

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
ENGENHARIA ELÉTRICA

**FERNANDO AUGUSTO BENDER**

**TÉCNICAS DE COMPENSAÇÃO  
DINÂMICA PARA SISTEMAS  
LINEARES COM SATURAÇÃO DE  
CONTROLE**

Porto Alegre  
2006

**FERNANDO AUGUSTO BENDER**

**TÉCNICAS DE COMPENSAÇÃO  
DINÂMICA PARA SISTEMAS  
LINEARES COM SATURAÇÃO DE  
CONTROLE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Instrumentação Eletro-Eletrônica

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr

Porto Alegre  
2006

**FERNANDO AUGUSTO BENDER**

**TÉCNICAS DE COMPENSAÇÃO  
DINÂMICA PARA SISTEMAS  
LINEARES COM SATURAÇÃO DE  
CONTROLE**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr, UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse,  
França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sophie Tarbouriech, LAAS  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse, França

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto, UFSC  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse, França

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, PUCRS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Romeu Reginatto, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcelo S. Lubaszewski

Porto Alegre, Abril de 2006.

## **DEDICATÓRIA**

*Aos bravos da Ponte Milvio esta humilde lembrança.*

## **AGRADECIMENTOS**

À infinita compreensão dos que me cercam.

À atenção dos que me ouvem.

À bondade de quem me ensina.

Ao valor dos que admiro.

Ao amor da minha família.

À beleza ingênua do Sol e da Lua.

## RESUMO

Esta dissertação aborda a síntese de leis de controle baseadas em compensação dinâmica de saída para sistemas lineares contínuos invariantes no tempo, sujeitos a restrições no atuador. Baseados em condições suficientes expressas em LMIs, obtidas a partir de uma nova condição de setor para a função zona-morta, dois métodos são propostos. O primeiro método propõe a síntese de compensadores dinâmicos de *anti-windup* de ordem plena e reduzida para um sistema com um controlador dado *a priori* desprezando limites do atuador. A síntese dos compensadores considera um atuador restrito em amplitude e o sistema sujeito a perturbações limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ . A verificação das condições enunciadas garante a estabilidade da origem em malha fechada, ganho  $\mathcal{L}_2$  limitado da perturbação à saída controlada do sistema, e um conjunto de inicialização dos estados do sistema tolerante à perturbação de norma  $\mathcal{L}_2$  máxima, conhecida. Na ausência de perturbação a origem é garantida assintoticamente estável. Para o compensador de ordem plena, condições em LMIs garantem a estabilidade local e global da origem. Para o caso de ordem reduzida, inicialmente obtém-se estas condições expressas em termos de BMIs, sobre as quais aplica-se o Lema de Finsler, e pela escolha apropriada de seus multiplicadores, condições expressas em LMIs são obtidas. Dois métodos baseados em BMIs são propostos para estender os resultados obtidos das otimizações, em esquemas de relaxação.

O segundo método proposto aborda a síntese de controladores dinâmicos, para um atuador restrito em amplitude e taxa de variação, sujeito a perturbações limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ . Propõe-se um controlador dinâmico não-linear, composto por um compensador dinâmico linear, um integrador saturante e laços *anti-windup*. Esta metodologia possibilita a síntese simultânea de um controlador, e da malha de compensação *anti-windup*. A verificação das condições enunciadas garante a estabilidade da origem em malha fechada, ganho  $\mathcal{L}_2$  limitado da perturbação à saída controlada do sistema, e um conjunto de inicialização do sistema tolerante à perturbação de norma  $\mathcal{L}_2$  máxima, conhecida. Na ausência de perturbação a origem é garantida assintoticamente estável. As condições para estabilidade local e global são formuladas em LMIs a partir da aplicação do lema de Finsler e da escolha apropriada de multiplicadores. Dois métodos também baseados em BMIs podem estender os resultados obtidos das otimizações em esquemas de relaxação. Casos especiais são propostos a partir do método geral obtido; nestes casos condições diretamente em LMI podem ser obtidas.

Problemas de otimização são propostos para ambos os métodos para maximizar a tolerância à perturbação e a minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação à saída controlada. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar o efeito de cada método na solução do problema de máxima tolerância à perturbação.

**Palavras-chave:** Antiwindup, Saturação, Sistemas Lineares, Tempo Contínuo.

## ABSTRACT

This thesis addresses control law synthesis based upon dynamic output compensation of continuous time invariant linear systems. By sufficient conditions expressed in LMIs, obtained from a new sector condition to the dead-zone function, two methods are proposed. The first one, comprises the synthesis of full and reduced order dynamic *anti-windup* compensators for a system with a linear controller *a priori* given, regardless the actuators limits. The compensator synthesis considers an amplitude limited actuator and a system subjected to  $\mathcal{L}_2$ -norm limited perturbation. The verification of the announced conditions assures the closed-loop origin stability, limited  $\mathcal{L}_2$  gain for the perturbation at the system controlled output, and a system states initialization set tolerating the known  $\mathcal{L}_2$ -norm disturbance. In the absence of disturbance the origin is asymptotically stable guaranteed. For the full-order compensator, LMI conditions assure the local and global origin closed-loop stability. For the reduced order case, at first, BMI conditions are obtained, which, by the Finsler Lemma and proper choosing of its multipliers, become LMIs. Two methods are presented based on BMIs in order to improve the obtained results, by relaxation schemes.

The second method addresses the synthesis of dynamic controllers considering a linear plant with the actuator restricted both in amplitude and rate, the system is meant to be subjected to  $\mathcal{L}_2$  norm disturbances. The proposed methodology issues a non-linear dynamic controller, composed by a dynamic linear compensator, a saturating integrator and *anti-windup* loops. This approach allows the simultaneous synthesis of both the controller and the *anti-windup* loops. The validity of its announced conditions guarantees the closed-loop origin stability, an upper-bound to the disturbances  $\mathcal{L}_2$  gain on the plant's controlled output, and an initialization set for the system that stands the specified disturbance. In the absence of disturbances the system's origin is asymptotically stable guaranteed. Both local and global stability conditions are given in terms of LMIs. Two BMI-based methods arise in order to improve the results obtained on the referred optimizations problems by relaxation schemes. Special cases are derived from the general method; in these cases directly LMI conditions may be obtained.

Optimization problems arise in both methods in order to maximize disturbance tolerance and rejection, by means of respectively its  $\mathcal{L}_2$ -norm, and  $\mathcal{L}_2$ -gain at the controlled output. Numerical Examples are presented in order to illustrate the effect of each method in the solution of the disturbance toleration problem.

**Keywords:** *Anti-windup*, Saturation, Linear Systems, Continuous Time.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	9
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	10
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	11
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
<b>2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES</b> . . . . .	15
<b>3 CONTROLE SOB SATURAÇÃO</b> . . . . .	19
<b>3.1 Formulação Geral do Problema</b> . . . . .	19
<b>3.2 Modelos para Termo de Saturação</b> . . . . .	22
3.2.1 Modelagem por Regiões de Saturação . . . . .	22
3.2.2 Modelagem Politópica . . . . .	23
3.2.3 Modelagem por Não-Linearidade de Setor . . . . .	24
<b>3.3 Problemas</b> . . . . .	26
3.3.1 Análise . . . . .	26
3.3.2 Síntese . . . . .	27
<b>3.4 Síntese de <i>Anti-windup</i></b> . . . . .	29
<b>4 COMPENSAÇÃO ANTI-WINDUP DINÂMICA</b> . . . . .	31
<b>4.1 Introdução</b> . . . . .	31
<b>4.2 Definição do Problema</b> . . . . .	31
<b>4.3 O Sistema em Malha Fechada</b> . . . . .	33
<b>4.4 Resultados Principais</b> . . . . .	35
4.4.1 Síntese de Compensadores de ordem $n_{aw} = n + n_c$ . . . . .	35
4.4.2 Síntese de Compensadores de ordem $n_{aw} < n + n_c$ . . . . .	42
<b>4.5 Problemas de Otimização</b> . . . . .	50
4.5.1 Tolerância à Perturbação . . . . .	50
4.5.2 Rejeição à Perturbação . . . . .	51
<b>4.6 Exemplos Numéricos</b> . . . . .	52
4.6.1 Simulação com o Compensador <i>Anti-windup</i> de Ordem Plena . . . . .	53
4.6.2 Síntese de Compensador <i>Anti-windup</i> de Ordem Reduzida . . . . .	53
<b>5 SÍNTESE DE CONTROLADORES DINÂMICOS</b> . . . . .	59
<b>5.1 Introdução</b> . . . . .	59
<b>5.2 Definição do Problema</b> . . . . .	59
<b>5.3 O Sistema em Malha Fechada</b> . . . . .	61

<b>5.4</b>	<b>Resultados Principais</b>	62
<b>5.5</b>	<b>Casos Especiais</b>	70
5.5.1	Matriz de transferência da planta estritamente própria, atuador mensurável: $D_y = 0$ e $v_c = v_\psi$	70
5.5.2	Matriz de transferência estritamente própria, atuador mensurável e entrada do controlador livre de perturbação: $D_y = 0$ , $v_c = v_\psi$ e $B_{c,w} = 0$	73
<b>5.6</b>	<b>Problemas de Otimização</b>	73
5.6.1	Tolerância à Perturbação	74
5.6.2	Rejeição à Perturbação	75
<b>5.7</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	75
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b>	79
	<b>REFERÊNCIAS</b>	81

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1:	Regiões de Saturação . . . . .	23
Figura 3.2:	$i$ -ésimo componente da função $\psi_{(\cdot)}(\cdot)$ . . . . .	24
Figura 4.1:	Sistema em Malha Fechada . . . . .	33
Figura 4.2:	Sinal $z$ - Ordem Plena . . . . .	54
Figura 4.3:	Sinal $u$ - Ordem Plena . . . . .	54
Figura 4.4:	Sinal $w$ - Ordem Plena . . . . .	55
Figura 4.5:	Sinal $y_{aw}$ - Ordem Plena . . . . .	55
Figura 4.6:	Sinal $y_c$ - Ordem Plena . . . . .	56
Figura 4.7:	Sinal $z$ - Ordem Reduzida . . . . .	56
Figura 4.8:	Sinal $u$ - Ordem Reduzida . . . . .	57
Figura 4.9:	Sinal $w$ - Ordem Reduzida . . . . .	58
Figura 4.10:	Sinal $y_{aw}$ - Ordem Reduzida . . . . .	58
Figura 4.11:	Sinal $y_c$ - Ordem Reduzida . . . . .	58
Figura 5.1:	Topologia de malha fechada proposta . . . . .	60
Figura 5.2:	Sinal $z$ . . . . .	76
Figura 5.3:	Sinal $u$ . . . . .	77
Figura 5.4:	Sinal $w$ . . . . .	78

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1:	<i>Trade-off</i> Tolerância × Atenuação para a perturbação externa. . . . .	57
Tabela 5.1:	<i>Trade-off</i> Tolerância × Atenuação para a perturbação externa. . . . .	77

## LISTA DE SÍMBOLOS

- ★ bloco simétrico
- bloco não relevante ao desenvolvimento
- BMI *Bilinear Matrix Inequality*
- LMI *Linear Matrix Inequality*
- $(i)$   $i$ -ésimo componente de um vetor
- $i$   $i$ -ésima linha/coluna de uma matriz
- $\text{sym}\{\cdot\}$  soma do argumento com o seu transposto
- $\text{sat}_{(\cdot)}(\bullet)$  saturação com limites simétricos em  $\pm(\cdot)$  aplicada ao vetor  $(\bullet)$
- $\psi_{(\cdot)}(\bullet)$  função vetorial equivalente a  $(\bullet) - \text{sat}_{(\cdot)}(\bullet)$
- $\text{rank}(A)$  posto da matriz  $A$
- $\varepsilon(P, \beta)$  elipsóide definido por  $x^T P x < \beta$
- $\mathcal{L}_2$  espaço de sinais com norma-2 finita
- $\|\cdot\|$  módulo
- $\|x(t)\|_2$  norma-2 do sinal  $x(t)$ :  $\|x(t)\|_2 = \left( \int_0^{\infty} x(t)^T x(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$
- $\mathfrak{R}$  conjunto dos números reais
- $\mathfrak{R}^n$  espaço euclidiano de ordem  $n$
- $JF(x)$  operador Jacobiano da função vetorial  $F(x)$

# 1 INTRODUÇÃO

Todas as atividades prescindem de algum tipo de controle. O condicionamento de processos físicos para que apresentem resultados desejados garantidamente motiva a pesquisa na engenharia de controle. A necessidade da compreensão de processos físicos complexos e relevantes faz necessário o uso de modelos que representem seus principais aspectos para a aplicação a que se destinam. É sobre o modelo do processo que leis de controle são projetadas. O sucesso do controle está em quão apropriado é o modelo escolhido.

A implementação da lei de controle dá-se através de um controlador, e invariavelmente utiliza-se sensores e atuadores. Estes, por sua vez, apresentam complexidades em maior ou menor grau. Além disto, existe um limite físico de quanta energia pode ser transmitida para um sistema. Por outro lado, a transferência de energia para o sistema não é instantânea, o que requer um tempo para que um de seus estados assuma um valor distinto do atual. Isto reflete-se em uma taxa de variação limitada. Leis de controle que desrespeitam estes e outros limites de atuação, podem gerar comportamentos imprevistos, e a ação de controle não mais conduz o comportamento do sistema conforme o projeto original.

Os limites do atuador receberam grande interesse da literatura acadêmica. Em especial o estudo dos efeitos adversos da saturação do atuador sobre o sistema. A ocorrência imprevista da saturação pode levar o sistema à instabilidade ou ao aparecimento de respostas indesejáveis inerentes ao comportamento não-linear do sistema em malha fechada. Exemplos são múltiplos pontos de equilíbrio e ciclos-limite. A saturação do atuador ocorre quando ao menos um de seus limites é excedido pelo sinal de controle que alimenta a planta.

Desde os trabalhos de (FERTIK; ROSS, 1967), uma série de publicações dedicaram-se ao estudo dos efeitos da saturação sobre o sistema em malha fechada. Os controladores instalados em plantas da época desconsideravam os limites dos atuadores da planta, assim a ocorrência da saturação causava no processo um comportamento indesejado e potencialmente nocivo às especificações de desempenho do sistema. No capítulo 3 um histórico destas publicações é apresentado. São muitas as topologias de sistemas possíveis, mas dividem-se em duas abordagens principais. Enquanto a síntese direta consiste em projetar-se um controlador que considere as restrições do atuador, o *anti-windup* propõe a modificação da malha de controle original, que considera um atuador linear, incluindo um compensador que dirima os efeitos indesejados da saturação sobre o sistema.

A partir dos anos 90, trabalhos sobre sistemas sujeitos à saturação passaram a enfatizar a estabilidade, caracterizando o conjunto dentro do espaço de estados, no qual a estabilidade da origem é garantida. A literatura considera principalmente casos de estabilidade global e local. A estabilidade global geralmente implica em um desempenho aquém do desejado na região linear da planta, e requer que a planta tenha modos estáveis em malha aberta, o que nem sempre se verifica. A estabilidade local restringe as garantias

a um conjunto limitado de estados que, se contiver a região onde dar-se-á a operação, é suficientemente abrangente. Além disto, permite considerar plantas instáveis em malha aberta.

Por ser a estabilidade *conditio sine qua non* do controle, a diferença entre soluções que atendam a um dado problema de controle estará no nível de desempenho obtido por cada uma das soluções propostas. Desta forma, a escolha de critérios de desempenho é fundamental. Em (DORATO, 1987) e (COUTINHO; D. J. PAGANO, 2004) são considerados funções custos como critérios de desempenho. Este trabalho considerará a tolerância e atenuação à perturbação por serem critérios relevantes na compreensão dos efeitos de distúrbios externos sobre o sistema.

A obra de (BOYD et al., 1994) estimulou a descrição das condições suficientes para a existência de uma solução aos problemas abordados em forma de LMI. Este tipo de representação foi bastante aceito pela comunidade científica que fez largo uso da mesma em trabalhos posteriores. Assim, na literatura, compensadores *anti-windup* estáticos foram propostos para plantas com um controlador definido supondo todo o sistema linear. A compensação dinâmica *anti-windup* na realimentação de saída propiciou mais graus de liberdade ao projeto do que seu equivalente estático, todavia, sua representação em LMI exigiu um desenvolvimento de melhores técnicas algébricas, o que só recentemente foi possível. A dificuldade de implementação de compensadores dinâmicos de ordem plena abriu espaço para a síntese de compensadores de ordem reduzida, arbitrária, o que vem sendo desenvolvido.

Das limitações possíveis no atuador, as mais abordadas são amplitude e taxa de variação. Modelos de plantas que desconsideram a presença de perturbações externas impedem *insights* sobre a estabilidade do sistema quando da ocorrência de tais distúrbios.

Este trabalho aborda sistemas lineares invariantes no tempo, de tempo contínuo, sujeitos à saturação do atuador - primeiramente em amplitude e mais adiante em amplitude e taxa de variação. Abordam a síntese de controladores dinâmicos de saída, e compensadores *anti-windup* dinâmicos de ordem plena e reduzida para malhas de realimentações dinâmicas de saída. Os sistemas são sujeitos à perturbação  $\mathcal{L}_2$  em todos os seus terminais externos de modo a permitirem uma maior flexibilidade ao usuário dos métodos propostos em adaptá-los à situação de seu interesse. Os resultados deste trabalho são uma extensão ao caso de tempo contínuo de trabalhos recentes em tempo discreto, que tratam destes temas ainda pouco explorados na literatura.

Este manuscrito está organizado como segue.

O capítulo 2 apresenta os lemas, definições e funções utilizadas nos desenvolvimentos. O capítulo 3 apresenta o problema em estudo e um breve histórico dos trabalhos na área, contexto em que o presente trabalho se insere, e a justificativa para os métodos desenvolvidos e abordagens utilizadas.

O capítulo 4 apresenta métodos para a síntese de compensadores *anti-windup* de ordem plena e reduzida para sistemas sujeitos à saturação do atuador em amplitude, com garantias de estabilidade local e global - esta, quando a planta assim permite. Este capítulo é uma extensão dos trabalhos de (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr.; BENDER, 2006) para o caso contínuo. Um controlador dinâmico de saída fornecido *a priori* tem sua dinâmica compensada por um bloco *anti-windup* dinâmico, excitado pelo sinal de erro entre a entrada e saída do atuador. Este compensador de *anti-windup* pode ter ordem igual ou inferior à soma da ordem da planta e do controlador. Para cada um destes casos há um método proposto. A obtenção de condições lineares é imediata se o compensador possui ordem plena ( $n + n_c$ ). A compensação de ordem reduzida requer a aplicação do

lema de Finsler e a fixação da estrutura de seus multiplicadores para que as condições lineares sejam obtidas. O lema de Finsler será apresentado no capítulo 2.

O capítulo 5 apresenta métodos para a síntese de controladores dinâmicos com laços *anti-windup* para plantas com atuadores sujeitos à amplitude e à taxa de variação limitadas, com garantias de estabilidade local e global - esta, quando a planta assim permite. Este capítulo, embora seja uma extensão dos trabalhos de (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2005) para o caso contínuo segue um caminho distinto pelo tratamento diferenciado que faz das perturbações atuantes sobre o sistema, buscando uma maior generalização. Propõe-se um método para a síntese de um controlador dinâmico não-linear de saída, composto por um controlador dinâmico linear, um integrador saturante e malhas estáticas de *anti-windup*. Como no capítulo 4, o lema de Finsler é utilizado para construir-se uma representação por LMI. A estrutura dos multiplicadores inseridos foi escolhida de modo a ser o menos restritiva possível.

O capítulo 6 apresenta as conclusões e perspectivas da continuidade deste trabalho.

## 2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Este breve capítulo apresenta algumas definições, funções e lemas que serão utilizadas ao longo dos desenvolvimentos do presente trabalho.

Os sistemas abordados neste trabalho são todos de tempo contínuo. Por simplicidade, a dependência temporal será omitida da notação.

Durante desenvolvimentos algébricos com frequência blocos simétricos far-se-ão presentes. Como forma de simplificar sua representação, a mesma ocorrerá mediante a seguinte forma contrata.

$$\text{sym}\{\cdot\} : \mathfrak{R}^{n \times n} \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}, \text{sym}\{A\} = A + A^T \quad (2.1)$$

Nas mesmas circunstâncias, a manipulação algébrica de matrizes envolverá matrizes diagonais e blocos diagonais. Define-se da seguinte forma sua representação:

$$\forall v = [ v_{(1)} \quad v_{(2)} \quad \cdots \quad v_{(n)} ], \text{diag}\{v\} = \begin{bmatrix} v_{(1)} & \star & \star & \star \\ 0 & v_{(2)} & \star & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 0 & v_{(n)} \end{bmatrix} \quad (2.2a)$$

e

$$\forall A_j, j = 1, \dots, N \in \mathfrak{R}^{n_j \times n_j}$$

$$\text{BLKDG}\{[ A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_N ]\} = \begin{bmatrix} A_1 & \star & \star & \star \\ 0 & A_2 & \star & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 0 & A_N \end{bmatrix} \quad (2.2b)$$

A saturação é uma das principais funções consideradas neste trabalho. Define-se-a aqui como,

$$\text{sat}_{(\cdot)}(\cdot) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m, \text{sat}_{\eta}(\iota_{(i)}) = \text{sign}(\iota_{(i)}) \min\{|\iota_{(i)}|, \eta_{(i)}\}; i = 1, \dots, m \quad (2.3a)$$

onde

$$\text{sign}(\cdot) : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}, \text{sign}(\iota_{(i)}) = \begin{cases} 1, & \iota_{(i)} > 0 \\ 0, & \iota_{(i)} = 0 \\ -1, & \iota_{(i)} < 0 \end{cases} \quad (2.3b)$$

A modelagem de sistemas saturados por não-linearidades de setor sugere a definição de uma função  $\psi_{(\cdot)}(\cdot)$  tal qual segue.

$$\psi_{(\cdot)}(\cdot) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m, \psi_{\eta}(\iota) = \iota - \text{sat}_{\eta}(\iota) \quad (2.3c)$$

Durante a formulação de condições de suficiência à existência de soluções propostas, conjuntos como o abaixo serão necessários.

$$\mathcal{S}(\eta) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |(\mathcal{K}_{(i)} - \mathcal{G}_{(i)})\xi| \leq \eta_{(i)}; i = 1, \dots, m; \mathcal{K}, \mathcal{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}\} \quad (2.3d)$$

Conforme (2.3c) e (2.3d), segundo (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2005), o seguinte lema pode ser enunciado.

**Lema 2.1.** *Se  $\xi \in \mathcal{S}(\eta)$  então a não-linearidade  $\psi_\eta(\mathcal{K}\xi)$  satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\psi_\eta(\mathcal{K}\xi)^T T (\psi_\eta(\mathcal{K}\xi) - \mathcal{G}\xi) \leq 0 \quad (2.3e)$$

para qualquer matriz diagonal positiva  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

*Prova.* Considere os três casos abaixo.

1.  $-\eta_{(i)} \leq \mathcal{K}_{(i)}\xi \leq \eta_{(i)}$   
Neste caso, por definição,  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) = 0$  e então  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi)T_{(i,i)}(\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) - \mathcal{G}_{(i)}\xi) = 0$
2.  $\mathcal{K}_{(i)}\xi > \eta_{(i)}$   
Neste caso,  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) = \mathcal{K}_{(i)}\xi - \eta_{(i)}$ . Se  $\xi \in \mathcal{S}(\eta)$  então  $\mathcal{K}_{(i)}\xi - \mathcal{G}_{(i)}\xi \leq \eta_{(i)}$ . Também  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) - \mathcal{G}_{(i)}\xi = \mathcal{K}_{(i)}\xi - \eta_{(i)} - \mathcal{G}_{(i)}\xi \leq 0$  e, como  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) > 0$ , tem-se  
 $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi)T_{(i,i)}(\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) - \mathcal{G}_{(i)}\xi) \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0$ .
3.  $\mathcal{K}_{(i)}\xi < -\eta_{(i)}$   
Neste caso,  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) = \mathcal{K}_{(i)}\xi + \eta_{(i)}$ . Se  $\xi \in \mathcal{S}(\eta)$  então  $\mathcal{K}_{(i)}\xi - \mathcal{G}_{(i)}\xi \geq -\eta_{(i)}$ . Também  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) - \mathcal{G}_{(i)}\xi = \mathcal{K}_{(i)}\xi + \eta_{(i)} - \mathcal{G}_{(i)}\xi \geq 0$  e, como  $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) < 0$ , tem-se  
 $\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi)T_{(i,i)}(\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) - \mathcal{G}_{(i)}\xi) \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0$ .

Destes três casos acima, sendo posto que  $\xi \in \mathcal{S}(\eta)$  conclui-se que

$$\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi)T_{(i,i)}(\psi_\eta(\mathcal{K}_{(i)}\xi) - \mathcal{G}_{(i)}\xi) \leq 0, \forall T_{(i,i)} > 0, \forall i = 1, \dots, m, \text{ de acordo com (2.3e)} \quad \square$$

Outro resultado de interesse, usado para relaxar condições bilineares é o Lema de Finsler, (FINSLER, 1937), enunciado como segue:

**Lema 2.2.** *Considere-se um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , uma matriz simétrica  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e uma matriz  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que  $\text{rank}(\mathcal{B}) < n$ . As seguintes asserções são equivalentes:*

1.  $v^T \mathcal{P} v < 0; \forall v$ , tal que  $\mathcal{B}v = 0, v \neq 0$ .
2.  $(\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{P} \mathcal{B}^\perp < 0$ .
3.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{P} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$ .
4.  $\exists \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{P} + \text{sym}\{\mathcal{F}\mathcal{B}\} < 0$ .

As seguintes definições serão importantes para apresentar-se as condições de garantia da *well-posedness* do sistema em malha fechada.

**Definição 2.1.** *Uma função de transferência é dita própria se o grau do polinômio constituinte do numerador não excede o do denominador.*

Conforme (WEISSTEIN, ???), a seguinte definição pode ser apresentada.

**Definição 2.2.** *Uma expressão é dita bem-definida se sua definição associa-a à uma única interpretação ou valor.*

A partir das definições acima podemos apresentar a que segue.

**Definição 2.3.** *Um sistema realimentado é dito well-posed se todas as matrizes de transferência em malha fechada são bem definidas e próprias.*

Em (GRIMM et al., 2003) a seguinte condição de setor, juntamente com os lemas 2.3 e 2.4, é utilizada para garantir que a interconexão do sistema *well-posed*. Sistemas que em sua malha de realimentação apresentam uma não-linearidade, como a saturação considerada neste trabalho, devem ser garantidamente *well-posed*. Como os métodos propostos são aplicados em plantas cujas matrizes de transferência não são estritamente próprias, a *wellposedness* do sistema em malha fechada deverá ser garantida. Para tanto os desenvolvimentos dos capítulos 4 e 5 valer-se-ão dos seguintes lemas extraídos de (GRIMM et al., 2003).

**Lema 2.3.** *Considere uma função localmente Lipschitz  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e assuma que o jacobiano de  $F$  satisfaz  $JF(x) \in \mathcal{M}$ , para quase todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , onde o conjunto  $\mathcal{M}$  é compacto, convexo, e cada matriz em  $\mathcal{M}$  é não singular. Então existe uma única função globalmente Lipschitz  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $F(G(x)) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Equivalentemente,  $F$  é um homeomorfismo com inversa globalmente Lipschitz.*

**Lema 2.4.** *Dadas duas matrizes quadradas  $D$  e  $V = V^T > 0$ , se  $-2V + VD + D^T V < 0$  então  $I - D\Delta$  é não singular para todo  $\Delta$  tais que o mapeamento linear  $z \rightarrow \Delta z$  pertence ao setor  $[0, I]_V$*

As provas dos lemas 2.3 e 2.4 serão omitidas, mas encontram-se em (ZACCARIAN; TEEL, 2002), conforme disposto em (GRIMM et al., 2003).

**Definição 2.4.** *Uma função  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dita pertencente ao setor  $[0, I]_V$  se  $F(w)^T V (w - F(w)) \geq 0$  para todo  $w \in \mathbb{R}^m$ . Note que  $\psi_{(\cdot)}(\cdot)$  é a função que pertence ao setor  $[0, I]_V$  e portanto satisfaz a definição 2.4.*

As provas de teoremas e corolários do presente trabalho valer-se-ão de funções agora declaradas.

$$V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, V(\xi) = \xi^T P \xi, P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.4a)$$

$$\text{onde } \dot{V}(\xi) = \dot{\xi}^T P \xi + \xi^T P \dot{\xi} \quad (2.4b)$$

As estimativas de região de atração e região atingível serão efetuadas através de conjuntos elipsoidais assim definidos.

$$\forall P \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid P = P^T > 0, \text{ e } \beta > 0 \in \mathbb{R}, \quad (2.4c)$$

$$\varepsilon(P, \beta) = \{ \xi \mid \xi \in \mathbb{R}^n, \xi^T P \xi \leq \beta \}$$

Em (LIAPUNOV, 1892), inicia-se o estudo formal da estabilidade da origem de sistemas, através de garantias suficientes da estabilidade da origem do sistema. Para tanto, Liapunov propôs o conceito de funções candidatas. As funções candidatas são testadas

dentro dos parâmetros do sistema quanto a sua positividade, e negatividade de sua derivada primeira. A função  $V(\xi)$ , definida em (2.4a), é um exemplo de uma candidata de Liapunov.

São estas funções quadráticas, cujas curvas de nível definem elipses. Por isto muitos dos conjuntos definidos serão hiper-elipsóides. A condição de setor generalizada proposta no lema 2.1 apresenta um lugar geométrico associado que deverá incluir a estimativa da região atingível. Como todas as condições são expressas em forma de inequações matriciais, enuncia-se o seguinte lema.

**Lema 2.5.** *Considere o conjunto (2.3d) e o elipsóide (2.4c). Então, conforme (BOYD et al., 1994) é possível afirmar que  $\varepsilon(P, \mu^{-1}) \subset \mathcal{S}(\eta)$  se e somente se*

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{K}_{(i)} - \mathcal{G}_{(i)} & -\mu\eta_{(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \forall i = 1, \dots, m \quad (2.5a)$$

A obtenção do lema acima é baseada no lema de Schur - vide (SCHUR, 1918).

