

A M É R I C O C A M P O S F I L H O

ANÁLISE DE PILARES DE CONCRETO ARMADO

SUBMETIDOS À FLEXO-COMPRESSÃO

OBLÍQUA

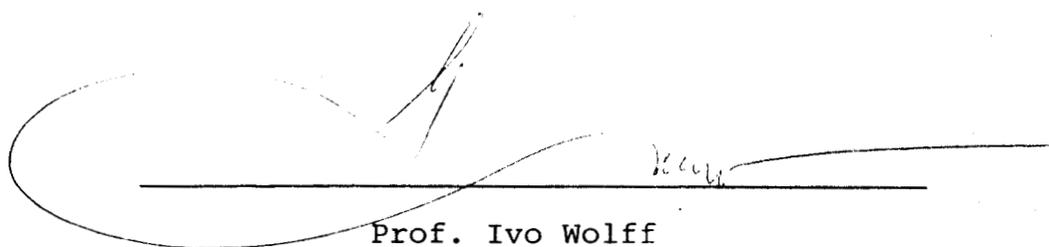
Tese apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL".

Porto Alegre

Rio Grande do Sul - Brasil

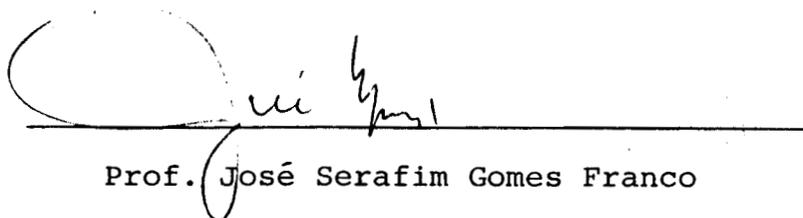
Dezembro de 1982

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de "MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL" e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, sweeping loop on the left and a horizontal line extending to the right, ending in a small flourish.

Prof. Ivo Wolff

Orientador

A handwritten signature in black ink, featuring a large, rounded initial 'J' followed by the letters 'osé Serafim Gomes Franco' in a cursive style.

Prof. José Serafim Gomes Franco

Coordenador do Curso de Pós-Graduação

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores professor Ivo Wolff e professor Nelton Fernandes Bonilha pelos ensinamentos ministrados e pela dedicada colaboração ao longo deste trabalho.

À professora Leda Carmen Wulff Gobetti pelo interesse e auxílio proporcionado no transcurso deste trabalho.

Ao professor Pablo Gaston Bignon pelas sugestões feitas para a apresentação deste trabalho.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na pessoa de seu coordenador, professor José Serafim Gomes Franco, pela atenção recebida.

Aos órgãos que proporcionaram o auxílio financeiro.

À sra. Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

Aos colegas pela espontânea e sempre importante cooperação dada no decorrer deste trabalho.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA VIGAS-COLUNAS ..	3
2.1 - Generalidades	3
2.1.1 - Conceituação Básica	3
2.1.2 - Hipóteses Assumidas	4
2.2 - Formulação das Equações Básicas de Equilíbrio	5
2.3 - Relações Tensões Generalizadas-Deformações	10
2.4 - O Modelo para Elementos Finitos	11
2.4.1 - Escolha das Funções-Deslocamentos	13
2.4.2 - A Matriz de Rigidez para um Elemento de Viga-Co- luna	16
2.5 - A Matriz de Rotação e a Matriz de Rigidez Total ..	19
2.6 - Os Métodos de Solução para o Problema das Vigas-Co- lunas	28
2.6.1 - Solução Numérica Utilizando a Rigidez Tangente .	29
2.6.2 - Solução Numérica Utilizando a Rigidez Secante ..	32
3 - DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS	37
3.1 - As Características dos Materiais	37

3.1.1 - O Aço	37
3.1.2 - O Concreto	37
3.2 - A Rigidez Axial e à Flexão dos Elementos	40
3.2.1 - Determinação da Rigidez dos Elementos	40
3.2.1.1 - Processo de Cálculo	42
3.2.1.2 - Integração dos Diagramas Tensão-Deformação sobre a Seção	45
3.2.1.3 - Determinação dos Eixos Principais	45
3.2.2 - As Propriedades Tangentes da Seção	47
3.2.2.1 - Rigidez Tangente para o Aço	47
3.2.2.2 - Rigidez Tangente para o Concreto	47
3.2.3 - As Propriedades Secantes da Seção	52
3.2.3.1 - Rigidez Secante para o Aço	52
3.2.3.2 - Rigidez Secante para o Concreto	53
3.3 - A Rigidez Torsional dos Elementos	57
3.3.1 - Hipóteses Básicas	57
3.3.2 - Determinação da Rigidez Torsional dos Elementos	59
3.3.2.1 - Propriedades das Seções Delgadas Fechadas	59
3.3.2.2 - Cálculo das Propriedades dos Elementos	62
4 - AS DEFORMAÇÕES DEVIDAS A RETRAÇÃO E A FLUÊNCIA DO CONCRETO	67
4.1 - Conceitos Básicos	67
4.2 - O Comportamento do Concreto ao Longo do Tempo Conforme o Código Modelo CEB/FIP	68
4.2.1 - Generalidades	68
4.2.2 - A Fluência	68
4.2.2.1 - Hipóteses	68
4.2.2.2 - Determinação do Coeficiente de Fluência	69
4.2.3 - A Retração	74

4.2.4 - Idade Corrigida	74
4.2.5 - Espessura Fictícia	76
4.2.6 - Formulação Geral	76
4.3 - Ajustagem das Curvas que Descrevem o Comportamento do Concreto no Tempo	77
4.3.1 - Generalidades	77
4.3.2 - Resultados Obtidos	77
4.3.2.1 - Variação da Resistência do Concreto com a Ida- de	77
4.3.2.2 - Influência da Espessura Fictícia sobre a Fluên- cia	78
4.3.2.3 - Desenvolvimento no Tempo da Deformação Elásti- ca de Fluência	78
4.3.2.4 - Desenvolvimento no Tempo da Deformação Plásti- ca de Fluência	78
4.3.2.5 - Influência da Espessura Fictícia sobre a Retra- ção	82
4.3.2.6 - Desenvolvimento da Retração ao Longo do Tempo	82
4.3.2.7 - Coeficientes Dependentes da Umidade para a Flu- ência e a Retração	85
4.4 - Influência da Armadura sobre a Fluência e a Retra- ção do Concreto	86
4.5 - Determinação das Deformações do Concreto ao Longo do Tempo	87
4.6 - Consideração das Deformações devidas à Fluência e à Retração no Algoritmo de Solução	89
5 - EXEMPLOS	91
5.1 - Exemplo 1	91
5.2 - Exemplo 2	92
5.3 - Exemplo 3	106
5.3.1 - Pilar Bi-Rotulado	106

VII

5.3.2 - Pilar Livre-Engastado	107
5.4 - Exemplo 4	110
5.5 - Exemplo 5	112
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	116
BIBLIOGRAFIA	118

SINOPSE

O objetivo deste trabalho é a análise não-linear de pilares de concreto armado com seção transversal e distribuição da armadura arbitrárias, variáveis ao longo do eixo, e com condições genéricas de apoio nas extremidades. A fluência e a retração do concreto são consideradas na análise.

A solução é obtida através do método dos elementos finitos, com um modelo em deslocamentos, empregando um algoritmo que usa a rigidez tangente e um algoritmo que usa a rigidez secante.

Estão incluídos exemplos de utilização do método proposto.

SUMMARY

The aim of this work is the nonlinear analysis of reinforced concrete pillars of arbitrary cross section and reinforcement distribution, variable along the axis, and with arbitrary boundary conditions. Creep and shrinkage of concrete are considered in the analysis.

The solution is obtained by the finite element method, using a displacement model. Tangent and secant stiffness approaches are both used.

Some examples of application of the proposed method are included.

NOTAÇÕES

Letras Romanas Maiúsculas

A	- área
A_C	- área da seção transversal geométrica da peça
A_S	- área da seção transversal da armadura
E	- módulo de deformação longitudinal
E_C	- módulo de deformação longitudinal do concreto
E_{cm}	- módulo de deformação longitudinal médio do concreto
E_S	- módulo de deformação longitudinal do aço
F	- ações; função
G	- módulo de deformação transversal; função
I	- momento de inércia
I_t	- momento de inércia à torção
K	- rigidez
K_T	- constante torsional de St. Venant
L	- comprimento
M	- momento
N	- força normal
P	- força axial
S	- momento estático
T_{SV}	- momento torsional de St. Venant
U	- deslocamento
V	- volume
X	- coordenada

- Y - coordenada
Z - coordenada

Letras Romanas Minúsculas

- a - distância; coeficiente
b - coeficiente
d - altura útil
 d_{ef} - diâmetro efetivo
e - excentricidade de uma força normal
f - resistência; força; flecha
 f_c - resistência à compressão do concreto
 f_{cd} - resistência de cálculo do concreto
 f_{cj} - resistência média do concreto à compressão, prevista para a idade de j dias
 f_{ck} - resistência característica do concreto à compressão
 f_{cm} - resistência média do concreto à compressão
 f_{ct} - resistência à tração do concreto
 f_{ctk} - resistência característica do concreto à tração
 f_{ctm} - resistência média do concreto à tração
 f_y - resistência de escoamento do aço
 f_{yc} - resistência de escoamento do aço à compressão
 f_{yd} - resistência de cálculo do aço
 f_{yk} - resistência característica do aço
 f_{yt} - resistência de escoamento do aço à tração
 h_{ef} - espessura efetiva
j - número de dias
k - rigidez
 l - comprimento
m - momento
s - coordenada curvilínea
t - espessura
u - deslocamento; coordenada
v - coordenada
x - coordenada
y - coordenada
z - coordenada

Letra Grega Maiúscula

ϕ - curvatura

Letras Gregas Minúsculas

α - ângulo; fator interpolador

β - ângulo; razão; função

γ - ângulo; distorção específica

δ - coeficiente de variação; distância

ϵ - deformação específica; tolerância

ϵ_c - deformação específica do concreto

ϵ_{cu} - deformação específica última do concreto à compressão

ϵ_{cut} - deformação específica última do concreto à tração

ϵ_s - deformação específica do aço; deformação específica de retração

ϵ_y - deformação específica de escoamento do aço

θ - ângulo; giro

κ - coeficiente

λ - coeficiente

ρ - taxa geométrica de armadura

σ - tensão normal

σ_c - tensão normal no concreto

σ_{cu} - tensão normal última de compressão no concreto

σ_s - tensão normal na armadura

τ - tensão tangencial

ϕ - diâmetro; coeficiente de fluência; coeficiente

ω - área setorial

1 - INTRODUÇÃO

A análise de um pilar submetido à flexo-compressão oblíqua é um problema tridimensional. A deformada do pilar é uma curva reversa e o plano de flexão é variável, de seção para seção, em virtude da própria deformação da barra.

Este trabalho apresenta um método para a análise de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua. Os pilares a serem estudados podem apresentar seção transversal de forma qualquer, inclusive variável ao longo do comprimento. A distribuição da armadura na seção transversal é arbitrária, também podendo variar ao longo da peça. As condições de vinculação e de carregamento são genéricas.

No estudo, são consideradas a não-linearidade geométrica e a não-linearidade física. A não-linearidade geométrica é considerada ao levar-se em conta os deslocamentos na análise da peça. A não-linearidade física é considerada pela utilização dos diagramas tensão-deformação adequados para os materiais.

No Capítulo 2, deste trabalho, está apresentada a forma de solução utilizada para o problema. A solução é

obtida através do método dos elementos finitos, com um modelo em deslocamentos, conforme S. Rajasekaran, no capítulo 12 da referência [12]. Emprega-se, neste Capítulo, o termo viga-coluna, como uma generalização para o caso de pilar.

No Capítulo 3, estão expostas as propriedades dos materiais idealizadas e a determinação das rigidezes necessárias para a utilização do método apresentado no Capítulo 2.

No Capítulo 4, está apresentado o método empregado para a avaliação das deformações de fluência e retração no concreto.

No Capítulo 5, resultados obtidos através do método apresentado neste trabalho, são comparados com outros resultados teóricos e experimentais.

2 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA VIGAS-COLUNAS

2.1 - Generalidades

2.1.1 - Conceituação Básica

O método dos elementos finitos consiste basicamente na obtenção de um modelo analítico para uma estrutura real por subdividi-la em um número finito de elementos. O comportamento de cada elemento pode ser estudado independentemente dos outros, através de um conjunto arbitrário de funções que aproximam os deslocamentos (ou as tensões) naquela região. O processo de ligação dos elementos para formar o modelo completo é puramente topológico e independente da natureza física do problema. O conjunto de funções para os deslocamentos (ou tensões) deve ser escolhido de tal forma que fique assegurada a continuidade (ou equilíbrio) através de todo o sistema. Para a solução numérica de um problema utilizando o método dos elementos finitos é necessária a montagem e a resolução de um grande sistema linear de equações algébricas.

Embora a formulação dos elementos finitos possa estar baseada tanto num campo de tensões quanto num campo de deslocamentos, esta última é mais frequentemente usada, por ser mais facilmente programável em computadores digitais [12]. Assim, neste trabalho, um modelo em deslocamentos é u-

utilizado para obter as relações forças-deslocamentos para o elemento de viga-coluna pela consideração do princípio dos trabalhos virtuais.

A aplicação do método dos elementos finitos, modelo de deslocamentos, envolve os seguintes passos:

- discretização do corpo em elementos finitos;
- determinação da rigidez dos diversos elementos;
- montagem das matrizes de rigidez e de forças externas aplicadas;
- aplicação das condições de contorno;
- obtenção dos deslocamentos nodais pela solução do sistema de equações resultantes;
- cálculo de deformações e de tensões a partir dos deslocamentos nodais.

As vantagens do método dos elementos finitos são:

- o método permite a análise de estruturas com irregularidades de carga, material, geometria e variadas condições de contorno;
- o método permite uma fácil automatização.

As limitações do método dos elementos finitos são principalmente as seguintes:

- o método requer relativamente grandes quantidades de memória e tempo computacional;
- a interpretação dos resultados é de fundamental importância pelo grande volume de resultados gerados pela aplicação do método.

2.1.2 - Hipóteses Assumidas

Adotou-se o termo viga-coluna (beam-column em [12]) neste capítulo, por se tratar do estudo de um elemento estrutural que apresenta tanto as características de uma viga, quanto de uma coluna.

Neste estudo, considera-se que as seções permanecem planas após a deformação. Assume-se ainda que a rigidez ao longo dos elementos é constante. Note-se que os valores EA , EI_x , EI_y , GK_T , que aparecem no desenvolvimento desta formulação, são as rigidezes dos elementos. Assim, EA é o valor da integral do módulo de deformação E sobre a área A , e não o simples produto de um determinado módulo de deformação por uma área. Esta notação também foi adotada em [12] e [29]. Deve-se ainda observar que as referências a centros de gravidade, eixos principais, etc., são relativas à rigidez da seção. (ver item 3.2).

Uma vez que o objetivo deste trabalho é a análise de peças de concreto armado, o problema da torção, como uma simplificação para este caso [68], foi considerado segundo a torção de St. Venant.

Para o desenvolvimento desta formulação, partiu-se das equações de equilíbrio total. Portanto, os módulos de deformação utilizados são secantes. Com poucas alterações, partindo das equações de equilíbrio incremental, chegar-se-ia a expressões semelhantes. Nesta outra formulação, a rigidez tangente deve ser empregada.

O desenvolvimento segundo a formulação incremental encontra-se apresentado em [12] e foi aqui omitido devido a sua semelhança com o desenvolvimento da formulação de equilíbrio total. As conclusões finais das duas formulações são basicamente iguais. Deve-se ter apenas o cuidado de que na primeira formulação usam-se valores totais de deslocamentos, deformações, forças, tensões, etc., e na outra, incrementos destas mesmas quantidades.

2.2 - Formulação das Equações Básicas de Equilíbrio

A equação de equilíbrio total será desenvolvida usando o princípio dos trabalhos virtuais. Este é mais geral do que a formulação da energia potencial, já que as expressões desenvolvidas pelo princípio dos trabalhos virtuais

são válidas tanto para problemas elásticos como plásticos.

Uma seção transversal arbitrária de uma viga-coluna é mostrada na Fig. 2.1. Os pontos C e O representam a origem do sistema de coordenadas e um ponto arbitrário. x, y e z representam os eixos de coordenadas de um sistema dextrógiro com origem em C. A expressão do trabalho virtual para um elemento de viga-coluna, desprezando as forças de volume e de superfície, pode ser escrita como

$$\int_V (\sigma \delta \epsilon + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV = \sum_i t_i \delta u_i \quad (2.1)$$

desde que $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ para uma viga-coluna.

