elements for Stress Analysis**. In Brebbia, C., editor, *Boundary Element Methods*, volume 3 of *Boundary Elements*, pages 137–152. Springer Berlin Heidelberg, 1981.

Peirce, A. P. and Napier, J. A. L. A spectral multipole method for efficient solution of large-scale boundary element models in elastostatics, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 38(23), p. 4009–4034, 1995.

Pereira, O. A. and Parreira, P. Direct evaluation of Cauchy-principal-value integrals in boundary elements for infinite and semi-infinite three-dimensional domains, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 13(4), p. 313 – 320, 1994.

Pilkey, W. and Pilkey, D. **Peterson’s Stress Concentration Factors**. Wiley, 2008.

Qin, X., Zhang, J., Xie, G., Zhou, F., and Li, G. A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular integrals on 3D boundary element, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, vol. 235(14), p. 4174 – 4186, 2011.

Rüberg, T. and Schanz, M. An alternative collocation boundary element method for static and dynamic problems, **Computational Mechanics**, vol. 44(2), p. 247–261, 2009.

Rizzo, F. J. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics, **Quarterly of applied Mathematics**, vol. 25, p. 83–95, 1967.

Rizzo, F. J. and Shippy, D. J. An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 11(11), p. 1753–1768, 1977.

Rong, J., Wen, L., and Xiao, J. An efficient method for evaluating BEM singular integrals on curved elements with application in acoustic analysis, **CoRR**, vol. abs/1306.0282, 2013.

Rosen, D. and Cormack, D. E. Singular and near singular integrals in the BEM: A global approach, **SIAM Journal on Applied Mathematics**, vol. 53(2), p. 340–357, 1993.

Rosen, D. and Cormack, D. E. The continuation approach for singular and near-singular integration, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 13(2), p. 99 – 113, 1994.

Rosen, D. and Cormack, D. E. On corner analysis in the {BEM} by the continuation approach, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 16(1), p. 53 – 63, 1995.

Rudolphi, T. The use of simple solutions in the regularization of hypersingular boundary integral equations, **Mathematical and Computer Modelling**, vol. 15(3–5), p. 269 – 278, 1991.

Salvadori, A. Analytical integrations in 2D BEM elasticity, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 53(7), p. 1695–1719, 2002.

Scuderi, L. A new smoothing strategy for computing nearly singular integrals in 3D Galerkin {BEM}, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, vol. 225(2), p. 406 – 427, 2009.

Singh, K. M. and Tanaka, M. Elementary analytical integrals required in subtraction of singularity method for evaluation of weakly singular boundary integrals, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 31(3), p. 241 – 247, 2007.

Stroud, A. and Secrest, D. **Gaussian quadrature formulas**. Prentice Hall, 1966.

Symm, G. T. Integral Equation Methods in Potential Theory. II, **Proceedings Royal Society London**, vol. 275, p. 33–46, 1963.

Szabó, B. and Babuska, I. **Finite element analysis**. Wiley Series in Computational Mechanics. Wiley, 1991.

Telles, J. and Oliveira, R. Third degree polynomial transformation for boundary element integrals: Further improvements, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 13(2), p. 135 – 141, 1994.

Telles, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24(5), p. 959–973, 1987.

Yong-hui, L. and Xin-sen, L. Polar coordinate transformation approach for treatment of singular integrals in boundary element methods, **Applied Mathematics and Mechanics**, vol. 9(10), p. 959–967, 1988.

Zhu, J., Shah, A., and Datta, S. The evaluations of cauchy principal value integrals and weakly singular integrals in BEM and their applications, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 39(6), p. 1017–1028, 1996.