O capítulo dedicado à síntese de controladores dinâmicos valer-se-á do seguinte lema apresentado em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2005), que garante que a taxa de variação máxima tolerável pelo atuador não é ultrapassada pelo sinal de controle.

**Lema 2.6.** *Considere o seguinte sistema composto por  $m$  integradores, onde  $v, q, u \in \mathfrak{R}^m$ :*

$$\begin{aligned} \dot{v} &= q \\ u &= \text{sat}_{\eta_0}(v) \end{aligned}$$

Se  $|q_{(i)}| \leq \eta_{R_{(i)}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , segue que

$$|\dot{u}_{(i)}| \leq \eta_{R_{(i)}}$$

*Prova.* Considere-se que a constante Lipschitz de  $\text{sat}_{(\cdot)}(\bullet)$  é 1. Segue que

$$\left. \begin{aligned} |\dot{u}_{(i)}| &= \left| \frac{d}{dt} \text{sat}_{\eta_{0_{(i)}}}(v) \right| \leq |\dot{v}_{(i)}| \\ |\dot{v}_{(i)}| &= |q_{(i)}| \leq \eta_{R_{(i)}} \end{aligned} \right\}, i = 1, \dots, m$$

□

Estabelecidas estas definições e lemas, o capítulo seguinte contextualiza os desenvolvimentos algébricos que seguirão neste trabalho.

### 3 CONTROLE SOB SATURAÇÃO

Na planta dá-se a transformação que justifica todo o processo em que está inserida. O objetivo do controle é a garantia de resultados, o que se traduz em estabilidade e desempenho. O obstáculo natural desta transformação é a impossibilidade de transferir-se energia ilimitadamente para um sistema. Neste sentido, o atuador representa este impedimento quando satura em algum de seus limites. Exceder os limites do atuador implica em transmitir-se à planta um sinal distinto do fornecido pelo controlador. Desta forma, a lei de controle projetada não é aplicada. Surgem eventualmente *overshoots*, aumento do tempo de acomodação do sistema e - em alguns casos - o sistema torna-se instável.

A limitação física da transferência de energia para um sistema motiva a análise de aspectos importantes relacionados à saturação. O tamanho da região de atração da origem, determina onde, na ausência de perturbações, o sistema pode ser inicializado para que convirja à origem, assintoticamente. Na presença de perturbações  $\mathcal{L}_2$  é importante conhecer-se um limitante superior para a norma  $\mathcal{L}_2$  das perturbações toleráveis pelo sistema em malha fechada. Maximizar esta tolerância é um critério de desempenho potencialmente relevante. Outro critério possível é a atenuação que o sistema em malha fechada impõe à perturbação  $\mathcal{L}_2$  em uma de suas saídas. Todos estes aspectos serão considerados nos desenvolvimentos deste trabalho.

Se os valores obtidos na análise do sistema dado são insatisfatórios, deve-se compensar as deficiências ou com um projeto de um controlador que leve em conta as restrições do atuador, ou modificar-se a malha de controle existente, inserido-lhe um compensador *anti-windup* que suprima tanto quanto possível os efeitos indesejados da saturação no sistema.

Posto isto, e dado o fato de que todo o projeto é feito sobre o modelo do sistema, a modelagem da saturação do atuador é de suma importância para a análise do sistema *a priori*, e a síntese de compensadores *anti-windup* e de controladores dinâmicos de saída. Este capítulo desenvolve cada um destes temas.

#### 3.1 Formulação Geral do Problema

O modelo linear abaixo pode ser genericamente considerado como uma representação em espaço de estados das variações em torno do equilíbrio de uma planta.

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + B_w w \\ y = C_y x + D_y u + D_{y,w} w \\ z = C_x x + D_z u + D_{z,w} w \end{cases} \quad (3.1a)$$

O vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  representa os estados da planta. Um processo pode apresentar várias saídas, nem todas mensuráveis. Mesmo as eventualmente não mensuráveis estão sujei-

tas a critérios de avaliação para que não comprometam o desempenho geral do processo. Considerando-se isto, o vetor  $y \in \mathbb{R}^p$  representa a saída medida, disponível para realimentação, e o vetor  $z \in \mathbb{R}^r$  representa a saída controlada - utilizada para avaliação do desempenho.

O vetor  $u \in \mathbb{R}^m$  corresponde aos terminais de entrada da planta. A eles está implícito um atuador, elemento que faz a transdução do sinal de controle para uma grandeza equivalente no processo.

O modelo considerado prevê perturbações externas limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ . O vetor  $w \in \mathbb{R}^q$  representa no modelo estas perturbações.

As demais matrizes são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Ainda, os pares  $(A, B)$ ,  $(C_y, A)$  são respectivamente controláveis e observáveis.

Como a modelagem do sistema considera apenas as variações em torno do equilíbrio em que o sistema se encontra, a referência externa em nada contribui para o projeto do controlador. A alimentação do controlador poderá ser fornecida pelos estados da planta, todavia, nem sempre estarão acessíveis para medições diretas. Isto ocorre ou porque sensores e transdutores não estão disponíveis, ou são inviáveis economicamente. Portanto, assume-se que apenas o vetor de saída  $y$  esteja disponível para realimentação. Este será o vetor fornecido à entrada do controlador.

O controlador pode ser estático ou dinâmico, definido *a priori* ou ser objeto de síntese. Suponha-se que o controlador foi definido *a priori*, com o seguinte modelo,

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c + B_{c,w} w \\ v_c = C_c x_c + D_c u_c + D_{c,w} w \end{cases} \quad (3.1b)$$

de modo a fornecer o sinal de controle para a planta, a partir de sua saída. Caso o controlador seja estático as matrizes  $A_c, B_c, C_c$  são nulas. No modelo,  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $u_c = y$ ,  $v_c \in \mathbb{R}^m$  são respectivamente os vetores estado, entrada e saída do controlador. A saída do controlador  $v_c$  alimentará a entrada da planta  $u$ .

A impossibilidade física de transmitir-se energia ilimitadamente para o processo torna a saturação do atuador um problema intrínseco à engenharia de controle. Esta limitação é aqui representada pela magnitude do sinal de controle e sua derivada temporal primeira, suportados pelo atuador.

Considera-se, então, que cada entrada da planta está sujeita a uma restrição de amplitude, ou seja, cada componente está restrito a um valor máximo e mínimo simétricos. Assim tem-se:

$$-\eta_{u_{0(i)}} \leq u_{(i)} \leq \eta_{u_{0(i)}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1c)$$

É possível considerar-se adicionalmente que o atuador é restrito em taxa de variação. Esta limitação pode ser representada como:

$$-\eta_{u_{R(i)}} \leq \dot{u}_{(i)} \leq \eta_{u_{R(i)}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1d)$$

As derivadas de ordem superior de  $u$  poderiam ser consideradas. Nem sempre, existirá um significado físico associado a elas, tampouco uma necessidade de consideração pela irrelevância das mesmas.

Com base neste contexto, é possível enunciar-se o seguinte problema de análise:

**Problema 3.1** (Análise de Estabilidade e Desempenho  $\mathcal{L}_2$ ). *Dado o sistema composto por (3.1a) e (3.1b), interconectados através de  $u_c = y$  e  $u = v_c$ , sujeito às restrições (3.1c) e (3.1d), deve-se determinar a região do espaço de estados na qual é garantida*

a estabilidade da origem do sistema em malha fechada, um limitante superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  na transferência de  $w$  para  $z$  e a máxima norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação tolerável pelo sistema para a qual as trajetórias sejam gantidamente limitadas.

A partir destes resultados, é possível determinar-se um conjunto de condições iniciais para os estados do sistema e em função disto, a máxima norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação tolerável.

Caso a análise de estabilidade e desempenho restrinjam as operações à uma região insuficiente para a operação do sistema, algo deve ser feito para compensar esta limitação. Uma solução possível é efetuar-se a síntese do controlador. Assim suponha-se que  $\xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$  seja o vetor de estados aumentado do sistema em malha fechada. Adicionalmente, considere-se que

$$\xi(0) \in \Xi_0 \quad (3.2)$$

onde  $\Xi_0$  representa a região que contém os pontos onde o sistema é inicializado. É, então, possível enunciar-se um problema alternativo para o caso em questão.

**Problema 3.2** (Síntese de Controladores com Atuador restrito). *Dado o sistema (3.1a) sujeito às restrições (3.1c) e (3.1d), deve-se determinar um controlador dinâmico de saída que garanta a estabilidade da origem do sistema em malha fechada, um limitante superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  na transferência de  $w$  para  $z$  e a norma  $\mathcal{L}_2$  da máxima perturbação tolerável para a qual as trajetórias do sistema sejam gantidamente limitadas, para todo  $\xi(0) \in \Xi_0$ .*

O conjunto  $\Xi_0$  pode ser um conjunto pré-definido, ou pode ser algum conjunto não-vazio. Os métodos apresentado neste trabalho consideram  $\Xi_0$  como a região pertencente ao elipsóide  $\varepsilon(P, \beta)$ , para algum escalar real  $\beta > 0$ .

No caso em que o controlador dado *a priori* não tenha considerado as restrições do atuador em seu projeto, quando ocorrer a saturação do atuador haverá uma incoerência entre seus sinais de entrada e saída. Para dirimir esta incoerência e com isto suprimir os efeitos adversos sobre a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada, um compensador - chamado compensador *anti-windup* - deve ser dimensionado. Trata disto o seguinte problema de síntese.

**Problema 3.3** (Síntese Anti-windup). *Dado o sistema composto por (3.1a) e (3.1b), interconectado através de  $u_c = y$  e  $u = v_c$ , sujeito às restrições (3.1c) e (3.1d), onde  $\xi$  representa o vetor de estados aumentado para o sistema em malha fechada, deseja-se determinar um compensador que adicionado à malha de realimentação atue sobre o sistema em malha fechada de modo a reduzir a diferença entre a entrada e saída do atuador, garantindo a estabilidade da origine do sistema em malha fechada para um conjunto de condições de inicialização não vazio.*

A saturação do atuador cria uma diferença entre seus terminais de entrada e saída que é a origem dos efeitos adversos no sistema investigados neste trabalho. Assim, toda ação que reduza esta diferença, reduz os efeitos adversos desta saturação sobre o sistema em malha fechada. Ao problema 3.3 pode ser adicionado critérios de desempenho e estabilidade  $\mathcal{L}_2$  citados nos problemas 3.1 e 3.2.

Os problemas 3.2 e 3.3 abordam o tema central deste trabalho: o projeto da malha de controle levando em conta a saturação do atuador. A compensação *anti-windup* tratada em 3.3 é uma solução para malhas de realimentação com controladores concebidos *a priori* que desprezam não-linearidades do sistema.

Note-se que a saturação do atuador faz deste o único elemento não-linear do sistema. A seção seguinte aborda como a mesma pode ser modelada. A partir dos modelos de saturação, seguir-se-ão métodos de síntese.

### 3.2 Modelos para Termo de Saturação

A saturação em amplitude é bastante discutida na literatura, por exemplo em (TARBOURIECH; GARCIA, 1997), (KAPILA; GRIGORIADIS, 2002), (HU; LIN, 2001) e (BERNSTEIN; MICHEL, 1995). A saturação em taxa de variação, todavia, recebe menos atenção nas publicações que consideram controle sob restrições. Algumas exceções são (TYAN; BERNSTEIN, 1997), (STOORVOGEL; SABERI, 1999) e (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003). Conforme (REGINATTO, 2000), a representação do efeito da limitação na taxa de variação do sinal de controle é mais complexa que a limitação em magnitude, e requer além de não-linearidades, um operador com memória.

Este trabalho dedica um capítulo à síntese de controladores para sistemas com restrições na taxa de variação do atuador. A topologia proposta, no entanto, evita as complexidades acima referidas. O controlador gera, inicialmente, a derivada temporal primeira do sinal de controle. Um integrador saturante em série, gera o sinal de controle entregue aos terminais da planta. Desta forma, tanto a derivada primeira do sinal de controle, como o próprio, são restritos antes do atuador por uma saturação simétrica. Portanto, esta topologia da malha de controle permite que o mesmo modelo de saturação possa ser aplicado a ambas restrições.

Assim posto, a seguir serão discutidos os modelos para o termo de saturação em amplitude do atuador mais frequentes na literatura. Para exemplificá-los, o sistema genérico em malha fechada abaixo, sujeito à restrição de amplitude no atuador, será considerado.

$$\dot{x} = Ax + B \text{sat}_{(\eta)}(Kx) \quad (3.3)$$

Onde a função  $\text{sat}_{(\cdot)}(\cdot)$  encontra-se definida no capítulo 2 - vide equação (2.3a) - e  $Kx = u$

#### 3.2.1 Modelagem por Regiões de Saturação

A evolução das trajetórias do sistema sujeito a restrições na amplitude do atuador, eventualmente altera a dinâmica de cada estado pela saturação, ou retorno à região linear de uma dada entrada de controle. A partir disto, observou-se a possibilidade de dividir-se o espaço de estados em regiões onde a dinâmica da planta permanecesse constante. Estas divisões determinam regiões de saturação. Para maiores detalhes sobre esta modelagem da saturação vide (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 1999).

Para o caso do sistema (3.3), defina-se o vetor  $\varsigma \in \mathfrak{R}^m$ . Cada componente assumirá o valor  $-1$  caso o sinal de controle estiver abaixo do limite inferior da excursão do atuador,  $1$  quando o exceder o superior, e  $0$  caso a operação der-se na região linear.

Assim disposto, para cada combinação possível das entradas de controle quanto a saturação, gerar-se-á um vetor distinto, o que totaliza  $3^m$  vetores  $\varsigma_j$ .

A representação do sistema (3.3) de acordo com esta modelagem torna-se:

$$\dot{x} = \left( A + B \text{diag}\{1_m - |\varsigma_j|\} K \right) x + B \text{diag}\{\eta\} \varsigma_j \quad (3.4)$$

Como  $\eta$  é o vetor que contém os limites de saturação de cada entrada de controle, é possível definir-se o seguinte conjunto:

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}_j^0 x, \eta_j^0) = \{x \in \mathfrak{R}^n, \mathcal{K}_j^0 x \leq \eta_j^0, j = 1, \dots, l_J\}$$

No conjunto acima, cada linha de  $\mathcal{K}_j^0$  é composta ou por uma linha de  $\mathcal{K}$  ou de  $-\mathcal{K}$ , conforme a necessidade da descrição. O mesmo diz-se de  $\eta_j^0$ , onde cada elemento deste vetor é composto por um elemento  $-\eta$  ou  $\eta$  da linha correspondente, conforme cada entrada de controle encontra-se saturada ou não.

O sistema assim é, pois, representado de forma a compreender cada entrada saturada como uma perturbação aditiva constante. Desta forma, define-se regiões do espaço de estados dentro de cada qual uma dinâmica distinta conduz a evolução dos estados do sistema. Estas regiões são ditas regiões de saturação. Cada região de saturação é definida por um conjunto  $\mathcal{S}(\mathcal{K}_j^0 x, \eta_j^0)$ . A figura 3.1 ilustra estas regiões. Esta figura retrata as

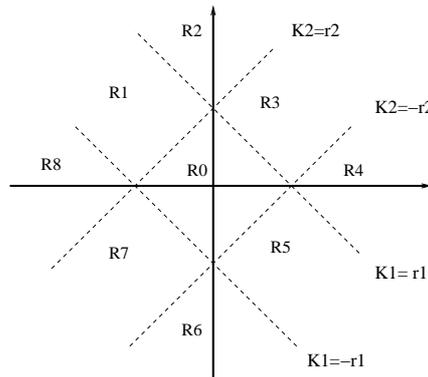


Figura 3.1: Regiões de Saturação

divisões de um espaço  $\mathfrak{R}^2$  de um sistema com duas entradas de controle, respectivamente saturáveis em  $\pm r_1$  e  $\pm r_2$ .

Garantias para um sistema onde a saturação é assim modelada são válidas tão somente para as trajetórias deste sistema, exatamente o necessário.

### 3.2.2 Modelagem Politópica

Segundo esta modelagem, a seguinte expressão é escrita a partir de (3.3):

$$\dot{x} = Ax + B \text{diag}\{\alpha(x)\} Kx$$

onde  $\alpha(x)$  é definido conforme (TARBOURIECH, 1991):

$$\alpha(x)_{(i)} = \begin{cases} \frac{-\eta_{(i)}}{K_{(i)}x}, & \text{se } K_{(i)}x < -\eta_{(i)} \\ 1, & \text{se } -\eta_{(i)} \leq K_{(i)}x \leq \eta_{(i)} \\ \frac{\eta_{(i)}}{K_{(i)}x}, & \text{se } K_{(i)}x > \eta_{(i)} \end{cases}$$

Assim, para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $0 < \alpha_{(i)}(x) \leq 1$ , e pode ser interpretado como um quantificador do nível de saturação. Assim posto, é possível representar o sistema (3.3) por:

$$\dot{x} = \left( A + B \text{diag}\{\alpha(x)\} K \right) x$$

Agora, suponha-se que exista um limite máximo de saturação, de modo que os estados confinem-se a um conjunto  $\Xi_p$  para todo  $t > 0$ . Com os limites de saturação  $\forall x \in \Xi_p$ , tem-se agora  $\underline{\alpha}_{(i)} \leq \alpha_{(i)}(x) \leq 1$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Como cada entrada de controle  $i$  terá a si associada um respectivo  $\alpha_{(i)}(x)$  contido no intervalo  $[\underline{\alpha}_{(i)}, 1]$ , é possível definir-se um vetor  $\zeta_j \in \mathfrak{R}^m$ , onde  $j = 1, \dots, 2^m$ , correspondente às  $2^m$  combinações

possíveis de  $m$  entradas assumindo  $\underline{\alpha}_{(i)}$  ou 1 como valores em cada entrada. Este conjunto de vetores compõe os vértices de um politopo em torno dos possíveis valores de  $Kx$  para todo  $x \in \Xi_p$ .

Para cada  $j = 1, \dots, 2^m$ , é possível definir-se uma matriz  $A_j = A + B \text{diag}\{\zeta_j\}K$ .

Seja também  $A_k = A + B \text{diag}\{\alpha(x)\}K$ . Então, para todo  $x \in \Xi_p$ , a matriz  $A_k$  sempre estará contida no envelope convexo  $\text{Co}\{A_j : j = 1, \dots, 2^m\}$ .

Todo tratamento algébrico feito sobre o sistema (3.3), modelado politopicamente, considera todas as matrizes  $A_j$  que envolvem a matriz  $A_k$ . A matriz  $A_k$  é a que de fato representa o sistema em cada instante de tempo  $\forall x \in \Xi_p$ . Notadamente, todas as trajetórias do sistema podem ser obtidas pelo modelo politópico, no entanto, nem todas as trajetórias obtidas pelo modelo correspondem a trajetórias do sistema em estudo. Conforme o que foi dito na seção 3.2.1, é apenas necessário garantir a estabilidade da trajetória do sistema. Garantias sob a abordagem politópica são intrinsecamente conservativas por imporem exigências além das necessárias, o que corresponde a trajetórias não descritas pelo sistema, mas possíveis por esta modelagem.

Mais adiante, (HU; LIN, 2001) propõe uma condição generalizada para a modelagem politópica, o que possibilita conduzir os problemas de análise e síntese sob esta modelagem a uma representação por LMI de suas condições suficientes para a existência de uma solução.

### 3.2.3 Modelagem por Não-Linearidade de Setor

O plano  $(x, f(x))$  pode ser dividido em setores. Um setor é a região entre duas retas não coincidentes que se cruzam na origem do plano.

O conceito de estabilidade absoluta, apresentado em (KHALIL, 1996) capítulo 10, aplica-se a sistemas cujas não-linearidades vetoriais, descentralizadas e sem memória localizadas na malha de realimentação pertençam a um setor. Por esta modelagem, a origem do sistema em malha fechada é garantida estável para qualquer não-linearidade em sua malha de realimentação pertencente ao setor especificado. Para maiores detalhes sobre estabilidade absoluta e condições de setor, vide (KHALIL, 1996) capítulo 10.

O sistema (3.3) contém apenas a não-linearidade  $\text{sat}_\eta(Kx)$ , contida no setor  $[0, 1]$ . A função  $\psi_\eta(Kx)$ , definida em (2.3c), dentro de um âmbito local pode pertencer a um setor menos abrangente. Para todo  $x \in \mathfrak{R}^n$ , no entanto, sempre pertencerá ao setor  $[0, 1]$ . A  $i$ -ésima componente da função  $\psi_{(\cdot)}(\cdot)$  é representada na figura 3.2, e ilustra a pertinência a setor.

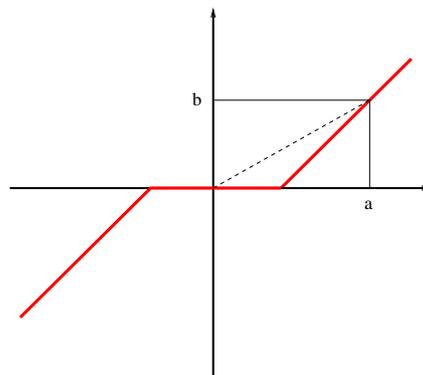


Figura 3.2:  $i$ -ésimo componente da função  $\psi_{(\cdot)}(\cdot)$

O sistema (3.3) pode ser reescrito como

$$\dot{x} = (A + BK)x - B\psi_\eta(Kx)$$

A região em que a função é nula corresponde à operação com o sinal de controle na faixa linear do atuador, ou seja:  $-\eta_{(i)} \leq K_{(i)}x \leq \eta_{(i)}$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ .

A inclinação  $\lambda_{(i)}$  do segmento de reta pontilhado que une a origem a  $(a, b)$  é dada por  $\lambda_{(i)} = \frac{b}{a} = \frac{b}{\eta_{(i)} + b}$ . Isolando-se  $a$ , tem-se  $a = \frac{\eta_{(i)}}{1 - \lambda_{(i)}}$ . Logo, se  $-a \leq K_{(i)}x \leq a$ , então  $\psi_{\eta_{(i)}}(K_{(i)}x) \in [0, \lambda_{(i)}]$ .

Para cada setor  $[0, \lambda_{(i)}]$  que  $\psi_\eta(K_{(i)}x)$  pertença, existe um intervalo corresponde ao qual  $K_{(i)}x$  deve pertencer. Fora deste intervalo,  $\psi_\eta(K_{(i)}x)$  abandona o referido setor.

Seja  $\Xi_s$  um conjunto de todos os  $x \in \mathfrak{R}^n$  para os quais  $\psi_{\eta_{(i)}}(K_{(i)}x)$  pertença a  $(0, \lambda_{(i)})$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Nestas circunstâncias, verifica-se a seguinte condição de setor.

$$\psi_\eta(K_{(i)}x)^T [\psi_\eta(K_{(i)}x) - \lambda_{(i)}K_{(i)}x] \leq 0$$

Que matricialmente expressa torna-se,

$$\psi_\eta(Kx)^T [\psi_\eta(Kx) - \Lambda Kx] \leq 0 \quad (3.5)$$

onde  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Esta é a condição clássica de setor e apresenta um forte apelo geométrico em sua interpretação.

Se cada componente  $\psi_{(i)}(K_{(i)}x)$  não ultrapassa a reta  $\lambda_{(i)}K_{(i)}x$ , é impossível que os dois termos do produto  $\psi_\eta(Kx)$  e  $(\psi_\eta(Kx) - \Lambda Kx)$  encontrem-se no mesmo semi-plano definido pelo eixo  $\psi_\eta(Kx) = 0$ .

Em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2005) é proposta uma nova condição de setor, generalizada. Esta condição é apresentada no lema 2.1. Sua aplicação mostra-se mais eficiente que a condição clássica em condições de estabilidade, sendo menos restritiva por não limitar-se a uma estrutura diagonal - como a matriz  $\Lambda$  na condição clássica - e permitir a representação de condições suficientes para a estabilidade da origem do sistema em malha fechada sob forma de LMI. A interpretação geométrica perde-se. A condição generalizada aplica-se apenas a não-linearidades do tipo zona-morta. Assim, não garante-se mais a estabilidade absoluta da origem. Por isso também é menos conservativa.

A partir do lema 2.1, tem-se em (2.3e):

$$\psi_\eta(\mathcal{K}\xi)^T T (\psi_\eta(\mathcal{K}\xi) - \mathcal{G}\xi) \leq 0$$

Se  $T = I_m$ ,  $\mathcal{G} = \Lambda K$  e  $\xi = x$ , a condição generalizada torna-se a clássica expressa em (3.5). Logo, todas as soluções obteníveis pela condição clássica o são pela generalizada.

O uso de uma condições de setor em problemas com esta modelagem, ou de uma região politópica na modelagem homônima é motivado pela possibilidade de aplicar-se a *S-procedure*. A *S-procedure* é uma técnica de relaxação de uma condição de definição de sinal. Ao invés de garantir-se a validade das condições para todo o espaço de estados, com esta técnica garante-se-a apenas onde o modelo da não-linearidade é válido, algo mais restrito. Quando a saturação do atuador é modelado por não-linearidades de setor, isto equivale a garantir-se a validade das condições da existência de uma solução apenas para todo  $\xi$  que pertença ao setor  $\mathcal{S}(\eta)$  onde a não-linearidade se inclui. Para maiores detalhes sobre a *S-procedure*, vide (BOYD et al., 1994), página 23.

### 3.3 Problemas

#### 3.3.1 Análise

A análise de sistemas de controle sujeitos à saturação do atuador consiste em:

1. A partir de um sistema dado, obter-se estimativas da região de atração da origem para o sistema em malha fechada, dentro da qual as trajetórias podem garantidamente convergir para a origem;
2. Determinar-se uma estimativa do conjunto de estados iniciais que suporta um nível de perturbação sem que sob seu efeito o sistema torne-se instável, abandonando a região de atração da origem em malha fechada;
3. Avaliar-se o efeito da perturbação sobre o sistema e a capacidade do mesmo de atenuar seu efeito.

Estes tópicos serão abordados a seguir.

##### 3.3.1.1 Região de Atração

A região de atração corresponde ao conjunto de todos os pontos do espaço de estados da dimensão do sistema onde o mesmo pode ser inicializado tendo suas trajetórias, na ausência de perturbação, convergindo para a origem. A estimativa da região de atração é feita na ausência de perturbações. A dificuldade está em obter-se uma estimativa satisfatória para o problema em estudo, ou próxima da região de atração da origem.

Uma vez que exista distúrbios  $\mathcal{L}_2$  agindo sobre o sistema, haverá um conjunto máximo atingível. Este conjunto é determinado pelo espaço de estados onde as trajetórias do sistema evoluem a partir de seu conjunto de estados iniciais, conduzidos pela ação do distúrbio  $\mathcal{L}_2^1$ . Assim, para um mesmo conjunto de estados iniciais, quanto maior a estimativa do conjunto atingível pelas trajetórias do sistema, contida na região de atração da origem, maior a tolerância garantida do sistema em malha fechada a perturbações  $\mathcal{L}_2$ . Para maiores detalhes vide (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH; REGINATTO., 2004).

##### 3.3.1.2 Tolerância e Rejeição à Perturbação

Sistemas físicos são sujeitos a toda a sorte de perturbações, ruídos e variações de parâmetros. Neste trabalho será estudada a influência que distúrbios limitados em energia exercem sobre o sistema. Segundo (PAIM et al., 2002), o interesse principal neste estudo vem do fato de que um sistema sob saturação submetido a perturbações suficientemente fortes pode não ser capaz de garantir que seus estados permaneçam dentro da região de atração da origem e, conseqüentemente, pode vir a apresentar trajetórias divergentes. O sistema a seguir é utilizado para ilustrar-se este problema.

Considere-se o seguinte sistema em malha fechada, assumindo-se seus estados iniciais nulos.

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \mathcal{A}\xi + \mathcal{B} \text{sat}_{(\eta)}(\mathcal{K}\xi) + \mathcal{B}_w w \\ y &= \mathcal{C}_y \xi + \mathcal{D}_y \text{sat}_{(\eta)}(\mathcal{K}\xi) + \mathcal{D}_{y,w} w \\ z &= \mathcal{C}_z \xi + \mathcal{D}_z \text{sat}_{(\eta)}(\mathcal{K}\xi) + \mathcal{D}_{z,w} w\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Por ser um problema de regulação, não existem referências.

A solução do problema consiste em encontrar-se uma estimativa para o maior conjunto atingível pelas trajetórias do sistema sem que estas abandonem a região de atração da origem. Como os estados iniciais são nulos, é somente a perturbação que excita o sistema. Haverá um limite na norma  $\mathcal{L}_2$  das perturbações para o qual as trajetórias mantenham-se limitadas à região de atração da origem. Este limite na norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação corresponde ao nível de tolerância do sistema em malha fechada à distúrbios limitados em normal  $\mathcal{L}_2$  representados por  $w$ .

Por outro lado, o conjunto atingível das trajetórias limitadas para a máxima norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação tolerável corresponde à uma estimativa da região de atração da origem quando a perturbação é nula e o sistema é inicializado dentro deste conjunto. Note-se que quando sabidamente o sistema não será inicializado na origem, mas dentro de um conjunto que a inclua, a tolerância à perturbação diminui correspondentemente, vide (CASTELAN et al., 2004).

Outra abordagem consiste em verificar-se em quanto o sistema atenua a perturbação à qual é submetido, desde que esta perturbação seja tolerável, ou seja: as trajetórias do sistema convirjam para a origem. Este problema é chamado de rejeição à perturbação. Esta verificação pode ser feita em qualquer variável do sistema, mas usualmente é considerada em uma saída do sistema. O critério de desempenho utilizado nos desenvolvimentos dos capítulos 4 e 5 é a rejeição à perturbação na saída controlada do sistema em malha fechada, medida pelo limitante ao ganho  $\mathcal{L}_2$  ali verificado. Em problemas de síntese, garantir-se-á que este ganho não exceda um limitante  $\sqrt{\gamma}$ .