Na Eq. (2.1), σ é a tensão normal e τ_{xz} e

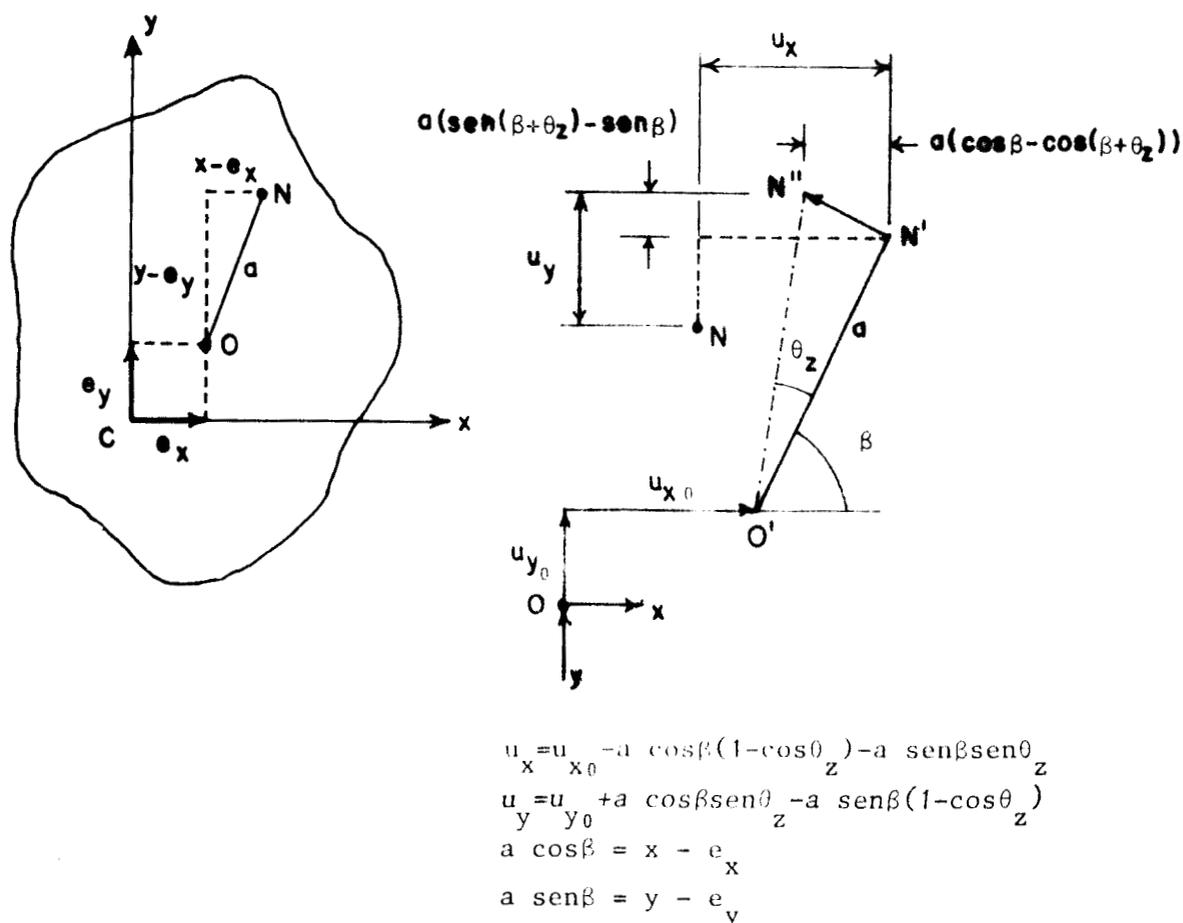


Figura 2.1 - Coordenadas da seção transversal

τ_{yz} são as componentes da tensão de cisalhamento e $\delta\varepsilon$, $\delta\gamma_{xz}$ e $\delta\gamma_{yz}$ são as deformações virtuais correspondentes em um ponto arbitrário N. Na Eq. (2.1), t_i e δu_i representam forças nodais e deslocamentos virtuais correspondentes.

As resultantes de tensões m_x , m_y , m_z , f_x , f_y e f_z são consideradas positivas nas direções indicadas na Fig. 2.2. Por conveniência desta formulação o sentido positivo do momento fletor m_y , não segue a regra da mão direita para momentos. Note-se que a força normal f_z e os momentos fletores m_x e m_y são reduzidos ao eixo C, enquanto os momentos torsores m_z e os esforços de corte f_x e f_y são reduzidos ao eixo O. Deve-se notar ainda que as forças transversais de corte f_x e f_y não podem ser definidas em função das deformações como as demais solicitações. Por isso não são consideradas como tensões generalizadas. São chamadas reações por serem necessárias somente para o equilíbrio.

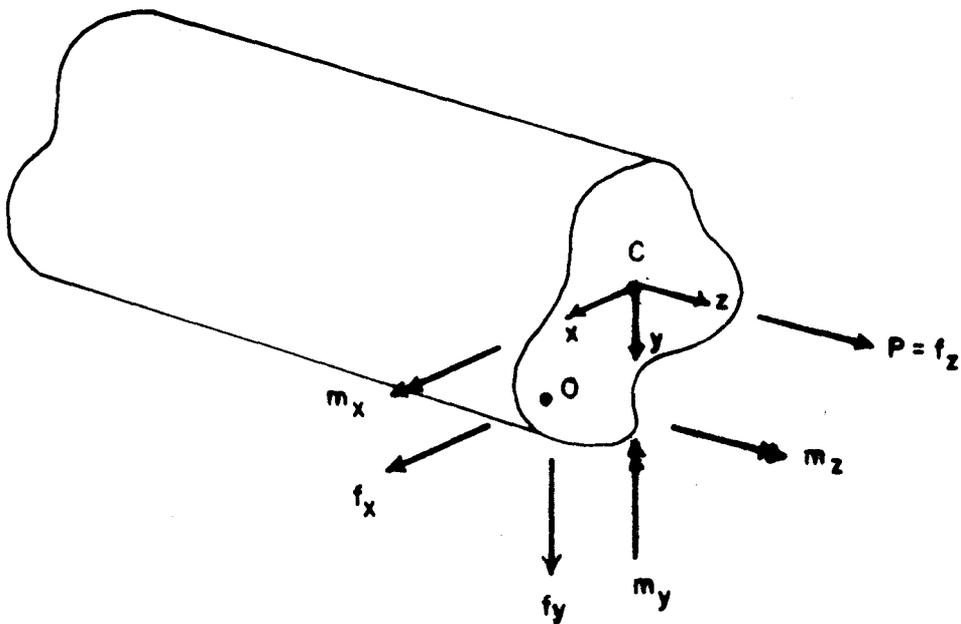


Figura 2.2 - Resultantes de tensões

As relações entre tensões e resultantes de tensões são estabelecidas pelas seguintes equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}
 f_x &= \int_A \tau_{xz} \, dA = dm_y/dz = m'_y \\
 f_y &= \int_A \tau_{yz} \, dA = dm_x/dz = m'_x \\
 f_z &= \int_A \sigma \, dA = P \\
 m_x &= \int_A \sigma y \, dA \\
 m_y &= \int_A \sigma x \, dA \\
 m_z &= \int_A [\tau_{yz} (x - e_x) - \tau_{xz} (y - e_y)] \, dA = T_{SV}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde, m_z é o momento torsor correspondente a torção de St. Venant. O momento torsor T_{SV} é resultante do torque devido as tensões de corte.

No caso de problemas que envolvem estabilidade, mudanças de geometria devidas as deformações devem ser consideradas nas equações de equilíbrio. Assim, a forma não-linear das relações deformações-deslocamentos é adotada como

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= u_{z,z} + \frac{1}{2} (u_{x,z}^2 + u_{y,z}^2 + u_{z,z}^2) \\
 \gamma_{xz} &= u_{z,x} + u_{x,z} + (u_{x,x} u_{x,z} + u_{y,x} u_{y,z} + u_{z,x} u_{z,z}) \\
 \gamma_{yz} &= u_{z,y} + u_{y,z} + (u_{x,y} u_{x,z} + u_{y,y} u_{y,z} + u_{z,y} u_{z,z})
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde u_x , u_y e u_z são os deslocamentos do ponto arbitrário N nas direções x, y e z, respectivamente e $u_{z,z} = \partial u_z / \partial z$, etc.

Para estabelecer uma relação entre os deslocamentos de um ponto da seção transversal, e o deslocamento e a rotação da seção transversal, adotou-se a hipótese de que a forma da seção transversal permanece inalterada durante a deformação.

A seguir será demonstrado que o deslocamento de um ponto da seção transversal pode ser descrito por três compo

mentos de deslocamento u_{x_0} , u_{y_0} e u_{z_0} , nos pontos O e C da seção transversal, respectivamente, nas direções x, y e z e o ângulo de rotação θ_z sobre o eixo longitudinal. Os deslocamentos u_x , u_y de um ponto arbitrário N podem ser descritos como (ver Fig. 2.1)

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_0} - (y - e_y) \operatorname{sen} \theta_z - (x - e_x) (1 - \cos \theta_z) \\ u_y &= u_{y_0} + (x - e_x) \operatorname{sen} \theta_z - (y - e_y) (1 - \cos \theta_z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Contudo, por serem as rotações de torção pequenas ($\operatorname{sen} \theta_z \cong \theta_z$; $\cos \theta_z \cong 1$), os deslocamentos u_x e u_y das Eqs. (2.4) podem ser reduzidos para

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_0} - (y - e_y) \theta_z \\ u_y &= u_{y_0} + (x - e_x) \theta_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $u_{x_0} = u_{x_0}(z)$ e $u_{y_0} = u_{y_0}(z)$ representam os deslocamentos do eixo que passa através de O nas direções x e y, respectivamente e e_x , e_y posicionam O com respeito a origem C e $\theta_z = \theta_z(z)$ é a rotação da seção transversal sobre qualquer eixo longitudinal. Tem-se ainda que

$$u_z = u_{z_0} - y u'_{x_0} - x u'_{y_0} \quad (2.6)$$

As Eqs. (2.5) e Eq. (2.6) dão os deslocamentos de um ponto arbitrário N da seção em termos de u_{x_0} , u_{y_0} , u_{z_0} e θ_z ou suas derivadas, para qualquer posição de O e C, consistentes com as hipóteses da teoria de viga-coluna.

Substituindo as relações não lineares deformações-deslocamentos, isto é, as Eqs. (2.3), na Eq. (2.1), a expressão do trabalho virtual se reduz para

$$\begin{aligned} \int_V \{ & [\sigma \delta(u_{z,z}) + \tau_{xz} \delta(u_{z,x} + u_{x,z}) + \tau_{yz} \delta(u_{z,y} + u_{y,z})] \\ & + [\sigma(u_{x,z} \delta u_{x,z} + u_{y,z} \delta u_{y,z}) + \tau_{xz} \delta(u_{x,x} u_{x,z} + \\ & + u_{y,x} u_{y,z}) + \tau_{yz} \delta(u_{x,y} u_{x,z} + u_{y,y} u_{y,z})] \} dV = \\ & = \sum_i t_i \delta u_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

Na Eq.(2.7) os termos contendo produtos de derivadas de u_z foram negligenciados.

Agora, aplicando a expressão do trabalho virtual, Eq.(2.7), para o segmento de viga-coluna, uma forma variacional da equação de equilíbrio total é obtida substituindo-se u_x , u_y das Eqs.(2.5) na Eq.(2.7), e usando as Eqs.(2.2) para as tensões

$$\begin{aligned} \int_0^l [P \delta u'_{zc} - m_x \delta u''_{y_0} - m_y \delta u''_{x_0} + T_{SV} \delta \theta'_z] dz + \\ + \int_0^l [f_x \delta (\theta'_z u'_{y_0}) - f_y \delta (\theta'_z u'_{x_0}) + \frac{P}{2} \delta (u'^2_{x_0} + u'^2_{y_0}) + \\ + 2 e_y u'_{x_0} \theta'_z - 2 e_x u'_{y_0} \theta'_z] + m_y \delta (u'_{y_0} \theta'_z) - \\ - m_x \delta (u'_{x_0} \theta'_z)] dz = [P^* \delta u_{zc} + f_x^* \delta u_{x_0} + f_y^* \delta u_{y_0} - \\ - m_x^* \delta u'_{y_0} - m_y^* \delta u'_{x_0} + m_z^* \delta \theta'_z]_0^l \end{aligned} \quad (2.8)$$

Na Eq.(2.8), u''_{x_0} e u''_{y_0} são as curvaturas de flexão da seção transversal sob os eixos y e x , passando através do ponto O . Estas curvaturas são referenciadas neste trabalho, também por ϕ_y e ϕ_x .

A Eq.(2.8) é uma forma variacional da equação total do trabalho virtual que é válida para eixos de referência arbitrários O e C . É aproximada somente pelas imposições das hipóteses da teoria de viga-coluna e por negligenciar os termos de ordem mais alta. Desde que nenhuma hipótese foi feita com respeito a origem das tensões, é igualmente válida para análises elásticas e plásticas.

2.3 - Relações Tensões Generalizadas-Deformações

Considerando que para uma viga-coluna, somente as tensões normais contribuem para a plastificação dos materiais, a relação entre a deformação total e as deformações generalizadas u'_{zc} , u''_{y_0} e u''_{x_0} é obtida da Eq.(2.6)

$$\epsilon = u'_{zc} - y u''_{y_0} - x u''_{x_0} \quad (2.9)$$

Substituindo-se a Eq.(2.9) na Eq.(2.2), as ten-

sões generalizadas P , m_x e m_y para a seção transversal de uma viga-coluna podem ser expressas em termos das deformações generalizadas u'_{zC} , u''_{y_0} e u''_{x_0} sobre os eixos de referência

$$\begin{Bmatrix} P \\ m_y \\ m_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A E \, dA & \int_A E x \, dA & \int_A E y \, dA \\ & \int_A E x^2 \, dA & \int_A E x y \, dA \\ & & \int_A E y^2 \, dA \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_{zC} \\ -u''_{x_0} \\ -u''_{y_0} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

e o momento torsor de St. Venant tem o valor

$$T_{SV} = GK_T \theta'_z \quad (2.11)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G é o módulo de elasticidade transversal e K_T é a constante torsional de St. Venant.

2.4 - O Modelo para Elementos Finitos

Considere-se o elemento prismático mostrado na Fig. 2.4. O elemento tem deslocamento axial, de flexão e de torção sob a ação de forças nodais P^* , f_x^* , f_y^* , m_x^* , m_y^* e m_z^* .

Escolhendo os eixos de coordenadas x, y como os eixos principais da seção transversal e selecionando C e O como centro de gravidade e centro de corte, os termos fora da diagonal na matriz dos coeficientes das relações tensões generalizadas-deformações. Eq.(2.10), se anulam. Assim as tensões generalizadas P , m_x e m_y podem ser escritas como

$$\begin{aligned} P &= \left(\int_A E \, dA \right) u'_{zC} = EA u'_{zC} \\ m_x &= - \left(\int_A E y^2 \, dA \right) u''_{y_0} = -EI_x u''_{y_0} \\ m_y &= - \left(\int_A E x^2 \, dA \right) u''_{x_0} = -EI_y u''_{x_0} \end{aligned} \quad (2.12)$$

e $T_{SV} = GK_T \theta'_z$

Substituindo as relações tensões generalizadas-deformações da Eq.(2.12) na Eq.(2.8), a equação de equilí-

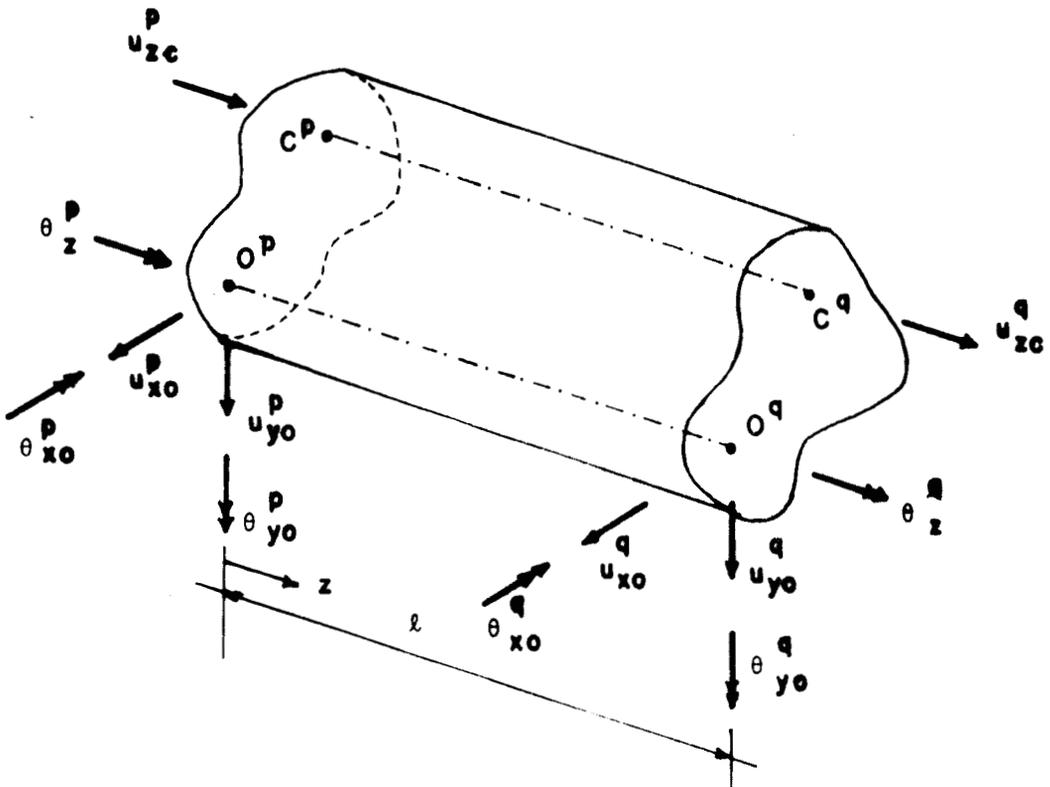


Figura 2.3 - Deslocamentos nodais de um elemento

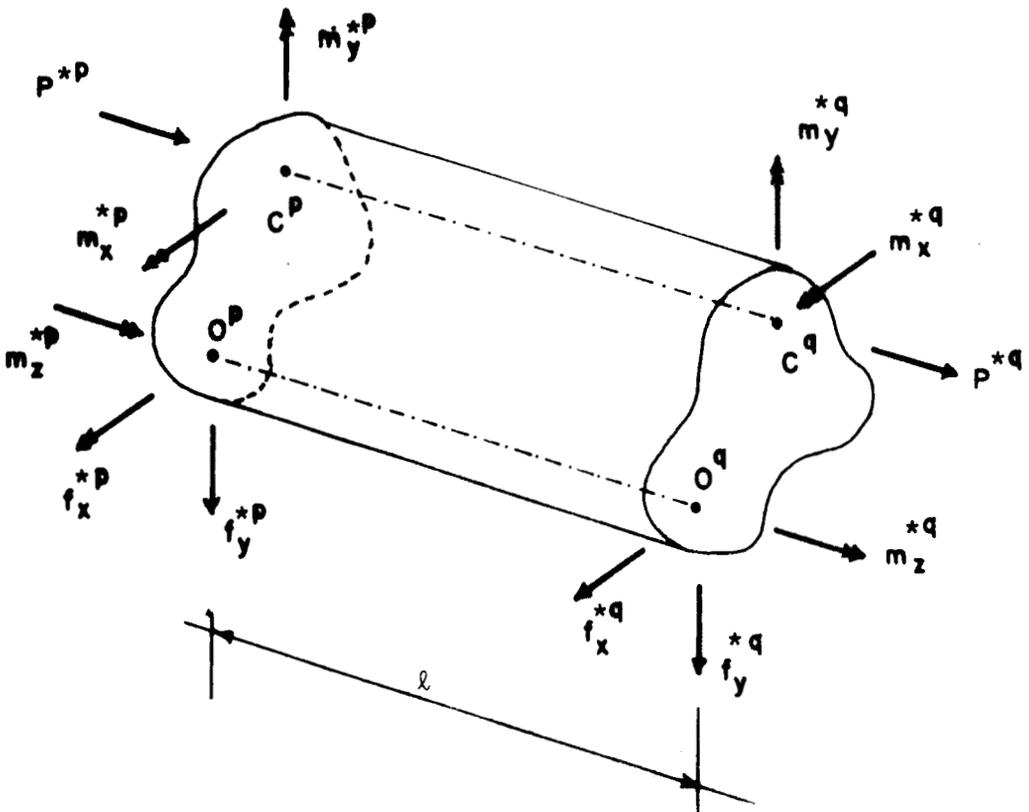


Figura 2.4 - Resultantes de tensões de um elemento

brío do trabalho virtual total é obtida como

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\ell} [EA u'_{z_c} \delta u'_{z_c} + EI_x u''_{y_0} \delta u''_{y_0} + EI_y u''_{x_0} \delta u''_{x_0} + GK_T \theta'_z \delta \theta'_z] dz \\
 & + \int_0^{\ell} [f_x \delta(\theta'_z u'_{y_0}) - f_y \delta(\theta'_z u'_{x_0}) + \frac{P}{2} \delta(u'^2_{x_0} + u'^2_{y_0}) + \\
 & + 2 e_y u'_{x_0} \theta'_z - 2 e_x u'_{y_0} \theta'_z] + m_y \delta(u'_{y_0} \theta'_z) - \\
 & - m_x \delta(u'_{x_0} \theta'_z)] dz = [P^* \delta u_{z_c} + f_x^* \delta u_{x_0} + f_y^* \delta u_{y_0} - \\
 & - m_y^* \delta u'_{y_0} - m_x^* \delta u'_{x_0} + m_z^* \delta \theta'_z]_0^{\ell}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

A equação acima coloca que δU (trabalho virtual interno) = δW_e (trabalho virtual externo). Para estabelecer as relações forças-deslocamentos para o elemento de viga-coluna, os deslocamentos contínuos na Eq. (2.13), tais como u_{z_c} , u_{x_0} , u_{y_0} e θ_z devem ser escritos em termos dos deslocamentos nodais nas extremidades e por integração ao longo do comprimento do elemento. Isto será feito a seguir.

2.4.1 - Escolha das Funções-Deslocamentos

Para qualquer formulação numérica aceitável, a solução numérica deve convergir ou tender para a solução exata do problema, se as subdivisões da viga-coluna forem feitas em maior número. Isto foi mostrado para o método dos elementos finitos para problemas lineares [76]. A formulação em deslocamentos aproxima por cima a verdadeira rigidez da viga-coluna e assim, uma formulação de elementos finitos convergirá para o deslocamento exato por baixo. A fim de que esta convergência seja rigorosamente assegurada, três condições devem ser cumpridas para a escolha das funções-deslocamentos

- (a) A função-deslocamento deve ser contínua dentro do elemento e o deslocamento deve ser compatível entre elementos adjacentes. Isto é assegurado se o campo de deslocamentos é contínuo no contorno interelementos para a derivada de uma ordem a menos que a derivada de ordem mais alta que aparece nas relações deformações-deslocamentos. Esta condição na literatura sobre elementos finitos é conhecida como "condição de compatibilidade" ou "de conformidade".

- (b) A função-deslocamento deve incluir deslocamento de corpo rígido do elemento.
- (c) A função-deslocamento deve incluir estado de deformação constante do elemento.

As duas últimas condições são conhecidas como "critério de completude". Para satisfazer o critério de completude, a expansão dos deslocamentos deve ter ao menos um polinômio completo de ordem igual a da derivada mais alta que aparece nas relações deformações-deslocamentos.

Para um elemento de viga-coluna as relações de formações-deslocamentos contêm derivadas segundas em deslocamentos laterais e derivadas primeiras nos deslocamentos axiais e de torção. Assim, é necessário escolher as funções-deslocamentos, tais que, $u_{zc}, u_{x_0}, \theta_{y_0} = u'_{x_0}, u_{y_0}, \theta_{x_0} = u'_{y_0}$ e θ_z devem ser contínuos nos nós. Isto pode ser obtido adotando-se um campo de deslocamentos linear para u_{zc} e θ_z e um campo de deslocamentos cúbico para os outros graus de liberdade. Usando a notação $\langle \rangle$ para um vetor linha e $\{ \}$ para um vetor coluna, u_{x_0} é escrito como

$$u_{x_0} = \langle 1 \quad z \quad z^2 \quad z^3 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

e

$$\theta_{y_0} = \frac{du_{x_0}}{dz} = \langle 0 \quad 1 \quad 2z \quad 3z^2 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Substituindo os valores correspondentes para as extremidades p e q do elemento de viga-coluna mostrado na Fig. 2.4, obtêm-se

$$\begin{Bmatrix} u_{x_0}^p \\ \theta_{y_0}^p \\ u_{x_0}^q \\ \theta_{y_0}^q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = [A_\alpha] \{\alpha\} \quad (2.16)$$

Assim,

$$u_{x_0} = \langle 1 \quad z \quad z^2 \quad z^3 \rangle [A_\alpha]^{-1} \begin{Bmatrix} u_{x_0}^p \\ \theta_{y_0}^p \\ u_{x_0}^q \\ \theta_{y_0}^q \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

ou

$$u_{x_0} = \langle n_3 \rangle \{ \underline{u}_{x_0} \} \quad (2.18)$$

onde $\langle n_3 \rangle$ é a função de interpolação cúbica dada por

$$\langle n_3 \rangle = \langle (1-3\beta^2+2\beta^3), (\beta-2\beta^2+\beta^3), (3\beta^2-2\beta^3), (\beta^3-\beta^2) \rangle \quad (2.19)$$

e $\langle \underline{u}_{x_0} \rangle$ são os deslocamentos nodais

$$\langle \underline{u}_{x_0} \rangle = \langle u_{x_0}^p, \ell \theta_{y_0}^p, u_{x_0}^q, \ell \theta_{y_0}^q \rangle \quad (2.20)$$

onde

$$\beta = z/\ell \quad (2.21)$$

Procedendo-se de forma análoga, obtêm-se expressões semelhantes para os outros deslocamentos. Assim, resumindo, os deslocamentos de um elemento são representados pelos deslocamentos nodais como

$$\begin{aligned} u_{x_0} &= \langle n_3 \rangle \{ \underline{u}_{x_0} \} \\ u_{y_0} &= \langle n_3 \rangle \{ \underline{u}_{y_0} \} \\ u_{z_c} &= \langle n_1 \rangle \{ \underline{u}_{z_c} \} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\theta_z = \langle n_1 \rangle \{ \underline{\theta}_z \}$$

onde

$$\langle n_1 \rangle = \langle (1-\beta), \beta \rangle$$

e os deslocamentos nodais do elemento nas extremidades p e q são dados como

$$\begin{aligned} \langle \underline{u}_{x_0} \rangle &= \langle u_{x_0}^p, \ell \theta_{y_0}^p, u_{x_0}^q, \ell \theta_{y_0}^q \rangle \\ \langle \underline{u}_{y_0} \rangle &= \langle u_{y_0}^p, \ell \theta_{x_0}^p, u_{y_0}^q, \ell \theta_{x_0}^q \rangle \\ \langle \underline{\theta}_z \rangle &= \langle \theta_z^p, \theta_z^q \rangle \\ \langle \underline{u}_{zC} \rangle &= \langle u_{zC}^p, u_{zC}^q \rangle \end{aligned} \tag{2.23}$$

Portanto, em cada nó de um elemento de viga-coluna há seis graus de liberdade ($u_{x_0}, \theta_{x_0}, u_{y_0}, \theta_{y_0}, u_{zC}$ e θ_z) como mostra a Fig. 2.4.

2.4.2 - A Matriz de Rigidez para um Elemento de Viga-Coluna

A equação de equilíbrio total para um elemento de viga-coluna pode ser obtida em termos dos deslocamentos nodais nas extremidades, substituindo-se as Eq.(2.22) na Eq.(2.13).

Por exemplo, o primeiro termo da Eq.(2.13) / $(EA \delta u'_{zC} u'_{zC})$ pode ser escrito na forma matricial como

$$EA (\delta u'_{zC})^T (u'_{zC}) = \text{escalar}$$

onde

$$\begin{aligned} (u'_{zC}) &= \frac{d}{dz} (u_{zC}) = \frac{d}{dz} \langle n_1 \rangle \{ \underline{u}_{zC} \} \\ &= \frac{1}{\ell} \frac{d}{d\beta} \langle n_1 \rangle \{ \underline{u}_{zC} \} = \frac{1}{\ell} \langle n'_1 \rangle \{ \underline{u}_{zC} \} \\ (\delta u'_{zC})^T &= \frac{1}{\ell} \langle \delta \underline{u}_{zC} \rangle \{ n'_1 \} \end{aligned} \tag{2.24}$$

e o índice T simboliza o transposto de um vetor. A linha associada com a função de forma simboliza a diferencial com respeito ao parâmetro não dimensional $\beta = z/\ell$.

Assim,

$$\int_0^l EA u'_{zc} \delta u'_{zc} dz = \langle \delta \underline{u}_{zc} \rangle \frac{EA}{l} \left(\int_0^1 \{n_i'\} \langle n_i' \rangle d\beta \right) \{ \underline{u}_{zc} \} \quad (2.25)$$

Similarmente, todos os outros termos da Eq. (2.13) podem ser escritos em função dos deslocamentos nodais. Agrupando-se os termos semelhantes, obtém-se a equação de equilíbrio total do trabalho virtual como

$$\begin{aligned} & \langle \delta \underline{u}_{x_0} \rangle \left[\left(\int_0^1 \frac{EI}{l^3} \{n_3''\} \langle n_3'' \rangle d\beta + \int_0^1 \frac{P}{l} \{n_3'\} \langle n_3' \rangle d\beta \right) \{ \underline{u}_{x_0} \} \right. \\ & + \left. \left(\int_0^1 \frac{(Pe_y - m_x)}{l} \{n_3'\} \langle n_1' \rangle d\beta - \int_0^1 f_y \{n_3'\} \langle n_1 \rangle d\beta \right) \{ \underline{\theta}_z \} \right] \\ & + \langle \delta \underline{u}_{y_0} \rangle \left[\left(\int_0^1 \frac{EI}{l^3} \{n_3''\} \langle n_3'' \rangle d\beta + \int_0^1 \frac{P}{l} \{n_3'\} \langle n_3' \rangle d\beta \right) \{ \underline{u}_{y_0} \} \right. \\ & + \left. \left(\int_0^1 \frac{(-Pe_x + m_y)}{l} \{n_3'\} \langle n_1' \rangle d\beta + \int_0^1 f_x \{n_3'\} \langle n_1 \rangle d\beta \right) \{ \underline{\theta}_z \} \right] \\ & + d\underline{\theta}_z \left[\left(\int_0^1 \frac{GK_T}{l} \{n_1\} \langle n_1 \rangle d\beta \right) \{ \underline{\theta}_z \} \right. \\ & + \left. \left(\int_0^1 \frac{(Pe_y - m_x)}{l} \{n_1\} \langle n_3' \rangle d\beta - \int_0^1 f_y \{n_1\} \langle n_3' \rangle d\beta \right) \{ \underline{u}_{x_0} \} \right. \\ & + \left. \left(\int_0^1 \frac{(-Pe_x + m_y)}{l} \{n_1\} \langle n_3' \rangle d\beta + \int_0^1 f_x \{n_1\} \langle n_3' \rangle d\beta \right) \{ \underline{u}_{y_0} \} \right] \\ & + \langle \delta \underline{u}_{zc} \rangle \int_0^1 \frac{EA}{l} \{n_i'\} \langle n_i' \rangle d\beta \{ \underline{u}_{zc} \} \\ & = [P^* \delta \underline{u}_{zc} + f_x^* \delta \underline{u}_{x_0} + f_y^* \delta \underline{u}_{y_0} - m_x^* \delta \theta_x - m_y^* \delta \theta_y + \\ & + m_z^* \delta \theta_z]_0^l \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aqui se usam as notações $\theta_{x_0} = \theta_x$ e $\theta_{y_0} = \theta_y$ em concordância com a notação usada para a rotação θ_z . Os termos contidos dentro dos primeiros parênteses da Eq. (2.13) e que podem também ser encontrados na Eq. (2.26), constituem a matriz de rigidez à flexão usual $[k_S]$ e os termos remanentes na integral do lado esquerdo da Eq. (2.13) representam a matriz "de rigidez geométrica" $[k_G]$.

Assumindo-se propriedades constantes, carga axial constante e variação linear de momentos ao longo do com-

primo do elemento prismático, e integrando com respeito a β , e considerando que os deslocamentos virtuais são arbitrários, a equação de equilíbrio total para um elemento de viga-coluna pode ser escrita pelas seguintes quatro equações

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{\ell^3} [k_{33}^{220}] \{\underline{u}_{x_0}\} + \frac{P}{\ell} [k_{33}^{110}] \{\underline{u}_{x_0}\} + \\ & + \left\{ \frac{(Pe - m_x^P)}{\ell} [k_{31}^{110}] - f_y \left([k_{31}^{111}] + [k_{31}^{000}] \right) \right\} \{\theta_z\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{c} f_x^P \\ -m_y^P/\ell \\ f_x^Q \\ -m_y^Q/\ell \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{\ell^3} [k_{33}^{220}] \{\underline{u}_{y_0}\} + \frac{P}{\ell} [k_{33}^{110}] \{\underline{u}_{y_0}\} + \\ & + \left\{ \frac{(-Pe_x + m_y^P)}{\ell} [k_{31}^{110}] + f_x \left([k_{31}^{111}] + [k_{31}^{000}] \right) \right\} \{\theta_z\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{c} f_y^P \\ -m_x^P/\ell \\ f_y^Q \\ -m_x^Q/\ell \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.27b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{GK_T}{\ell} [k_{11}^{110}] \{\theta_z\} + \left\{ \frac{(Pe - m_x^P)}{\ell} [k_{13}^{110}] - f_y \left([k_{13}^{010}] + [k_{13}^{111}] \right) \right\} \\ & \{\underline{u}_{x_0}\} + \left\{ \frac{(-Pe_x + m_y^P)}{\ell} [k_{13}^{110}] + f_x \left([k_{13}^{010}] + [k_{13}^{111}] \right) \right\} \{\underline{u}_{y_0}\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{c} m_z^P \\ m_z^Q \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.27c)$$

$$\frac{EA}{\ell} [k_{11}^{110}] \{\underline{u}_{zC}\} = \left\{ \begin{array}{c} P^P \\ P^Q \end{array} \right\} \quad (2.27d)$$

onde

$$[k_{gh}^{stj}] = \int_0^1 \beta^j \{n_g^s\} \langle n_h^t \rangle d\beta \quad (2.28)$$

Os índices g e h são os graus dos vetores de interpolação, s e t são os graus de diferenciação e j é o expoente do fator de multiplicação β . As matrizes que aparecem nas Eqs.(2.27) são dadas na Tab. 2.1.

A equação de equilíbrio total, Eqs.(2.27), no sistema de coordenadas locais x,y,z para um elemento de viga-coluna pode ser escrito em forma compacta como

$$[k_S] \{u\}_L + [k_G] \{u\}_L = \{f\}_L \quad (2.29)$$

onde $\{u\}_L$ são os deslocamentos nodais e $\{f\}_L$ são as forças nodais. $[k_S]$ é a matriz de rigidez usual à flexão do elemento e $[k_G]$ é a matriz de rigidez geométrica. O nome da matriz de rigidez geométrica vem de que ela depende da geometria do elemento deslocado. As matrizes de rigidez à flexão $[k_S]$ e a geométrica $[k_G]$ são dadas na Tab. 2.2. Note-se que a estas matrizes correspondem deslocamentos e forças com sentidos segundo um sistema dextrógiro, conforme a Fig. 2.5 e não mais com os sentidos adotados anteriormente para o desenvolvimento da formulação.

2.5 - A Matriz de Rotação e a Matriz de Rigidez Total

Antes de se obter a matriz de rigidez total para a estrutura inteira, montando a matriz de rigidez dos elementos, uma matriz de rotação $[R(3x3)]$ é necessária para transformar um vetor do sistema global (X,Y,Z) para o sistema local (x,y,z) . Assim,

$$\begin{matrix} \{v(3)\} \\ \text{local} \end{matrix} = [R(3x3)] \begin{matrix} \{V(3)\} \\ \text{global} \end{matrix} \quad (2.30)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (xX) & (xY) & (xZ) \\ (yX) & (yY) & (yZ) \\ (zX) & (zY) & (zZ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$$[k_{33}^{220}] = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$30 [k_{33}^{110}] = \begin{bmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -36 & -3 & 36 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[k_{31}^{110}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$12 [k_{31}^{111}] = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 1 & -1 \\ -6 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$12 [k_{31}^{100}] = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 1 & -1 \\ 6 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_{11}^{110}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_{11}^{110}] = [k_{31}^{110}]^T$$

$$[k_{11}^{111}] = [k_{31}^{111}]^T$$

$$[k_{11}^{100}] = [k_{31}^{100}]^T$$

Tabela 2.1

u_x^p	u_y^p	u_z^p	θ_x^p	θ_y^p	θ_z^p	u_x^q	u_y^q	u_z^q	θ_x^q	θ_y^q	θ_z^q
a	b	e	-a						b	-g	
	a	-b	-h			-a			-b		j
		c	-i	b			b		-d		i
			-f	-b						-d	f
				-e			h		i	f	
				a					-b		g
					a				b		-j
									c		-i
										c	-f

$[k_G] =$
12x12

- a = 6/5 P/l
- b = P/10
- c = 2/15 P l
- d = P l/30
- e = $(Pe_y - m_x^p) / l$
- f = $f_y l / 6$
- g = $(Pe_y - m_x^p) / l - f_y$
- h = $(Pe_x + m_y^p) / l$
- i = $f_x l / 6$
- j = $(Pe_x + m_y^p) / l - f_x$