### 3.3.2 Síntese

A síntese de leis de controle para sistemas sujeitos à saturação do atuador consiste em garantir-se:

1. A estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada, na ausência de perturbações;
2. A estabilidade  $\mathcal{L}_2$  do sistema dentro de uma região contendo a origem, para um determinado conjunto de perturbações externas limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ ;
3. Algum nível de desempenho dentro desta região.

A síntese de leis de controle para sistemas sujeitos à saturação do atuador aborda questões similares às da análise.

#### 3.3.2.1 Região de Atração

A lei de controle sintetizada pode ter como objetivo a garantia da estabilidade da origem em âmbito global. Desta forma, a região de atração da origem corresponde a  $\mathbb{R}^{n_{mf}}$ , onde  $n_{mf}$  é a ordem do sistema aumentado, o que inclui a dinâmica adicionada pela malha de realimentação. Segundo (SONTAG; SUSSMANN, 1990) e (BURGAT; TARBOURIECH, 1992) é sempre possível encontrar uma lei de controle do tipo realimentação linear de estados que estabilize globalmente o sistema saturado, desde que ele seja estável em malha aberta. Todavia, é sabido também, que leis de controle globalmente estáveis apresentam um comportamento dinâmico freqüentemente insatisfatório, uma vez que a lei de controle sacrifica o desempenho na medida necessária à garantia da estabilidade global.

A estabilidade semi-global da origem significa que sua região de atração pode ser tão grande quanto se queira desde que limitada. É assim, determinado *a priori* a região

do espaço de estados garantidamente inclusa na região de atração da origem do sistema em malha fechada. Condições necessárias e suficientes para a estabilidade semi-global, segundo (LIN; SABERI, 1993), (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2001), (PIT-TET; TARBOURIECH; BURGAT, 1997) e (HINDI; BOYD, 1998) são tais que o par  $(A, B)$  seja estabilizável e o sistema seja estabilizável em malha aberta.

A estabilidade local é a única opção quando a planta possui autovalores instáveis em malha aberta. Neste caso é impossível a estabilização global mediante técnicas de controle linear. Todavia, como os estados de um sistema representativo de um processo - via de regra - evoluem dentro de uma região restrita, não é necessário garantir-se a estabilidade além de uma região que inclua este espaço. Em contrapartida, o desempenho dentro desta região torna-se relevante, o que juntamente com controles limitados e modos instáveis em malha aberta compõem restrições consideráveis à lei de controle.

De qualquer forma, uma parcela significativa dos modelos lineares são obtidos a partir de modelos não-lineares descritores da dinâmica da planta, linearizados em torno de um ponto de operação. Estes modelos assim obtidos tem sua validade somente em uma vizinhança (estreita, muitas vezes) em torno da origem, ou seja: ponto de equilíbrio do modelo não-linear original. Descrevem tão somente a dinâmica do sistema para perturbações em torno deste equilíbrio. Assim posto, é questionável a eficácia de garantias da estabilidade global em sistemas lineares deste tipo.

A garantia de estabilidade foi inicialmente desenvolvida mediante realimentação de estados. Alguns exemplos de técnicas baseadas nesta forma de realimentação podem ser encontrados em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 1997) e (HU; LIN, 2001). A principal desvantagem desta abordagem está na inviabilidade da implementação desta lei de controle caso os estados sejam imensuráveis. São poucos, comparativamente, os trabalhos que abordam a realimentação dinâmica de saída, que contorna esta limitação. Exemplos são (BERNSTEIN, 1987) e (NGUYEN; JABBARI, 2000). Em (NGUYEN; JABBARI, 2000), todavia, considera-se perturbações limitadas em norma  $\mathcal{L}_\infty$ . A não-linearidade empregada é a própria saturação, sem uma modelagem especial conforme apresentado na seção 3.2, o que visaria encontrar um problema convexo. Perturbações persistentes são tipicamente vinculadas a uma restrição de norma  $\mathcal{L}_\infty$ . A especificação de um limitante superior para a amplitude exige um significativo conhecimento do processo em estudo. Encontrar um valor não conservativo suficientemente elevado requer a ciência das circunstâncias operacionais para as quais o sistema deve ter seu desempenho e estabilidades garantidos. Embora restrições em norma  $\mathcal{L}_2$  estejam restritas a perturbações limitadas em energia, não existe a exigência da perturbação restringir-se a um limite de amplitude, o que simplifica a decisão de projeto quanto a este aspecto.

### 3.3.2.2 Tolerância e Rejeição à Perturbação

Dentro dos critérios de desempenho exigidos a um sistema com estabilidade local, o desempenho em relação à perturbação merece destaque pela frequência com que é considerado em processos com toda a sorte de interferências externas. Assim, perturbações  $\mathcal{L}_2$  representativas de fenômenos exógenos relevantes são consideradas. Nestes termos, a tolerância a uma perturbação com determinada norma  $\mathcal{L}_2$  pode ser exigida dentro de uma dada região. A prática comum é, então, garantir-se que a ação de uma perturbação com norma  $\mathcal{L}_2$  finita e conhecida sobre o sistema não conduza suas trajetórias em malha fechada para fora da região de atração da origem.

Por outro lado, a rejeição à perturbação avalia a capacidade que o sistema tem de atenuar em um ou mais de seus terminais de saída o efeito de uma perturbação limitada

em norma  $\mathcal{L}_2$ , a que esteja sujeito em um ou mais de seus terminais de entrada. Esta rejeição pode ser, e usualmente assim o é, quantificada através de um limitante superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  que a perturbação apresenta aos terminais de saída do sistema de interesse à esta questão.

Ambos problemas serão incluídos nos objetivos considerados pelos métodos de síntese apresentados neste trabalho.

### 3.4 Síntese de *Anti-windup*

As restrições do atuador em sistemas instáveis em malha aberta restringem também a região de atração da origem deste sistema em malha fechada. Sistemas estáveis em malha aberta, com um controle restrito sujeitam-se a um desempenho limitado, ainda que a estabilidade global seja possível. A ocorrência da saturação do sinal de controle em um sistema em malha fechada cria uma diferença entre a saída e a entrada do atuador, o que é chamado de *windup*. Como consequência o sistema deixa de responder de acordo com o sinal de controle aplicado. Nesta circunstância a lei de controle não é mais efetivamente aplicada à planta, que responde de forma indesejadamente distinta.

A técnica de *anti-windup* consiste em a partir de um sistema realimentado por uma lei de controle que despreza qualquer não-linearidade, sintetizar-se uma malha de realimentação que elimine a diferença entre a entrada e saída do atuador sempre que ela existir. Para tanto, existem duas abordagens: compensação estática ou dinâmica. Ambas tratam da forma como suprime-se a diferença entre os sinais a entrada e saída do atuador; todavia, a compensação estática efetua-a de forma constante, enquanto a compensação dinâmica adiciona estados ao sistema em malha fechada e mediante graus de liberdade adicionais à síntese, permite que a compensação evolua de forma suave ao longo de toda sua intervenção. Cada uma destas abordagens pode considerar basicamente dois problemas de otimização: desempenho e maximização da estimativa da região de atração.

Este problema foi inicialmente identificado em malhas de controle envolvendo controladores com ação integral. A evidente sobrecarga do integrador motivou a busca de uma solução. Técnicas específicas foram desenvolvidas a partir (FERTIK; ROSS, 1967). Durante as décadas seguintes os desenvolvimentos seguiram, considerando-se um controle - dito nominal - projetado *a priori*, desconsiderando-se o efeito da saturação do atuador. Na década de 90, (WALGAMA; STERNBY, 1990) aponta a característica de observadores em diversas malhas de compensação *anti-windup*. Em (KOTHARE et al., 1994), apresenta-se um *framework* único para análise das principais técnicas existentes, até então. Este esforço de unificação das técnicas de *anti-windup* mostrou que técnicas às vezes topologicamente distintas eram bastante similares se comparadas pelo *framework* proposto. Os trabalhos concentravam-se no aprimoramento das técnicas, todavia, sem um tratamento mais rigoroso da estabilidade. A partir de 96, com (MIYAMOTO; VINNICOMBE, 1996) a estabilidade em malha fechada é explicitamente abordada, com ênfase na estabilidade global. Em seguida, (TEEL; KAPPOR, 1997) introduz o conceito de *anti-windup*  $\mathcal{L}_2$  como um problema de garantia da estabilidade  $\mathcal{L}_2$ , o que além de vincular o estudo formal da estabilidade ao problema de *windup*, também abre espaço para o tratamento de questões de robustez.

A partir de (BOYD et al., 1994) inequações matriciais lineares passaram a ser incorporadas na síntese de controladores e análise de sistemas, sujeitos a restrições no controle. Métodos baseados em LMI mostraram-se bastante adequados para o tratamento de problemas multi-objetivo. A cada objetivo associa-se um conjunto de restrições em forma

de LMI. A solução do problema, quando existe, atende a todas as restrições. Pode ser encontrada com o uso de pacotes comerciais de *softwares*. Hoje técnicas de programação linear são bastante difundidas na literatura, muito devido às contribuições de (BOYD et al., 1994). Desta forma, é possível tratar-se diversos aspectos importantes como tamanho e forma da região de atração, critérios lineares de performance distintos, especificações dinâmicas, etc. Embora outras técnicas não baseadas em LMI seguissem sendo estudadas, este trabalho considerará apenas as abordagens com LMIs. Em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002), considerando-se sistemas de tempo contínuo, o método lá proposto caracteriza explicitamente o domínio de estabilidade com técnicas de *anti-windup*, buscando otimizar-se um critério de desempenho enquanto maximiza-se a estimativa da região de atração da origem do sistema em questão, em malha fechada. O comportamento não-linear do sistema sob saturação é descrito por modelo de não-linearidade de setor clássica, por isto chega-se a uma condução BMI, cuja solução mediante esquemas de relaxação por iterações entre LMIs alternadas, não garante uma otimização global dos critérios. Em (MULDER; KOTHARE; MORARI, 2001) compensadores estáticos são propostos para estabilização global e limitação do ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação. O método ali proposto apresenta pela primeira vez restrições em LMI. Já (GRIMM et al., 2003), propondo uma compensação dinâmica *anti-windup*, descreve um método baseado em LMI que garante ganho  $\mathcal{L}_2$  finito para um sistema exponencialmente estável.

Em (HU; LIN; CHEN, 2002), um método de síntese de realimentação estática de estados é proposto baseado em LMIs, a partir de BMIs relaxadas. Perturbações persistentes são consideradas na entrada da planta. A não-linearidade correspondente aos limites do atuador são consideradas em um modelo politópico generalizado.

É em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2003) que um método para síntese de *anti-windup* estático é proposto baseado em LMI, para sistemas com modos instáveis em malha aberta. O método é baseado em uma nova modelagem por não-linearidade de setor, dita generalizada. Como o emprêgo da condição de setor clássica - baseada em uma matriz diagonal - leva a restrições expressas por BMIs, neste trabalho utiliza-se a condição de setor proposta em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2003) - baseada em uma matriz de estrutura livre. Trabalhos posteriores dos autores estenderam os resultados para sistemas discretos, propondo recentemente a síntese de compensadores dinâmicos (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr.; BENDER, 2006), e a síntese de controladores com restrição adicional em taxa de variação, (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2005). Todas as condições são expressas em LMIs.

Como parte de uma série de trabalhos desenvolvidos a partir da nova condição de setor publicada em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2003), este trabalho estende para o caso contínuo os resultados de (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr.; BENDER, 2006) e (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2005).

Com esta motivação, desenvolve-se a seguir métodos que endereçam problemas pouco abordados na literatura de controle automático para sistemas lineares. Existem muitas publicações que tratam o *anti-windup* estático; poucas, o *anti-windup* dinâmico. Sobre este problema, grande parte consideram a estabilidade global; poucas, a local. Ainda, praticamente inexistem publicações que consideram a síntese simultânea do controlador dinâmico e de laços *anti-windup*. Um estudo preliminar neste sentido é apresentado em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2005).

## 4 COMPENSAÇÃO ANTI-WINDUP DINÂMICA

### 4.1 Introdução

Este capítulo trata da síntese de compensadores *anti-windup* dinâmicos para sistemas contínuos lineares com o controle sujeito à saturação. A compensação *anti-windup* atua sobre um sistema sujeito a um atuador cujo modelo represente seus limites físicos. A compensação manifesta-se sempre que existir uma diferença entre os sinais à entrada e à saída do atuador. Em sistemas cujas leis de controle foram projetadas desconsiderando-se esta diferença, a compensação *anti-windup* contribui para a garantia de estabilidade da origem do sistema em malha fechada e para a manutenção do desempenho nominal.

Como tratado anteriormente, considera-se a ocorrência de perturbações externas ao sistema limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ . Neste capítulo, dois métodos de síntese são propostos para garantir que em malha fechada o sistema tenha suas trajetórias limitadas e um certo nível de desempenho  $\mathcal{L}_2$  em sua saída regulada. Adicionalmente, na ausência de perturbações os métodos permitem a garantia da estabilidade assintótica interna global<sup>1</sup> ou local. O primeiro método consiste na síntese de compensadores de ordem plena; ou seja: a ordem (número de estados) do compensador equivale à soma da ordem da planta e do controlador. O segundo método apresenta uma alternativa com ordem reduzida, podendo assumir qualquer valor inferior à ordem plena. Os desenvolvimentos buscam condições teóricas em forma de LMI, formuladas com o auxílio da nova condição de setor proposta em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2003) e discutida na seção anterior, bem como funções candidatas de Liapunov quadráticas. Recursos algébricos como mudanças de variáveis clássicas propostas por (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) também são utilizados em ambos métodos. O Lema de Finsler é empregado sempre que as condições obtidas inicialmente sejam bilineares. Todas as condições obtidas podem, então, figurar em problemas de otimização convexos: maximização do limite de perturbações admissíveis, o que constitui-se no problema de tolerância à perturbação, e a minimização da norma  $\mathcal{L}_2$  da saída regulada - problema de rejeição à perturbação.

### 4.2 Definição do Problema

O sistema linear contínuo abaixo representa o modelo de uma planta.

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + B_w w \\ y = C_y x + D_y u + D_{y,w} w \\ z = C_z x + D_z u + D_{z,w} w \end{cases} \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>A estabilidade global da origem em malha fechada depende da estabilidade em malha aberta da planta, vide (SONTAG; SUSSMANN, 1990)

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $z \in \mathbb{R}^r$ ,  $w \in \mathbb{R}^q$  são - respectivamente - os vetores estado, entrada, saídas medida e regulada, e perturbação. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_w$ ,  $C_y$ ,  $D_y$ ,  $D_{y,w}$ ,  $C_z$ ,  $D_z$ ,  $D_{z,w}$ , são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Os pares  $(A, B)$ ,  $(C_y, A)$  são respectivamente controláveis e observáveis. O sistema é sujeito a perturbações externas representadas pelo vetor  $w$  limitado em energia (isto é,  $w \in \mathcal{L}_2$ ) em função de algum escalar real positivo  $\delta$ , conforme (4.2)

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^T w \, dt \leq \frac{1}{\delta}, \forall t > 0. \quad (4.2)$$

A entrada de controle  $u$  é limitada em amplitude, da seguinte forma:

$$-u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.3)$$

Para a planta representada por (4.1), considera-se que um controlador dinâmico de ordem  $n_c$  foi projetado *a priori* para garantir requisitos de estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada, na ausência de saturação. Seu modelo correspondente é exibido em (4.4),

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c + B_{c,w} w \\ v_c = C_c x_c + D_c u_c + D_{c,w} w \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $u_c = y$ ,  $v_c \in \mathbb{R}^m$  são respectivamente os vetores estado, entrada e saída do controlador. A saída do controlador  $v_c$  alimenta a entrada da planta  $u$ . Todavia, como consequência dos limites a que a entrada da planta encontra-se sujeita devido à saturação, o controle *de facto* do sistema não é necessariamente  $v_c$  e pode ser representado por  $u = \text{sat}_{u_0}(v_c)$ , ou seja:

$$u = \text{sat}_{u_0}(C_c x_c + D_c u_c + D_{c,w} w) \quad (4.5)$$

As seguintes condições são premissas deste trabalho.

$$\begin{aligned} \exists M_a^{-1} \mid M_a &= I_m - D_c D_y \\ \exists M_b^{-1} \mid M_b &= I_m - D_y D_c \end{aligned} \quad (4.6)$$

O que equivale a dizer que a interconexão de (4.1) com (4.4) é *well-posed*. A planta pode apresentar uma matriz de transferência estritamente própria, o que requer a garantia expressas pelas premissas (4.6).

O problema abordado neste capítulo, então, é a síntese de um compensador *anti-windup* dinâmico que reduza tanto quanto possível os indesejáveis efeitos do *windup* causados pela saturação à entrada da planta. Desta forma, visa-se preservar o desempenho nominal original quando a operação dá-se com o sinal de controle dentro dos níveis de resposta linear do atuador, e garantir a estabilidade fora desta região de operação. A idéia consiste em realizar-se uma correção nos estados do controlador de forma que a diferença entre a entrada e saída do atuador seja minimizada. No caso estático, a correção aplicada à dinâmica do controlador nominal é diretamente proporcional ao erro entre a entrada e saída do atuador. Como consequência, a malha *anti-windup* somente atua sobre o sistema quando o atuador encontra-se saturado. Na caso dinâmico, a correção inserida no controlador nominal corresponde a saída de um bloco dinâmico de ordem plena ou reduzida, cujos estados prolongam a ação compensatória sobre o controlador nominal mesmo após cessada a saturação do atuador. A motivação da compensação dinâmica está na possibilidade de obter-se melhores índices de desempenho pelo maior grau de liberdade da síntese em relação ao compensador estático.

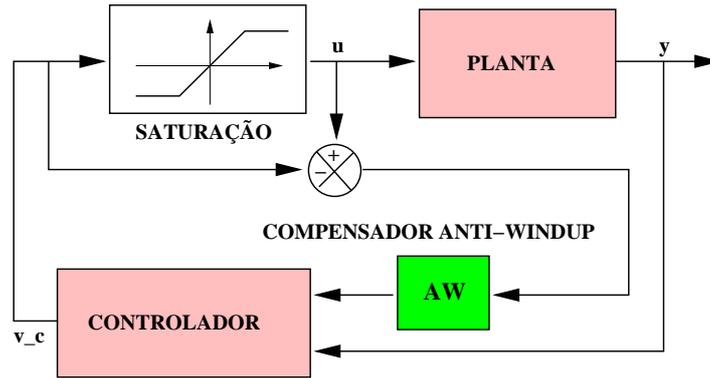


Figura 4.1: Sistema em Malha Fechada

Adicionalmente, o compensador será sintetizado de forma a garantir-se que a saída regulada apresente um limitante ao ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação externa  $w$  em  $z$ . O modelo do compensador *anti-windup* será o seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x}_{aw} = A_{aw}x_{aw} + B_{aw}\psi_{u_0}(v_c) \\ y_{aw} = C_{aw}x_{aw} + D_{aw}\psi_{u_0}(v_c) \end{cases} \quad (4.7)$$

Tem-se  $x_{aw} \in \mathfrak{R}^{n_{aw}}$  como o vetor estado do compensador *anti-windup*,  $\psi_{u_0}(v_c) = v_c - \text{sat}_{u_0}(v_c)$ , representando a diferença entre a entrada e saída do atuador e  $y_{aw} \in \mathfrak{R}^{n_c}$  como o vetor saída do compensador dinâmico. As matrizes  $A_{aw}, B_{aw}, C_{aw}, D_{aw}$  são de dimensões apropriadas. O sinal  $y_{aw}$  gerado pelo compensador será injetado no controlador (4.4). O modelo do controlador torna-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c + B_{c,w} w + y_{aw} \\ v_c = C_c x_c + D_c u_c + D_{c,w} w \end{cases} \quad (4.8)$$

### 4.3 O Sistema em Malha Fechada

O sistema em malha fechada corresponde à planta (4.1), o controlador (4.8) e o compensador *anti-windup* (4.7) interligados conforme (4.5) e  $u_c = y$ . A figura 4.1 ilustra esta interconexão. As expressões para  $y, v_c, \dot{x}, \dot{x}_c$  e  $z$  serão desenvolvidas algebricamente buscando-se uma representação para o sistema em malha fechada que evidencie a dinâmica do sistema aumentado  $\begin{bmatrix} x & x_c & x_{aw} \end{bmatrix}$ .

Tem-se que:

$$\begin{aligned} y &= C_y x + D_y \text{sat}_{u_0}(v_c) - D_y v_c + D_y v_c + D_{y,w} w \\ &= C_y x - D_y \psi_{u_0}(v_c) + D_y v_c + D_{y,w} w \end{aligned} \quad (4.9a)$$

Definindo-se  $\Delta = (I_m - D_c D_y)^{-1}$  e  $\mathbf{D}_{c,w} = \Delta (D_{c,w} + D_c D_{y,w})$  segue que:

$$\begin{aligned} v_c &= C_c x_c + D_c (C_y x - D_y \psi_{u_0}(v_c) + D_y v_c + D_{y,w} w) + D_{c,w} w \\ (I_m - D_c D_y) v_c &= C_c x_c + D_c D_y x - D_c D_y \psi_{u_0}(v_c) + D_c D_{y,w} w + D_{c,w} w \\ &= \Delta D_c C_y x + \Delta C_c x_c - \Delta D_c D_y \psi_{u_0}(v_c) + \Delta (D_{c,w} + D_c D_{y,w}) w \\ &= \Delta D_c C_y x + \Delta C_c x_c - \Delta D_c D_y \psi_{u_0}(v_c) + \mathbf{D}_{c,w} w \end{aligned} \quad (4.9b)$$

Definindo-se  $\tilde{\Delta} = I_m + \Delta D_c D_y$  pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B \text{sat}_{u_0}(v_c) - Bv_c + Bv_c + B_w w \\
&= Ax - B\psi_{u_0}(v_c) + Bv_c + B_w w \\
&= Ax + B(\Delta D_c C_y x + \Delta C_c x_c - \Delta D_c D_y \psi_{u_0}(v_c) + \Delta(D_{c,w} + D_c D_{y,w}) w) \\
&\quad - B\psi_{u_0}(v_c) + B_w w \\
&= (A + B\Delta D_c C_y) x + B\Delta C_c x_c - B(I_m + \Delta D_c D_y) \psi_{u_0}(v_c) \\
&\quad + (B_w + B\Delta(D_{c,w} + D_c D_{y,w})) w \\
&= (A + B\Delta D_c C_y) x + B\Delta C_c x_c - B\tilde{\Delta} \psi_{u_0}(v_c) + (B_w + B\mathbf{D}_{c,w}) w
\end{aligned} \tag{4.9c}$$

Seja agora  $\bar{\Delta} = I_p + D_y \Delta D_c$ , segue que aplicando-se (4.9a) em (4.9b):

$$\begin{aligned}
y &= C_y x - D_y \psi_{u_0}(v_c) \\
&\quad + D_y(\Delta D_c C_y x + \Delta C_c x_c - \Delta D_c D_y \psi_{u_0}(v_c) + \Delta(D_{c,w} + D_c D_{y,w}) w) + D_{y,w} w \\
&= (I_p + D_y \Delta D_c) C_y x + D_y \Delta C_c x_c - D_y (I_m + \Delta D_c D_y) \psi_{u_0}(v_c) \\
&\quad + (D_{y,w} + D_y \mathbf{D}_{c,w}) w \\
&= \bar{\Delta} C_y x + D_y \Delta C_c x_c - D_y \tilde{\Delta} \psi_{u_0}(v_c) + (D_{y,w} + D_y \mathbf{D}_{c,w}) w
\end{aligned} \tag{4.9d}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_c &= A_c x_c + B_{c,w} w + C_{aw} x_{aw} + D_{aw} \psi_{u_0}(v_c) \\
&\quad + B_c \left( \bar{\Delta} C_y x + D_y \Delta C_c x_c - D_y \tilde{\Delta} \psi_{u_0}(v_c) + (D_{y,w} + D_y \mathbf{D}_{c,w}) w \right) \\
&= B_c \bar{\Delta} C_y x + (A_c + B_c D_y \Delta C_c) x_c + C_{aw} x_{aw} - \left( B_c D_y \tilde{\Delta} - D_{aw} \right) \psi_{u_0}(v_c) \\
&\quad + (B_{c,w} + B_c (D_{y,w} + D_y \mathbf{D}_{c,w})) w
\end{aligned} \tag{4.9e}$$

$$\begin{aligned}
z &= C_z x + D_z \text{sat}(v_c) - D_z v_c + D_z v_c + D_{z,w} w \\
&= C_z - D_z \psi_{u_0}(v_c) + D_{z,w} w \\
&\quad + D_z(\Delta D_c C_y x + \Delta C_c x_c - \Delta D_c D_y \psi_{u_0}(v_c) + \Delta(D_{c,w} + D_c D_{y,w}) w) \\
&= (C_z + D_z \Delta D_c C_y) x + D_z \Delta C_c x_c - D_z \tilde{\Delta} \psi_{u_0}(v_c) \\
&\quad + (D_{z,w} + D_z \Delta(D_{c,w} + D_c D_{y,w})) w \\
&= (C_z + D_z \Delta D_c C_y) x + D_z \Delta C_c x_c - D_z \tilde{\Delta} \psi_{u_0}(v_c) + (D_{z,w} + D_z \mathbf{D}_{c,w}) w
\end{aligned} \tag{4.9f}$$

A partir do desenvolvimento acima, considerando-se o vetor de estados (4.10),

$$\xi^T = [ x^T \quad x_c^T \quad x_{aw}^T ] \tag{4.10}$$

e as matrizes

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A + B\Delta D_c C_y & B\Delta C_c \\ B_c \bar{\Delta} C_y & A_c + B_c D_y \Delta C_c \end{bmatrix}, \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} B\tilde{\Delta} \\ B_c D_y \tilde{\Delta} \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_1 \\ I_{n_{aw}} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w + B\mathbf{D}_{c,w} \\ \mathbf{B}_{c,w} \end{bmatrix}, \mathcal{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{C} = [0 \ 0 \ I_{n_{aw}}] \\
\mathbf{C}_z &= [C_z + D_z \Delta D_c C_y \quad D_z \Delta C_c], \mathcal{C}_z = [\mathbf{C}_z \ 0], K_1 = \begin{bmatrix} A_{aw} \\ C_{aw} \end{bmatrix} \\
\mathcal{D}_{z,w} &= D_{z,w} + D_z \mathbf{D}_{c,w}, \mathbf{D}_{y,w} = D_{y,w} + D_c \mathbf{D}_{c,w}, K_2 = \begin{bmatrix} B_{aw} \\ D_{aw} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{c,w} &= B_{c,w} + B_c \mathbf{D}_{y,w}, \mathbf{K} = \Delta [D_c C_y \quad C_c], \mathcal{K} = [\mathbf{K} \ 0] \\
\mathcal{D}_z &= D_z \tilde{\Delta}, \mathbf{K}_\psi = \Delta D_c D_y, \mathbf{D}_z = \mathcal{D}_z, \mathbf{D}_{z,w} = \mathcal{D}_{z,w}, \mathcal{D}_{c,w} = \mathbf{D}_{c,w}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

é possível, então, encontrar-se a seguinte expressão para o sistema em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C}) \xi - (\mathcal{B} - \mathcal{B}_1 K_2) \psi_{u_0}(v_c) + \mathcal{B}_w w \\ z = \mathcal{C}_z \xi - \mathcal{D}_z \psi_{u_0}(v_c) + \mathcal{D}_{z,w} w \end{cases} \tag{4.12}$$

## 4.4 Resultados Principais

Esta seção apresenta em forma de teoremas e corolários, seguidos de suas respectivas provas, as condições para a obtenção das matrizes  $A_{aw}, B_{aw}, C_{aw}, D_{aw}$  do compensador *anti-windup* proposto, de forma a garantir a estabilidade da origem em malha fechada, um limitante para o ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação à saída controlada do sistema, e um conjunto de inicialização do sistema tolerante à perturbação de norma  $\mathcal{L}_2$  máxima, conhecida. Na ausência de perturbação a origem deverá ser garantida assintoticamente estável.

### 4.4.1 Síntese de Compensadores de ordem $n_{aw} = n + n_c$

Para o caso em que o compensador seja da ordem  $n + n_c$ , o seguinte teorema pode ser enunciado.

**Teorema 4.1.** *Se existem matrizes simétricas positivas definidas,  $X, Y \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , uma matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e matrizes  $H \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $L \in \mathfrak{R}^{n_c \times (n+n_c)}$ ,  $F, G_1, Q \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ , e escalares positivos  $\mu, \gamma$ , verificando as LMIs (4.13a), (4.13b), (4.13c)*

$$\begin{bmatrix} \text{sym}\{AX + B_1 L\} & * & * & * & * \\ H & YA + A^T Y & * & * & * \\ F - SB^T - Z^T B_1^T & Q & \Sigma_{A0} & * & * \\ B_w^T & B_w^T Y & D_{c,w}^T & -I_q & * \\ C_z X & C_z & -D_z S & D_{z,w} & -\gamma I_r \\ \Sigma_{A0} = -2S - \mathbf{K}_\psi S - S \mathbf{K}_\psi^T & & & & \end{bmatrix} < 0 \tag{4.13a}$$

$$\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I_{n+n_c} & Y & \star \\ \mathbf{K}_{(i)}X - F_{(i)} & \mathbf{K}_{(i)} - G_{1(i)} & \mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.13b)$$

$$\delta - \mu > 0 \quad (4.13c)$$

com  $N, M$  verificando

$$NM^T = I_{n+n_c} - YX \quad (4.13d)$$

então para qualquer  $w$  satisfazendo (4.2), o compensador (4.7) definido conforme (4.13e)

$$\begin{aligned} D_{aw} &= ZS^{-1} \\ C_{aw} &= LM^{-T} \\ B_{aw} &= S^{-1}(Q - G_1 + SB^TY + Z^T\mathbf{B}_1^TY)N^{-T} \\ A_{aw} &= N^{-1}(H - \mathbf{A}^T - Y\mathbf{A}X - Y\mathbf{B}_1L)M^{-T} \end{aligned} \quad (4.13e)$$

garante que o sistema em malha fechada é well-posed e:

1. As trajetórias são limitadas, permanecendo no elipsóide  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$  para todo  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \beta)$ , com  $\beta = \mu^{-1} - \delta^{-1}$ ,  $\forall \|w\|_2^2 \leq \frac{1}{8}$ ;
2.  $\|z\|_2^2 \leq \gamma\|w\|_2^2 + \gamma V(0)$ ,  $V(x) = x^T Px$ ;
3. quando  $w = 0$ , a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável para todo  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \mu^{-1})$ .

onde  $P$  é definido conforme segue.

$$P = \begin{bmatrix} Y & \star \\ N^T & \bullet \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & \star \\ M^T & \bullet \end{bmatrix}$$

*Prova.* Propõe-se uma função que se for negativa definida ao longo das trajetórias do sistema, o sistema em malha fechada tenha suas trajetórias convergentes à origem na ausência de perturbação. Esta mesma função deve propiciar a avaliação do sistema em malha fechada com relação ao critério de desempenho escolhido; ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  em  $z$ . Seja esta função definida conforme (4.14a).

$$\tilde{\mathcal{L}} \triangleq \dot{V} - w^T w + \gamma^{-1} z^T z, \quad \gamma > 0 \in \Re \quad (4.14a)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima constitui-se da derivada temporal de primeira ordem de

$$V(\xi) = \xi^T P \xi, \quad P = P^T > 0, \quad P \in \Re^{2(n+n_c) \times 2(n+n_c)} \quad (4.14b)$$

A função representada em (4.14b) é efetivamente a candidata de Liapunov. Esta deve ser positiva definida. Os demais termos em (4.14a), permitem abordar conjuntamente a tolerância e a rejeição à perturbação.