SIMÉTRICA

Tabela 2.2b - Matriz de rigidez geométrica

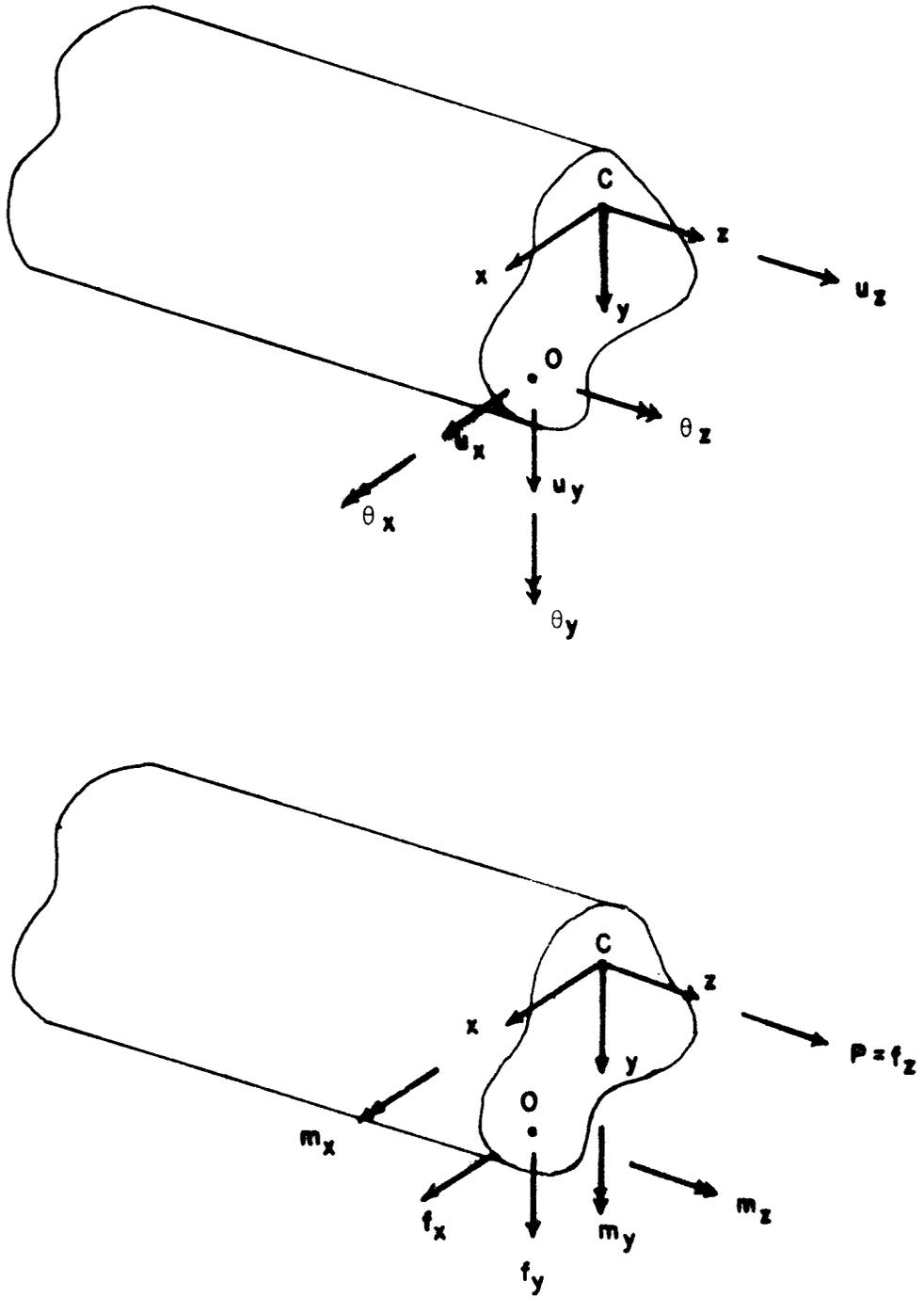


Figura 2.5 - Convenção de sentidos para as resultantes de tensões e para os deslocamentos

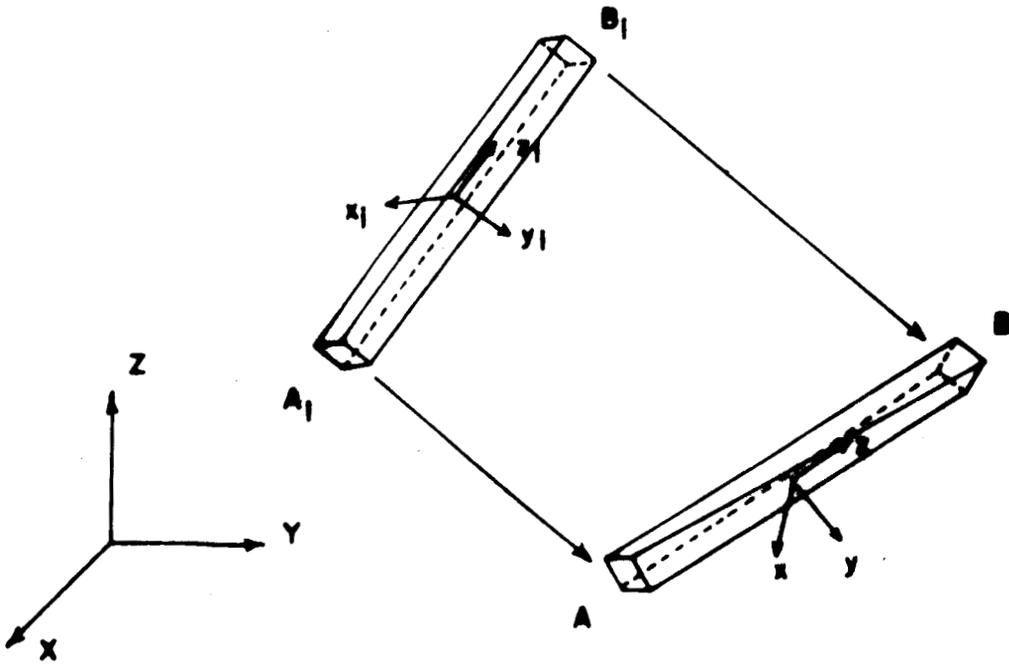


Figura 2.6 - Deslocamentos de um elemento

onde (xX) é o cosseno diretor entre o eixo de coordenadas locais x e o eixo de coordenadas globais X , etc.

No cálculo da matriz de rotação, $[R(3 \times 3)]$, os deslocamentos totais devem ser considerados. Seja um elemento que, após a deformação, tenha a posição AB a partir dos pontos originais A_1B_1 e os vetores unitários no sistema local $\{v_{xi}\}$, $\{v_{yi}\}$ e $\{v_{zi}\}$ são os seguintes

$$\{v_{xi}\} = \begin{Bmatrix} (x_i X) \\ (x_i Y) \\ (x_i Z) \end{Bmatrix}, \quad \{v_{yi}\} = \begin{Bmatrix} (y_i X) \\ (y_i Y) \\ (y_i Z) \end{Bmatrix}, \quad \{v_{zi}\} = \begin{Bmatrix} (z_i X) \\ (z_i Y) \\ (z_i Z) \end{Bmatrix}$$

(2.32)

Depois da deformação, os pontos das extremida-

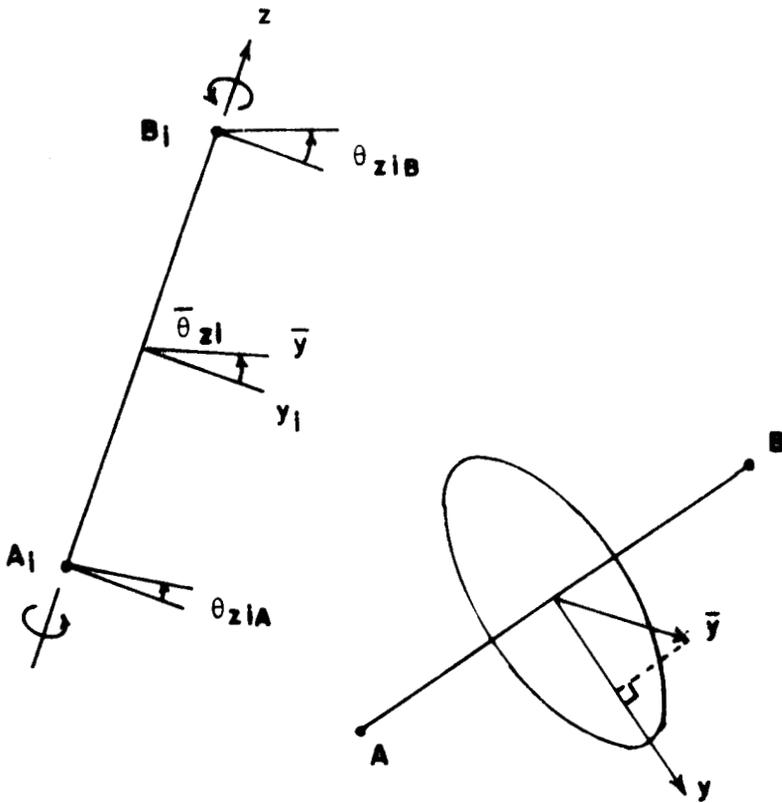


Figura 2.7 - A transformação de eixos

des mudam-se de $\{U_A\}$ e $\{U_B\}$, assim

$$A: \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{Ai} \\ Y_{Ai} \\ Z_{Ai} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{xA} \\ U_{yA} \\ U_{zA} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

$$B: \begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{Bi} \\ Y_{Bi} \\ Z_{Bi} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{xB} \\ U_{yB} \\ U_{zB} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

O comprimento de AB é agora

$$L = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} \quad (2.35)$$

e o novo eixo z fica determinado pelo vetor unitário

$$\{v_z\} = \begin{Bmatrix} (zX) \\ (zY) \\ (zZ) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (X_B - X_A)/L \\ (Y_B - Y_A)/L \\ (Z_B - Z_A)/L \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

A determinação do novo eixo y não é direta. Primeiro, o eixo y_i gira sobre o eixo z_i pelo ângulo médio da rotação das extremidades A_i e B_i , mais a rotação dos eixos principais γ , devida a plastificação da seção.

$$\bar{\theta}_{zi} = \frac{1}{2} (\theta_{ziA} + \theta_{ziB}) + \gamma \quad (2.37)$$

Assim, o eixo \bar{y} é obtido como mostra a Fig. 2.7.

$$\{v_{\bar{y}}\} = \begin{Bmatrix} (\bar{y}X) \\ (\bar{y}Y) \\ (\bar{y}Z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (y_i X) \cos \bar{\theta}_{zi} - [(y_i Y)(z_i Z) - (y_i Z)(z_i Y)] \text{sen} \bar{\theta}_{zi} \\ (y_i Y) \cos \bar{\theta}_{zi} - [(y_i Z)(z_i X) - (y_i X)(z_i Z)] \text{sen} \bar{\theta}_{zi} \\ (y_i Z) \cos \bar{\theta}_{zi} - [(y_i X)(z_i Y) - (y_i Y)(z_i X)] \text{sen} \bar{\theta}_{zi} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Já que a direção do eixo y coincide com a projeção de $\{v_{\bar{y}}\}$ no plano perpendicular ao eixo z,

$$\{v_y\} = \begin{Bmatrix} (yX) \\ (yY) \\ (yZ) \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_y} \begin{Bmatrix} (\bar{y}X) - M(zX) \\ (\bar{y}Y) - M(zY) \\ (\bar{y}Z) - M(zZ) \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

onde M é o produto escalar de $\{v_y\}$ e $\{v_z\}$

$$M = \{v_y\} \cdot \{v_z\} = (\bar{y}X)(zX) + (\bar{y}Y)(zY) + (\bar{y}Z)(zZ) \quad (2.40)$$

e o comprimento de $\{v_y\}$ projetado é

$$L_y = \sqrt{[(\bar{y}X) - M(zX)]^2 + [(\bar{y}Y) - M(zY)]^2 + [(\bar{y}Z) - M(zZ)]^2} \quad (2.41)$$

O vetor unitário do novo eixo x , $\{v_x\}$, é obtido pelo produto vetorial de $\{v_y\}$ e $\{v_z\}$,

$$\{v_x\} = \begin{Bmatrix} (xX) \\ (xY) \\ (xZ) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (yY)(zZ) - (yZ)(zY) \\ (yZ)(zX) - (yX)(zZ) \\ (yX)(zY) - (yY)(zX) \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Agora, a matriz de rotação do segmento AB, depois da deformação é determinada das Eqs. (2.36), (2.38) e (2.42).

$$[R(3x3)] = \begin{bmatrix} (xX) & (xY) & (xZ) \\ (yX) & (yY) & (yZ) \\ (zX) & (zY) & (zZ) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Assinale-se que esta matriz de rotação foi obtida levando em consideração, tanto as mudanças geométricas, como a plastificação dos materiais. Não foram levadas em conta nesta matriz as translações dos centros de gravidade dos elementos, já que este efeito fica minimizado pela utilização de um maior número de elementos. Assim, o vetor de forças $\{f(12)\}$ e o vetor de deslocamentos $\{u(12)\}$ no sistema local são transformados para o sistema global para $\{F(12)\}$ e $\{U(12)\}$ usando a matriz $[R(12x12)]$.

$$\begin{aligned} \{F(12)\} &= [R^T(12x12)] \{f(12)\} \\ \{U(12)\} &= [R^T(12x12)] \{u(12)\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde

$$R^T(12 \times 12) = \begin{bmatrix} R^T(3 \times 3) & & & \\ & R^T(3 \times 3) & & 0 \\ & & R^T(3 \times 3) & \\ 0 & & & R^T(3 \times 3) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Agora a relação da Eq.(2.29) pode ser também transformada para o sistema global pelo uso das Eqs.(2.44).

$$\{F(12)\} = [R^T(12 \times 12)] [k(12 \times 12)] [R(12 \times 12)] \{U(12)\} \quad (2.46)$$

Montando esta relação para todos os elementos, a relação para a estrutura inteira é obtida

$$\{F(N)\} = [K(N \times N)] \{U(N)\} \quad (2.47)$$

onde

$$[K(N \times N)] = \text{matriz de rigidez total} = \sum [R]^T [k] [R]$$

$$N = 6 \times (\text{número de nós})$$

A matriz de rigidez $[K(N \times N)]$ é simétrica e bandeda, podendo ser armazenada para cálculo na matriz $[K(N \times NB)]$. A largura de banda NB é dada por

$$NB = 6 \times (\text{o máximo número de nós ligados})$$

No caso de uma viga-coluna, somente dois nós são conectados por elemento, e assim $NB = 12$.

Aplicando-se à Eq.(2.47) o que foi determinado para a Eq.(2.29), obtém-se que

$$\{F\} = [K_S] \{U\} + [K_G] \{U\} \quad (2.48)$$

2.6 - Os Métodos de Solução para o Problema das Vigas-Colunas

No caso das vigas-colunas, o problema deve ser

resolvido por uma aproximação carga-deslocamento. Isto envolve a solução da Eq.(2.48), que por causa da dependência de $[K_G]$ em relação a $\{U\}$, é não linear. Existem diversos métodos para a resolução deste conjunto de equações não-lineares, embora, basicamente, a maioria destas técnicas numéricas possam ser divididas em dois grupos, o dos métodos incrementais e o dos métodos iterativos. Os métodos incrementais não satisfazem necessariamente as condições de equilíbrio, enquanto os métodos iterativos verificam o equilíbrio a cada estágio de carga. Este trabalho utilizará dois métodos iterativos, um empregando rigidez tangente e outro rigidez secante.

2.6.1 - Solução Numérica Utilizando a Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente total da estrutura $[K]$ é obtida com a utilização em seus cálculos das propriedades instantâneas da seção.

Considere-se uma estrutura que esteja sujeita a forças $\{F_A\}$ e que tenha deslocamentos $\{U_A\}$. Este estado é representado pelo ponto A na Fig, 2.8a. Quando as forças são aumentadas de $\{F_A\}$ para $\{F_B\}$, os deslocamentos passam para $\{U_B\}$. O valor correto de $\{U_B\}$ não pode ser obtido diretamente por causa da não-linearidade do sistema.

Já que a rigidez do sistema é uma função dos deslocamentos atuais, a matriz de rigidez tangente muda de $[K_A]$ para $[K_B]$ durante a variação de deslocamentos de $\{U_A\}$ para $\{U_B\}$. Na Fig. 2.8a, estas rigidezes estão representadas pelas inclinações da curva carga-deslocamento. Assumindo-se que a rigidez do sistema varie monotonamente, a rigidez $[\bar{K}]$ entre os dois estados A e B é limitada por

$$|K_B| \leq |\bar{K}| \leq |K_A| \quad (2.49)$$

ou, usando-se um fator interpolador, α , ela pode ser expressa por

$$[\bar{K}] = \alpha [K_A] + (1-\alpha) [K_B] \quad (2.50)$$

O fator interpolador α é limitado por

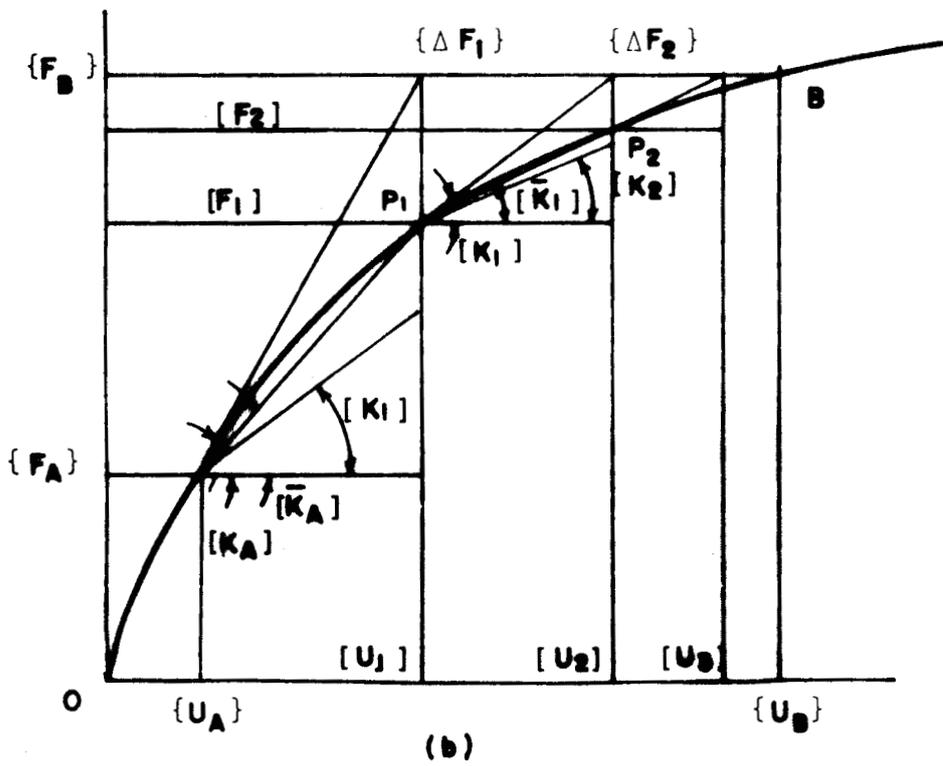
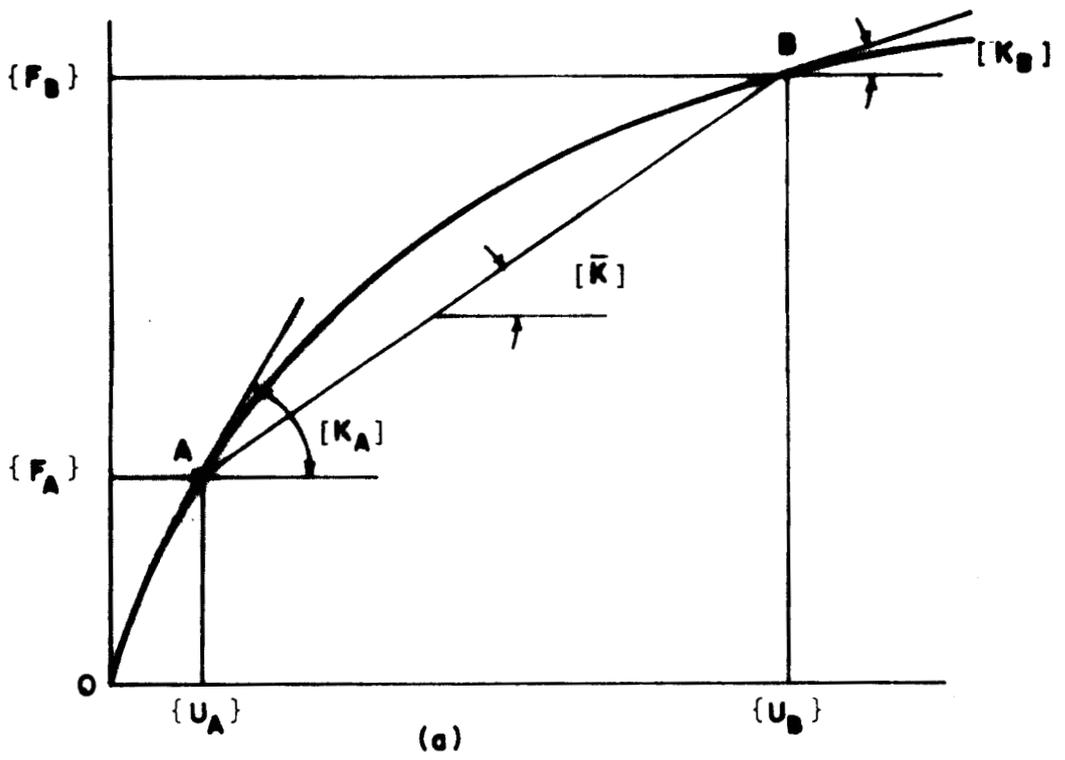


Figura 2.8 - Técnica iterativa utilizando a rigidez tangente

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.51)$$

Nos casos extremos

$$\alpha = 1 \quad [\bar{K}] = [K_A] \quad \text{limite superior}$$

$$\alpha = 0 \quad [\bar{K}] = [K_B] \quad \text{limite inferior}$$

Se o fator α pudesse ser corretamente estimado, os deslocamentos $\{U_B\}$ poderiam ser diretamente encontrados sem o uso de técnicas iterativas laboriosas. Como isto não é possível, procura-se por aproximações sucessivas chegar à solução, empregando um valor fixo de α .

Conforme a Fig. 2.8b, a variação inicial de forças é

$$\{\Delta F_0\} = \{F_B\} - \{F_A\} \quad (2.52)$$

Usando a rigidez tangente no ponto A, $[K_A]$, os novos deslocamentos $\{U_1\}$ são calculados por

$$\{U_1\} = [K_A]^{-1} \{\Delta F_0\} + \{U_A\} \quad (2.53)$$

Destes deslocamentos, a rigidez tangente $[K_1]$ é obtida. As forças correspondentes $\{F_1\}$ são calculadas usando a Eq. (2.50) como

$$\{F_1\} = [\alpha K_A + (1-\alpha) K_1] \{U_1 - U_A\} + \{F_A\} \quad (2.54)$$

Este estado é representado pelo ponto P_1 na Fig. 2.8b. Existem forças não equilibradas de

$$\{\Delta F_1\} = \{F_B\} - \{F_1\} \quad (2.55)$$

Repete-se a mesma rotina para obter o novo estado

$$\{U_2\} = [K_1]^{-1} \{\Delta F_1\} + \{U_1\}$$

$$\{F_2\} = [\alpha K_1 + (1-\alpha) K_2] \{U_2 - U_1\} + \{F_1\} \quad (2.56)$$

$$\{\Delta F_2\} = \{F_B\} - \{F_2\}$$

Depois de n ciclos de iteração as relações aci-

ma ficam

$$\begin{aligned} \{U_n\} &= [K_{n-1}]^{-1} \{\Delta F_{n-1}\} + \{U_{n-1}\} \\ - \{F_n\} &= [\alpha K_{n-1} + (1-\alpha) K_n] \{U_n - U_{n-1}\} + \{F_{n-1}\} \quad (2.57) \\ \{\Delta F_n\} &= \{F_B\} - \{F_n\} \end{aligned}$$

Este procedimento é repetido até que as forças não equilibradas $\{\Delta F_n\}$ tornam-se menores que um limite prescrito de tolerância. Esta verificação de convergência é feita através da comparação do quociente da norma das forças não equilibradas pela das forças aplicadas com um valor de tolerância ϵ (tomado como 10^{-5}).

Adotou-se neste trabalho para o fator interpolador um valor de 0,5. O fluxograma para o método está apresentado na Fig. 2.9.

2.6.2 - Solução Numérica Utilizando a Rigidez Secante

A matriz de rigidez secante total da estrutura, $[K]$, é obtida a partir das propriedades secantes dos materiais que compõe a peça.

Seja uma estrutura que está sujeita a forças $\{F_A\}$ e que tenha deslocamentos $\{U_A\}$. Este estado é representado pelo ponto A na Fig. 2,10a. Quando as forças crescem de $\{F_A\}$ para $\{F_B\}$ os deslocamentos passam para $\{U_B\}$. O valor correto de $\{U_B\}$ não pode ser diretamente obtido, pois a rigidez $[K_B]$ é dependente de $\{U_B\}$. A matriz de rigidez secante muda de $[K_A]$ para $[K_B]$ durante a variação dos deslocamentos de $\{U_A\}$ para $\{U_B\}$. Na Fig. 2.10a, estas rigidezes estão representadas pela inclinação das retas secantes à curva carga-deslocamento.

Segundo a Fig. 2.10b, a variação inicial de forças é

$$\{\Delta F_0\} = \{F_B\} - \{F_A\} \quad (2.58)$$

Usando a rigidez secante no ponto A, $[K_A]$, os novos deslocamentos $\{U_1\}$ são calculados por

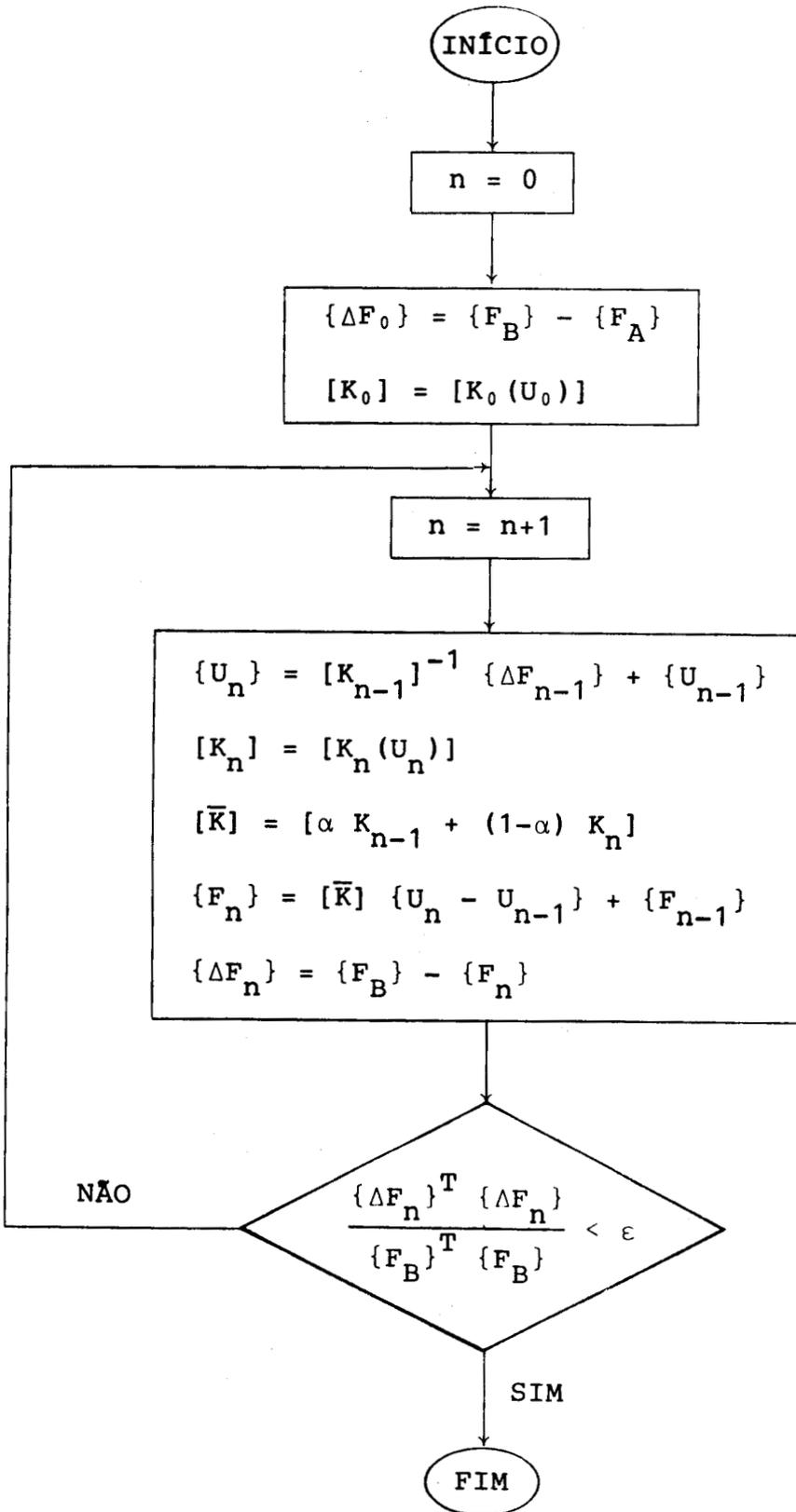


Figura 2.9 - Fluxograma para solução usando rigidez tangente

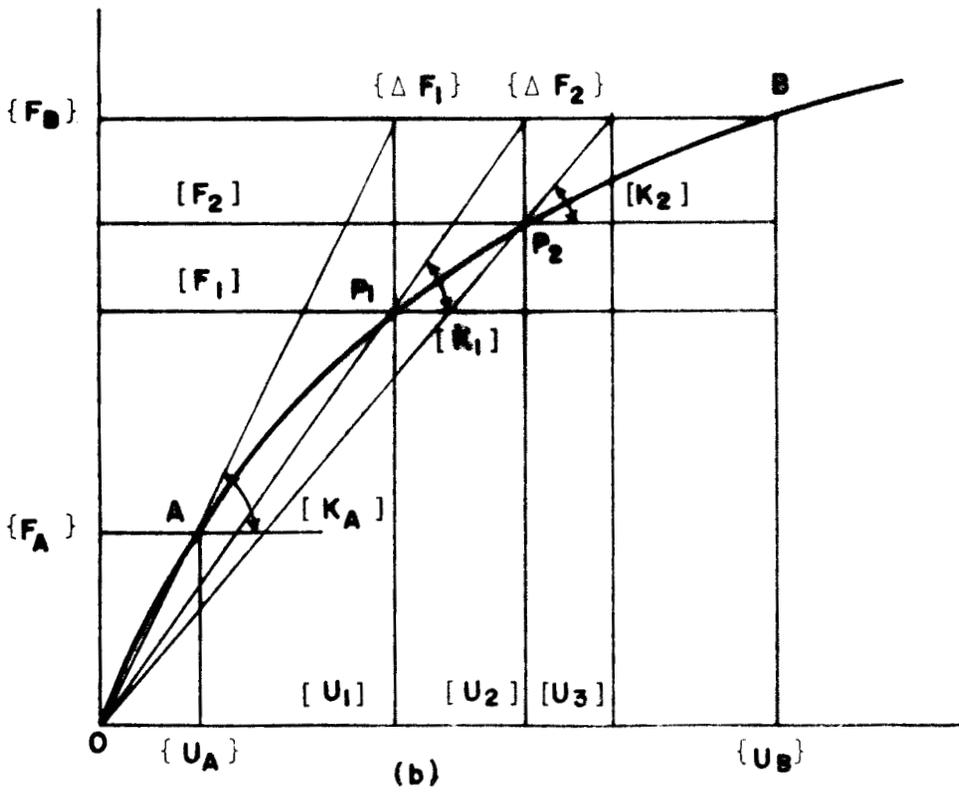
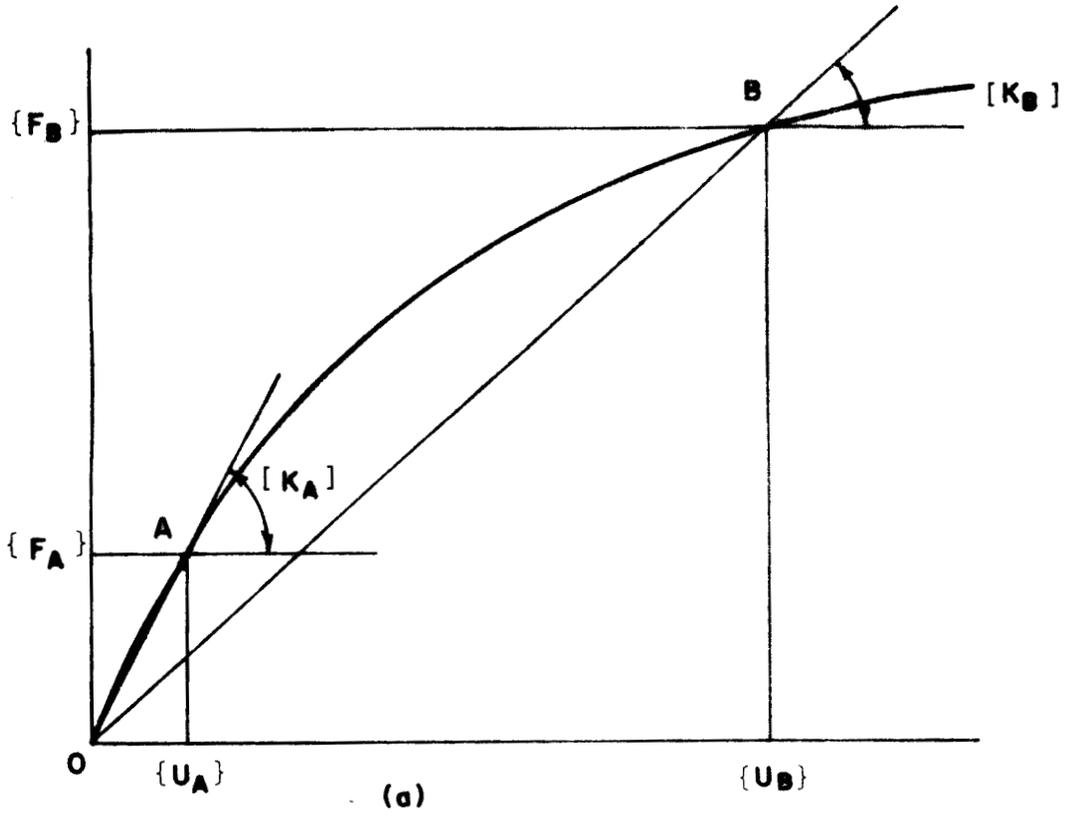


Figura 2.10 - Técnica iterativa utilizando a rigidez secante

$$\{U_1\} = [K_A]^{-1} \{\Delta F_0\} + \{U_A\} \quad (2.59)$$

Com estes deslocamentos, a rigidez secante, $[K_1]$, é obtida. As forças correspondentes $\{F_1\}$ são calculadas como

$$\{F_1\} = [K_1] \{U_1\} \quad (2.60)$$

Este estado é representado pelo ponto P_1 na Fig. 2.10b. Existem forças não equilibradas de

$$\{\Delta F_1\} = \{F_B\} - \{F_1\} \quad (2.61)$$

Repete-se a mesma sequência para obter o novo estado

$$\begin{aligned} \{U_2\} &= [K_1]^{-1} \{\Delta F_1\} + \{U_1\} \\ \{F_2\} &= [K_2] \{U_2\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\{\Delta F_2\} = \{F_B\} - \{F_2\}$$

Depois de n ciclos de iteração as relações acima ficam

$$\begin{aligned} \{U_n\} &= [K_{n-1}]^{-1} \{\Delta F_{n-1}\} + \{U_{n-1}\} \\ \{F_n\} &= [K_n] \{U_n\} \\ \{\Delta F_n\} &= \{F_B\} - \{F_n\} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Este procedimento é repetido até que as forças não equilibradas $\{\Delta F_n\}$ tornam-se menores que um limite prescrito de tolerância. A verificação da convergência é feita pela comparação do quociente da norma das forças não equilibradas pela das forças aplicadas com um valor de tolerância ϵ (tomado como 10^{-5}).

O fluxograma do método está apresentado na Fig. 2.11.