Conforme (2.4b) a derivada temporal de primeira ordem de  $V(\xi)$  é dada por:

$$\dot{V} = \dot{\xi}^T P \xi + \xi^T P \dot{\xi} \quad (4.14c)$$

A matriz  $P$ , simétrica positiva definida possui a seguinte estrutura:

$$P = \begin{bmatrix} Y & \star \\ N^T & \bullet \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & \star \\ M^T & \bullet \end{bmatrix} \quad (4.14d)$$

Suponha-se que  $\tilde{\mathcal{L}} < 0, \forall \xi \in \Xi$ . Integrando-se o lado esquerdo desta desigualdade no intervalo  $t \in [0, \infty)$ , temos que  $\forall T \in \mathfrak{R} > 0$ ,

$$\int_0^T \tilde{\mathcal{L}} dt = V(\xi(T)) - V(\xi(0)) - \int_0^T w^T w dt + \gamma^{-1} \int_0^T z^T z dt \quad (4.14e)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} < 0, \forall \xi \in \Xi \Rightarrow V(\xi(T)) - V(\xi(0)) - \int_0^T w^T w dt + \gamma^{-1} \int_0^T z^T z dt < 0 \quad (4.14f)$$

Neste caso

$$V(\xi(T)) < V(\xi(0)) + \int_0^T w^T w dt - \gamma^{-1} \int_0^T z^T z dt \quad (4.14g)$$

Segue então que,  $\gamma^{-1} \|z\|_2^2 \geq 0$ . Então,

$$V(\xi(T)) < V(\xi(0)) + \|w\|_2^2, \forall T > 0 \in \mathfrak{R} \quad (4.14h)$$

A inequação (4.14h) evidencia que, enquanto  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$ ,  $V(\xi)$  é limitado - e por conseguinte, suas trajetórias.

Na ausência de perturbação, ou seja  $\|w\|_2^2 = 0$ ,  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$  implica que as trajetórias decresçam ao avanço do tempo. Como  $\dot{V}(0) = 0$ , as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para a origem. A partir da definição de conjuntos onde  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \beta)$ , e  $\beta = \mu^{-1} + \delta^{-1}$ , a ausência de perturbação implica em  $\beta = \mu^{-1}$ , uma vez que neste caso,  $\frac{1}{\delta} = 0$ . Como as trajetórias do sistema em malha fechada iniciam-se dentro de  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$ , pela equação (4.14h) conclui-se que o conjunto elipsoidal  $\varepsilon(P, \mu^{-1}) \subset \Xi$  define um conjunto contrativo - vide (GOMES DA SILVA Jr., 1997).

No caso em que  $w \neq 0$  - limitada em norma  $\mathcal{L}_2$ , conforme (4.2) - a partir de (4.14c) tem-se:

$$\gamma^{-1} \|z\|_2^2 < V(\xi(0)) - V(\xi(\infty)) + \|w\|_2^2 \quad (4.14i)$$

Por definição  $V(\xi(\infty)) \geq 0$ , então obrigatoriamente:

$$\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(\xi(0)) \quad (4.14j)$$

A inequação (4.14h) garante que as trajetórias do sistema em malha fechada confinam-se no conjunto  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$ , desde que  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \beta)$ , uma vez que  $\mu^{-1} = \beta + \frac{1}{\delta}$ . Se  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$ , a integral  $\int_0^\infty \tilde{\mathcal{L}}(\tau) dt = V(\xi(\infty)) - V(\xi(0)) - \|w\|_2^2 + \gamma^{-1} \|z\|_2^2 < 0$  também o é. Pode-se, então, afirmar-se o disposto na inequação (4.14j):  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(\xi(0))$ . De outra forma, se  $\xi(0) = 0$  então o limitante superior ao ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  em  $z$  é dado por  $\sqrt{\gamma}$ ; ou seja:  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2$ . Com base nestes desenvolvimentos, a função  $\tilde{\mathcal{L}}$  mostrou-se apropriada para verificar se as trajetórias do sistema em malha fechada são limitadas e ao mesmo tempo determinar um limitante superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$ .

Dando seguimento à prova, expressar-se-á  $\tilde{\mathcal{L}}$  matricialmente, buscando-lhe uma representação em forma de uma LMI definida negativa. Principiando-se por (4.14c), que matricialmente representada apresenta-se como:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \text{sym} \{P(\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 C)\} & \star & \star \\ -(\mathcal{B} - \mathcal{B}_1 K_2)^T P & 0 & \star \\ \mathcal{B}_w^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

Os demais termos de  $\tilde{\mathcal{L}}$  expressos na mesma notação tornam-se:

$$-w^T w = \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \quad (4.15b)$$

$$\gamma^{-1}z^T z = \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T \\ -\mathcal{D}_z^T \\ \mathcal{D}_{z,w}^T \end{bmatrix} [\mathcal{C}_z \quad -\mathcal{D}_z \quad \mathcal{D}_{z,w}] \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \quad (4.15c)$$

Chega-se a uma expressão completa de (4.14a),

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix}^T \tilde{\Lambda} \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \\ \tilde{\Lambda} &\triangleq \begin{bmatrix} \text{sym}\{P(\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C})\} & \star & \star \\ -(\mathcal{B} - \mathcal{B}_1 K_2)^T P & 0 & \star \\ \mathcal{B}_w^T P & 0 & -I_q \end{bmatrix} + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T \\ -\mathcal{D}_z^T \\ \mathcal{D}_{z,w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T \\ -\mathcal{D}_z^T \\ \mathcal{D}_{z,w}^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.15d)$$

É necessário determinar o conjunto  $\varepsilon(P, \beta) \subset \Xi$  dentro do qual o sistema possa ser inicializado tendo garantida a estabilidade de sua origem e algum nível de desempenho  $\mathcal{L}_2$ .

Considere-se que  $v_c = \mathcal{K}\xi - \mathbf{K}_\psi \psi_{u_0}(v_c) + \mathbf{D}_{c,w}w$ , e defina-se o conjunto  $\mathcal{S}(u_0)$  como segue.

$$\mathcal{S}(u_0) \triangleq \left\{ \xi \mid \xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c+n_{aw}}, |\mathcal{K}_{(i)}\xi - \mathcal{G}_{(i)}\xi| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m \right\} \quad (4.16a)$$

Pelo lema 2.1, se existe uma matriz  $\mathcal{G} = [G_1 \quad G_2]$  conforme (4.16a) e  $\xi$  é um elemento de  $\mathcal{S}(u_0)$ , então é possível afirmar que:

$$\psi_{u_0}(v_c)^T T \left( \psi_{u_0}(v_c) - [\mathcal{G} \quad -\mathbf{K}_\psi \quad \mathbf{D}_{c,w}] \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad (4.16b)$$

para qualquer matriz  $T$  diagonal positiva definida.

É interessante notar-se que o lema 2.1 menciona o conjunto  $\mathcal{S}(u_0)$  como em (4.16a), porém apresenta uma desigualdade - equação (2.3e) - expressa em termos de  $\psi_{u_0}(\mathcal{K}\xi)$ . Em (4.16b), uma desigualdade semelhante expressa-se em termos de  $\psi_{u_0}(v_c)$ . A aplicação do lema 2.1 à condição de setor (4.16a) requer que ambas desigualdades sejam equivalentes, o que é verdadeiro.

Definindo-se  $r \triangleq \mathcal{G}\xi + \mathbf{K}_\psi \psi_{u_0}(v_c) + \mathbf{D}_{c,w}w$ , segue de (4.9b) e (4.11) que  $v_c - r = (\mathcal{K} - \mathcal{G})\xi$ . Então, para todo  $\xi \in \mathcal{S}(u_0)$  tem-se que  $|v_{c(i)} - r_{(i)}| \leq u_{0(i)}$ . Deste ponto em diante a prova do lema 2.1 justifica (4.16b).

Multiplicando-se (4.16b) por  $-2$  resulta em

$$\begin{aligned} & -\psi_{u_0}(v_c)^T T \left( \psi_{u_0}(v_c) - [\mathcal{G} \quad -\mathbf{K}_\psi \quad \mathbf{D}_{c,w}] \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \right) \\ & - \left( \psi_{u_0}(v_c) - [\mathcal{G} \quad -\mathbf{K}_\psi \quad \mathbf{D}_{c,w}] \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \right)^T T \psi_{u_0}(v_c) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.16c)$$

o que é expresso por:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix}^T \tilde{\Lambda}_2 \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \\ \tilde{\Lambda}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ T\mathcal{G} & -2T - T\mathbf{K}_\psi - \mathbf{K}_\psi^T T & \star \\ 0 & \mathbf{D}_{c,w}^T T & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.16d)$$

A expressão  $\tilde{\Lambda}$  não precisa ser negativa definida em todo os espaço  $\mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw})}$ , uma vez que a modelagem da saturação do atuador é válida somente enquanto  $\xi \in \mathcal{S}(u_0)$ . A matriz  $\tilde{\Lambda}_2$  representa a pertinência de  $\xi$  ao setor  $\mathcal{S}(u_0)$ . Assim, se  $\xi \in \mathcal{S}(u_0)$ , então  $\tilde{\Lambda}_2 \geq 0$ . Como  $\tilde{\Lambda} \leq \tilde{\Lambda} + \tilde{\Lambda}_2$ , se  $\tilde{\Lambda} + \tilde{\Lambda}_2 < 0$ , então  $\tilde{\Lambda} < 0$ ,  $\forall \xi \in \mathcal{S}(u_0)$ . Pelo complemento de Schur é possível representar-se  $\tilde{\Lambda} + \tilde{\Lambda}_2 < 0$  conforme:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_3 &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{P(\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C})\} & \star & \star & \star \\ -(\mathcal{B} - \mathcal{B}_1 K_2)^T P + T\mathcal{G} & \Sigma_{A1} & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T P & \mathcal{D}_{c,w}^T T & -I_q & \star \\ \mathcal{C}_z & -\mathcal{D}_z & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \\ \Sigma_{A1} &= -2T - T\mathbf{K}_\psi - \mathbf{K}_\psi^T T \end{aligned} \quad (4.16e)$$

Por conveniência, o termo  $\mathbf{D}_{c,w}$  foi substituído pelo seu equivalente  $\mathcal{D}_{c,w}$ .

Da expressão (4.16e), é possível afirmar-se que se  $\tilde{\Lambda}_3 < 0$ , então  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$ ,  $\forall \xi \in \mathcal{S}(u_0)$ . Conseqüência direta é  $\dot{V} < 0$  uma vez que o termo (1, 1) de (4.16e) verificar-se-ia definido negativo. Além disto, (4.14h) é verdadeira. Sendo  $\dot{V} < 0$ ,  $\xi \in \mathcal{S}(u_0)$ , e considerando-se a presença de perturbações com norma  $\mathcal{L}_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\delta}}$ ; a exemplo da expressão (4.14h), é possível escrever-se:

$$V(\xi(t)) < V(\xi(0)) + \|w\|_2^2 \quad (4.16f)$$

Mas conforme (4.2),  $\|w\|_2^2 \leq \delta^{-1}$ . Então,

$$V(\xi(t)) < V(\xi(0)) + \delta^{-1} \quad (4.16g)$$

Sejam  $\beta$  e  $\mu$  escalares reais positivos tais que:

$$\mu^{-1} \triangleq \beta + \delta^{-1} \quad (4.16h)$$

e  $\beta = V(\xi(0))$ . Então, pelas definições de conjuntos elipsoidais (2.4c), comparando-se as expressões (4.16g) e (4.16h) conclui-se que todas as trajetórias inicializadas em  $\varepsilon(P, \beta)$  jamais deixarão o elipsóide  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$ . Uma conseqüência disto é que  $\varepsilon(P, \mu^{-1}) \subset \mathcal{S}(u_0)$ . É, portanto, necessário encontrar-se algum  $\mu$  que satisfaça (4.16h). O lema 2.5 trata exatamente da garantia da pertinência do elipsóide  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$  ao conjunto  $\mathcal{S}(u_0)$ , resolvendo esta questão.

Assim, conforme o lema 2.5, se  $\varepsilon(P, \mu^{-1}) \subset \mathcal{S}(u_0)$ , então:

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{K}_{(i)} - \mathcal{G}_{(i)} & \mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, \forall i = 1, \dots, m \quad (4.17a)$$

Finalmente, a partir de (4.16h), para garantir-se um conjunto de inicialização não vazio, com  $\beta > 0$ , deve-se ter:

$$\mu - \delta < 0 \quad (4.17b)$$

Uma vez determinados os termos para a garantia de estabilidade da origem do sistema em malha fechada caso  $\tilde{\Lambda}_3 < 0$ , parte-se agora para a representação de  $\tilde{\Lambda}_3 < 0$ , em (4.16e), por uma LMI.

Para tanto defina-se  $\Pi$  e  $S$  como:

$$\Pi = \begin{bmatrix} X & I_{n+n_c} \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad S = T^{-1} \quad (4.18)$$

Multiplicando-se (4.16e) pela esquerda e direita, respectivamente por:

$$\text{BLKDG} \left( \begin{bmatrix} \Pi^T & S & I_{q+r} \end{bmatrix} \right) \quad (4.19a)$$

e seu transposto, chega-se a:

$$\tilde{\Lambda}_4 = \begin{bmatrix} \text{sym} \{ \Pi^T P (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C}) \Pi \} & \star & \star & \star \\ -S (\mathcal{B} - \mathcal{B}_1 K_2)^T P \Pi + \mathcal{G} \Pi & \Sigma_{A0} & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T P \Pi & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star \\ \mathcal{C}_z \Pi & -\mathcal{D}_{z,S} & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19b)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \text{sym} \{ \Pi^T P (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C}) \Pi \} &= \begin{bmatrix} \text{sym} \{ \mathbf{A} X + \mathbf{B}_1 C_{aw} M^T \} & \star \\ \Sigma_{A2} & Y \mathbf{A} + \mathbf{A}^T Y \end{bmatrix} \\ \Sigma_{A2} &= Y \mathbf{A} X + Y \mathbf{B}_1 C_{aw} M^T + N A_{aw} M^T + \mathbf{A}^T \\ S \mathcal{B}^T P \Pi &= S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+n_c} & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S \mathbf{B}^T & S \mathbf{B}^T Y \end{bmatrix} \\ S K_2^T \mathcal{B}_1^T P \Pi &= S \begin{bmatrix} D_{aw}^T \mathbf{B}_1^T & B_{aw}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+n_c} & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S D_{aw}^T \mathbf{B}_1^T & S D_{aw}^T \mathbf{B}_1^T Y + S B_{aw}^T N^T \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_w^T P \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+n_c} & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w^T & \mathbf{B}_w^T Y \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_z \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I_{n+n_c} \\ M^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \\ \mathcal{G} \Pi &= \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I_{n+n_c} \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_1 X + G_2 M^T & G_1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{K} \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I_{n+n_c} \\ M^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} X & \mathbf{K} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.19c)$$

Usando-se uma mudança de variáveis semelhante à proposta em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997), transforma-se  $\tilde{\Lambda}_4 < 0$  de (4.19b) em uma LMI. Assim, seja feita a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} L &= C_{aw} M^T \\ Z &= D_{aw} S \\ H &= Y \mathbf{A} X + Y \mathbf{B}_1 L + N A_{aw} M^T + \mathbf{A}^T \\ Q &= G_1 - S \mathbf{B} Y - Z^T \mathbf{B}_1^T Y - S B_{aw}^T N^T \\ F &= G_1 X + G_2 M^T \end{aligned} \quad (4.19d)$$

Substituindo-se as expressões de (4.19c) em (4.19b) e aplicando-se a substituição de variáveis indicada em (4.19d) chega-se a (4.13a). Observe-se que não existe nenhuma restrição às matrizes  $N$  e  $M$  exceto a estrutura interna de  $P$  definida *a priori*, o que justifica (4.13d).

Isolando-se as incógnitas  $A_{aw}$ ,  $B_{aw}$ ,  $C_{aw}$  e  $D_{aw}$ , em (4.19d), obtém-se (4.13e). Multiplicando-se (4.17a) em ambos os lados por:

$$\text{BLKDG} \left( \begin{bmatrix} \Pi^T & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (4.20)$$

obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \Pi^T & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{K}^{(i)} - \mathcal{G}^{(i)} & \mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Em especial, o termo (1, 1) de (4.21) equivale a:

$$\Pi^T P \Pi = \begin{bmatrix} X & M \\ I_{n+n_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & \star \\ N^T & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I_{n+n_c} \\ M^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & I_{n+n_c} \\ I_{n+n_c} & Y \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Esta transformação de similaridade faz de (4.17a), (4.13b).

Se (4.13a) se verifica,  $\Sigma_{A0} < 0$  ( $\Sigma_{A0}$  encontra-se em (4.13a)). Obrigatoriamente  $\Sigma_{A1} < 0$ . A partir disto, assegura-se a *wellposedness* do sistema em malha-fechada, da seguinte forma:

- Seja especificamente para esta verificação,  $\Delta$  correspondente ao mapeamento  $v_c \rightarrow \psi_{u_0}(v_c)$ . Fazendo-se  $V = T$  e  $D = -\mathbf{K}_\psi$ , verifica-se a partir de  $\Sigma_{A1}$  a condição  $-2V + VD + D^T V < 0$  do lema 2.4.
- Então  $I - D\Delta$  é não singular. A função pode ser reescrita como  $v_c = \mathcal{K}\xi - \mathbf{K}\Delta v_c + \mathbf{D}_{c,w}w$ .
- O jacobiano de  $\psi_{u_0}(v_c)$ , é  $J\psi_{u_0}(v_c) = I - J\text{sat}_{u_0}(v_c)$ .
- Substituindo-se  $v_c$  por sua expressão equivalente, tem-se  $J\psi_{u_0}(v_c) = I + \mathbf{K}_\psi\Delta$ , ou  $J\psi_{u_0}(v_c) = I - D\Delta$ , não singular.
- Então, pelo lema 2.3, existe uma única função globalmente Lipschitz  $\psi_{u_0}(v_c) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$ , tal que  $F(\psi_{u_0}(v_c)) = v_c$ , para todo  $v_c \in \mathfrak{R}^m$ , o que mostra que o sistema em malha fechada é *well-posed*<sup>2</sup>.

Adicionalmente, se (4.13a) se verifica, define-se  $X$  e  $Y$ . Observando-se (4.13d) garante-se que  $N$  e  $M$  são matrizes não singulares, de modo que  $\Pi$  também seja não singular. Desta forma, todas as transformações de similaridade são inversíveis, e conseqüentemente (4.16e) é verificada para as matrizes  $A_{aw}$ ,  $B_{aw}$ ,  $C_{aw}$  e  $D_{aw}$  definidas em (4.13e). Posto isto, pelo complemento de Schur, é possível verificar-se que  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$  desde que  $\varepsilon(P, \mu^{-1}) \subset \mathcal{S}(u_0)$ . Isto é verificado da seguinte forma:

- Sendo (4.13b) válido, e  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \beta)$ , segue que as trajetórias do sistema em malha fechada nunca abandonam  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$ .
- Assim, pelo lema 2.5, nestas circunstâncias obrigatoriamente  $\xi \in \mathcal{S}(u_0)$ , e portanto  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$ . O que prova os itens 1 e 2 do teorema 4.1.

Suponha-se agora que  $w = 0$  e  $\xi \in \varepsilon(P, \mu^{-1})$ , então segue que  $\xi \in \mathcal{S}(u_0)$ . Neste caso, com (4.13a) satisfeita assegura-se que  $\tilde{V} < 0$ . Como esta condição é válida para todo  $\xi \in \varepsilon(P, \mu^{-1})$ , segue que esta é a região em que a estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada é garantida. Isto completa a prova do ítem 3 do teorema 4.2.  $\square$

<sup>2</sup>Para maiores detalhes, vide (GRIMM et al., 2003)

Depois da prova do teorema 4.1, é necessário especificar os parâmetros do compensador *anti-windup* ali proposto. A obtenção das matrizes  $A_{aw}$ ,  $B_{aw}$ ,  $C_{aw}$  e  $D_{aw}$  definidas em (4.13e) requer a definição das matrizes  $M$  e  $N$  de acordo com (4.13d). As matrizes  $M$  e  $N$  podem ser obtidos mediante a decomposição LU de  $I_{n+n_c} - YX$  em  $N$  e  $M^T$ , bastante apropriada para pela robustez numérica conferida à esta técnica. Alternativamente pode-se assumir uma das matrizes como identidade, e obter-se a outra por substituição direta em (4.13e).

Todo o desenvolvimento anterior precedido pelo teorema 4.1 refere-se à estabilidade num âmbito local. Em casos em que a origem da planta seja assintoticamente estável em malha aberta, sempre existirá uma solução para a síntese do compensador que garanta a estabilidade assintótica global da origem - na ausência de perturbações. Somente para estes casos, segue o seguinte corolário.

**Corolário 4.1.** *Se existem matrizes simétricas positivas definidas,  $X, Y \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , uma matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e matrizes  $H \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $L \in \mathfrak{R}^{n_c \times (n+n_c)}$ ,  $Q \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ , e um escalar positivo  $\gamma$ , verificando a LMI, (4.13c)*

$$\begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathbf{A}X + \mathbf{B}_1L\} & * & * & * & * \\ H & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{Y} & * & * & * \\ \mathbf{K}X - \mathbf{S}\mathbf{B}^T - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_1^T & Q & \Sigma_{A0} & * & * \\ \mathbf{B}_w^T & \mathbf{B}_w^T\mathbf{Y} & \mathbf{D}_{c,w}^T & -I_q & * \\ \mathbf{C}_zX & \mathbf{C}_z & -\mathbf{D}_zS & \mathbf{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23a)$$

com  $N, M$  verificando

$$NM^T = I_{n+n_c} - YX \quad (4.23b)$$

então para qualquer  $w \in \mathcal{L}_2$ , o compensador (4.7) definido conforme (4.13e) garante que o sistema em malha fechada é well-posed e:

1. As trajetórias são limitadas, para todo  $\xi(0) \in \mathfrak{R}^{2(n+n_c)}$ , com qualquer  $w \in \mathcal{L}_2$ .
2.  $\|z\|_2^2 \leq \gamma\|w\|_2^2 + \gamma V(0)$
3. quando  $w = 0$ , a origem do sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável

*Prova.* Tomando-se  $\mathcal{G} = \mathcal{K}$ , (4.13b) verifica-se para todo  $\xi \in \mathfrak{R}^{2(n+n_c)}$ , o que torna desnecessárias as LMIs (4.13b) e (4.13c) do caso local. Não existe mais restrições para os estados iniciais senão o próprio espaço vetorial em que são definidos. O mesmo diz-se das trajetórias em malha fechada. Assim, não há porque restringir  $w$  além do espaço  $\mathcal{L}_2$ . Isto torna desnecessária a variável  $\mu$ . Desta vez  $Q = \mathbf{K} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_1^T\mathbf{Y} - \mathbf{S}\mathbf{B}_{aw}^T\mathbf{N}^T$ , e o restante da prova imita a do teorema 4.1.  $\square$

#### 4.4.2 Síntese de Compensadores de ordem $n_{aw} < n + n_c$

Em geral, um compensador *anti-windup* de ordem plena terá na implementação desvantagens de custo e complexidade com relação a compensadores de menor ordem. O teorema 4.2 aborda a síntese de compensadores de ordem reduzida - ou seja  $n_{aw} < n + n_c$  - cujas condições suficientes para existência de uma solução são expressas por inequações matriciais, entre elas, uma BMI. Adaptações serão feitas a partir do teorema 4.1 para permitir a flexibilidade na escolha da ordem do compensador *anti-windup*.

**Teorema 4.2.** *Se existirem a matriz simétrica positiva definida  $W \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times (n+n_c+n_{aw})}$ , uma matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $K_1 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times (n_{aw})}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c+n_{aw})}$ ,  $Z_2 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times m}$ , e escalares reais positivos  $\mu, \gamma$  verificando as inequações matriciais abaixo relacionadas,*

$$\begin{bmatrix} \text{sym} \left\{ W (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C})^T \right\} & \star & \star & \star \\ -S \mathcal{B}^T + Z_2^T \mathcal{B}_1^T + Y & \Sigma_{A0} & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star \\ \mathcal{C}_z W & -\mathcal{D}_z & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24a)$$

$$\begin{bmatrix} W & \star \\ \mathcal{K}_{(i)} W - Y_{(i)} & \mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.24b)$$

$$\delta - \mu > 0 \quad (4.24c)$$

então o compensador de anti-windup (4.7) com,

$$\begin{aligned} A_{aw} &= \begin{bmatrix} I_{n_{aw}} & 0 \end{bmatrix} K_1 \\ B_{aw} &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \end{bmatrix} K_1 \\ C_{aw} &= \begin{bmatrix} I_{n_{aw}} & 0 \end{bmatrix} Z_2 S^{-1} \\ D_{aw} &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n_c} \end{bmatrix} Z_2 S^{-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

garante que o sistema em malha fechada é well-posed e:

1. As trajetórias são limitadas, permanecendo no elipsóide  $\varepsilon(W^{-1}, \mu^{-1})$  para todo  $\xi(0) \in \varepsilon(W^{-1}, \beta)$ , com  $\beta = \mu^{-1} - \delta^{-1}$
2.  $\|z\|_2^2 \leq \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(0)$
3. quando  $w = 0$ , a origem do sistema em malha fechada é local e assintoticamente estável para todo  $\xi(0) \in \varepsilon(W^{-1}, \mu^{-1})$

A prova deste teorema apresenta a mesma seqüência de passos contidos na prova do teorema 4.1.

*Prova.* Seja  $W = P^{-1}$ . Como mostrado no teorema 4.1 a verificação de (4.16e) implica que  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$ , desde que  $\xi \in \mathcal{S}(u_0)$ . Tal fato verifica os itens 1, 2 e 3 do presente teorema. Para fins de manipulação algébrica, multiplica-se (4.16e) em ambos os lados pela matriz:

$$\text{BLKDG} \left( \begin{bmatrix} W & S & I_{q+r} \end{bmatrix} \right)$$

e obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \text{sym} \left\{ W (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C})^T \right\} & \star & \star & \star \\ -S (\mathcal{B} - \mathcal{B}_1 K_2)^T + \mathcal{G} W & \Sigma_{A0} & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star \\ \mathcal{C}_z W & -\mathcal{D}_z S & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

Desenvolvendo-se os termos de (4.26) e assumindo-se  $Z_2 = K_2 S$  e  $Y = \mathcal{G} W$ , obtém-se a expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix} \text{sym} \left\{ W \mathcal{A}^T + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C} W \right\} & \star & \star & \star \\ -S \mathcal{B}^T - Z_2^T \mathcal{B}_1 + Y & \Sigma_{A0} & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star \\ \mathcal{C}_z W & -\mathcal{D}_z S & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

Pelo lema 2.5, se a condição expressa pela LMI (4.17a) for verdadeira as trajetórias do sistema em malha fechada  $\xi$  permanecem dentro do conjunto  $\mathcal{S}(u_0)$ . Então, para expressar esta condição em termos da nova variável  $W$ , multiplica-se (4.17a) em ambos os lados pela matriz:

$$\text{BLKDG} \left( \begin{bmatrix} W & 1 \end{bmatrix} \right)$$

e obtém-se (4.24b). A LMI (4.24c) faz-se necessária para definir-se um conjunto de estados iniciais não vazio.

Uma vez obtida uma solução satisfatória para as matrizes  $W, K_1, S, Z_2, Y, \mu$  e  $\gamma$  a partir das definições em (4.11), obtém-se as matrizes  $A_{aw}, B_{aw}, C_{aw}, D_{aw}$  conforme apresentado em (4.25).  $\square$

A exemplo do corolário 4.1, o seguinte corolário estende o disposto no teorema 4.2 ao âmbito global, nos casos em que, em malha aberta, a origem da planta seja assintoticamente estável.

**Corolário 4.2.** *Se existirem a matriz simétrica positiva definida  $W \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times (n+n_c+n_{aw})}$ , uma matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $K_1 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times (n_{aw})}$ ,  $Z_2 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times m}$ , e escalares reais positivos  $\mu, \gamma$  verificando a inequação abaixo*

$$\begin{bmatrix} \text{sym} \left\{ W (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C})^T \right\} & \star & \star & \star \\ -S \mathcal{B}^T + Z_2^T \mathcal{B}_1^T + \mathcal{K} W & \Sigma_{A0} & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star \\ \mathcal{C}_z W & -\mathcal{D}_z & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (4.28)$$

então para qualquer  $w \in \mathcal{L}_2$ , o compensador (4.7) definido conforme (4.13e) garante que o sistema em malha fechada é well-posed e:

1. As trajetórias são limitadas, para todo  $\xi(0) \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw})}$ , com qualquer  $w \in \mathcal{L}_2$ .
2.  $\|z\|_2^2 \leq \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(0)$
3. quando  $w = 0$ , a origem do sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável.

Como no corolário 4.1, basta considerar  $\mathcal{G} = \mathcal{K}$ . Note-se que neste caso,  $Y$  em (4.24a) é aqui substituído por  $\mathcal{K}W$ .

É importante destacar que o produto  $\mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C} W$  em (4.27) e em (4.28) concentra a dificuldade do projeto por constituir-se de um termo bilinear em  $K_1$  e  $W$ . Assim esta restrição torna-se uma BMI, e não pode ser otimizada globalmente, por não ser uma representação convexa. Utilizando-se diretamente estas condições, obtém-se resultados numéricos através de esquemas de relaxação ao conjunto de inequações matriciais (4.24a)-(4.24b)-(4.24c). Para maiores detalhes sobre esta técnica, vide (PAIM, 2003).

Como forma de contornar a impossibilidade da otimização global, o lema 2.2 - ou como é conhecido, o *Lema de Finsler* - mostra-se um importante instrumento algébrico por representar uma inequação matricial de forma equivalente, mediante a inserção de multiplicadores escalares ou matriciais. Aplicar o lema 2.2 ao problema em estudo permitirá representar as BMIs (4.27) e (4.28) de formas equivalentes, e inserindo-se multiplicadores matriciais. Estes multiplicadores terão sua estrutura, que *a priori* é livre, fixada para que o resultado final seja uma LMI. Assim, pode-se considerar-se  $K_1$  e  $W$  simultaneamente na busca de uma solução numérica e evitar-se esquemas de relaxação. Esta

proposta será agora desenvolvida. A intenção é obter-se uma representação convexa do problema de síntese de compensadores de *anti-windup* dinâmicos com ordem reduzida

O corolário seguinte é um resultado intermediário na busca da representação linear do problema. Justifica-se por constituir-se em alternativa ao teorema 4.2 na otimização local. O corolário 4.3 consiste em separar-se os termos  $K_1$  e  $W$  no bloco (1, 1) da iniquação (4.24a) mediante a adição de multiplicadores matriciais -  $J_1$  e  $J_2$  - de ordem apropriada.

**Corolário 4.3.** *Se existirem  $W = W^T > 0 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times (n+n_c+n_{aw})}$ , uma matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $K_1 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times (n_{aw})}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c+n_{aw})}$ ,  $Z_2 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times m}$ ,  $J_1 \in \mathfrak{R}^{j_1}$  e  $J_2 \in \mathfrak{R}^{j_2}$ ; onde  $j_1 = (n+n_c+n_{aw}+m+q+r) \times (n_{aw}+m+q+r)$  e  $j_2 = (n_{aw}+m+q+r) \times (n_{aw}+m+q+r)$ , e existirem escalares reais positivos  $\mu, \gamma$  verificando (4.24b), (4.24c) e a inequação matricial abaixo,*

$$\begin{bmatrix} M_1 + \text{sym}\{J_1 \tilde{R}\} & \star \\ M_2^T + J_2 \tilde{R} - J_1^T & -\text{sym}\{J_2\} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.29a)$$

onde

$$M_1 = \begin{bmatrix} \text{sym}\{AW\} & \star & \star & \star \\ -SB^T + Z_2^T B_1 + Y & \Sigma_{A0} & \star & \star \\ B_w^T & -\mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star \\ C_z W & -\mathcal{D}_z & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} \quad (4.29b)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} B_1 K_1 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} CW & \star & \star & \star \\ 0 & I_m & \star & \star \\ 0 & 0 & I_q & \star \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

então o controlador (4.7) definido em (4.25) garante o disposto nos itens 1, 2 e 3 do Teorema 4.2.

*Prova.* Partindo-se de (4.24a), é possível reescrevê-la no formato

$$\tilde{\mathcal{M}} = M_1 + \text{sym}\{M_2 \tilde{R}\} < 0 \quad (4.30a)$$

onde as matrizes  $M_1, M_2$  e  $\tilde{R}$  estão definidas em (4.29b). Seguindo um raciocínio semelhante ao feito em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr.; BENDER, 2006) para sistemas de tempo discreto, representa-se (4.30a) na forma:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} I_A & \tilde{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & \star \\ M_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ \tilde{R} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.30b)$$

Em (4.30b), a matriz  $I_A$  apresenta dimensões apropriadas, neste caso de ordem  $n+n_c+n_{aw}+m+q+r$ . Então, pelos itens 2 e 4 do lema de 2.2, existem matrizes  $J_1$  e  $J_2$  de dimensões apropriadas tais que 4.30a seja equivalente a:

$$\begin{bmatrix} M_1 & \star \\ M_2^T & 0 \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{R} & -I_B \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (4.30c)$$

onde a matriz  $I_B$  também apresenta dimensões apropriadas, neste caso de ordem  $n_{aw}+m+q+r$ . Verifica-se, então, que (4.30c) e (4.29a) são equivalentes. As demais disposições deste corolário seguem a prova do Teorema 4.2.  $\square$

Como todos os desenvolvimentos com garantias locais de estabilidade foram estendidos para o caso global, o corolário 4.4, a seguir enunciado, estende o anterior para o caso em que a origem do sistema em malha aberta é globalmente estável.

**Corolário 4.4.** *Se existirem a matriz simétrica positiva definida  $W \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times (n+n_c+n_{aw})}$ , uma matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $K_1 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times (n_{aw})}$ ,  $Z_2 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times m}$ ,  $J_1 \in \mathfrak{R}^{j_1}$  e  $J_2 \in \mathfrak{R}^{j_2}$ ; onde  $j_1 = (n + n_c + n_{aw} + m + q + r) \times (n_{aw} + m + q + r)$  e  $j_2 = (n_{aw} + m + q + r) \times (n_{aw} + m + q + r)$ , e existirem escalares reais positivos  $\mu, \gamma$  verificando a inequação abaixo,*

$$\begin{bmatrix} M_3 + \text{sym}\{J_1 \tilde{R}\} & \star \\ M_2^T + J_2 \tilde{R} - J_1^T & -\text{sym}\{J_2\} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.31a)$$

onde

$$M_3 = \begin{bmatrix} \text{sym}\{AW\} & \star & \star & \star \\ -SB^T + Z_2^T B_1 + KW & \Sigma_{A0} & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T & -\mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star \\ \mathcal{C}_z W & -\mathcal{D}_z & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} \quad (4.31b)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} B_1 K_1 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} CW & \star & \star & \star \\ 0 & I_m & \star & \star \\ 0 & 0 & I_q & \star \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

então para qualquer  $w \in \mathcal{L}_2$ , o compensador (4.7) definido conforme (4.13e) garante que o sistema em malha fechada é well-posed e:

1. As trajetórias são limitadas, para qualquer  $w \in \mathcal{L}_2$ .
2.  $\|z\|_2^2 \leq \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(0)$
3. quando  $w = 0$ , a origem do sistema em malha fechada é globalmente assintoticamente estável.

A extensão das condições para o caso global considera sempre  $\mathcal{G} = \mathcal{K}$ .

Como observado anteriormente, as condições para existência de um controlador de ordem reduzida apresentavam termos bilineares. O mesmo diz-se dos corolários 4.3 e 4.4, bilineares em  $J_1 \tilde{R}$  e  $J_2 \tilde{R}$ . A fim de obter-se uma representação completa em termos de LMI, tão somente, será mostrado agora uma estrutura especial para  $J_1$  e  $J_2$  que permite a representação do problema apenas por LMIs.

**Teorema 4.3.** *Se existirem  $W = W^T > 0 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times (n+n_c+n_{aw})}$ , a matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $K_1 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times (n_{aw})}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c+n_{aw})}$ ,  $Z_2 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times m}$ ,  $J_{111} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times n_{aw}}$ ,  $J_{112} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times m}$ ,  $J_{113} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times q}$ ,  $J_{114} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times r}$ ,  $J_{122} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{123} \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ ,  $J_{124} \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ ,  $J_{132} \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ ,  $J_{133} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ ,  $J_{134} \in \mathfrak{R}^{q \times r}$ ,  $J_{142} \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ ,  $J_{143} \in \mathfrak{R}^{r \times q}$ ,  $J_{144} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ ,  $J_{212} \in \mathfrak{R}^{n_{aw} \times m}$ ,  $J_{213} \in \mathfrak{R}^{n_{aw} \times q}$ ,  $J_{214} \in \mathfrak{R}^{n_{aw} \times r}$ ,  $J_{222} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{223} \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ ,  $J_{224} \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ ,  $J_{232} \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ ,  $J_{233} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ ,  $J_{234} \in \mathfrak{R}^{q \times r}$ ,  $J_{242} \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ ,  $J_{243} \in \mathfrak{R}^{r \times q}$ ,  $J_{244} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$  e escalares reais positivos  $\mu, \gamma$  verificando as LMIs (4.24b), (4.24c) e,*

$$J_{111}^T \mathcal{C}^T + \mathcal{C} J_{111} < 0 \quad (4.32a)$$

com o resultado  $J_{111}$  empregado em,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \Upsilon_1 & \star \\ \Upsilon_2 & \Upsilon_3 \end{bmatrix} < 0 \quad \text{sendo,} \\
\Upsilon_1 &= \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \star & \star & \star \\ \Upsilon_{12} & \Sigma_{A0} + \text{sym}\{J_{122}\} & \star & \star \\ \Upsilon_{13} & \mathcal{D}_{c,w}^T + J_{132} + J_{123}^T & -I_q + \text{sym}\{J_{112}\} & \star \\ \Upsilon_{14} & -\mathcal{D}_z + J_{142} + J_{124}^T & \mathcal{D}_{z,w} + J_{143} + J_{134}^T & \Upsilon_{15} \end{bmatrix} \\
\Upsilon_{11} &= \text{sym}\{(\mathcal{A} + J_{111}\mathcal{C})W\} \\
\Upsilon_{12} &= -S\mathcal{B}^T + Z_2\mathcal{B}_1^T + Y + J_{112}^T \\
\Upsilon_{13} &= \mathcal{B}_w^T + J_{113}^T \\
\Upsilon_{14} &= \mathcal{C}_z W + J_{114}^T \\
\Upsilon_{15} &= -\gamma I_r + \text{sym}\{J_{144}\} \\
\Upsilon_2 &= \begin{bmatrix} K_1^T \mathcal{B}_1^T + \mathcal{C}W - J_{111}^T & +J_{212} & +J_{213} & +J_{214} \\ -J_{112}^T & J_{222} - J_{122}^T & J_{233} - J_{132}^T & J_{224} - J_{142}^T \\ -J_{113}^T & J_{223} - J_{123}^T & J_{233} - J_{133}^T & J_{234} - J_{143}^T \\ -J_{114}^T & J_{224} - J_{124}^T & J_{233} - J_{134}^T & J_{244} - J_{144}^T \end{bmatrix} \\
\Upsilon_3 &= \begin{bmatrix} -2I_{n_{aw}} & \star & \star & \star \\ -J_{212}^T & -\text{sym}\{J_{222}\} & \star & \star \\ -J_{213}^T & -J_{212} - J_{212}^T & \text{sym}\{J_{233}\} & \star \\ -J_{214}^T & -J_{212} - J_{212}^T & -J_{212} - J_{212}^T & \text{sym}\{J_{244}\} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.32b}$$

então o controlador (4.7) definido em (4.25) garante o disposto nos itens 1, 2 e 3 do Teorema 4.2.

*Prova.* Desenvolvendo-se a expressão (4.29a) obtém-se,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{M}}_F &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathcal{A}W\} & \star \\ -S\mathcal{B}^T + Z_2\mathcal{B}_1^T + Y & \Sigma_{A0} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{B}_w^T & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{C}_z W & -\mathcal{D}_z & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r & \star & \star & \star & \star \\ K_1^T \mathcal{B}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
+\text{sym} & \left\{ \begin{bmatrix} J_{111}\mathcal{C}W & J_{112} & J_{113} & J_{114} & -J_{111} & -J_{112} & -J_{113} & -J_{114} \\ J_{121}\mathcal{C}W & J_{122} & J_{123} & J_{124} & -J_{121} & -J_{122} & -J_{123} & -J_{124} \\ J_{131}\mathcal{C}W & J_{132} & J_{133} & J_{134} & -J_{131} & -J_{132} & -J_{133} & -J_{134} \\ J_{141}\mathcal{C}W & J_{142} & J_{143} & J_{144} & -J_{141} & -J_{142} & -J_{143} & -J_{144} \\ J_{211}\mathcal{C}W & J_{212} & J_{213} & J_{214} & -J_{211} & -J_{212} & -J_{213} & -J_{214} \\ J_{221}\mathcal{C}W & J_{222} & J_{223} & J_{224} & -J_{221} & -J_{222} & -J_{223} & -J_{224} \\ J_{231}\mathcal{C}W & J_{232} & J_{233} & J_{234} & -J_{231} & -J_{232} & -J_{233} & -J_{234} \\ J_{241}\mathcal{C}W & J_{242} & J_{243} & J_{244} & -J_{241} & -J_{242} & -J_{243} & -J_{244} \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{4.33a}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{M}}_F &= \begin{bmatrix} \Theta_1 & \star \\ \Theta_2 & \Theta_3 \end{bmatrix} < 0 \\
\Theta_1 &= \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \star & \star & \star \\ \Theta_{12} & \Sigma_{A0} + \text{sym}\{J_{122}\} & \star & \star \\ \Theta_{13} & \mathcal{D}_{c,w}^T + J_{132} + J_{123}^T & -I_q + \text{sym}\{J_{133}\} & \star \\ \Theta_{14} & -\mathcal{D}_z + J_{142} + J_{124}^T & \mathcal{D}_{z,w} + J_{143} + J_{134}^T & \Theta_{15} \end{bmatrix} \\
\Theta_{11} &= \text{sym}\{(\mathcal{A} + J_{111}\mathcal{C})W\} \\
\Theta_{12} &= -S\mathcal{B}^T + Z_2\mathcal{B}_1^T - Y + J_{121}\mathcal{C}W + J_{112}^T \\
\Theta_{13} &= \mathcal{B}_w^T + J_{131}\mathcal{C}W + J_{113}^T \\
\Theta_{14} &= \mathcal{C}_zWJ_{141}\mathcal{C}W + J_{114}^T \\
\Theta_{15} &= -\gamma I_r + \text{sym}\{J_{144}\} \\
\Theta_2 &= \begin{bmatrix} K_1^T\mathcal{B}_1^T + J_{211}\mathcal{C}W - J_{111}^T & J_{212} - J_{121}^T & J_{213} - J_{131}^T & J_{214} - J_{141}^T \\ J_{221}\mathcal{C}W - J_{112}^T & J_{222} - J_{122}^T & J_{223} - J_{132}^T & J_{224} - J_{142}^T \\ J_{231}\mathcal{C}W - J_{113}^T & J_{232} - J_{123}^T & J_{233} - J_{133}^T & J_{234} - J_{143}^T \\ J_{241}\mathcal{C}W - J_{114}^T & J_{242} - J_{124}^T & J_{243} - J_{134}^T & J_{244} - J_{144}^T \end{bmatrix} \\
\Theta_3 &= \begin{bmatrix} -\text{sym}\{J_{211}\} & -J_{212} - J_{221}^T & -J_{213} - J_{231}^T & -J_{214} - J_{241}^T \\ -J_{221} - J_{212}^T & -\text{sym}\{J_{222}\} & -J_{223} - J_{232}^T & -J_{224} - J_{242}^T \\ -J_{231} - J_{213}^T & -J_{232} - J_{223}^T & -\text{sym}\{J_{233}\} & -J_{234} - J_{243}^T \\ -J_{241} - J_{214}^T & -J_{242} - J_{224}^T & -J_{243} - J_{234}^T & -\text{sym}\{J_{244}\} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.33b}$$

Se  $J_{ij1} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 2, 3, 4$  e  $J_{211} = I_{n_{aw}}$ , compondo a seguinte estrutura nos multiplicadores:

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{111} & J_{112} & J_{113} & J_{114} \\ 0 & J_{122} & J_{123} & J_{124} \\ 0 & J_{132} & J_{133} & J_{134} \\ 0 & J_{142} & J_{143} & J_{144} \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} I_{n_{aw}} & J_{212} & J_{213} & J_{214} \\ 0 & J_{222} & J_{223} & J_{224} \\ 0 & J_{232} & J_{233} & J_{234} \\ 0 & J_{242} & J_{243} & J_{244} \end{bmatrix}$$

então (4.33b) torna-se (4.32b). As demais disposições seguem a prova do Teorema 4.2.

A LMI (4.32a) tem como objetivo evitar a determinação *a priori* de  $J_{111}$ . Note-se que  $J_{111}$  aparece não-linearmente no termo  $\text{sym}\{(\mathcal{A} + J_{111}\mathcal{C})W\}$  em (4.33b). Considere-se  $J_{111}$  composto por  $J_{111_1} \in \mathfrak{R}^{n \times n_{aw}}$ ,  $J_{111_2} \in \mathfrak{R}^{n_c \times n_{aw}}$ ,  $J_{111_3} \in \mathfrak{R}^{n_{aw} \times n_{aw}}$ , da seguinte

forma:  $J_{111} = \begin{bmatrix} J_{111_1} \\ J_{111_2} \\ J_{111_3} \end{bmatrix}$ . Desenvolvendo-se  $\mathcal{A} + J_{111}\mathcal{C}$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} A + B\Delta D_c C_y & B\Delta C_c & 0 \\ B_c \bar{\Delta} C_y & A_c + B_c D_y \Delta C_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{111_1} \\ J_{111_2} \\ J_{111_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{n_{aw}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & J_{111_3} \end{bmatrix}$$

Como os autovalores de  $(\mathcal{A} + J_{111}\mathcal{C})$  correspondem a união dos espectros de  $\mathbf{A}$  e de  $J_{111_3}$ , e por definição  $\mathbf{A}$  é estável,  $\mathcal{A}$  será negativa definida se e somente se o espectro de  $J_{111_3}$  estiver contido em  $\mathbb{C}^-$ , o que é garantido por (4.32a).  $\square$

Estendendo as condições do Teorema 4.3 para garantir a estabilidade global da origem de (4.12) em malha fechada, tem-se o seguinte corolário.

**Corolário 4.5.** *Se existirem  $W = W^T > 0 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times (n+n_c+n_{aw})}$ , a matriz diagonal positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $K_1 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times (n_{aw})}$ ,  $Z_2 \in \mathfrak{R}^{(n_{aw}+n_c) \times m}$ ,  $J_{111} \in$*

$\mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times n_{aw}}$ ,  $J_{112} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times m}$ ,  $J_{113} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times q}$ ,  $J_{114} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c+n_{aw}) \times r}$ ,  $J_{122} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{123} \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ ,  $J_{124} \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ ,  $J_{132} \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ ,  $J_{133} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ ,  $J_{134} \in \mathfrak{R}^{q \times r}$ ,  $J_{142} \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ ,  $J_{143} \in \mathfrak{R}^{r \times q}$ ,  $J_{144} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ ,  $J_{212} \in \mathfrak{R}^{n_{aw} \times m}$ ,  $J_{213} \in \mathfrak{R}^{n_{aw} \times q}$ ,  $J_{214} \in \mathfrak{R}^{n_{aw} \times r}$ ,  $J_{222} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{223} \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ ,  $J_{224} \in \mathfrak{R}^{m \times r}$ ,  $J_{232} \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ ,  $J_{233} \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ ,  $J_{234} \in \mathfrak{R}^{q \times r}$ ,  $J_{242} \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ ,  $J_{243} \in \mathfrak{R}^{r \times q}$ ,  $J_{244} \in \mathfrak{R}^{r \times r}$  e escalares reais positivos  $\mu, \gamma$ , verificando a LMI (4.32a), com o resultado aplicado em

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \Omega_1 & \star \\ \Omega_2 & \Omega_3 \end{bmatrix} < 0 \\
\Omega_1 = & \begin{bmatrix} \iota_1 & & \star & & \star & & \star \\ \iota_2 & \Sigma_{A0} + \text{sym}\{J_{122}\} & & & \star & & \star \\ \iota_3 & \mathcal{D}_{c,w}^T + J_{132} + J_{123}^T & -I_q + \text{sym}\{J_{112}\} & & \star & & \star \\ \iota_4 & -\mathcal{D}_z + J_{142} + J_{124}^T & \mathcal{D}_{z,w} + J_{143} + J_{134}^T & \iota_5 & & & \star \\ \iota_1 = \text{sym}\{(\mathcal{A} + J_{111}\mathcal{C})W\} \\ \iota_2 = -S\mathcal{B}^T + Z_2^T \mathcal{B}_1^T + \mathcal{K}W + J_{112}^T \\ \iota_3 = \mathcal{B}_w^T + J_{113}^T \\ \iota_4 = \mathcal{C}_z W + J_{114}^T \\ \iota_5 = -\gamma I_r \text{sym}\{J_{144}\} \end{bmatrix} \\
\Omega_2 = & \begin{bmatrix} K_1^T \mathcal{B}_1^T + \mathcal{C}W - J_{111}^T & +J_{212} & +J_{213} & +J_{214} \\ -J_{112}^T & J_{222} - J_{122}^T & J_{233} - J_{132}^T & J_{224} - J_{142}^T \\ -J_{113}^T & J_{223} - J_{123}^T & J_{233} - J_{133}^T & J_{234} - J_{143}^T \\ -J_{114}^T & J_{224} - J_{124}^T & J_{233} - J_{134}^T & J_{244} - J_{144}^T \end{bmatrix} \\
\Omega_3 = & \begin{bmatrix} -2I_{n_{aw}} & \star & \star & \star \\ -J_{212}^T & -\text{sym}\{J_{222}\} & \star & \star \\ -J_{213}^T & -J_{212} - J_{212}^T & \text{sym}\{J_{233}\} & \star \\ -J_{214}^T & -J_{212} - J_{212}^T & -J_{212} - J_{212}^T & \text{sym}\{J_{244}\} \end{bmatrix} \tag{4.34}
\end{aligned}$$

então o controlador (4.7) definido em (4.25) garante o disposto nos itens 1 e 2 do corolário 4.4.

A prova deste, imita a prova do corolário 4.4.

Expressar as condições suficientes relativas à estabilidade e desempenho do sistema em forma de LMI exigiu a representação das condições primeiramente obtidas em uma forma equivalente através do lema de Finsler, e a posterior fixação de uma estrutura para seus multiplicadores, suprimindo graus de liberdade. A solução do problema expresso por LMIs é uma forma apropriada para inicializar-se algoritmos de solução do mesmo problema expresso por BMIs - como o teorema 4.2 e o corolário 4.2. Além da sensibilidade à inicialização dos algoritmos para solução de BMIs, a relaxação da condições bilineares em (4.24a) e (4.29a), por exemplo, requer a escolha inicial da matriz  $W$  ou de  $K_1$  que respeitem a todas as suas restrições. Tanto  $W$  como  $K_1$  são matrizes chave na solução do problema, pois  $W$  vincula-se à função de Liapunov usada para garantir a estabilidade da origem, e  $K_1$  define a dinâmica do compensador *anti-windup*, objeto da síntese. Logo, a escolha inicial quer de  $W$ , quer de  $K_1$  não é trivial. Assim posto, a solução prévia de uma LMI possibilita valores seguramente satisfatórios de ambas matrizes para iniciar algum algoritmo de otimização sob restrições expressas por BMIs, o que potencialmente melhora os resultados obtidos com as LMIs.

## 4.5 Problemas de Otimização

As condições nos teorema 4.1, corolário 4.1, teorema 4.3, e corolário 4.5 são LMIs. Então, se um critério linear é usado, um ótimo global pode ser obtido. As condições no teorema 4.2, e corolários 4.2, 4.3 e 4.4 são BMIs. Mediante esquemas de relaxação é também possível otimizar-se critérios lineares. A relaxação é obtida fixando-se uma das variáveis de uma expressão bilinear e resolvendo-se a LMI resultante. A variável livre é fixada no valor encontrado, e a anteriormente pré-fixada é deixada livre em uma nova iteração. Repete-se este processo até a satisfação de algum critério de parada. Esquemas assim descritos são empregados em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 1997), (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2001) e (PAIM, 2003), vide algoritmo 5.2, página 79.

O objetivo desta seção é a síntese de compensadores baseados em dois critérios: a maximização da perturbação admissível - Tolerância à Perturbação - e a minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  entre a perturbação e a saída regulada  $z$  - Rejeição à Perturbação. Por simplicidade, em ambos os casos considerar-se-á  $\xi(0) = 0$ , o que implica que o sistema está em equilíbrio no instante inicial.

### 4.5.1 Tolerância à Perturbação

A suposição  $\xi(0) = 0$  torna  $\mu^{-1} = \delta^{-1}$ . A idéia então é minimizar  $\mu$ , o que maximiza o limite da perturbação. Se  $w = 0$ , adicionalmente, obtém-se a solução para o problema de maximização da região de atração da origem em malha fechada. Note que, este problema só faz sentido quando a estabilidade em âmbito global não está sendo considerada. Para os teoremas e corolários enunciados aqui, a máxima tolerância à perturbação é obtível como segue

Para o teorema 4.1:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (4.13a), (4.13b) e (4.13c)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para o teorema 4.3:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (4.32a) seguido de (4.32b), (4.24b) e (4.24c)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para o teorema 4.2:

1. Encontrar  $K_1$  tal que  $(\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C}) \subset \mathbb{C}^-$ .
2. Substitui-se o valor de  $K_1$  obtido em 1 nas inequações propostas.
3. Efetue-se

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (4.24a), (4.24b), (4.24c)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

4. A matriz  $W$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 3. As demais variáveis são mantidas.
5. Efetue-se

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (4.24a), (4.24b), (4.24c)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

6. A matriz  $K_1$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 5. As demais variáveis são mantidas.

7. Retorna-se a 3 até que algum critério de parada torne-se verdadeiro.

O algoritmo proposto tem como grande dificuldade sua inicialização, uma vez que envolve uma estimativa de parte do compensador que o algoritmo visa determinar. Um modo possível de inicializar-se  $K_1$  é através do resultado obtido com o teorema 4.3. A vantagem desta escolha está na garantia de que  $K_1$  atenda a todas as restrições impostas pelo teorema 4.2, uma vez que todas as soluções que satisfazem as condições do teorema 4.3, satisfazem também as do teorema 4.2.

#### 4.5.2 Rejeição à Perturbação

A consideração  $\xi(0) = 0$  torna  $\sqrt{\gamma}$  o limite para o máximo do ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$ . Ao contrário da tolerância, a rejeição à perturbação é passível de otimização independente do âmbito da estabilidade da origem do sistema em malha fechada - local ou global. Assumindo-se que  $\delta^{-1}$  é fornecido, o seguinte problema pode ser abordado em cada um dos teoremas e corolários.

Para o teorema 4.1:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.13a), (4.13b) e (4.13c)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para o corolário 4.1:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.23a)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para o teorema 4.3:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.32a) seguido de (4.32b), (4.24b) e (4.24c)} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para o corolário 4.5:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.32a) seguido de (4.34)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para o teorema 4.2:

1. Seja  $K_1$  definido a partir da condição  $\text{sym}\{\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C}\} < 0$ .
2. Substitui-se o valor de  $K_1$  obtido em 1 nas inequações propostas.
3. Efetue-se

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.24a), (4.24b), (4.24c)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

4. A matriz  $W$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 3. As demais variáveis são mantidas.
5. Efetue-se

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.24a), (4.24b), (4.24c)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

6. A matriz  $K_1$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 5. As demais variáveis são mantidas.
7. Retorna-se a 3 até que algum critério de parada torne-se verdadeiro.

Aqui novamente, a inicialização concentra a grande dificuldade em aplicar-se este algoritmo. Mais uma vez, sugere-se obter  $K_1$  a partir do problema formulado para o teorema 4.3.

Para o corolário 4.2:

1. Seja  $K_1$  definido a partir da condição  $\text{sym}\{\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 K_1 \mathcal{C}\} < 0$ .
2. Substitui-se o valor de  $K_1$  obtido em 1 nas inequações propostas.
3. Efetue-se

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.28)} \end{aligned} \tag{4.45}$$

4. A matriz  $W$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 3. As demais variáveis são mantidas.
5. Efetue-se

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (4.28)} \end{aligned} \tag{4.46}$$

6. A matriz  $K_1$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 5. As demais variáveis são mantidas.
7. Retorna-se a 3 até que algum critério de parada torne-se verdadeiro.

## 4.6 Exemplos Numéricos

Esta seção exemplifica alguns métodos desenvolvidos neste capítulo e os problemas de otimização da seção anterior. De forma ilustrativa o segundo exemplo numérico de (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2005) é utilizado. Nele, um controlador linear é sintetizado *a priori* para garantir a estabilidade da origem do sistema em malha aberta, desconsiderando-se a saturação do atuador em amplitude. A partir deste exemplo, um compensador *anti-windup* será sintetizado para garantir a estabilidade da origem do sistema em malha fechada, e resolver o problema da máxima tolerância à perturbação para este exemplo.

Considere-se a seguinte planta:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} .1 & -.1 \\ .1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} .09501 \\ .02311 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \tag{4.47a}$$

Neste modelo a matriz  $B_w$  não consta no exemplo original referido, pois este não considera perturbações. As saídas medida  $y$  e controlada  $z$  são idênticas por simplicidade, uma vez que o problema original em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2005) apresenta apenas uma única saída.

Observe-se que os autovalores desta planta são  $\lambda_1 = .096771$  e  $\lambda_2 = -2.996771$ . Para que a origem deste sistema seja estável e a saída apresente um desempenho satisfatório,

foi projetado o seguinte controlador:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \begin{bmatrix} -171.2 & 27.2 \\ -68 & -626.8 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -598.2 & 5.539 \\ -4.567 & 149.8 \end{bmatrix} u_c \\ v_c = \begin{bmatrix} .146 & .088 \\ -6.821 & -5.67 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (4.47b)$$

A interligação entre (4.47a) e (4.47b) dá-se mediante  $u = \text{sat}_{u_0}(v_c)$  e  $u_c = y$ , e é *well-posed* pois o sistema é estritamente próprio.