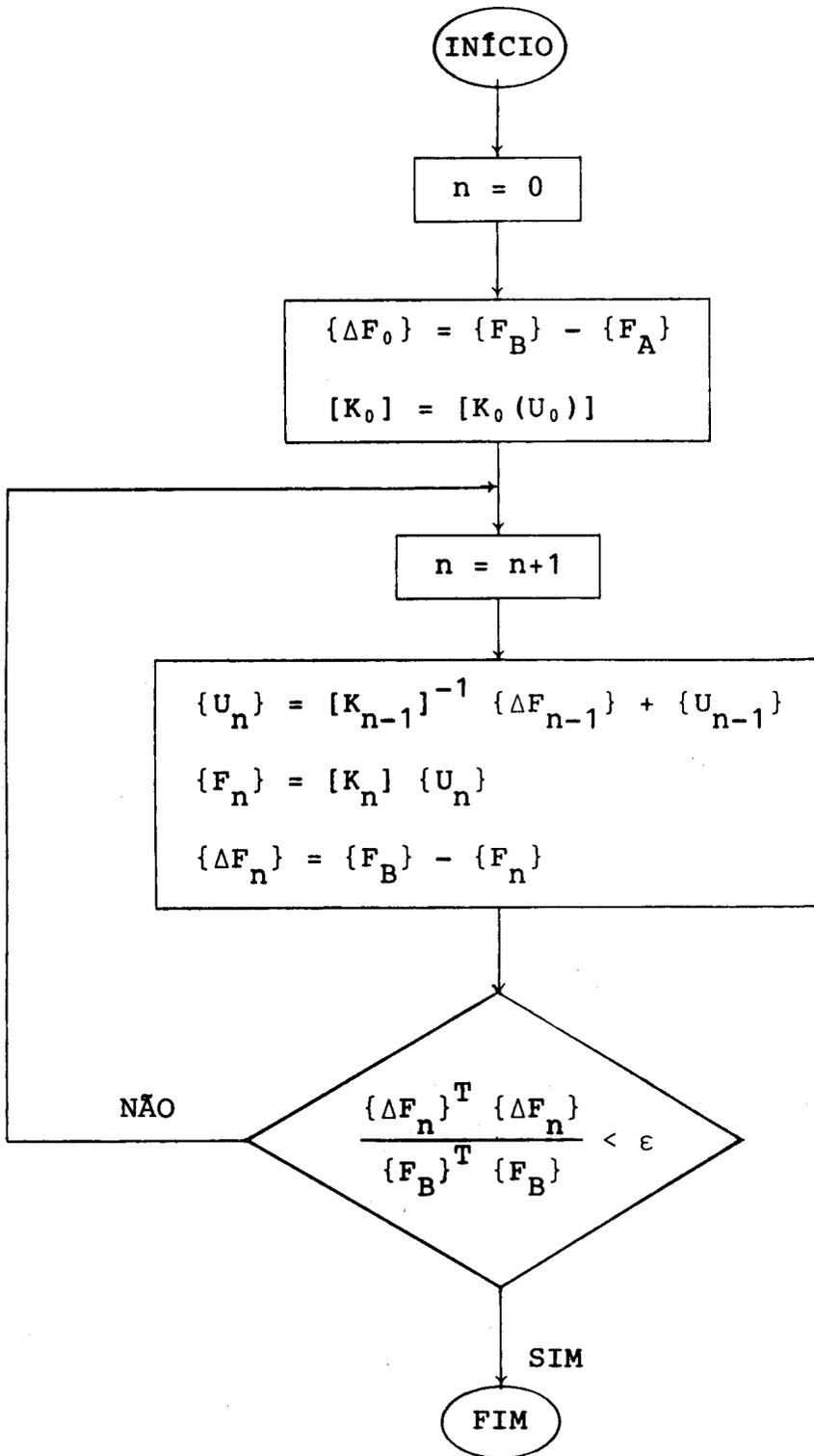


Figura 2.11 - Fluxograma para solução usando rigidez secante

3 - DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

3.1 - As Características dos materiais

3.1.1 - O Aço

Adotou-se como diagrama tensão-deformação para o aço, o diagrama bilinear da Fig. 3.1, que é o proposto pelo Código Modelo CEB-FIP [21] para os aços obtidos por laminagem a quente e resfriados naturalmente.

O valor do módulo de elasticidade inicial do aço E_s foi tomado igual a 210.000 MPa e os valores das resistências à tração e à compressão do aço são os mesmos ($f_{yt} = f_{yc} = f_y$).

3.1.2 - O Concreto

O diagrama tensão-deformação para o concreto, conforme o Código Modelo CEB-FIP [21], apresenta a forma esquematicamente apresentada na Fig. 3.2.

Segundo [21], a deformação relativa máxima ϵ_{cu} é função não só da resistência do concreto, como também, do formato da seção em estudo. Seu valor pode variar de -0,0035 até -0,0070. Da mesma maneira, a abscissa do ponto correspondente a máxima tensão pode assumir valores entre -0,0020 e -0,0025, e a tensão última valores compreendidos entre 0,75

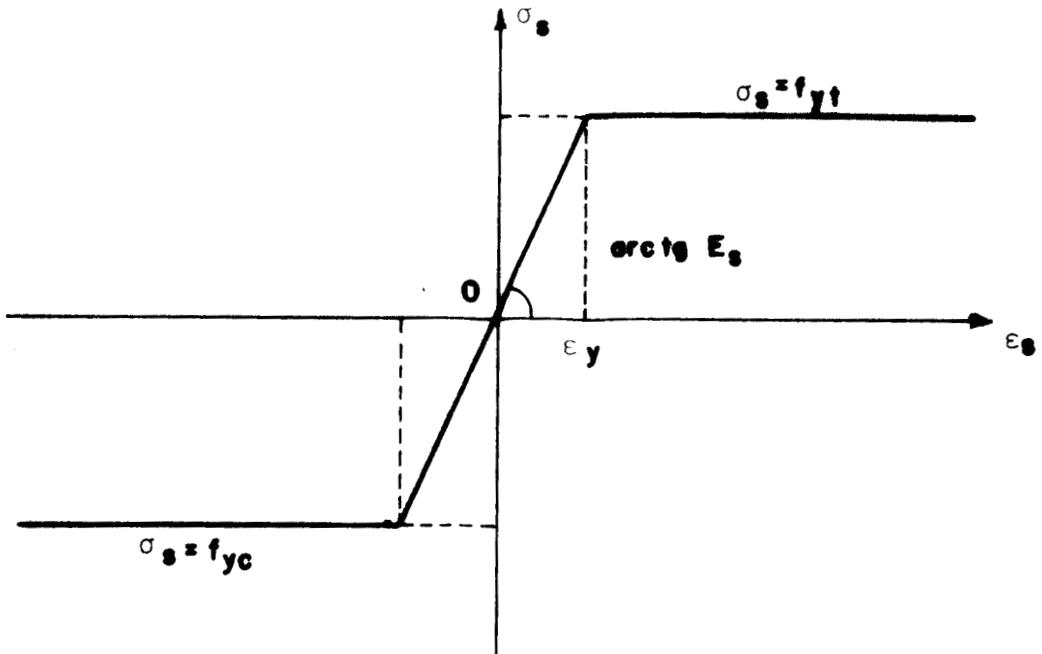


Figura 3.1 - Diagrama tensão-deformação idealizado para o aço

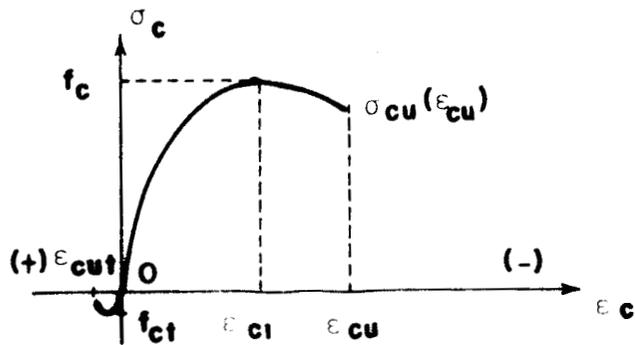


Figura 3.2 - Diagrama tensão-deformação esquemático para o concreto

f_c e $0,25 f_c$.

Para a zona comprimida do concreto é apresentada no Código Modelo CEB-FIP [21], uma curva proposta por Grasser [34], que foi obtida por ajustagem a resultados de ensaios de corpos de prova submetidos a cargas de curta duração.

Esta curva para o diagrama tensão-deformação do concreto, que aparece na Fig. 3.3, é expressa analiticamente pela equação

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = \frac{\kappa \eta - \eta^2}{1 + (\kappa - 2) \eta} \quad (3.1)$$

onde

$$\eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1}$$

$$\epsilon_{c1} = -0,0022 \text{ (deformação máxima para a compressão centrada)}$$

$$\kappa = (1,1 E_c) \epsilon_{c1} / f_c$$

E_c = módulo de elasticidade longitudinal do concreto

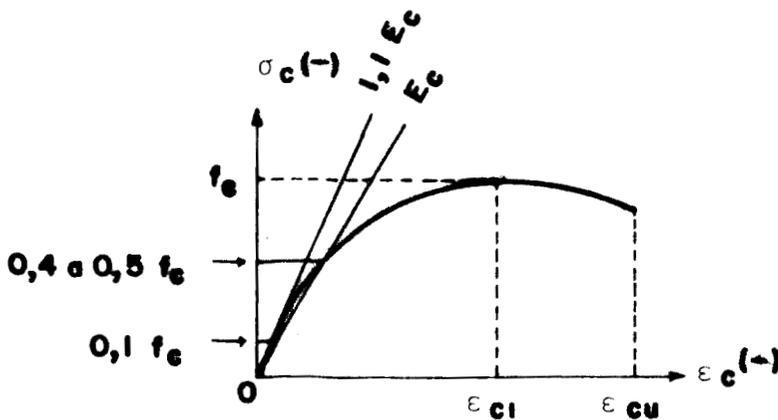


Figura 3.3 - Diagrama tensão-deformação proposto para o concreto

O módulo de elasticidade do concreto pode ser obtido pela expressão

$$E_{cm} = 9500 (f_{cm})^{1/3}$$

ou

$$(3.2)$$

$$E_{cm} = 9500 (f_{ck} + 8)^{1/3}$$

onde E_{cm} , f_{cm} e f_{ck} devem ser fornecidos em MPa.

Para a zona tracionada do concreto foi feita a suposição de que a forma da curva tensão-deformação é semelhante àquela obtida para a zona comprimida, ou seja,

$$\frac{\sigma_{ct}}{f_{ct}} = \frac{\kappa^* \eta^* - \eta^{*2}}{1 + (\kappa^* - 2) \eta^*}$$

$$(3.3)$$

onde

$$\eta^* = \epsilon_c / \epsilon_{c1}^*$$

$$\epsilon_{c1}^* = 2,7 f_{ct} / E_c$$

$$\kappa^* = (1,1 E_c) \epsilon_{c1}^* / f_{ct}$$

$$(3.4)$$

A resistência média à tração do concreto pode ser obtida conforme [21] por

$$f_{ctm} = 0,30 (f_{ck})^{2/3}$$

e

$$(3.5)$$

$$f_{ctk} = 0,7 f_{ctm}$$

3.2 - A Rigidez Axial e à Flexão dos Elementos

3.2.1 - Determinação da Rigidez dos Elementos

Para obter-se as rigidezes axial (EA) e à flexão ($EI_x; EI_y$) correspondentes aos eixos principais da seção transversal de cada elemento é preciso integrar-se a inclinação dos diagramas tensão-deformação dos materiais sobre a seção. Adotou-se para o elemento a rigidez de sua seção central

Com este propósito foi desenvolvido um proces-

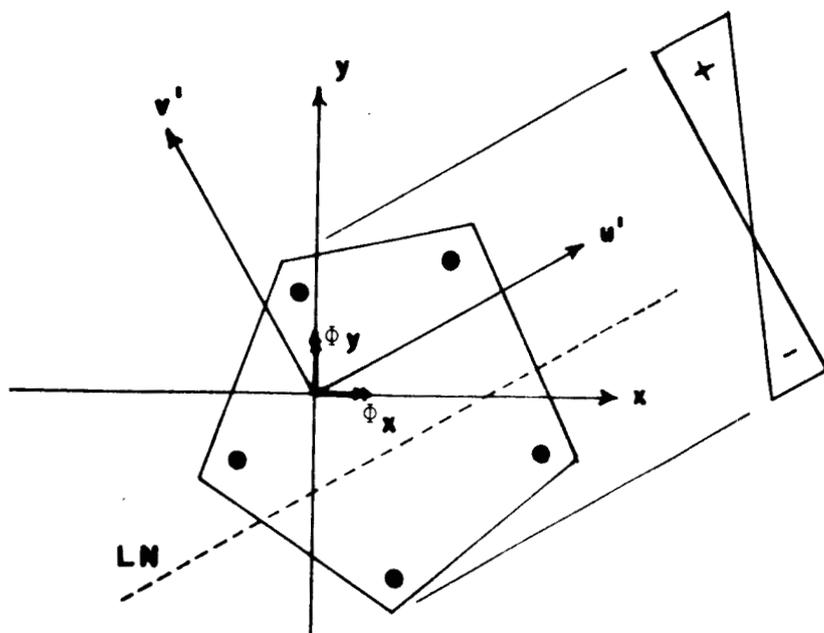


Figura 3.4 - Seção de forma poligonal arbitrária

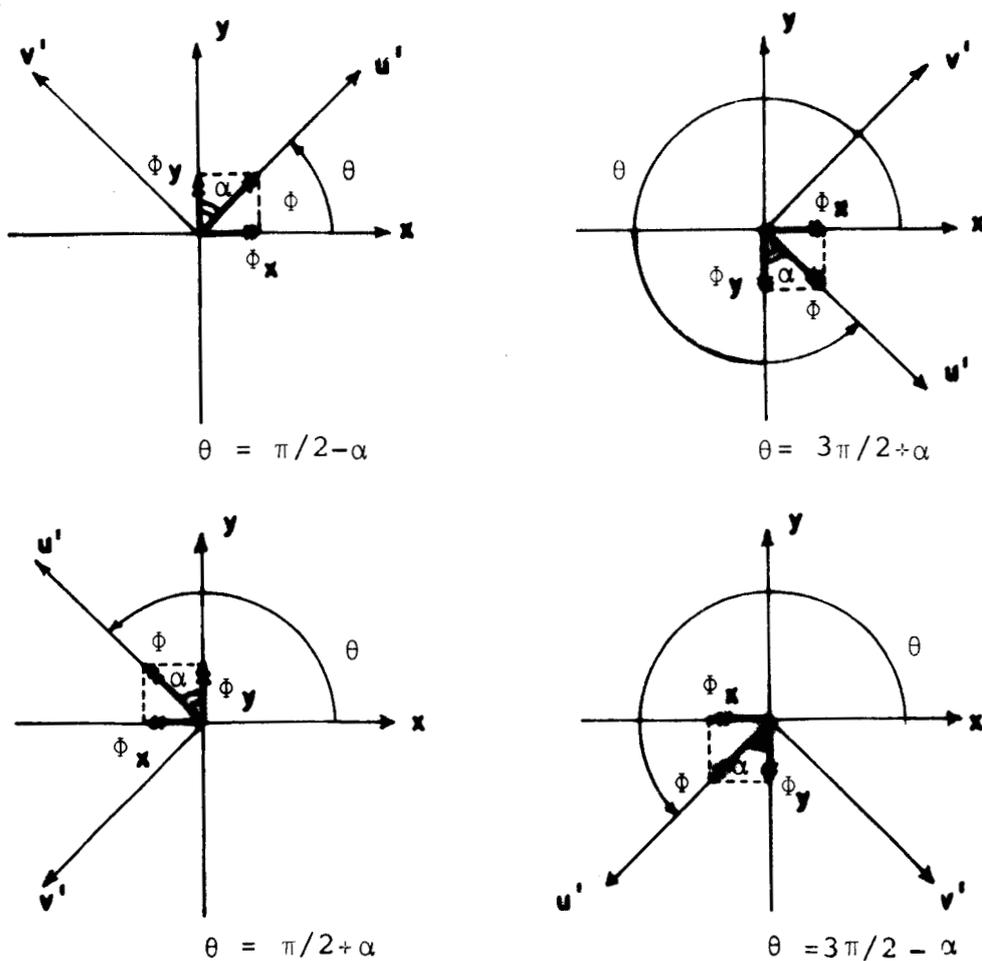


Figura 3.5 - Rota o dos eixos de coordenadas

so automático e geral, que obtém estes valores para uma seção poligonal de forma qualquer e com uma distribuição arbitrária das barras da armadura. Note-se que as expressões, centro de gravidade, eixos principais, etc., referem-se a rigidez.

3.2.1.1 - Processo de Cálculo

Seja uma seção de concreto armado de forma poligonal arbitrária, dada através das coordenadas de seus vértices e das barras da armadura, segundo dois eixos ortogonais x, y , conforme é mostrado na Fig. 3.4. São conhecidas, ainda, para cada eixo, as curvaturas da seção ($\phi_x; \phi_y$) e a deformação específica longitudinal (ϵ_0) na origem do sistema de coordenadas. Para qualquer ponto da seção, considerando-se que a seção permanece plana, pode-se obter a deformação longitudinal

$$\epsilon(x, y) = \epsilon_0 + y \phi_x - x \phi_y \quad (3.6)$$

Em primeiro lugar, determina-se um sistema de referência auxiliar u', v' , de tal forma que o eixo v' é perpendicular a linha neutra, orientado no sentido da fibra menos comprimida da seção e o eixo u' forma com v' um sistema dextrógiro que passa pela origem do sistema x, y .

Analiticamente, faz-se esta transformação de sistema de coordenadas da maneira que será exposta a seguir, e que aparece na Fig. 3.5. Calcula-se o ângulo diretor α como

$$\alpha = \text{arctg} (\phi_x / \phi_y) \quad (3.7)$$

Conforme os sentidos de ϕ_x e ϕ_y , recai-se em um dos casos da Fig. 3.5. Pelas expressões que aparecem na figura, determina-se o giro θ que ocorreu na transformação de sistema de coordenadas e conseqüentemente as novas coordenadas

$$\begin{aligned} u' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ v' &= y \cos \theta - x \sin \theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

A curvatura ϕ da seção transversal fica determinada por

$$\phi = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} \quad (3.9)$$

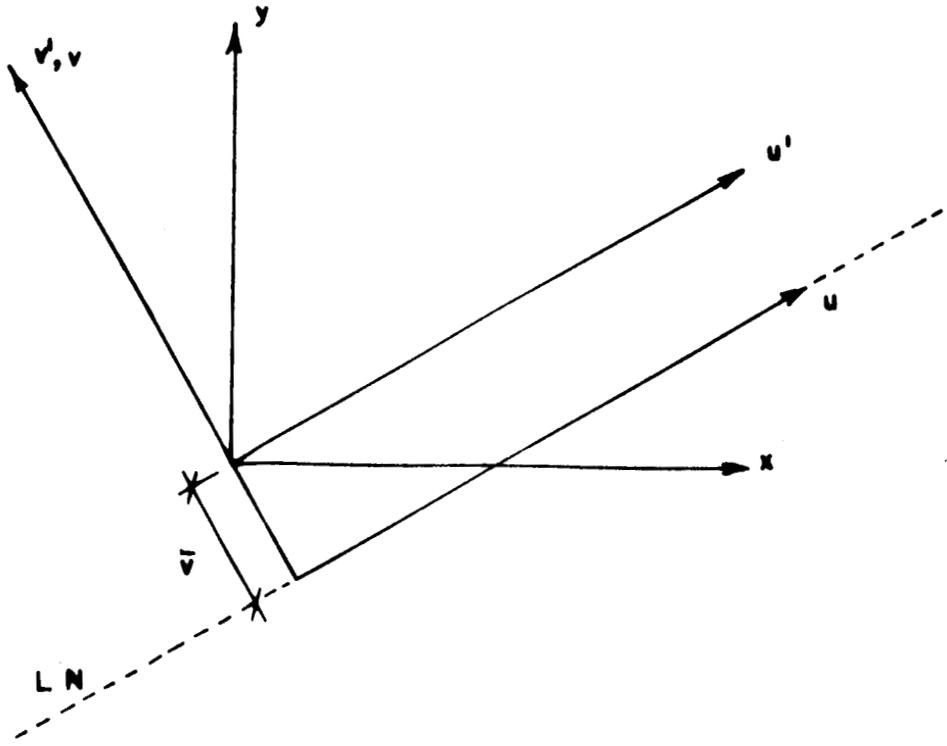


Figura 3.6 - Translação dos eixos de coordenadas

Em seguida, faz-se uma translação da origem deste novo sistema, de tal forma que o novo eixo u coincida com a linha neutra (ver Fig. 3.6).