O controlador acima descrito não considera qualquer não-linearidade no atuador. A planta aceita entradas restritas em amplitude pelo vetor  $u_0 = [5 \ 2]^T$ .

Neste sistema aplicou-se os métodos de síntese de *anti-windup* de ordem plena e reduzida. Simulações feitas no ambiente *Simulink* do *Matlab*<sup>3</sup> exibem o comportamento do sistema sob cada método.

#### 4.6.1 Simulação com o Compensador *Anti-windup* de Ordem Plena

Para o sistema (4.47a)-(4.47b), determinou-se um compensador *anti-windup* de ordem plena. A planta foi sujeita à uma perturbação de norma  $\mathcal{L}_2$  igual a 556.85, cuja manifestação durou 5 segundos. A perturbação escolhida teve esta forma por representar eventos externos a que os sistemas físicos sujeitam-se, especialmente manutenções preventivas de sistemas de missão crítica, onde os estados do sistema são levados a um novo equilíbrio durante a presença da perturbação.

O seguinte conjunto de matrizes foi obtido:

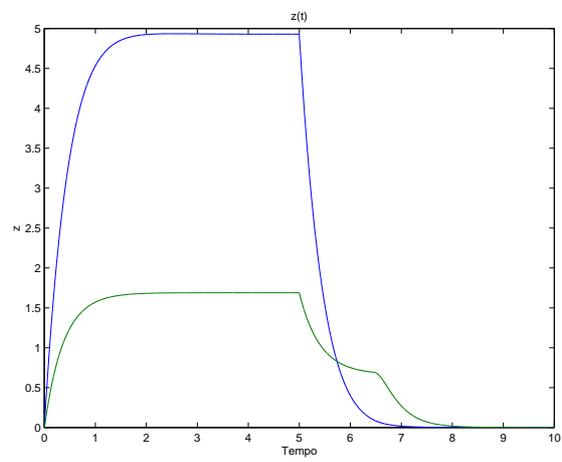
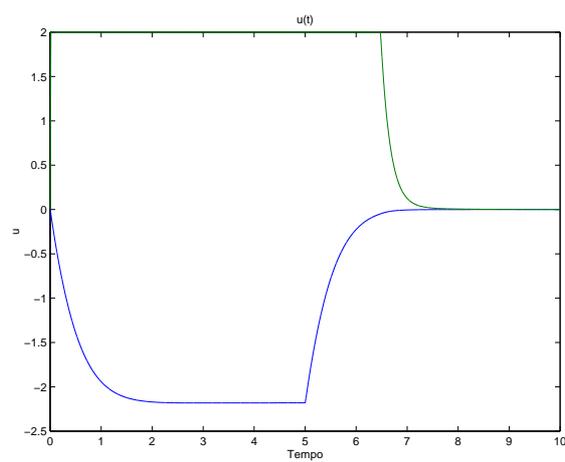
$$\begin{aligned} A_{aw} &= 1.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0660 & 0.1347 & -1.0284 \\ 0.0000 & 0.0183 & 0.0475 & -0.3974 \\ -0.0001 & 0.0100 & 0.0315 & -0.5512 \\ -0.0000 & 0.0040 & 0.0094 & -0.1124 \end{bmatrix} \\ B_{aw} &= 1.0 \times 10^4 \begin{bmatrix} -6.0711 & 0.0343 \\ -1.9185 & 0.0051 \\ -0.6575 & 0.0105 \\ -0.3661 & 0.0023 \end{bmatrix} \\ C_{aw} &= \begin{bmatrix} -0.0660 & -16.9658 & -21.7000 & 180.1890 \\ -0.0451 & -11.8255 & -20.6636 & 132.4550 \end{bmatrix} \\ D_{aw} &= \begin{bmatrix} 929.1781 & -2.1786 \\ 282.6055 & -2.0875 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.47c)$$

As figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 ilustram respectivamente os gráficos obtidos para a saída controlada  $z$ , a entrada de controle  $u$ , a perturbação  $w$ , a compensação *anti-windup*  $y_{aw}$  e a saída do controlador  $y_c$ . Observe-se a saturação de  $u_2(t)$  na figura 4.3.

#### 4.6.2 Síntese de Compensador *Anti-windup* de Ordem Reduzida

O mesmo foi feito para a compensação de ordem reduzida. Neste caso a ordem do compensador foi a metade da do de ordem plena. A planta foi sujeita à uma perturbação de norma  $\mathcal{L}_2$  igual a 550.13, igualmente atuando à entrada da planta por 5 segundos.

<sup>3</sup>*Simulink* e *Matlab* são marcas registradas da Mathworks

Figura 4.2: Sinal  $z$  - Ordem PlenaFigura 4.3: Sinal  $u$  - Ordem Plena

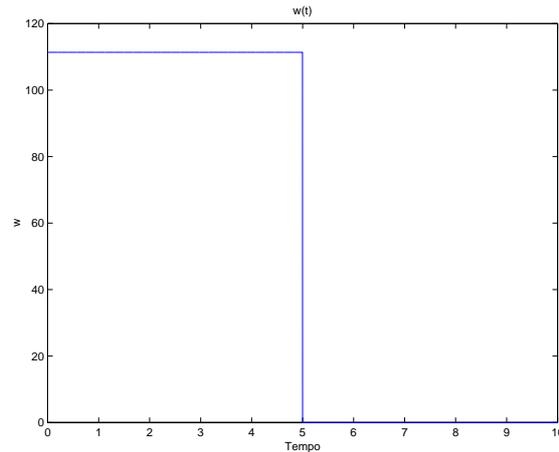


Figura 4.4: Sinal  $w$  - Ordem Plena

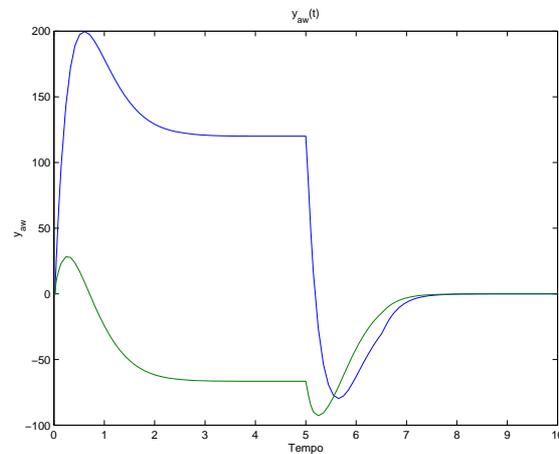


Figura 4.5: Sinal  $y_{aw}$  - Ordem Plena

O seguinte conjunto de matrizes foi obtido:

$$\begin{aligned}
 A_{aw} &= 1.0 \times 10^3 \begin{bmatrix} -4.0126 & 0 \\ 0 & -4.0126 \end{bmatrix} \\
 B_{aw} &= 1.0 \times 10^3 \begin{bmatrix} -4.0126 & 0 \\ 0 & -4.0126 \end{bmatrix} \\
 C_{aw} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 D_{aw} &= \begin{bmatrix} 918.8485 & -3.0146 \\ 341.8372 & -1.8447 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.47d}$$

As figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 ilustram respectivamente os gráficos obtidos para a saída controlada  $z$ , a entrada de controle  $u$ , a perturbação  $w$ , a compensação *anti-windup*  $y_{aw}$  e a saída do controlador  $y_c$ . Observe-se a saturação de  $u_2(t)$  na figura 4.8.

Finalmente, uma tabela mostra o compromisso entre os problemas de minimizar  $\mu$  e  $\gamma$  nos teoremas 4.1 e 4.3. A variável  $\mu$  nestes teoremas corresponde ao inverso do quadrado da máxima norma  $\mathcal{L}_2$  de uma perturbação tolerável pelo sistema quando inicializado na origem. A variável  $\gamma$ , por sua vez, corresponde ao quadrado do limitante superior ao ganho  $\mathcal{L}_2$  garantido à perturbação à saída controlada.

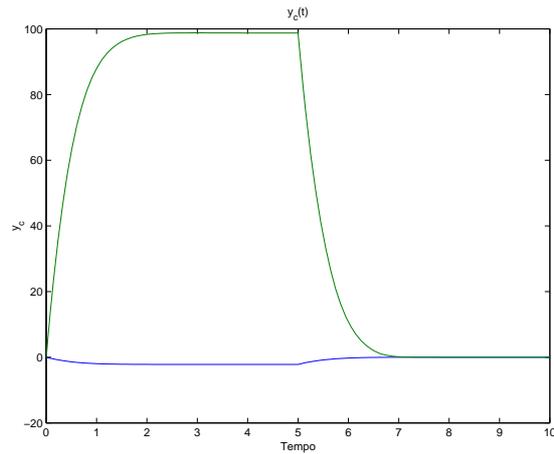


Figura 4.6: Sinal  $y_c$  - Ordem Plena

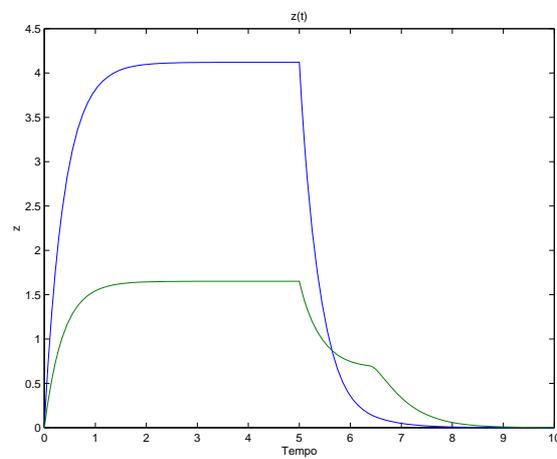


Figura 4.7: Sinal  $z$  - Ordem Reduzida

Na tabela 4.6 é possível observar o *trade-off* entre tolerância e atenuação da perturbação. À medida que  $\mu$  aumenta, ou seja, a tolerância à perturbação diminui, a atenuação que o sistema aplica à perturbação cresce.

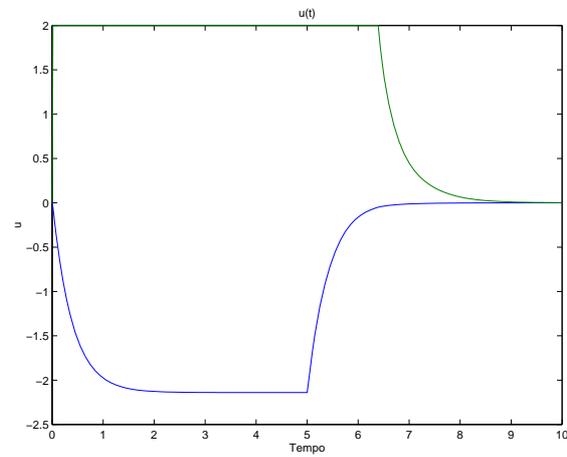


Figura 4.8: Sinal  $u$  - Ordem Reduzida

Tabela 4.1: *Trade-off* Tolerância  $\times$  Atenuação para a perturbação externa.

Ordem Plena		Ordem Reduzida	
$\mu$	$\gamma$	$\mu$	$\gamma$
$3.22 \times 10^{-6}$	$3.83 \times 10^1$	$3.30 \times 10^{-6}$	$2.01 \times 10^4$
$3.25 \times 10^{-6}$	$2.04 \times 10^1$	$3.30 \times 10^{-6}$	$3.86 \times 10^2$
$3.29 \times 10^{-6}$	$9.96 \times 10^0$	$3.47 \times 10^{-6}$	$3.72 \times 10^0$
$3.32 \times 10^{-6}$	$6.46 \times 10^0$	$3.51 \times 10^{-6}$	$3.04 \times 10^0$
$3.39 \times 10^{-6}$	$3.64 \times 10^0$	$3.90 \times 10^{-6}$	$8.75 \times 10^1$
$4.30 \times 10^{-6}$	$3.79 \times 10^{-1}$	$5.20 \times 10^{-6}$	$1.77 \times 10^1$
$6.45 \times 10^{-6}$	$7.18 \times 10^{-2}$	$1.04 \times 10^{-5}$	$5.00 \times 10^2$
$1.29 \times 10^{-5}$	$4.95 \times 10^{-2}$	$4.16 \times 10^{-5}$	$4.95 \times 10^2$

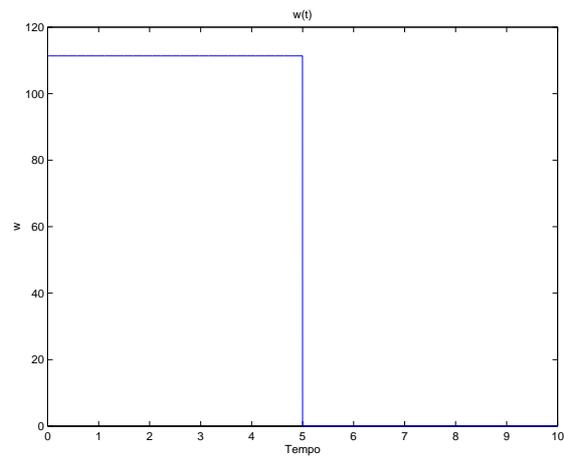


Figura 4.9: Sinal  $w$  - Ordem Reduzida

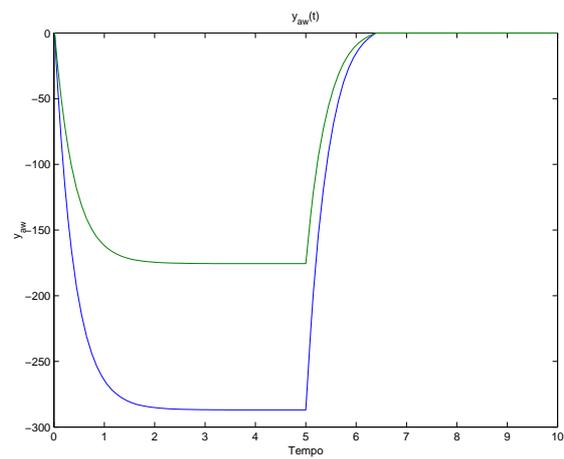


Figura 4.10: Sinal  $y_{aw}$  - Ordem Reduzida

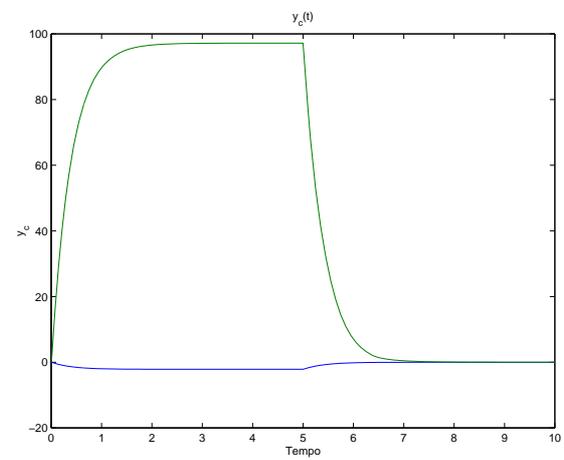


Figura 4.11: Sinal  $y_c$  - Ordem Reduzida

## 5 SÍNTESE DE CONTROLADORES DINÂMICOS

### 5.1 Introdução

A filosofia do *anti-windup* em sistemas lineares pressupõe que planta e controlador nominal - que despreza eventuais não-linearidades - sejam dados *a priori*, cabendo ao compensador *anti-windup* o tratamento dos efeitos indesejáveis manifestos pelas não-linearidades intrínsecas à planta. O capítulo anterior seguiu esta idéia propondo métodos para a síntese de compensadores dinâmicos de ordem  $n + n_c$  e inferiores a esta, onde o sinal de controle era limitado em amplitude com limites simétricos. Neste capítulo resolveremos o problema de controle sujeito a restrições segundo a abordagem da síntese direta. Nesta abordagem, o controlador é sintetizado simultaneamente a laços *anti-windup*. Adicionalmente, considerar-se-á o sistema sujeito a um atuador apresentando limitações em amplitude e taxa de variação. Os limites de taxa de variação também serão considerados simétricos.

De modo a lidar com esta restrição adicional, será proposto um controlador dinâmico não-linear, composto por um compensador linear clássico em cascata com um integrador com entrada saturante. Dois laços estáticos de *anti-windup* permitirão graus de liberdade adicionais à síntese.

### 5.2 Definição do Problema

A planta em estudo pode ser modelada a partir do equilíbrio como mostrado em (4.1), por conveniência abaixo repetido.

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + B_w w \\ y = C_y x + D_y u + D_{y,w} w \\ z = C_x x + D_z u + D_{z,w} w \end{cases}$$

Também é sujeita a perturbações externas limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ , conforme (4.2). Supõe-se que a planta terá sua entrada de controle  $u$  limitada em amplitude e taxa de variação da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} -u_{0(i)} &\leq u_{(i)} \leq u_{0(i)} \\ -u_{R(i)} &\leq \dot{u}_{(i)} \leq u_{R(i)} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, m \quad (5.1)$$

onde  $u_0$  representa a magnitude máxima do sinal de controle, e  $u_R$ , de sua taxa de variação. Supõe-se que apenas a saída  $y$  está disponível para medição. O objetivo, então, é dimensionar um controlador dinâmico estabilizante.

De modo a lidar-se com as restrições do sistema, considera-se o seguinte controlador não-linear de ordem  $m + 2m$ , composto por um controlador dinâmico clássico em cascata



de parâmetros desta perturbação. A reprodução de  $v$  dispensa tal necessidade. As estimativas de  $v$  poderão da mesma forma estarem sujeitas ao efeito de alguma perturbação, incerteza ou erros de medida assim modelados. Prevendo-se esta situação, existe  $v_\psi$ , que considera uma matriz  $D_{\psi,w}$  para acoplar a perturbação e representar seus efeitos.

No caso em que  $v_c$  pode ser medido e as incertezas e perturbações manifestas no interior do controlador são desprezíveis, faz-se  $v_c = v_\psi$  mediante  $D_{v,w} = D_{\psi,w}$ . Se  $v_c$  não for mensurável e da mesma forma o controlador não estiver sujeito a perturbações ou incertezas relevantes tem-se  $D_{\psi,w} = 0$ , o que torna  $v_\psi = v$ . Se a perturbação for desprezível, as matrizes de acoplamento de  $w$  podem ser desconsideradas, e tem-se  $v_c = v_\psi = v$ , o que constitui-se o caso ideal. O modelo proposto possibilita que os resultados obtidos sejam válidos para todas estas possibilidades.

A partir de  $y_c$  e  $v_\psi$ , determina-se as respectivas funções  $\psi_{u_R}(y_c)$  e  $\psi_{u_0}(v_\psi)$ . Estas mediante os respectivos ganhos  $F_c$  e  $E_c$ , realimentam o compensador dinâmico, completando a malha de controle da saída da planta.

Finalmente, a estrutura do controlador garante que a restrição de taxa de variação do atuador não é violada. Pelo lema 2.6 a saturação com os limites da taxa de variação do atuador aplicada a  $y_c$  garante que  $v_c$  tenha uma taxa de variação que não exceda estes limites.

As matrizes  $A_c, B_c, C_c, D_c, E_c, F_c$  são reais, constantes e de dimensões apropriadas. Métodos para sua síntese serão propostos e desenvolvidos neste capítulo.

### 5.3 O Sistema em Malha Fechada

Desenvolvendo-se os termos das equações da seção anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B\text{sat}_{u_0}(v_c) - Bv_c + Bv_c + B_w w \\
 &= Ax - B\psi_{u_0}(v_c) + Bv_c + B_w w \\
 &= Ax - B\psi_{u_0}(v_c) + B(v + D_{v,w}w) + B_w w \\
 &= Ax + Bv - B\psi_{u_0}(v_c) + (B_w + BD_{v,w}) w \\
 \\
 y &= C_y x + D_y \text{sat}_{u_0}(v_c) + D_{y,w} w \\
 &= C_y x + D_y \text{sat}_{u_0}(v_c) - D_y v_c + D_y v_c + D_{y,w} w \\
 &= C_y x - D_y \psi_{u_0}(v_c) + D_y (v + D_{v,w}w) + D_{y,w} w \\
 &= C_y x + D_y v - D_y \psi_{u_0}(v_c) + (D_{y,w} + D_y D_{v,w}) w \\
 \\
 \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \begin{bmatrix} C_y x + D_y v - D_y \psi_{u_0}(v_c) + (D_{y,w} + D_y D_{v,w}) w \\ v + D_{\psi,w} w \end{bmatrix} \\
 &\quad + E_c \psi_{u_0}(v_\psi) + F_c \psi_{u_R}(y_c) + B_{c,w} w \\
 &= B_c \left( \begin{bmatrix} C_y & D_y \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_y \\ 0 \end{bmatrix} \psi_{u_0}(v_c) + \begin{bmatrix} D_{y,w} + D_y D_{v,w} \\ D_{\psi,w} \end{bmatrix} w \right) \\
 &\quad + A_c x_c + E_c \psi_{u_0}(v_\psi) + F_c \psi_{u_R}(y_c) + B_{c,w} w \\
 \\
 y_c &= D_c \begin{bmatrix} C_y x + D_y v - D_y \psi_{u_0}(v_c) + (D_{y,w} + D_y D_{v,w}) w \\ v + D_{\psi,w} w \end{bmatrix} \\
 &\quad + C_c x_c + D_{c,w} w \\
 &= D_c \left( \begin{bmatrix} C_y & D_y \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_y \\ 0 \end{bmatrix} \psi_{u_0}(v_c) + \begin{bmatrix} D_{y,w} + D_y D_{v,w} \\ D_{\psi,w} \end{bmatrix} w \right) \\
 &\quad + C_c x_c + D_{c,w} w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \text{sat}_{u_R}(y_c) + B_{v,w}w \\
&= \text{sat}_{u_R}(y_c) - y_c + y_c + B_{v,w}w \\
&= D_c \left( \begin{bmatrix} C_y & D_y \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_y \\ 0 \end{bmatrix} \psi_{u_0}(v_c) + \begin{bmatrix} D_{y,w} + D_y D_{v,w} \\ D_{\psi,w} \end{bmatrix} w \right) \\
&\quad + C_c x_c + D_{c,w}w - \psi_{u_R}(y_c) + B_{v,w}w
\end{aligned}$$

Considerando-se as matrizes abaixo relacionadas,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} & \mathbf{C}_y &= \begin{bmatrix} C_y & D_y \\ 0 & I_m \end{bmatrix} & \mathbf{D}_y &= \begin{bmatrix} D_y \\ 0 \\ 0 \\ E_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}_z &= \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix} & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{C}_z &= \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ E_c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.3a}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}D_c\mathbf{C} & \mathbf{B}C_c \\ B_c\mathbf{C} & A_c \end{bmatrix} & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}D_c\mathbf{D}_y \\ B_c\mathbf{D}_y \end{bmatrix} & \mathbf{B}_R &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ F_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{y,w} &= \begin{bmatrix} D_{y,w} + D_y D_{v,w} \\ D_{\psi,w} \end{bmatrix} & \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w + B D_{v,w} \\ B_{v,w} + D_{c,w} \end{bmatrix} & \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ B_{c,w} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{c,w} &= (B_{c,w} + B_c \mathbf{D}_{y,w}) & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} D_c \mathbf{C}_y & C_c \end{bmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{z,w} &= (D_{z,w} + D_z \mathbf{D}_{v,w}) & \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} & \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{c,w} &= (D_{c,w} + D_c \mathbf{D}_{y,w}) & \mathcal{D}_{v,w} &= \mathbf{D}_{v,w} = D_{v,w} & \mathcal{D}_y &= \mathbf{D}_y \\
\mathcal{D}_{\psi,w} &= \mathbf{D}_{\psi,w} = D_{\psi,w} & \mathcal{D}_z &= \mathbf{D}_z = D_z & \mathcal{D}_{z,w} &= \mathbf{D}_{z,w} \\
\mathcal{D}_{c,w} &= \mathbf{D}_{c,w}, & \mathcal{D}_{z,w} &= \mathbf{D}_{z,w}
\end{aligned}$$

e o seguinte vetor de estados:

$$\xi = \begin{bmatrix} x^T & v^T & x_c^T \end{bmatrix}^T \tag{5.3b}$$

Verifica-se, então, a possibilidade de representar-se o sistema em malha fechada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \mathcal{A}\xi - \mathcal{B}_1\psi_{u_0}(v_c) + \mathcal{B}_2\psi_{u_0}(v_\psi) + \mathcal{B}_R\psi_{u_R}(y_c) + \mathcal{B}_w w \\
z &= \mathcal{C}_z\xi - \mathcal{D}_z\psi_{u_0}(v_c) + \mathcal{D}_{z,w}w
\end{aligned} \tag{5.3c}$$

## 5.4 Resultados Principais

Esta seção apresenta em forma de teoremas e corolários, seguidos de suas respectivas provas, os métodos para a obtenção das matrizes  $A_c, B_c, C_c, D_c, E_c$  e  $F_c$ , necessárias na definição do controlador dinâmico proposto.

**Teorema 5.1.** *Se existem matrizes simétricas positivas definidas  $X \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , matrizes diagonais positivas  $S_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\hat{A} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\hat{B} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (p+m)}$ ,  $\hat{C} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times (p+m)}$ ,  $F_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $F_R \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{21} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{R1} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $N \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Q_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $Q_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ , e escalares reais posi-*

tivos  $\mu, \gamma$ , verificando as inequações matriciais abaixo relacionadas,

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{B1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hat{A} & \Sigma_{B4} & \star & \star & \star & \star & \star \\ \Sigma_{B2} & \Sigma_{B5} & -2S_1 & \star & \star & \star & \star \\ F_2 & Q_1 & 0 & -2S_2 & \star & \star & \star \\ F_R - S_R \mathbf{B}^T & Q_2 & -\hat{D} \mathbf{D}_y S_1 & 0 & -2S_R & \star & \star \\ \Sigma_{B3} & \Sigma_{B6} & \mathbf{D}_{v,w}^T & \mathbf{D}_{\psi,w}^T & \Sigma_{B7} & -I_q & \star \\ \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z & -\mathbf{D}_z S_1 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{B1} &= \text{sym}\{\mathbf{A}X + \mathbf{B}\hat{C}\} & \Sigma_{B5} &= G_{11} - S_1 \mathbf{B}_1^T Y - S_1 \mathbf{D}_y^T \hat{B}^T \\ \Sigma_{B2} &= F_1 - S_1 \mathbf{B}_1^T - S_1 \mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T & \Sigma_{B6} &= \mathbf{B}^T Y + B_{c,w}^T N^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{B}^T \\ \Sigma_{B3} &= \mathbf{B}_w^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T & \Sigma_{B7} &= D_{c,w}^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{D}^T \\ \Sigma_{B4} &= \text{sym}\{Y\mathbf{A} + \hat{B}\mathbf{C}_y\} \end{aligned} \quad (5.4a)$$

$$\left. \begin{aligned} &\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I_{n+m} & Y & \star \\ \mathbf{L}_{(i)}X - F_{1(i)} & \mathbf{L}_{(i)} - G_{11(i)} & \mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I_{n+m} & Y & \star \\ \mathbf{L}_{(i)}X - F_{2(i)} & \mathbf{L}_{(i)} - G_{21(i)} & \mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \\ &\begin{bmatrix} X & \star & \star \\ I_{n+m} & Y & \star \\ \hat{C}_{(i)} - F_{R(i)} & \hat{D}_{(i)}\mathbf{C}_y - G_{R1(i)} & \mu u_{R(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \right\}, i = 1, \dots, m \quad (5.4b)$$

$$\delta - \mu > 0 \quad (5.4c)$$

$$\text{sym}\{N\} > 0 \quad (5.4d)$$

então o controlador (4.4), com

$$\begin{aligned} F_c^T &= S_R^{-1} (Q_2 - G_{R1} + S_R \mathbf{B}^T Y) N^{-T} \\ E_c^T &= S_2^{-1} (Q_1 - G_{21}) N^{-T} \\ D_c &= \hat{D} \\ C_c &= (\hat{C} - \hat{D}\mathbf{C}_y X) M^{-T}, M^T = N^{-1} (I_{n+m} - YX) \\ B_c &= N^{-1} (\hat{B} - Y\mathbf{B}\hat{D}) \\ A_c &= N^{-1} (\hat{A} - Y\mathbf{A}X - Y\mathbf{B}\hat{C} - N B_c \mathbf{C}_y X - \mathbf{A}^T - \mathbf{C}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T) M^{-T} \end{aligned} \quad (5.4e)$$

garante que o sistema em malha fechada é well-posed e:

1. As trajetórias são limitadas, permanecendo no elipsóide  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$  para todo  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \beta)$ , com  $\beta = \mu^{-1} - \delta^{-1}$ ,  $\forall \|w\|_2^2 \leq \frac{1}{\delta}$ ;
2.  $\|z\|_2^2 \leq \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(0)$ ,  $V(x) = x^T P x$ ;
3. quando  $w = 0$ , a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável para todo  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \mu^{-1})$ .

onde  $P$  é determinado por (5.5) e  $M$  é definida segundo:

$$M = (I_{n+m} - YX)^T N^{-T} \quad (5.4f)$$

A prova deste teorema segue uma seqüência de passos similar a empregada na prova do teorema 4.1.

*Prova.* As matrizes abaixo são redefinidas para adequarem-se à configuração distinta deste sistema. Sejam, pois:

$$P = \begin{bmatrix} Y & \star \\ N^T & \bullet \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} X & \star \\ M^T & \bullet \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} X & I_{n+m} \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Este sistema apresenta três não-linearidades:  $\psi_{u_0}(v_c)$ ,  $\psi_{u_0}(v_\psi)$  e  $\psi_{u_R}(y_c)$ . Aplicando-se o lema 2.1, seguindo a justificativa em torno da equação (4.16b), as seguintes condições de setor podem ser estabelecidas para estas não-linearidades, respectivamente.

$$\psi_{u_0}(v_c)^T T_1 \left( \psi_{u_0}(v_c) - \begin{bmatrix} G_1 & D_{v,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad (5.6a)$$

$$\psi_{u_0}(v_\psi)^T T_2 \left( \psi_{u_0}(v_\psi) - \begin{bmatrix} G_2 & D_{\psi,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad (5.6b)$$

$$\psi_{u_R}(y_c)^T T_R \left( \psi_{u_R}(y_c) - \begin{bmatrix} G_R & -D_c D_y & D_{c,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad (5.6c)$$

Como visto no capítulo anterior, a validade das mesmas requer  $\xi$  simultaneamente pertencente aos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1(u_0) &\triangleq \left\{ \xi \in \mathfrak{R}^{2(n+m)} \mid |\mathcal{L}_{(i)}\xi - G_{1(i)}\xi| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m \right\} \\ \mathcal{S}_2(u_0) &\triangleq \left\{ \xi \in \mathfrak{R}^{2(n+m)} \mid |\mathcal{L}_{(i)}\xi - G_{2(i)}\xi| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m \right\} \\ \mathcal{S}(u_R) &\triangleq \left\{ \xi \in \mathfrak{R}^{2(n+m)} \mid |\mathcal{K}_{(i)}\xi - G_{R(i)}\xi| \leq u_{R(i)}, i = 1, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Isto é garantido se algum conjunto elipsoidal  $\varepsilon(P, \mu^{-1})$  que envolva as trajetórias de  $\xi$  para todo  $t > 0$  estiver contido em cada um dos conjuntos de (5.7). Aplicando-se o lema 2.5 à esta restrição, obtém-se as LMIs,

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{L}_{(i)} - \mathcal{G}_{1(i)} & -\mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{L}_{(i)} - \mathcal{G}_{2(i)} & -\mu u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} P & \star \\ \mathcal{K}_{(i)} - \mathcal{G}_{R(i)} & -\mu u_{R(i)}^2 \end{bmatrix} &> 0 \end{aligned} \right\}, \forall i = 1, \dots, m$$

Multiplicando cada uma delas por BLKDG  $\begin{bmatrix} \Pi^T & 1 \end{bmatrix}$  e seu transposto, respectivamente pela esquerda e direita, chega-se as LMIs (5.4b).

Considerando-se o desenvolvimento da prova do teorema 4.1 (em especial a definição

de  $\tilde{\mathcal{L}}$ ) e as condições de setor descritas em (5.6); a condição  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$  é aqui garantida se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &\leq \tilde{\mathcal{L}} - 2 \begin{bmatrix} \psi_{u_0}(v_c) \\ \psi_{u_0}(v_\psi) \\ \psi_{u_R}(y_c) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{u_0}(v_c) + \Sigma_{C1} \\ \psi_{u_0}(v_\psi) + \Sigma_{C2} \\ \psi_{u_R}(y_c) + \Sigma_{C3} \end{bmatrix} < 0, \text{ onde:} \\ \Sigma_{C1} &= \begin{bmatrix} G_1 & D_{v,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} \\ \Sigma_{C2} &= \begin{bmatrix} G_2 & D_{\psi,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} \\ \Sigma_{C3} &= \begin{bmatrix} G_R & -D_c \mathbf{D}_y & \mathbf{D}_{c,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \psi_{u_0}(v_c) \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.8a)$$

Como agora é possível representar-se:

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathcal{A}^T P\} & * & * & * & * \\ -\mathcal{B}_1^T P & 0 & * & * & * \\ \mathcal{B}_2^T P & 0 & 0 & * & * \\ \mathcal{B}_R^T P & 0 & 0 & 0 & * \\ \mathcal{B}_w^T P & 0 & 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

A condição abaixo expressa,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_5 &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathcal{A}^T P\} & * & * & * & * \\ -\mathcal{B}_1^T P & 0 & * & * & * \\ \mathcal{B}_2^T P & 0 & 0 & * & * \\ \mathcal{B}_R^T P & 0 & 0 & 0 & * \\ \mathcal{B}_w^T P & 0 & 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix} + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T \\ -\mathcal{D}_z^T \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{D}_{z,w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_z & -\mathcal{D}_z & 0 & 0 & \mathcal{D}_{z,w} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \\ T_1 G_1 & -2T_1 & * & * & * \\ T_2 G_2 & 0 & -2T_2 & * & * \\ T_R G_R & -T_R D_c \mathcal{D}_y & 0 & -2T_R & * \\ 0 & \mathcal{D}_{v,w}^T T_1 & \mathcal{D}_{\psi,w}^T T_2 & \mathcal{D}_{c,w}^T T_R & -I_q \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.8b)$$

garante  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$ . Aplicando-se o complemento de Schur a (5.8b), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathcal{A}^T P\} & * & * & * & * & * \\ -\mathcal{B}_1^T P + T_1 G_1 & -2T_1 & * & * & * & * \\ \mathcal{B}_2^T P + T_2 G_2 & 0 & -2T_2 & * & * & * \\ \mathcal{B}_R^T P + T_R G_R & -T_R D_c \mathcal{D}_y & 0 & -2T_R & * & * \\ \mathcal{B}_w^T P & \mathcal{D}_{v,w}^T T_1 & \mathcal{D}_{\psi,w}^T T_2 & \mathcal{D}_{c,w}^T T_R & -I_q & * \\ \mathcal{C}_z & -\mathcal{D}_z & 0 & 0 & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8c)$$

Seja  $S_1, S_2, S_R$ , tais que:

$$\begin{bmatrix} S_1 & * & * \\ 0 & S_2 & * \\ 0 & 0 & S_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & * & * \\ 0 & T_2 & * \\ 0 & 0 & T_R \end{bmatrix} = I_{3m}$$

Multiplicando-se (5.8c) pela esquerda e direita por:

$$\text{BLKDG} \left( \begin{bmatrix} \Pi^T & S_1 & S_2 & S_R & I_{q+m} \end{bmatrix} \right), \quad (5.8d)$$

e seu transposto, respectivamente, chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \text{sym}\{\Pi^T \mathcal{A}^T P \Pi\} & * & * & * & * & * \\ -S_1 \mathcal{B}_1^T P \Pi + G_1 \Pi & -2S_1 & * & * & * & * \\ S_2 \mathcal{B}_2^T P \Pi + G_2 \Pi & 0 & -2S_2 & * & * & * \\ S_R \mathcal{B}_R^T P \Pi + G_R \Pi & -D_c \mathcal{D}_y S_1 & 0 & -2S_R & * & * \\ \mathcal{B}_w^T P \Pi & \mathcal{D}_{v,w}^T & \mathcal{D}_{\psi,w}^T & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & * \\ \mathcal{C}_z \Pi & -\mathcal{D}_z S_1 & 0 & 0 & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8e)$$

Considerando-se a estrutura das matrizes definidas em (5.5) e a mudança de variáveis proposta em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) tem-se,

$$\begin{aligned} \text{sym}\{\Pi^T \mathcal{A}^T P \Pi\} &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathbf{A}X + \mathbf{B}\hat{C}\} & * \\ \hat{A} & \text{sym}\{Y\mathbf{A} + \hat{B}C_y\} \end{bmatrix} \\ \hat{A} &= Y\mathbf{A}X + Y\mathbf{B}D_c C X + Y\mathbf{B}C_c M^T + N B_c C X + N A_c M^T \\ \hat{B} &= Y\mathbf{B}D_c + N B_c \\ \hat{C} &= D_c C_y X + C_c M^T \\ S_1 \mathcal{B}_1^T P \Pi &= \begin{bmatrix} S_1 \mathbf{B}_1^T + S_1 \mathbf{D}_y^T D_c^T \mathbf{B}^T & S_1 \mathbf{B}_1 Y + S_1 \mathbf{D}_y^T \hat{B}^T \end{bmatrix} \\ S_2 \mathcal{B}_2^T P \Pi &= \begin{bmatrix} 0 & S_2 E_c^T N^T \end{bmatrix} \\ S_R \mathcal{B}_R^T P \Pi &= \begin{bmatrix} -S_R \mathbf{B}^T & -S_R \mathbf{B}^T Y + S_R F_c^T N^T \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_w^T P \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T & \mathbf{B}^T Y + B_{c,w}^T N^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{B}^T \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_z \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \\ G_i \Pi &= \begin{bmatrix} G_{i1} X + G_{i2} M^T & G_{i1} \end{bmatrix}, i = 1, 2, R \end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} F_i &= G_{i1} X + G_{i2} M^T, i = 1, 2, R \\ Q_1 &= G_{21} + S_2 E_c^T N^T \\ Q_2 &= G_{R1} - S_R \mathbf{B}^T Y + S_R F_c^T N^T \end{aligned} \quad (5.8f)$$

chega-se à inequação matricial (5.4a). A definição de matrizes (5.4e), completa o modelo do controlador (5.2) uma vez que as matrizes de acoplamento da perturbação são conhecidas *a priori*. A estrutura das matrizes  $\Pi$ ,  $P$  e  $P^{-1}$  exige  $NM^T = I_{n+m} - XY$ , relação esta que pode ser verificada a partir do produto  $PP^{-1}$ . O que não ocorrerá caso a matriz  $N$  resulte singular. A LMI (5.4d) garante  $N$  não singular.<sup>1</sup>

Se  $\Pi$  é não singular, uma vez que (5.4a) é verificada, também o é (5.8b) para as matrizes definidas em (5.4e).

A LMI (5.4c) garante que  $\beta \triangleq \mu^{-1} - \delta^{-1}$  será positivo. Assim, se (5.4a) é satisfeita,  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$ , para todo  $\xi(0) \in \varepsilon(P, \beta)$ .  $\square$

A não singularidade de  $N$  no teorema 4.1 é evitada pela própria construção das matrizes. Aqui, como é uma variável de decisão deve ter garantias explícitas de sua não singularidade.

O sistema em estudo apresenta três não-linearidades tipo zona-morta. A matriz  $D_y$  causa a transmissão direta de  $\text{sat}_{u_0}(v_c)$  para a saída medida da planta. O compensador dinâmico transmite através de  $D_c$ ,  $y$  diretamente para  $y_c$ . Este processo causa a dependência

<sup>1</sup>No entanto, não sem a desnecessária conservatividade que se constitui na exigência dos autovalores de  $N$  contidos no SPD. A eventual não verificação das LMIs por algum *solver* pode não ser contornada substituindo-se (5.4d) por LMI que expresse o oposto. A solução menos restritiva que garanta  $N$  não singular, dentro desta estrutura de representação do problema seria uma LMI que garantisse que os autovalores estão todos fora de uma região, tão pequena quanto se queira, contendo a origem.

de  $\psi_{u_R}(y_c)$  de  $\psi_{u_0}(v_c)$ . Esta dependência resulta nos blocos (4, 2) de (5.8c) e (5.8e), (5, 3) de (5.4a), e o termo bilinear de  $\Sigma_{B2}$ , também em (5.4a). Nota-se que se  $D_y = 0$  ou o produto  $D_c D_y = 0$  e  $v_c = v_\psi$ , a BMI (5.4a) pode ser reduzida a uma LMI. Este caso será estudado na seção 5.5.

O corolário 5.1 é o primeiro passo à obtenção de condições expressas por LMIs para o problema em estudo neste capítulo.

**Corolário 5.1.** *Se existem matrizes simétricas positivas definidas  $X \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , matrizes diagonais positivas  $S_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\hat{A} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\hat{B} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (p+m)}$ ,  $\hat{C} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times (p+m)}$ ,  $F_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $F_R \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{21} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{R1} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $N \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Q_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $Q_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $J_1 \in \mathfrak{R}^{j_1}$ ,  $J_2 \in \mathfrak{R}^{j_2}$ , onde  $j_1 = (2(n+m) + 3m + q + r) \times 3m$  e  $j_2 = 3m \times 3m$ , e escalares reais positivos  $\mu, \gamma$ , verificando a inequação matricial abaixo disposta,*

$$\begin{bmatrix} M_1 + \text{sym}\{J_1 \tilde{R}\} & \star \\ M_2^T + J_2 \tilde{R} - J_1^T & -\text{sym}\{J_2\} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.9)$$

bem como (5.4b), (5.4c), (5.4d) e (5.4f); sendo:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{B1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hat{A} & \Sigma_{B4} & \star & \star & \star & \star & \star \\ F_1 & G_{11} & 0 & \star & \star & \star & \star \\ F_2 & Q_1 & 0 & -2S_2 & \star & \star & \star \\ F_R - S_R \mathbf{B}^T & Q_2 & 0 & 0 & -2S_R & \star & \star \\ \Sigma_{B3} & \Sigma_{B6} & \mathbf{D}_{v,w}^T & \mathbf{D}_{\psi,w}^T & \Sigma_{B7} & -I_q & \star \\ \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$M_2^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T & 0 & -\mathbf{D}_z^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{v,w} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1^T - \mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T & -\mathbf{B}_1 Y - \mathbf{D}_Y^T \hat{B}^T & I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então o controlador (5.2), definido em (5.4e) garante o disposto nos itens 1, 2 e 3 do teorema 5.1.

*Prova.* A inequação matricial (5.4a) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{B1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hat{A} & \Sigma_{B4} & \star & \star & \star & \star & \star \\ F_1 & G_{11} & 0 & \star & \star & \star & \star \\ F_2 & Q_1 & 0 & -2S_2 & \star & \star & \star \\ F_R - S_R \mathbf{B}^T & Q_2 & 0 & 0 & -2S_R & \star & \star \\ \Sigma_{B3} & \Sigma_{B6} & \mathbf{D}_{v,w}^T & \mathbf{D}_{\psi,w}^T & \Sigma_{B7} & -I_q & \star \\ \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} \quad (5.11a)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star & \star & \star \\ \Sigma_{B2} - F_1 & -S_1 \mathbf{B}_1^T Y - S_1 \mathbf{D}_y^T \hat{B}^T & -2S_1 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{D} \mathbf{D}_y S_1 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{v,w}^T & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{D}_z S_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

A segunda parcela da inequação acima pode ser reescrita como  $\text{sym}\{M_2\tilde{R}\}$ ;  $M_2$  e  $\tilde{R}$  conforme definição em (5.10). Seguindo o desenvolvimento de (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr.; BENDER, 2006),

$$M_1 + \text{sym}\{M_2\tilde{R}\} < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} I_A & \tilde{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & \star \\ M_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ \tilde{R} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.11b)$$

onde  $I_A$  é de ordem  $2(n+m) + 3m + q + r$ . Então, pelo Lema de Finsler, existem matrizes  $J_1$  e  $J_2$  dedimensões apropriadas tais que:

$$\begin{bmatrix} M_1 & \star \\ M_2^T & 0 \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{R} & -I_B \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.11c)$$

onde  $I_B$  é de ordem  $3m$ ; algo equivalente a (5.9). As demais disposições verificam-se pela prova do Teorema 5.1.  $\square$

Com os multiplicadores  $J_1$  e  $J_2$  propostos neste último corolário, apresenta-se agora uma estrutura especial para os mesmos de forma a representar (5.9) em uma LMI.

**Teorema 5.2.** *Se existem matrizes simétricas positivas definidas  $X \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , matrizes diagonais positivas  $S_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\hat{A} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\hat{B} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (p+m)}$ ,  $\hat{C} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times (p+m)}$ ,  $F_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $F_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $F_R \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{21} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{R1} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $N \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Q_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $Q_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $Q_3 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $J_{112} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times m}$ ,  $J_{132} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{113} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times m}$ ,  $J_{123} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times m}$ ,  $J_{133} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{143} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{153} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{163} \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ ,  $J_{173} \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ ,  $J_{221} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{231} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{223} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $J_{233} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , e escalares reais positivos  $\mu, \gamma$ , verificando a LMI,*

$$\begin{aligned} \Sigma_{D1} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{D1} & \star \\ \Sigma_{D2} & \Sigma_{D3} \end{bmatrix} < 0 \\ \Sigma_{D1} &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathbf{A}X + \mathbf{B}\hat{C}\} & \star & \star & \star & \star \\ \hat{A} & \text{sym}\{Y\mathbf{A} + \hat{B}\mathbf{C}_y\} & \star & \star & \star \\ F_1 + J_{113}^T & G_{11} + J_{123}^T & \text{sym}\{J_{133}\} & \star & \star \\ F_2 & Q_1 & J_{143} & -2S_2 & \star \\ F_R - S_R\mathbf{B}^T & Q_2 & J_{153} & 0 & -2S_R \end{bmatrix} \\ \Sigma_{D2} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{B3} & \Sigma_{B6} & \mathbf{D}_{v,w}^T + J_{163} & \mathbf{D}_{\psi,w}^T & \Sigma_{B7} \\ \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z & J_{173} & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_1^T - \mathbf{D}_y^T \hat{D} \mathbf{B}^T & -\mathbf{B}_1^T Y - \mathbf{D}_y \hat{B}^T & \frac{1}{2}S_1 - I_m & 0 & 0 \\ -J_{112}^T & Q_3 & S_1 - J_{132}^T + J_{223} & 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \\ -J_{113}^T & -J_{123}^T & \Sigma_{d1} & -J_{143}^T & -J_{153}^T \end{bmatrix} \\ \Sigma_{d1} &= J_{233} - J_{133}^T - J_{231} \\ \Sigma_{D3} &= \begin{bmatrix} -I_q & \star & \star & \star & \star \\ \mathbf{D}_{z,w} & -\gamma I_r & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -2I_m & \star & \star \\ 0 & -\frac{1}{2}\mathbf{D}_z^T & -J_{221} & -2I_m & \star \\ \frac{1}{2}\mathbf{D}_{v,w} - J_{163} & -J_{173}^T & -J_{231} & -J_{223}^T & -\text{sym}\{J_{233}\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

e as LMIs (5.4b), (5.4c), (5.4d) e (5.4f); o controlador (5.2) determinado em (5.4e) garante o disposto nos itens 1, 2 e 3 do Teorema 5.1.

*Prova.* Da inequação (5.9), o desenvolvimento da expressão resulta em:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_6 &= \begin{bmatrix} \Sigma_{F1} & \star \\ \Sigma_{F2} & \Sigma_{F3} \end{bmatrix} < 0 \\
\Sigma_{F1} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{f1} & & \star & & \star & \star & \star \\ \Sigma_{f2} & & \Sigma_{f6} & & \star & \star & \star \\ \Sigma_{f3} & & \Sigma_{f7} & & \Sigma_{f8} & \star & \star \\ \Sigma_{f4} & Q_1 - J_{141}\mathbf{B}_1^T Y - J_{141}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T & \Sigma_{f9} & -2S_2 & \star & & \\ \Sigma_{f5} & Q_2 - J_{151}\mathbf{B}_1^T Y - J_{151}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T & \Sigma_{f10} & 0 & -2S_R & & \end{bmatrix} \\
\Sigma_{f1} &= \Sigma_{B1} - \text{sym} \left\{ J_{111}\mathbf{B}_1^T + J_{111}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T \right\} \\
\Sigma_{f2} &= \hat{A} - J_{121}\mathbf{B}_1^T - J_{121}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T - Y\mathbf{B}_1 J_{111}^T - \hat{B}\mathbf{D}_y J_{111}^T \\
\Sigma_{f3} &= F_1 - J_{131}\mathbf{B}_1^T - J_{131}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T - J_{111}^T + S_1 J_{112}^T + J_{113}^T \\
\Sigma_{f4} &= F_2 - J_{141}\mathbf{B}_1^T - J_{141}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T \\
\Sigma_{f5} &= F_R - S_R \mathbf{B}^T - J_{151}\mathbf{B}_1^T - J_{151}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T \\
\Sigma_{f6} &= \Sigma_{B3} - \text{sym} \left\{ J_{121}\mathbf{B}_1^T Y + J_{121}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T \right\} \\
\Sigma_{f7} &= G_{11} - J_{131}\mathbf{B}_1^T Y - J_{131}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T - J_{121}^T + S_1 J_{122}^T + J_{123}^T \\
\Sigma_{f8} &= \text{sym} \left\{ -J_{131} + J_{132}S_1 + J_{133} \right\} \\
\Sigma_{f9} &= -J_{141} + J_{142}S_1 + J_{143} \\
\Sigma_{f10} &= -J_{151} + J_{152}S_1 J_{153} \\
\Sigma_{F2} &= \begin{bmatrix} \Sigma_{f11} & \Sigma_{f16} & \mathbf{D}_{v,w}^T - J_{161} + J_{162}S_1 + J_{163} & \mathbf{D}_{\psi,w}^T & \Sigma_{B7} \\ \Sigma_{f12} & \Sigma_{f17} & -J_{171} + J_{172}S_1 + J_{173} & 0 & 0 \\ \Sigma_{f13} & \Sigma_{f18} & \frac{1}{2}S_1 - J_{211} + J_{212}S_1 + J_{213} - J_{131}^T & -J_{141}^T & -J_{151}^T \\ \Sigma_{f14} & \Sigma_{f19} & -J_{221} + J_{222}S_1 + J_{223} - J_{132}^T & -J_{142}^T & \Sigma_{f21} \\ \Sigma_{f15} & \Sigma_{f20} & \Sigma_{d1} + J_{232}S_1 & -J_{143}^T & -J_{153}^T \end{bmatrix} \\
\Sigma_{f11} &= \mathbf{B}_w^T - J_{161}\mathbf{B}_1^T - J_{161}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T \\
\Sigma_{f12} &= \mathbf{C}_z X - J_{171}\mathbf{B}_1^T - J_{171}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T \\
\Sigma_{f13} &= -J_{211}\mathbf{B}_1^T - J_{211}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T - J_{111}^T \\
\Sigma_{f14} &= -J_{221}\mathbf{B}_1^T - J_{221}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T - J_{112}^T \\
\Sigma_{f15} &= -J_{231}\mathbf{B}_1^T - J_{231}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T - J_{113}^T \\
\Sigma_{f16} &= \Sigma_{B6} - J_{161}\mathbf{B}_1^T Y - J_{161}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T \\
\Sigma_{f17} &= \mathbf{C}_z - J_{171}\mathbf{B}_1^T Y - J_{171}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T \\
\Sigma_{f18} &= -J_{211}\mathbf{B}_1^T Y - J_{211}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T - J_{121}^T \\
\Sigma_{f19} &= -J_{221}\mathbf{B}_1^T Y - J_{221}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T - J_{122}^T \\
\Sigma_{f20} &= -J_{231}\mathbf{B}_1^T Y - J_{231}\mathbf{D}_y^T \hat{B}^T - J_{123}^T \\
\Sigma_{f21} &= -\frac{1}{2}\mathbf{D}_y^T \hat{D}^T - J_{152}^T \\
\Sigma_{F3} &= \begin{bmatrix} -I_q & \star & \star & \star & \star \\ \mathbf{D}_{z,w} & -\gamma I_r & \star & \star & \star \\ -J_{161}^T & -J_{171}^T & -\text{sym} \{ J_{211} \} & \star & \star \\ -J_{162}^T & -\frac{1}{2}\mathbf{D}_z^T - J_{172}^T & -J_{221} - J_{212}^T & -\text{sym} \{ J_{222} \} & \star \\ \Sigma_{f22} & -J_{173}^T & -J_{231} - J_{213}^T & J_{232} - J_{223}^T & \Sigma_{f23} \end{bmatrix} \\
\Sigma_{f22} &= \frac{1}{2}\mathbf{D}_{v,w} - J_{163} \\
\Sigma_{f23} &= -\text{sym} \{ J_{233} \}
\end{aligned} \tag{5.13a}$$

Considerando-se a seguinte estrutura das matrizes  $J_1$  e  $J_2$ :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & J_{112} & J_{113} \\ 0 & J_{122} & J_{123} \\ 0 & J_{132} & J_{133} \\ 0 & 0 & J_{143} \\ 0 & 0 & J_{153} \\ 0 & 0 & J_{163} \\ 0 & 0 & J_{173} \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ J_{221} & I_m & J_{223} \\ J_{231} & 0 & J_{233} \end{bmatrix} \quad (5.13b)$$

é possível verificar-se que (5.13a) torna-se idêntica a (5.12). Os demais termos do corolário seguem a prova apresentada para o Teorema 5.1.  $\square$

Observe-se que em nenhum momento garantiu-se a *well-posedness* do sistema em malha fechada. Esta é uma garantia algebricamente mais árdua de ser obtida, uma vez que envolve a um produto com  $D_c$  e  $S_R$ , portanto constitui-se em uma condição bilinear. Não obstante, a *well-posedness* da interconexão deste sistema pode ser verificada *a posteriori*, através da seguinte condição:

$$-2S - D_c D_y S_R - S_R D_y^T D_c^T < 0 \quad (5.14)$$

Outras formas de garantir-se a *well-posedness* do sistema em malha fechada devem ser investigadas e constituem-se em perspectivas deste trabalho.

## 5.5 Casos Especiais

Embora tenha sido trabalhado uma situação com generalidade intencional, é possível prever-se aplicações específicas cuja representação seja algebricamente mais simples.

### 5.5.1 Matriz de transferência da planta estritamente própria, atuador mensurável:

$$D_y = 0 \text{ e } v_c = v_\psi$$

Caso a planta tenha uma matriz de transferência estritamente própria, e não exista diferença significativa (a ponto de ser expressa no modelo) entre  $v_c$  e  $v_\psi$ , a formulação das condições suficientes para o disposto nos itens 1, 2 e 3 do teorema 5.1 pode ser simplificada. As condições tornam-se LMIs, e o sistema é naturalmente *well-posed*. A ordem do sistema diminui, pois não existe nesta representação a não-linearidade  $\psi_{u_0}(v_\psi)$ . As matrizes utilizadas para representar o sistema em malha fechada modificam-se. Os resultados serão enunciados em corolário e o respectivo desenvolvimento será incluído na prova.

**Corolário 5.2.** *Se existem matrizes simétricas positivas definidas  $X \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , matrizes diagonais positivas  $S_1 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S_R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $\hat{A} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $\hat{B} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (p+m)}$ ,  $\hat{C} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times (p+m)}$ ,  $F_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $F_R \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $G_{R1} \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,  $N \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $Q_1 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ ,*

$Q_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$ , e escalares reais positivos  $\mu, \gamma$ , verificando as LMIs abaixo,

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{B1} & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hat{A} & \Sigma_{B4} & \star & \star & \star & \star \\ \Sigma_{B2}^* & \Sigma_{B5}^* & -2S_1 & \star & \star & \star \\ F_R - S_R \mathbf{B}^T & Q_1 & 0 & -2S_R & \star & \star \\ \Sigma_{B3} & \Sigma_{B6} & \mathbf{D}_{v,w}^T & \Sigma_{B7} & -I_q & \star \\ \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z & -\mathbf{D}_z S_1 & 0 & \mathbf{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{B5}^* &= G_{11} - S_1 \mathbf{B}_1^T Y - S_1 \mathbf{D}_y^T \hat{B}^T + S_1 E_c^T N^T \\ \Sigma_{B2}^* &= F_1 - S_1 \mathbf{B}_1^T \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &\left[ \begin{array}{ccc} X & \star & \star \\ I_{n+m} & Y & \star \\ \mathbf{L}^{(i)} X - F_{1(i)} & \mathbf{L}^{(i)} - G_{11(i)} & \mu u_{0(i)}^2 \end{array} \right] > 0 \\ &\left[ \begin{array}{ccc} X & \star & \star \\ I_{n+m} & Y & \star \\ \hat{C}^{(i)} - F_{R(i)} & \hat{D}^{(i)} \mathbf{C}_y - G_{R1(i)} & \mu u_{R(i)}^2 \end{array} \right] > 0 \end{aligned} \right\}, i = 1, \dots, m \quad (5.15b)$$

$$\delta - \mu > 0 \quad (5.15c)$$

$$\text{sym}\{N\} > 0 \quad (5.15d)$$

então o controlador (4.4), definido conforme (5.4e) garante o disposto nos itens 1, 2 e 3 do teorema 5.1.