Assim,

$$\begin{aligned} u &= u' \\ v &= v' + \bar{v} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\bar{v} = \varepsilon_0 / \phi \quad (3.11)$$

Agora é possível determinar a deformação longitudinal de um ponto qualquer da seção transversal pela expressão

$$\varepsilon(v) = v \phi \quad (3.12)$$

Comparando-se a Eq. (3.6) e a Eq. (3.12), nota-se

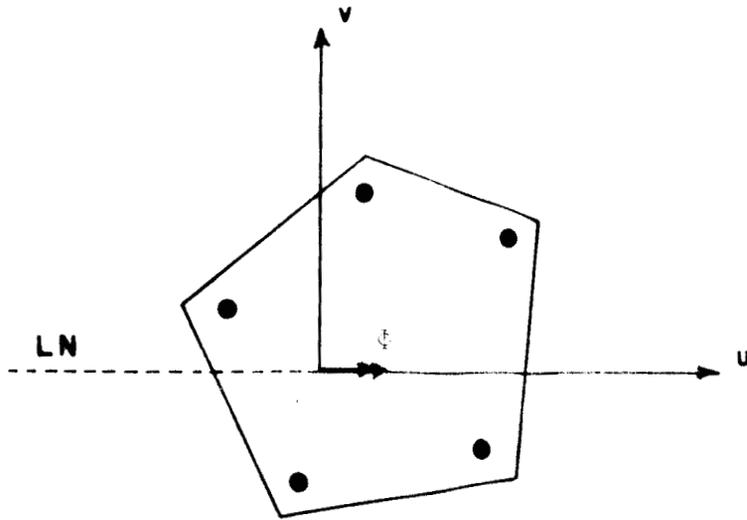


Figura 3.7 - Seção poligonal com o novo sistema de referência

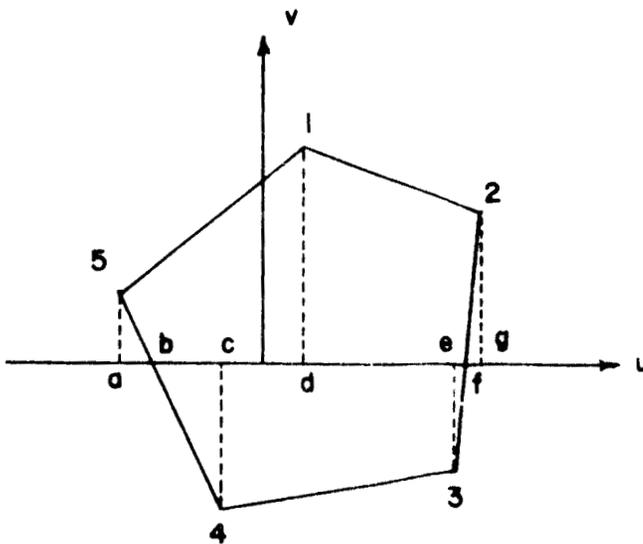


Figura 3.8 - Divisão da seção em regiões trapezoidais

que agora a deformação longitudinal é função de uma única coordenada. Isto vai simplificar de forma extraordinária a obtenção analítica das expressões das integrais para cálculo das rigidezes das seções.

3.2.1.2 - Integração dos Diagramas Tensão-Deformação sobre a Seção

A seção de concreto armado de forma poligonal arbitrária, que foi considerada na Fig. 3.4, pode ser agora dada através das coordenadas de seus vértices e das barras da armadura, segundo os dois novos eixos ortogonais u, v , conforme é apresentado na Fig. 3.7. O estado de deformação da seção fica definido somente pela curvatura ψ .

Traçando-se segmentos de reta, paralelos ao eixo v , a partir dos vértices, até encontrar o eixo u , pode-se definir uma série de trapézios sobre a seção (ver a Fig. 3.8).

Os trapézios que se encontram nos quadrantes correspondentes a valores de v positivos são inteiramente tracionados, enquanto os demais são inteiramente comprimidos. Caso na região tracionada, seja atingida a deformação correspondente a fissuração, a área que excede este limite deve ser desconsiderada por não contribuir para a rigidez da peça (Fig. 3.9).

Embora se formem alguns triângulos e retângulos, eles não deixam de ser casos particulares de trapézios. Desta forma, substitui-se o cálculo das rigidezes de uma área poligonal qualquer, pelo cálculo das rigidezes de áreas trapezoidais. No final, somam-se as rigidezes das diversas áreas trapezoidais que compõem a seção com a rigidez oriunda das barras da armadura.

A integração do módulo de elasticidade longitudinal do concreto sobre a área trapezoidal e a do módulo de elasticidade longitudinal do aço sobre as barras da armadura serão apresentadas nos itens 3.2.2 e 3.2.3.

3.2.1.3 - Determinação dos Eixos Principais

Obtidas as rigidezes da seção segundo o sistema

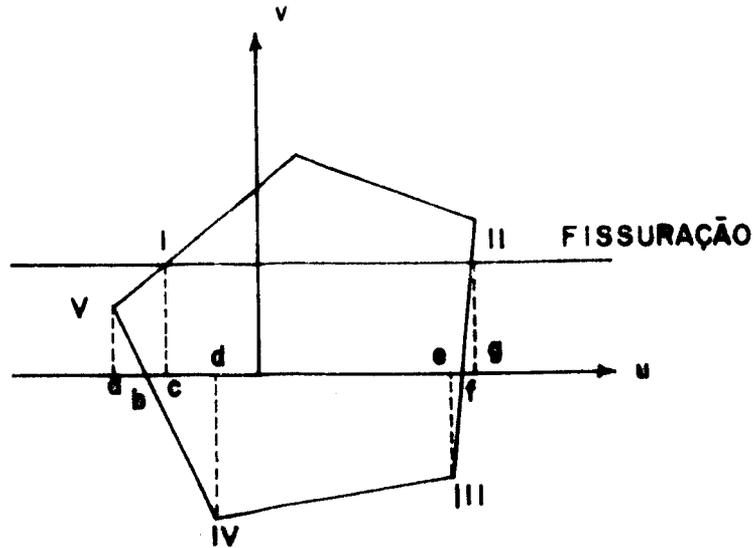


Figura 3.9 - Divisão em regiões trapezoidais no caso da seção fissurada

de eixos u, v ($EA; ES_u; ES_v; EI_u; EI_v; EI_{uv}$) determina-se a posição do centro de gravidade através das expressões

$$\begin{aligned} u_G &= ES_v/EA \\ v_G &= ES_u/EA \end{aligned} \quad (3.13)$$

Após, obtêm-se os valores das rigidezes para um sistema de eixos paralelos a u, v e que passa pelo centro de gravidade da seção

$$\begin{aligned} EI_{uG} &= EI_u - EA v_G^2 \\ EI_{vG} &= EI_v - EA u_G^2 \\ EI_{uvG} &= EI_{uv} - EA u_G v_G \end{aligned} \quad (3.14)$$

Finalmente obtêm-se as rigidezes da seção segundo os seus eixos principais

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2 EI_{uvG}}{EI_{uG} - EI_{vG}} \right) \quad (3.15)$$

e

$$EI_{xp} = EI_{uG} \cos^2 \gamma + EI_{vG} \sin^2 \gamma - EI_{uvG} \sin 2\gamma \quad (3.16)$$

$$EI_{yp} = EI_{vG} \cos^2 \gamma + EI_{uG} \sin^2 \gamma + EI_{uvG} \sin 2\gamma$$

Assim, os valores para entrar na matriz de rigidez, obtida no capítulo anterior, são a rigidez axial EA, as rigidezes à flexão $EI_x = EI_{xp}$ e $EI_y = EI_{yp}$, e a rotação dos eixos principais $(\gamma + \theta)$.

3.2.2 - As Propriedades Tangentes da Seção

3.2.2.1 - Rigidez Tangente para o Aço

Conforme o diagrama da Fig. 3.1, pode-se determinar que

$$E_t = E_s \quad \text{para} \quad 0 \leq |\epsilon_s| \leq \epsilon_y \quad (3.17)$$

$$E_t = 0 \quad \text{para} \quad |\epsilon_s| > \epsilon_y$$

onde E_t é o módulo de elasticidade do aço.

Desta forma, a rigidez proporcionada através de cada barra da armadura é dada por

$$\begin{aligned} EA_s &= E_t A_s \\ ES_{us} &= v_s E_t A_s \\ ES_{vs} &= u_s E_t A_s \\ EI_{us} &= v_s^2 E_t A_s \\ EI_{vs} &= u_s^2 E_t A_s \\ EI_{uvs} &= u_s v_s E_t A_s \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde A_s é a área da seção transversal da barra, u_s e v_s são as coordenadas do centro de gravidade da barra e o módulo de elasticidade tangente do aço, E_t , é dado pelas Eqs. (3.17).

3.2.2.2 - Rigidez Tangente para o Concreto

Em primeiro lugar será analisada uma região tra

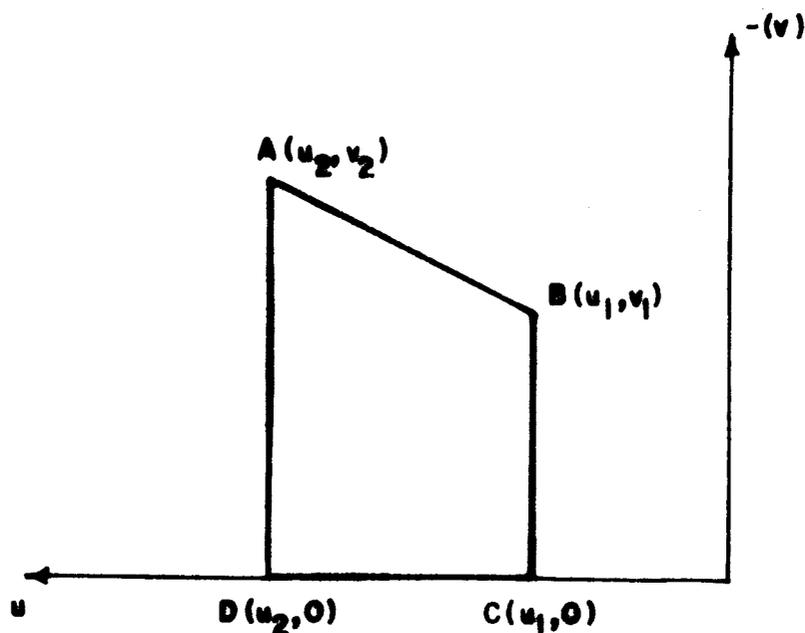


Figura 3.10 - Região trapezoidal na zona comprimida do concreto

pezooidal na zona comprimida do concreto (ver Fig. 3.10).

A expressão da reta AB que define o lado superior do trapézio é dada por

$$v = au + b \quad (3.19)$$

onde

$$a = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \quad (3.20)$$

$$b = v_1 - au_1$$

Os valores, que se procura determinar, são expressos pelo seguinte conjunto de integrais

$$\begin{aligned} EA_C &= \iint_A G_t(v) \, dv \, du \\ ES_{uc} &= \iint_A G_t(v) \, v \, dv \, du \\ ES_{vc} &= \iint_A G_t(v) \, u \, dv \, du \\ EI_{uc} &= \iint_A G_t(v) \, v^2 \, dv \, du \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$EI_{vc} = \iint_A G_t(v) u^2 dv du \quad (3.21)$$

$$EI_{uvc} = \iint_A G_t(v) u v dv du$$

onde $G_t(v)$ é a função que define o módulo de elasticidade tangente do concreto e A é a área da região trapezoidal. O valor do módulo de elasticidade tangente é função somente da deformação longitudinal do concreto ϵ ; assim, pela Eq.(3.12), uma função da ordenada v . Pela definição de módulo de elasticidade tangente, tem-se que

$$G_t(v) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad (3.22)$$

Da Eq.(3.12) vem que

$$v = \frac{\epsilon}{\phi} \quad (3.23)$$

ou

$$\frac{dv}{d\epsilon} = \frac{1}{\phi}$$

Substituindo-se na Eq.(3.22)

$$G_t(v) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{d\sigma}{dv} \frac{dv}{d\epsilon} = \frac{1}{\phi} \frac{d\sigma}{dv} \quad (3.24)$$

Usando o resultado da Eq.(3.24) nas Eqs.(3.21) e integrando tem-se

$$EA_c = \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{au+b} G_t(v) dv du = \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{1}{\phi} \sigma(v) \Big|_0^{au+b} \right] du$$

$$ES_{uc} = \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{au+b} G_t(v) v dv du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{1}{\phi} \sigma(v) v \Big|_0^{au+b} - \frac{1}{\phi} \int_0^{au+b} \sigma(v) dv \right] du$$

$$ES_{vc} = \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{au+b} G_t(v) u dv du = \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{1}{\phi} \sigma(v) u \Big|_0^{au+b} \right] du$$

$$EI_{uc} = \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{au+b} G_t(v) v^2 dv du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{1}{\phi} \sigma(v) v^2 \Big|_0^{au+b} - \frac{2}{\phi} \int_0^{au+b} \sigma(v) v dv \right] du$$

$$EI_{vc} = \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{au+b} G_t(v) u^2 dv du = \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{1}{\phi} \sigma(v) u^2 \Big|_0^{au+b} \right] du \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
 EI_{uvc} &= \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{au+b} G_t(v) u v dv du = \\
 &= \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{1}{\phi} \sigma(v) u v \Big|_0^{au+b} - \frac{u}{\phi} \int_0^{au+b} \sigma(v) dv \right] du
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Substituindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.1), obtêm-se

$$\sigma(v) = \frac{\frac{\kappa\phi v}{\epsilon_{c_1}} - \frac{\phi^2 v^2}{\epsilon_{c_1}^2}}{1 + (\kappa-2) \frac{\phi v}{\epsilon_{c_1}}} f_c \tag{3.26}$$

Operando, encontra-se

$$\frac{1}{\phi} \sigma(v) = Ay + B - \frac{BC}{y+C} \tag{3.27}$$

onde

$$\begin{aligned}
 A &= - \frac{f_c}{\epsilon_{c_1} (\kappa-2)} \\
 B &= \frac{f_c}{\phi (\kappa-2)} \left(\kappa + \frac{1}{\kappa-2} \right) \\
 C &= \frac{\epsilon_{c_1}}{\phi (\kappa-2)}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Substituindo a Eq. (3.27) nas Eqs. (3.25) e integrando, encontra-se

$$EA_c = \left[Aa \frac{u^2}{2} + (Ab+b) u \right]_{u_1}^{u_2} - \frac{BC}{a} \ln \left(\frac{au_2+b+C}{au_1+b+C} \right) \tag{3.29a}$$

$$\begin{aligned}
 ES_{uc} &= \left[\frac{A}{2} (a^2 \frac{u^3}{3} + abu^2) + \left(\frac{Ab^2}{2} + BC \left(\ln \frac{a}{C} - 2 \right) \right) u \right]_{u_1}^{u_2} + \\
 &+ \frac{BC^2}{a} \ln \left(\frac{au_2+b+C}{au_1+b+C} \right) + BC \left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) - \\
 &- BC \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right)
 \end{aligned} \tag{3.29b}$$

$$\begin{aligned}
 ES_{vc} &= \left[Aa \frac{u^3}{3} + (Ab+b) \frac{u^2}{2} - \frac{BC}{a} u \right]_{u_1}^{u_2} + \\
 &+ \frac{BC}{a^2} (b+C) \ln \left(\frac{au_2+b+C}{au_1+b+C} \right)
 \end{aligned} \tag{3.29c}$$

$$\begin{aligned}
 EI_{uc} &= \left[\frac{A}{3} (a^3 \frac{u^4}{4} + a^2 bu^3) + (Aab^2 + BCa) \frac{u^2}{2} + \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{Ab^3}{3} + BCb + 3BC^2 - 2BC^2 \ln \frac{a}{C} \right) u \right]_{u_1}^{u_2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{BC^3}{a} \ln\left(\frac{au_2+b+C}{au_1+b+C}\right) - 2BC^2 \left(u_2 + \frac{b+C}{a}\right) \ln\left(u_2 + \frac{b+C}{a}\right) + \\
& + 2BC^2 \left(u_1 + \frac{b+C}{a}\right) \ln\left(u_1 + \frac{b+C}{a}\right) \quad (3.29d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_{vc} &= [Aa \frac{u^4}{4} + (Ab+b) \frac{u^3}{3} - \frac{BC}{a} \frac{u^2}{2} + \frac{BC}{a^2} (b+C) u] \frac{u_2}{u_1} - \\
& - \frac{BC}{a^3} (b+C)^2 \ln\left(\frac{au_2+b+C}{au_1+b+C}\right) \quad (3.29e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_{uvc} &= \left[\frac{Aa}{2} \left(a \frac{u^4}{4} + 2b \frac{u^3}{3}\right) + \left(\frac{Ab^2}{2} - BC\left(\frac{3}{2} - \ln\frac{a}{C}\right)\right) \frac{u^2}{2} + \right. \\
& + \frac{BC}{2a} (3C+b) u] \frac{u_2}{u_1} - BC^2 \frac{(b+C)}{a^2} \ln\left(\frac{au_2+b+C}{au_1+b+C}\right) + \\
& + \frac{BC}{2} \left(u_2^2 - \left(\frac{b+C}{a}\right)^2\right) \ln\left(u_2 + \frac{b+C}{a}\right) - \\
& - \frac{BC}{2} \left(u_1^2 - \left(\frac{b+C}{a}\right)^2\right) \ln\left(u_1 + \frac{b+C}{a}\right) \quad (3.29f)
\end{aligned}$$