*Prova.* Partindo-se das equações originais, aplica-se as idealizações aqui propostas. As equações são desenvolvidas de modo a obter-se a representação em malha fechada, conforme seqüência das demonstrações anteriores.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B \text{sat}_{u_0}(v_c) - Bv_c + Bv_c + B_w w \\ &= Ax - B\psi_{u_0}(v_c) + Bv_c + B_w w \\ &= Ax - B\psi_{u_0}(v_c) + B(v + D_{v,w}w) B_w w \\ &= Ax + Bv - B\psi_{u_0}(v_c) + (B_w + BD_{v,w}) w \end{aligned}$$

$$y = C_y x + D_{y,w} w$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \left[ \begin{array}{c} C_y x + D_{y,w} w \\ v + D_{v,w} w \end{array} \right] + E_c \psi_{u_0}(v_c) + F_c \psi_{u_R}(y_c) + B_{c,w} w \\ &= A_c x_c + B_c \left( \left[ \begin{array}{cc} C_y & 0 \\ 0 & I_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ v \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} D_{y,w} \\ D_{v,w} \end{array} \right] w \right) \\ &\quad + E_c \psi_{u_0}(v_c) + F_c \psi_{u_R}(y_c) + B_{c,w} w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_c &= C_c x_c + D_c \left[ \begin{array}{c} C_y x + D_{y,w} w \\ v + D_{v,w} w \end{array} \right] + D_{c,w} w \\ &= C_c x_c + D_c \left( \left[ \begin{array}{cc} C_y & 0 \\ 0 & I_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ v \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} D_{y,w} \\ D_{v,w} \end{array} \right] w \right) + D_{c,w} w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \text{sat}_{u_R}(y_c) + B_{v,w} w \\ &= \text{sat}_{u_R}(y_c) - y_c + y_c + B_{v,w} w \\ &= C_c x_c + D_c \left( \left[ \begin{array}{cc} C_y & 0 \\ 0 & I_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ v \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} D_{y,w} \\ D_{v,w} \end{array} \right] w \right) \\ &\quad + D_{c,w} w - \psi_{u_R}(y_c) + B_{v,w} w \end{aligned}$$

As matrizes neste caso diferem um pouco das utilizadas no capítulo anterior.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} & \mathbf{C}_y &= \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_1 \\ E_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}_z &= \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix} & \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{C}_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_R &= \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ F_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{D}_{c,w} &= \mathbf{D}_{c,w} & \mathcal{L} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L} & 0 \end{bmatrix} & \mathcal{D}_{z,w} &= \mathbf{D}_{z,w}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathcal{D}_c\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C} & A_c \end{bmatrix} & \mathbf{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w + \mathbf{B}\mathcal{D}_{v,w} \\ B_{v,w} + \mathcal{D}_{c,w} \end{bmatrix} & \mathcal{B}_w &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w \\ \mathbf{B}_{c,w} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{c,w} &= (\mathbf{B}_{c,w} + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{y,w}) & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_c\mathbf{C}_y & \mathbf{C}_c \end{bmatrix} & & & & \\
\mathbf{D}_{z,w} &= (\mathcal{D}_{z,w} + \mathcal{D}_z\mathbf{D}_{v,w}) & \mathbf{L} &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} & \mathbf{D}_{y,w} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{y,w} \\ \mathbf{D}_{v,w} \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{c,w} &= (\mathcal{D}_{c,w} + \mathcal{D}_c\mathbf{D}_{y,w}) & \mathcal{D}_z &= \mathbf{D}_z = D_z & & & & 
\end{aligned}$$

O sistema em malha fechada é agora representado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}_1\psi_{u_0}(v_c) + \mathcal{B}_R\psi_{u_R}(y_c) + \mathcal{B}_w w \\
z &= \mathcal{C}_z\xi - \mathcal{D}_z\psi_{u_0}(v_c) + \mathcal{D}_{z,w}w
\end{aligned}$$

A condição  $\tilde{\mathcal{L}} < 0$  é garantida por:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathcal{A}^T P\} & * & * & * \\ -\mathcal{B}_1^T P & 0 & * & * \\ \mathcal{B}_R^T P & 0 & 0 & * \\ \mathcal{B}_w^T P & 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix} + \gamma^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_z^T \\ -\mathcal{D}_z^T \\ 0 \\ \mathcal{D}_{z,w}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_z & -\mathcal{D}_z & 0 & \mathcal{D}_{z,w} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ T_1 G_1 & -2T_1 & * & * \\ T_R G_R & 0 & -2T_R & * \\ 0 & \mathcal{D}_{v,w}^T T_1 & \mathcal{D}_{c,w}^T T_R & -I_q \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

e, mediante a aplicação do complemento de Schur, esta garantia é dada pela verificação de:

$$\begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathcal{A}^T P\} & * & * & * & * \\ -\mathcal{B}_1^T P + T_1 G_1 & -2T_1 & * & * & * \\ \mathcal{B}_R^T P + T_R G_R & 0 & -2T_R & * & * \\ \mathcal{B}_w^T P & \mathcal{D}_{v,w}^T T_1 & \mathcal{D}_{c,w}^T T_R & -I_q & * \\ \mathcal{C}_z & -\mathcal{D}_z & 0 & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0$$

Seja  $S_1 = T_1^{-1}$  e  $S_R = T_R^{-1}$ , multiplicando-se a inequação anterior pela esquerda e direita por:

$$\text{BLKDG} \left( \begin{bmatrix} \Pi^T & S_1 & S_R & I_{q+m} \end{bmatrix} \right),$$

e seu transposto, respectivamente, chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \text{sym}\{\Pi^T \mathcal{A}^T P \Pi\} & * & * & * & * \\ -S_1 \mathcal{B}_1^T P \Pi + G_1 \Pi & -2S_1 & * & * & * \\ S_R \mathcal{B}_R^T P \Pi + G_R \Pi & 0 & -2S_R & * & * \\ \mathcal{B}_w^T P \Pi & \mathcal{D}_{v,w}^T & \mathcal{D}_{c,w}^T & -I_q & * \\ \mathcal{C}_z \Pi & -\mathcal{D}_z S_1 & 0 & \mathcal{D}_{z,w} & -\gamma I_r \end{bmatrix} < 0$$

Aplicando-se a substituição de matrizes propostas em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2005), semelhantes à utilizada no teorema 5.1, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{sym}\{\Pi^T \mathcal{A}^T P \Pi\} &= \begin{bmatrix} \text{sym}\{\mathbf{A}X + \mathbf{B}\hat{C}\} & \star \\ \hat{A} & \text{sym}\{Y\mathbf{A} + \hat{B}C_y\} \end{bmatrix} \\ \hat{A} &= Y\mathbf{A}X + Y\mathbf{B}D_c C X + Y\mathbf{B}C_c M^T + N B_c C X + N A_c M^T \\ \hat{B} &= Y\mathbf{B}D_c + N B_c \\ \hat{C} &= D_c C_y X + C_c M^T \\ S_1 \mathcal{B}_1^T P \Pi &= \begin{bmatrix} S_1 \mathbf{B}_1^T & S_1 \mathbf{B}_1 Y + S_1 E_c^T N^T \end{bmatrix} \\ S_R \mathcal{B}_R^T P \Pi &= \begin{bmatrix} -S_R \mathbf{B}^T & -S_R \mathbf{B}^T Y + S_R F_c^T N^T \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_w^T P \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{D}^T \mathbf{B}^T & \mathbf{B}^T Y + B_{c,w}^T N^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{B}^T \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_z \Pi &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z X & \mathbf{C}_z \end{bmatrix} \\ G_i \Pi &= \begin{bmatrix} G_{i1} X + G_{i2} M^T & G_{i1} \end{bmatrix}, i = 1, R \end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} F_i &= G_{i1} X + G_{i2} M^T, i = 1, R \\ Q_1 &= G_{R1} - S_R \mathbf{B}^T Y + S_R F_c^T N^T \end{aligned}$$

chega-se a LMI (5.15a). As restrições de inclusão necessárias para a validade das condições de setor utilizadas com  $\psi_{u_0}(v_c)$  e  $\psi_{u_R}(y_c)$  são expressas pelas LMIs em (5.15b). A garantia de algum conjunto de inicialização impõe a LMI  $\delta - \mu > 0$ . O seguinte termo:

$$\Sigma_{B6} = \mathbf{B}^T Y + B_{c,w}^T N^T + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{B}^T$$

apresenta a dependência explícita de  $N$ , o que requer a LMI adicional  $\text{sym}\{N\} > 0$ , pelos motivos apresentados e discutidos à prova do teorema 5.1. A verificação de todas estas LMIs garante o disposto nos itens 1, 2 e 3 do teorema 5.1.  $\square$

### 5.5.2 Matriz de transferência estritamente própria, atuador mensurável e entrada do controlador livre de perturbação: $D_y = 0$ , $v_c = v_\psi$ e $B_{c,w} = 0$

Este caso especial corresponde a uma idealização adicional a do anterior. Aqui assume-se que a perturbação externa não possui conexão com os terminais de entrada do controlador. Observe-se que mesmo que ela exista de fato, persiste a matriz  $D_{y,w}$  para representar seu efeito no modelo. Ainda, é fácil verificar que a partir de (5.15a), se  $B_{c,w} = 0$  então, o termo  $\Sigma_{B6}$  cede lugar a:

$$\Sigma_{B6}^* = \mathbf{B}^T Y + \mathbf{D}_{y,w}^T \hat{B}^T$$

Assim desaparece qualquer menção explícita a  $N$  dentro das LMIs. A condição  $\text{sym}\{N\} > 0$  é, então, substituída por  $NM^T = I_{n+m} - YX$ , menos conservativa e determinada *a posteriori*.

## 5.6 Problemas de Otimização

Observe-se que as condições no teorema 5.2 são LMIs. Então, se um critério linear é usado, um ótimo global pode ser obtido. As condições no teorema 5.1 e no corolário 5.1 são BMIs. Mediante esquemas de relaxação é também possível otimizar-se critérios lineares. A relaxação de BMIs é obtida fixando-se uma das variáveis de uma expressão bilinear - possivelmente com o valor obtido pela solução de uma LMI para o mesmo problema - e resolvendo-se a LMI resultante desta substituição. A variável livre é fixada no valor encontrado, e a anteriormente pré-fixada é deixada livre em uma nova iteração. Repete-se este processo até a satisfação de algum critério de parada.

O objetivo desta seção é a síntese de compensadores baseados em dois critérios: a maximização da perturbação admissível - Tolerância à Perturbação - e a minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  entre a perturbação e a saída regulada  $z$  - Rejeição à Perturbação. Por simplicidade, em ambos os casos considerar-se-á  $\xi(0) = 0$ , o que implica que o sistema está em equilíbrio no instante inicial.

### 5.6.1 Tolerância à Perturbação

A suposição  $\xi(0) = 0$  torna  $\mu^{-1} = \delta^{-1}$ . A idéia então é minimizar  $\mu$ , o que maximiza o limite da perturbação. Se  $w = 0$ , adicionalmente, obtém-se a solução para o problema de maximização da região de atração da origem em malha fechada. De qualquer forma, este problema só faz sentido quando a estabilidade em âmbito global não está sendo considerada. Para os teoremas e corolários enunciados aqui, a máxima tolerância à perturbação é obtível da seguinte forma:

Para o teorema 5.2:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (5.12), (5.4b), (5.4c) e (5.4d)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para o corolário 5.2:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (5.15a), (5.15b), (5.15c) e (5.15d)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para o teorema 5.1:

1. Estipular-se um valor inicial para  $S_1$ .
2. Substitui-se o valor de  $S_1$  obtido em 1 nas inequações propostas.
3. Efetue-se:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (5.4a), (5.4b), (5.4c) e (5.4d)} \end{aligned} \quad (5.18)$$

4. As matrizes  $\hat{D}$ ,  $\hat{B}$  e  $Y$  obtidas são substituídas nas inequações pelo valor obtido em 3. As demais variáveis são mantidas.

5. Efetue-se:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sujeito a (5.4a), (5.4b), (5.4c) e (5.4d)} \end{aligned} \quad (5.19)$$

6. A matriz  $S_1$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 5. As demais variáveis são mantidas.

7. Retorna-se a 3 até que algum critério de parada torne-se verdadeiro.

A exemplo do discutido nos problemas de otimização do capítulo anterior, sugere-se inicializar  $S_1$  através do resultado obtido com o teorema 5.2.

### 5.6.2 Rejeição à Perturbação

A consideração  $\xi(0) = 0$  torna  $\sqrt{\gamma}$  o limite para o máximo do ganho  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$ . Ao contrário da tolerância, a rejeição à perturbação é passível de otimização independente do âmbito da estabilidade da origem do sistema em malha fechada - local ou global. Assumindo-se que  $\delta^{-1}$  é fornecido, o seguinte problema pode ser abordado em cada um dos teoremas e corolários.

Para o teorema 5.2:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (5.12), (5.4b), (5.4c) e (5.4d)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para o corolário 5.2:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (5.15a), (5.15b), (5.15c) e (5.15d)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para o teorema 5.1:

1. Estipular-se um valor inicial para  $S_1$ .
2. Substitui-se o valor de  $S_1$  obtido em 1 nas inequações propostas.
3. Efetue-se:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (5.4a), (5.4b), (5.4c) e (5.4d)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

4. As matrizes  $\hat{D}$ ,  $\hat{B}$  e  $Y$  obtidas são substituídas nas inequações pelo valor obtido em 3. As demais variáveis são mantidas.

5. Efetue-se:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (5.4a), (5.4b), (5.4c) e (5.4d)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

6. A matriz  $S_1$  é substituída nas inequações pelo valor obtido em 5. As demais variáveis são mantidas.
7. Retorna-se a 3 até que algum critério de parada torne-se verdadeiro.

## 5.7 Exemplos Numéricos

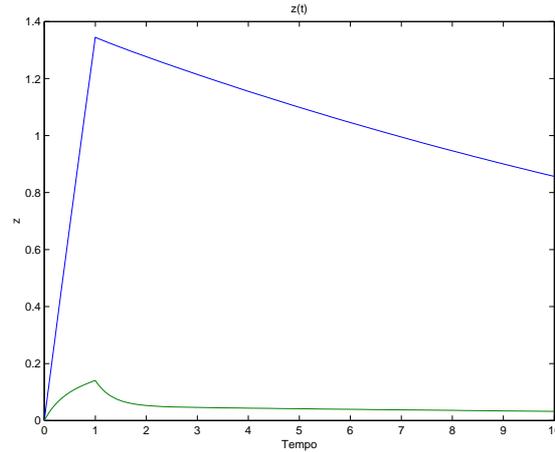
Esta seção exemplifica alguns métodos desenvolvidos neste capítulo e os problemas de otimização da seção 5.6. Assim como no capítulo 4, o segundo exemplo numérico de (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2005) é utilizado de forma ilustrativa.

O controlador neste caso é substituído pelo controlador sintetizado pelo método em estudo neste capítulo. Adicionalmente a taxa de variação máxima do atuador foi restrita pelo vetor  $u_R = [1 \ 1]^T$ .

Neste sistema aplicou-se os métodos de síntese simultânea de controlador com laços de *anti-windup* sujeitos a restrição do atuador em amplitude e taxa de variação.

Simulações feitas no ambiente *Simulink* do *Matlab*<sup>2</sup> exibem o comportamento do sistema em malha fechada.

<sup>2</sup>*Simulink* e *Matlab* são marcas registradas da Mathworks

Figura 5.2: Sinal  $z$ 

Para o sistema (4.47a) com a restrição adicional da taxa de variação do atuador, determinou-se um controlador dinâmico com laços *anti-windup* de acordo com o problema de maximização da tolerância para o teorema 5.2. A planta foi sujeita à uma perturbação de norma  $\mathcal{L}_2$  igual a 14.586, cuja manifestação durou 1 segundo. O seguinte conjunto de matrizes foi obtido:

$$\begin{aligned}
 A_c &= 1.0 \times 10^7 \begin{bmatrix} -0.0009 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0002 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -6.5335 & 0.0953 & -0.0325 & -0.0011 \\ 3.1445 & -0.0462 & -0.0012 & -0.0432 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 2.8148 & -0.0378 & 0.0002 & -0.0000 \\ -0.0378 & 1.8283 & 0.0001 & 0.0019 \\ -0.0194 & 0.0008 & 0.3861 & 0.0010 \\ 0.0161 & 0.0014 & 0.3554 & 0.5250 \end{bmatrix} \\
 C_c &= 1.0 \times 10^7 \begin{bmatrix} -3.0523 & 0.0445 & -0.0152 & -0.0005 \\ 1.4689 & -0.0216 & -0.0006 & -0.0202 \end{bmatrix} \\
 D_c &= 1.0 \times 10^8 \begin{bmatrix} -0.0092 & 0.0003 & -0.2815 & 0.0005 \\ 0.0075 & -0.0002 & 0.1660 & -0.2121 \end{bmatrix} \\
 E_c &= \begin{bmatrix} 0.4649 & -0.0035 \\ -0.0136 & 0.0001 \\ 0.0034 & 0.0007 \\ 0.0001 & 0.0163 \end{bmatrix} & F_c &= \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0002 \\ 2.1409 & 0.0002 \\ 0.0002 & 2.1413 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

As figuras 5.2, 5.3, 5.4 ilustram respectivamente os gráficos obtidos para a saída controlada  $z$ , a entrada de controle  $u$ , a perturbação  $w$ , controle excedente em amplitude,  $\psi_{u_0}(v_c)$  e controle excedente em taxa de variação  $\psi_{u_R}(y_c)$ .

A tabela ao final deste capítulo mostra o compromisso entre os problemas de minimizar  $\mu$  e  $\gamma$  nos teoremas 4.1 e 4.3. A variável  $\mu$  nestes teoremas corresponde ao inverso do quadrado da máxima norma  $\mathcal{L}_2$  de uma perturbação tolerável pelo sistema quando inicializado na origem. A variável  $\gamma$ , por sua vez, corresponde ao quadrado do limitante superior ao ganho  $\mathcal{L}_2$  garantido à perturbação à saída controlada.

Na tabela 5.7 é possível observar-se o *trade-off* entre tolerância e atenuação da perturbação. À medida que  $\mu$  aumenta, ou seja, a tolerância à perturbação diminui, a atenuação que o sistema aplica à perturbação cresce.

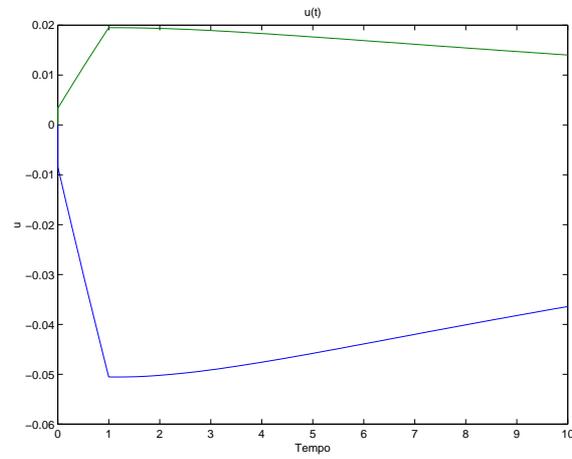


Figura 5.3: Sinal  $u$

Tabela 5.1: *Trade-off* Tolerância  $\times$  Atenuação para a perturbação externa.

Relação $\mu \gamma$	
$\mu$	$\gamma$
$5 \times 10^{-3}$	$8.35 \times 10^4$
$1 \times 10^{-2}$	$9.24 \times 10^2$
$1 \times 10^{-1}$	$9.64 \times 10^1$
$2 \times 10^{-1}$	$5.46 \times 10^1$
$5 \times 10^{-1}$	$2.68 \times 10^1$
$1 \times 10^0$	$1.59 \times 10^1$
$2 \times 10^0$	$9.63 \times 10^0$
$5 \times 10^0$	$3.08 \times 10^0$
$1 \times 10^1$	$6.32 \times 10^{-1}$
$1 \times 10^2$	$1.33 \times 10^{-1}$
$1 \times 10^3$	$5.28 \times 10^{-2}$

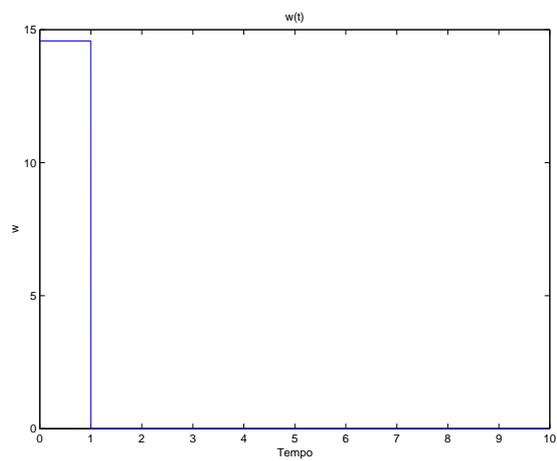


Figura 5.4: Sinal  $w$

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Este trabalho apresentou contribuições ao problema de compensação dinâmica de sistemas lineares contínuos sujeitos a saturação de controle. São poucas as publicações que propõem métodos de compensação dinâmica de saída que garantam a estabilidade da origem em plantas instáveis em malha aberta e sujeitas a controle restrito. Ainda, poucos trabalhos há que abordem a síntese simultânea de um controlador dinâmico de saída e laços *anti-windup*. O desenvolvimento de métodos de síntese para estes problemas foi feito através da extensão dos resultados de (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr.; BENDER, 2006) no caso de compensação dinâmica de *anti-windup*, e de (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2005) no caso da síntese de controladores dinâmicos.

Para a compensação *anti-windup* dinâmica, apresentou-se métodos de síntese de compensadores de ordem plena e reduzida. Para o caso de ordem plena, o método proposto garante a estabilidade da origem em malha fechada para sistemas sujeitos a restrições na amplitude do atuador. Considerou-se a presença de perturbações limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ , obtendo-se um limitante superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação externa na saída controlada da planta e uma estimativa dos conjuntos atingíveis pelas trajetórias e de inicialização do sistema.

Na ausência de perturbação a origem é garantida assintoticamente estável. O método é ainda explorado em problemas de otimização para maximizar a norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação tolerável pelo sistema, e minimizar o ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação na saída controlada do sistema. Exemplos numéricos evidenciaram os efeitos do método. Para os casos em que é desejável a implementação de compensador de menor ordem, apresentou-se métodos de síntese de compensadores *anti-windup* de ordem reduzida. A estabilidade da origem em malha fechada foi garantida e a perturbação externa teve sua tolerância e atenuação maximizados em problemas distintos. Todavia, condições matriciais lineares não foram obtidas senão pela aplicação do lema de Finsler. Embora os métodos baseados em BMIs apresentem dificuldades computacionais e percam a garantia de otimização global quando esquemas de relaxação lhes são aplicados, podem estender o método de síntese linear quando o resultado de otimizações lineares for utilizado como solução inicial. Neste capítulo apenas a restrição em amplitude do atuador foi considerada.

Para a síntese de controladores dinâmicos, propôs-se um método que sintetiza simultaneamente o controlador e laços de *anti-windup* em uma planta onde além da amplitude, a taxa de variação do atuador é restrita. A estabilidade em malha fechada da origem é garantida. Considerou-se a presença de perturbações limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ , obtendo-se um limitante superior para o ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação externa na saída controlada da planta e uma estimativa dos conjuntos atingíveis pelas trajetórias e de inicialização do sistema. Na ausência de perturbação garante-se a origem assintoticamente estável. O método é explorado em problemas de otimização para maximizar a norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação tole-

rável pelo sistema, e minimizar o ganho  $\mathcal{L}_2$  da perturbação manifesto na saída controlada. Exemplos numéricos evidenciaram os efeitos do método.

Todos os métodos propostos tiveram suas condições suficientes expressas por LMIs. O modelo da planta utilizado não apresentava uma matriz de transferência estritamente própria, o que fez necessária a garantia da *wellposedness* da matriz de transferência do sistema em malha fechada. Adicionalmente, pelos diversos acoplamentos de perturbações considerados alguns resultados iniciais apresentaram-se como condições bilineares de solução. Por conseguinte, foram linearizadas através do lema de Finsler, que insere multiplicadores em uma representação distinta a partir das restrições originais. Por ser uma representação equivalente, fixar elementos dos multiplicadores restringe os graus de liberdade originais, mas permite linearizar as restrições. Desta forma, tomou-se muito cuidado para que a estrutura fosse minimamente fixada.

Os problemas de síntese de compensadores *anti-windup* dinâmicos e síntese direta de controlador, abordados nos capítulos 4 e 5, respectivamente, apresentaram em seus problemas de otimização, um claro *trade-off* entre tolerância e atenuação de perturbações externas. É possível explicar tal relação pelo fato de que com controle limitado, a presença de perturbações maiores no sistema, implicará em ganhos também maiores na saída da planta, na medida em ocorra a saturação de controle.

O presente trabalho possui um grande número de possibilidades de continuação. As que o autor pretende seguir são:

- a) Síntese de compensadores *anti-windup* para sistemas lineares sujeitos à saturação do atuador em amplitude e taxa de variação com um controlador nominal dado *a priori*.
- b) Utilização de funções de Liapunov quadráticas de termo polinomial completo.
- c) Síntese de compensadores *anti-windup* para sistemas lineares sujeitos a restrições do atuador em amplitude e aceleração.
- d) Estender os métodos desenvolvidos ao problema de seguimento de referência;
- e) Investigar formas apropriadas de garantir-se o sistema estudado no capítulo 5 *well-posed*.

*”Tanto melhor, lutaremos à sombra.”*

## REFERÊNCIAS

BERNSTEIN, D. The optimal projection equations for static and dynamic output feedback: the singular case. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.12, p.1139–1143, Dec. 1987.

BERNSTEIN, D. S.; MICHEL, A. N. A chronological bibliography on saturating actuator. **Int. Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.5, p.375–380, 1995.

BOYD, S.; GHAOUI, E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. 1st.ed. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

BURGAT, C.; TARBOURIECH, S. Global stability of a class of systems with saturated controls. **International Journal of Systems and Science**, Abingdon, v.23, p.37–56, 1992.

CASTELAN, E. B.; QUEINNEC, I.; TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M. LMI approach for L2-control of linear systems with saturating actuators. In: **IFAC SYMPOSIUM ON NONLINEAR CONTROL SYSTEMS**, 6., 2004, Stuttgart, Germany. **Proceedings...** Kidlington: Oxford, 2004. p.287–292d.

COUTINHO, D. F.; D. J. PAGANO, A. T. On the estimation of robust stability regions for nonlinear systems with saturation. **Sociedade Brasileira de Automática**, Campinas, SP, Brasil, v.15, p.269–278, Sep. 2004.

DORATO, P. **Robust Control**. New York: IEEE Press, 1987.

FERTIK, H. A.; ROSS, C. W. Direct digital control algorithm with anti-windup feature. **ISA Transactions**, Chapel Hill, v.6, p.317–328, 1967.

FINSLER, P. Über das vorkommen definitiver und semidefiniter formen in scharen quadratischen formen. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Zurich, SU, v.9, p.188–192, Feb. 1937.

GOMES DA SILVA Jr., J. M. **Sur la Stabilité Locale de Systèmes Linéaires avec Saturation des Commandes**. 1997. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — , Toulouse, France.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; FISCHMAN, A.; TARBOURIECH, S.; DION, J.; DUGARD., L. Synthesis of state feedback for linear systems subject to control saturation by an LMI-based approach. In: **IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL**, 2., 1997, Budapest, Hungary. **Proceedings...** Kidlington: Oxford, 1997. p.229–234.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; LIMON, D.; ALAMO, T.; CAMACHO., E. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 44., 2005, Sevilla, Spain. **Proceedings...** New York, 2005.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH., S. Anti-Windup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 42., 2003, Maui, USA. **Proceedings...** New York, 2003.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH., S. Anti-Windup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. **IEEE Trans. on Automatic Control**, New York, v.50, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.48, p.842–847, May 2003.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S.; REGINATTO, R. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2002, Glasgow, Scotland. **Proceedings...** New York, 2002.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S.; REGINATTO., R. Application of hybrid and polytopic modeling to the stability analysis of linear systems with saturating inputs. **Revista Controle Automação (SBA)**, Natal, v.15, p.401–412, 2004.

GOMES DA SILVA Jr., J.; TARBOURIECH, S. Polyhedral regions of local asymptotic stability for discrete-time linear systems with saturating controls. **IEEE Trans. on Automatic Control**, New York, v.44, p.2081–2086, 1999.

GOMES DA SILVA Jr., J.; TARBOURIECH, S. Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls an LMI-based approach. **IEEE Trans. on Automatic Control**, New York, v.46, p.119–125, 2001.

GRIMM, G.; HATFIELD, J.; POSTLETHWAITE, I.; TEEL, A. R.; TURNER, M. C.; ZACCARIAN, L. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an lmi-based synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.48, p.1509–1525, 2003.

HINDI, H.; BOYD, S. Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 37., 1998, Tampa, USA. **Proceedings...** New York, 1998. p.903–908.

HU, T.; LIN, Z. **Control Systems with Actuator Saturation: analysis and design**. Boston: Birkhäuser, 2001.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. **Automatica**, Kidlington, v.38, p.351–359, 2002.

KAPILA, V.; GRIGORIADIS, K. **Actuator Saturation Control**. New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. p.320.

KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. 2.ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996. p.734.

KOTHARE, M. V.; CAMPO, P. J.; MORARI, M.; NETT, C. N. A unified framework for the study of anti-windup designs. **Automatica**, Kidlington, v.30, p.1869–1883, 1994.

LIAPUNOV, A. M. **General Problems in the Stability of Motion (in Russian)**. 1892. Thesis (PhD) — Moscow University, Kharkow.

LIN, Z.; SABERI, A. Semiglobal exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedback. **Systems and Control Letters**, North-Holland, v.21, p.225–239, 1993.

MIYAMOTO, A.; VINNICOMBE, G. Robust control of plants with saturation nonlinearity based on coprime factor representation. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 35., 1996, Kobe, Japan. **Proceedings...** New York, 1996. p.2838–2840.

MULDER, E. F.; KOTHARE, M. V.; MORARI, M. Multivariable *anti-windup* controller synthesis using linear matrix inequalities. **Automatica**, Kidlington, v.37, p.1407–1416, Sep. 2001.

NGUYEN, T.; JABBARI, F. Output Feedback controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation. **Automatica**, Kidlington, v.36, p.1339–1346, 2000.

PAIM, C. **Análise e Controle de Sistemas Lineares sob Saturação**. 2003. Tese de Doutorado — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

PAIM, C.; TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; CASTELAN, E. B. Control design for linear systems with saturating actuators and  $\mathcal{L}_2$ -bounded disturbances. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 41., 2002, Las Vegas, USA. **Proceedings...** New York, 2002.

PITTET, C.; TARBOURIECH, S.; BURGAT, C. Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and Popov criteria. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 36., 1997, San Diego, USA. **Proceedings...** New York, 1997. p.4518–4523.

REGINATTO, R. **Contribuições ao Projeto de Controladores Não-Lineares para Sistemas com Restrições no Controle**. 2000. Tese de Doutorado — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.

SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output feedback control via LMI optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.42, p.896–911, July 1997.

SCHUR, J. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Berlin, Deutschland, v.148, p.122–145, 1918.

SONTAG, E. D.; SUSSMANN, H. D. Nonlinear output feedback design for linear systems with saturation control. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 29., 1990, Honolulu, USA. **Proceedings...** New York, 1990. p.3414–3416.

STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A. Output regulation for linear systems to amplitude plus rate saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.9, p.631–657, Oct. 1999.

TARBOURIECH, S. **Sur la Stabilité des Regulateurs à Retour d'État Saturé**. 1991. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — , Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. **Control of uncertain systems with bounded inputs**. Berlin: Springer Verlag., 1997. p.186.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; BENDER, F. A. Dynamic anti-windup synthesis for discrete-time linear systems subject to input saturation and  $\mathcal{L}_2$  disturbances. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, 5., 2006, Toulouse, France. **Proceedings...** Kidlington: Oxford, 2006. p.665–682.

TEEL, A. R.; KAPPOR, N. The  $\mathcal{L}_2$  problem: it's definition and solution. In: EUCA EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 1997, Cambridge, England. **Proceedings...** New York, 1997.

TYAN, F.; BERNSTEIN, D. S. Dynamic output feedback compensation for linear systems with independent amplitude and rate saturation. **International Journal of Control**, Abingdon, v.67, p.89–116, Jan. 1997.

WALGAMA, K. S.; STERNBY, J. Inherent observer property in a class of *anti-windup* compensators. **International Journal of Control**, Brussels, Belgium, v.52, p.705–724, 1990.

WEISSTEIN, E. W. Acesso em: <http://mathworld.wolfram.com/WellDefined.html>.

ZACCARIAN, L.; TEEL, A. R. A common framework for *anti-windup*, bumpless transfer and reliable designs. **Automatica**, Kidlington, v.38, 2002.