Pode acontecer que o valor de a na Eq.(3.19) seja nulo (o trapézio estaria degenerado em um retângulo). Neste caso, as Eqs.(3.29) não são utilizáveis, e torna-se necessário lançar mão do seguinte conjunto de expressões

$$EA_c = \left[(Ab + B - \frac{BC}{b+C}) u \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.30a)$$

$$ES_{uc} = \left[\left(\frac{Ab^2}{2} - \frac{BCb}{b+C} - BC \ln\left(\frac{C}{b+C}\right) \right) u \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.30b)$$

$$ES_{vc} = \left[(Ab + B - \frac{BC}{b+C}) \frac{u^2}{2} \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.30c)$$

$$EI_{uc} = \left[\left(\frac{Ab^3}{3} - \frac{BCb^2}{b+C} + 2BCb + 2BC^2 \ln\left(\frac{C}{b+C}\right) \right) u \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.30d)$$

$$EI_{vc} = \left[(Ab + B - \frac{BC}{b+C}) \frac{u^3}{3} \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.30e)$$

$$EI_{uvc} = \left[\left(\frac{Ab^2}{2} - \frac{BCb}{b+C} - BC \ln\left(\frac{C}{b+C}\right) \right) u^2 \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.30f)$$

No caso em que a curvatura ϕ da seção seja nula (compressão ou tração simples), as Eqs.(3.29) e as Eqs.(3.30) tornam-se não utilizáveis. Nesta situação, deve-se usar este outro conjunto de expressões

$$EA_c = E_t \left[\frac{au^2}{2} + bu \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.31a)$$

$$ES_{uc} = \frac{E_t}{2} \left[\frac{a^2 u^3}{3} + abu^2 + b^2 u \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.31b)$$

$$ES_{vc} = E_t \left[\frac{au^3}{3} + \frac{bu^2}{2} \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.31c)$$

$$EI_{uc} = \frac{E_t}{2} \left[\frac{a^3 u^4}{4} + a^2 bu^3 + \frac{3ab^2 u^2}{2} + b^3 u \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.31d)$$

$$EI_{vc} = E_t \left[\frac{au^3}{3} + \frac{bu^2}{2} \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.31e)$$

$$EI_{uvc} = \frac{E_t}{2} \left[\frac{a^2 u^4}{2} + 2ab \frac{u^3}{3} + \frac{b^2 u^2}{2} \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.31f)$$

onde E_t é o módulo de elasticidade tangente do concreto, que pode ser calculado pela Eq.(3.32), obtida por derivação da Eq. (3.1).

$$E_t = \frac{(2-\kappa) \eta^2 - 2\eta + \kappa}{[1 + (\kappa-2) \eta]^2} \frac{f_c}{\epsilon_{c1}} \quad (3.32)$$

Para a zona tracionada do concreto pode-se tomar as mesmas expressões, Eqs.(3.29), Eqs.(3.30) ou Eqs.(3.31), tendo-se apenas o cuidado de usar os parâmetros que aparecem na Eq.(3.3).

3.2.3 - As Propriedades Secantes da Seção

3.2.3.1 - Rigidez Secante para o Aço

Segundo o diagrama da Fig. 3.1, pode-se estabelecer que

$$\begin{aligned} E_{sec} &= E_s \quad \text{para} \quad 0 \leq |\epsilon_s| \leq \epsilon_y \\ E_{sec} &= f_y / \epsilon_s \quad \text{para} \quad |\epsilon_s| > \epsilon_y \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde E_{sec} é o módulo de elasticidade secante do aço.

Desta maneira, a rigidez proporcionada através de cada barra da armadura é dada por

$$\begin{aligned}
 EA_s &= E_{sec} A_s \\
 ES_{us} &= v_s E_{sec} A_s \\
 ES_{vs} &= u_s E_{sec} A_s \\
 EI_{us} &= v_s^2 E_{sec} A_s \\
 EI_{vs} &= u_s^2 E_{sec} A_s \\
 EI_{uvs} &= u_s v_s E_{sec} A_s
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

onde A_s é a área da seção transversal da barra, u_s e v_s são as coordenadas do centro de gravidade da barra e o módulo de elasticidade secante do aço, E_{sec} , é dado pelas Eqs.(3.33).

3.2.3.2 - Rigidez Secante para o Concreto

Seja uma região trapezoidal situada na zona comprimida da seção de concreto, conforme a Fig. 3.11. A expressão da reta AB que define o lado superior do trapézio é dada por

$$v = au + b \tag{3.35}$$

onde

$$a = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \tag{3.36}$$

e

$$b = v_1 - au_1$$

Os valores, que se busca determinar, são definidos pelo seguinte conjunto de integrais

$$\begin{aligned}
 EA_c &= \iint_A G_s(v) dv du \\
 ES_{uc} &= \iint_A G_s(v) v dv du \\
 ES_{vc} &= \iint_A G_s(v) u dv du \\
 EI_{uc} &= \iint_A G_s(v) v^2 dv du
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

$$EI_{vc} = \iint_A G_S(v) u^2 dv du \quad (3.37)$$

$$EI_{uvc} = \iint_A G_S(v) u v dv du$$

onde $G_S(v)$ é a função que define o módulo de elasticidade secante do concreto e A é a área da região trapezoidal. O valor do módulo de elasticidade secante é função somente da deformação longitudinal do concreto e, assim, pela Eq. (3.12), uma função da ordenada v .

Pela definição do módulo de elasticidade secante, tem-se que

$$G_S(v) = \sigma/\epsilon \quad (3.38)$$

Da Eq. (3.12), vem que

$$v = \epsilon/\phi \quad (3.39)$$

Substituindo-se as Eq. (3.38) e Eq. (3.39) na Eq. (3.1), obtêm-se

$$G_S(v) = A \left(1 - \frac{B}{y+C} \right) \quad (3.40)$$

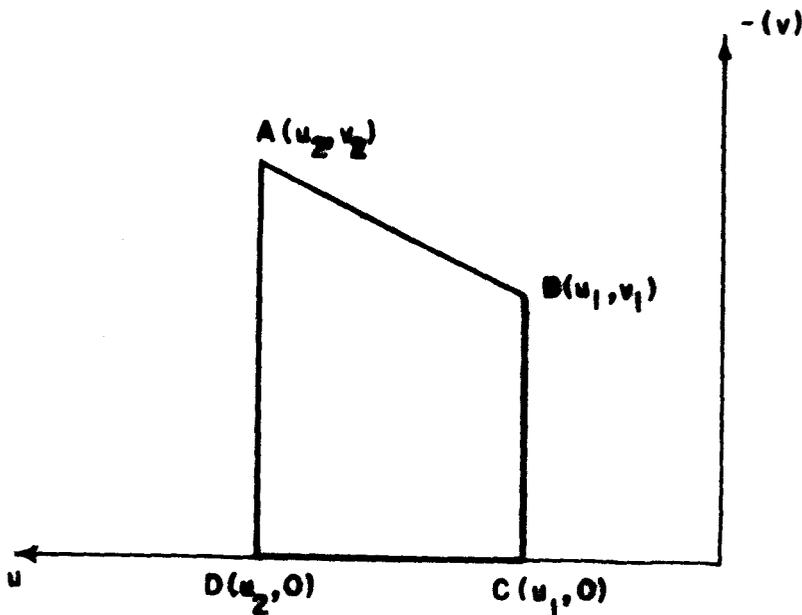


Figura 3.11 - Região trapezoidal na zona comprimida do concreto

onde

$$\begin{aligned}
 A &= - \frac{f_c}{\varepsilon_{c_1} (\kappa - 2)} \\
 B &= \frac{\varepsilon_{c_1}}{(\kappa - 2)} \left(\kappa + \frac{1}{\kappa - 2} \right) \\
 C &= \frac{\varepsilon_{c_1}}{\phi (\kappa - 2)}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Substituindo-se a Eq. (3.40) nas Eqs. (3.37) e integrando, encontra-se

$$\begin{aligned}
 EA_c &= A \left[\frac{au^2}{2} + \left(b + B \left(1 - \ln \frac{a}{C} \right) \right) u \right]_{u_1}^{u_2} - \\
 &\quad - AB \left(\left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.42a}$$

$$\begin{aligned}
 ES_{uc} &= A \left[\frac{a^2}{2} \frac{u^3}{3} + a \left(b - B \right) \frac{u^2}{2} + \left(b \left(\frac{b}{2} - B \right) + BC \left(\ln \frac{a}{C} - 1 \right) \right) u \right]_{u_1}^{u_2} \\
 &\quad + ABC \left(\left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.42b}$$

$$\begin{aligned}
 ES_{vc} &= A \left[\frac{au^3}{3} + \left(b + B \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{a}{C} \right) \right) \frac{u^2}{2} - \frac{B}{2} \left(\frac{b+C}{a} \right) u \right]_{u_1}^{u_2} - \\
 &\quad - \frac{AB}{2} \left(\left(u_2^2 - \left(\frac{b+C}{a} \right)^2 \right) \ln \left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(u_1^2 - \left(\frac{b+C}{a} \right)^2 \right) \ln \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.42c}$$

$$\begin{aligned}
 EI_{uc} &= A \left[\frac{a^3}{3} \frac{u^4}{4} + a^2 \left(b - \frac{B}{2} \right) \frac{u^3}{3} + \left(b^2 - Bb + BC \right) \frac{au^2}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left(\frac{b^2}{3} - \frac{Bb}{2} + BC \right) b + BC^2 \left(1 - \ln \frac{a}{C} \right) \right) u \right]_{u_1}^{u_2} - \\
 &\quad - ABC^2 \left(\left(u_2^2 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_2 + \frac{b+C}{a} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(u_1^2 + \frac{b+C}{a} \right) \ln \left(u_1 + \frac{b+C}{a} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.42d}$$

$$\begin{aligned}
EI_{vc} = & A \left[\frac{au^4}{4} + (b + B \left(\frac{1}{3} - \ln \frac{a}{C} \right)) \frac{u^3}{3} - B \left(\frac{b+C}{a} \right) \frac{u^2}{6} + \right. \\
& + B \left(\frac{b+C}{a} \right)^2 \frac{u}{3} \Big]_{u_1}^{u_2} - \frac{AB}{3} \left((u_2^3 + \left(\frac{b+C}{a} \right)^3) \ln(u_2 + \frac{b+C}{a}) - \right. \\
& \left. - (u_1^3 + \left(\frac{b+C}{a} \right)^3) \ln(u_1 + \frac{b+C}{a}) \right) \quad (3.42e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_{uvc} = & A \left[a^2 \frac{u^4}{8} + a (b-B) \frac{u^3}{3} + (b \left(\frac{b}{2} - B \right) + \right. \\
& + BC \left(\ln \frac{a}{C} - \frac{1}{2} \right)) \frac{u^2}{2} + \frac{BC}{2} \left(\frac{b+C}{a} \right) u \Big]_{u_1}^{u_2} + \\
& + \frac{ABC}{2} \left((u_2^2 - \left(\frac{b+C}{a} \right)^2) \ln(u_2 + \frac{b+C}{a}) - \right. \\
& \left. - (u_1^2 - \left(\frac{b+C}{a} \right)^2) \ln(u_1 + \frac{b+C}{a}) \right) \quad (3.42f)
\end{aligned}$$

Se acontecer que o valor de a na Eq.(3.35) seja nulo, as Eqs.(3.42) não são utilizáveis, e torna-se necessário usar o seguinte conjunto de expressões

$$EA_C = [A (b - B \ln(\frac{b+C}{C})) u]_{u_1}^{u_2} \quad (3.43a)$$

$$ES_{uc} = [A \left(\frac{b^2}{2} - Bb + BC \ln(\frac{b+C}{C}) \right) u]_{u_1}^{u_2} \quad (3.43b)$$

$$ES_{vc} = [A (b - B \ln(\frac{b+C}{C})) \frac{u^2}{2}]_{u_1}^{u_2} \quad (3.43c)$$

$$EI_{uc} = [A \left(\frac{b^3}{3} - \frac{Bb^2}{2} + BCb - BC^2 \ln(\frac{b+C}{C}) \right) u]_{u_1}^{u_2} \quad (3.43d)$$

$$EI_{vc} = [A (b - B \ln(\frac{b+C}{C})) \frac{u^3}{3}]_{u_1}^{u_2} \quad (3.43e)$$

$$EI_{uvc} = [A (b \left(\frac{b}{2} - B \right) + BC \ln(\frac{b+C}{C})) \frac{u^2}{2}]_{u_1}^{u_2} \quad (3.43f)$$

No caso em que a curvatura ϕ da seção seja nula (compressão ou tração simples), as Eqs.(3.42) e Eqs.(3.43) tornam-se não utilizáveis. Nestas condições, deve-se usar este outro conjunto de expressões

$$EA_C = E_{sec} \left[\frac{au^2}{2} + bu \right]_{u_1}^{u_2} \quad (3.44a)$$

$$ES_{uc} = \frac{E_{sec}}{2} \left[\frac{a^2 u^3}{3} + \frac{2abu^2}{2} + b^2 u \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.44b)$$

$$ES_{vc} = E_{sec} \left[\frac{au^3}{3} + \frac{bu^2}{2} \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.44c)$$

$$EI_{uc} = \frac{E_{sec}}{2} \left[\frac{a^3 u^4}{4} + a^2 bu^3 + \frac{3ab^2 u^2}{2} \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.44d)$$

$$EI_{vc} = E_{sec} \left[\frac{au^4}{4} + \frac{bu^3}{3} \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.44e)$$

$$EI_{uvc} = \frac{E_{sec}}{2} \left[\frac{a^2 u^4}{2} + 2ab \frac{u^3}{3} + \frac{b^2 u^2}{2} \right] \frac{u_2}{u_1} \quad (3.44f)$$

onde E_{sec} é o módulo de elasticidade secante do concreto, que pôde ser calculado pela Eq. (3.45), obtida a partir da Eq. (3.1).

$$E_{sec} = \frac{\kappa - \eta}{1 + (\kappa - 2)\eta} \frac{f_c}{\epsilon_{c1}} \quad (3.45)$$

Para a zona tracionada do concreto pode-se tomar as mesmas expressões, Eqs. (3.42), Eqs. (3.43) ou Eqs. (3.44), tendo-se apenas o cuidado de usar os parâmetros que aparecem na Eq. (3.3).

3.3 - A Rigidez Torsional dos Elementos

3.3.1 - Hipóteses Básicas

As seções cheias de concreto armado submetidas à torção funcionam segundo a torção de St. Venant [68]. A seção fica sujeita basicamente a tensões de corte. As seções apresentam um pequeno empenamento, que não afeta em nada a capacidade de carga da peça.

O comportamento estrutural de uma seção de concreto armado submetida a torção de St. Venant difere nas condições fissurada e não fissurada. Assim, adotou-se conforme [14], as seguintes relações

$$GK_{TI} = 0,30 E_c I_t \quad (3.46)$$

$$GK_{TII} = 0,10 E_c I_t \quad (3.47)$$

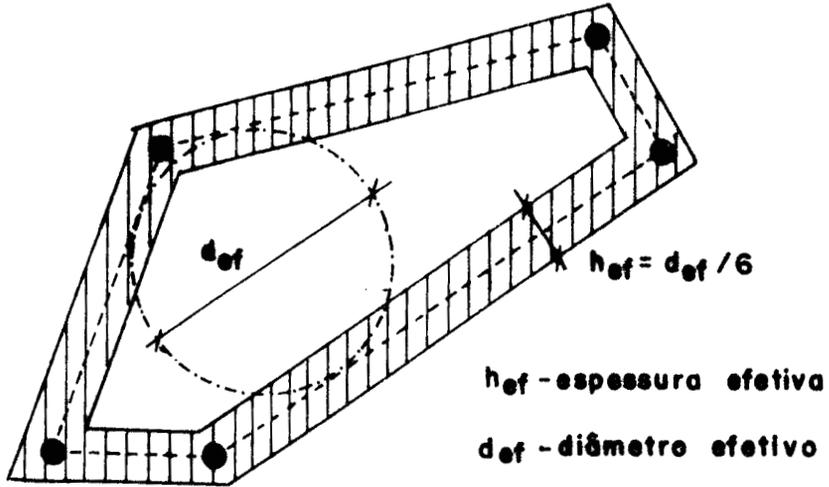


Figura 3.12 - Seção efetiva para o cálculo do momento de inércia à torção

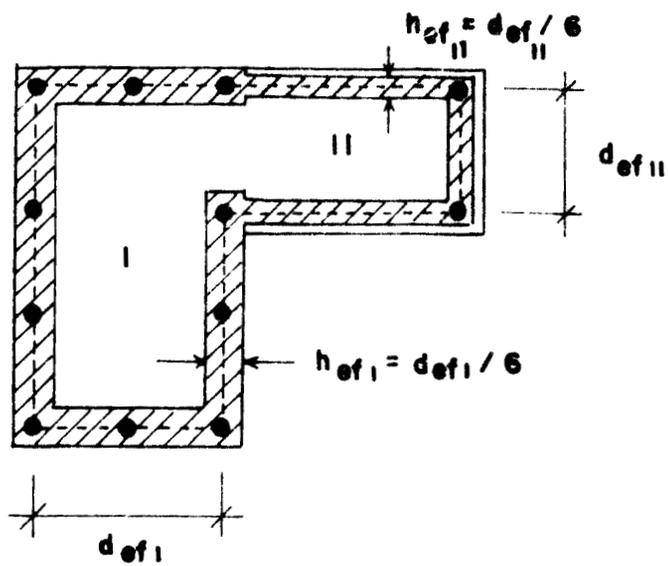


Figura 3.13 - Seção efetiva no caso de seções compostas por retângulos

onde GK_{TI} é a rigidez para o estágio I (não fissurado), GK_{TII} é a rigidez para o estágio II (fissurado), I_t é o momento de inércia à torção e E_c é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

Buscando uma automatização e uma generalização do cálculo, adotou-se o modelo apresentado por [21] para avaliação do momento de inércia à torção da seção transversal (Fig. 3.12).

No caso de seções transversais compostas por retângulos (do tipo T ou L), a forma da seção efetiva pode ser obtida, conforme [16], da aplicação das regras, para os retângulos componentes da seção de maneira separada (ver Fig. 3.13).

Apesar do propósito do modelo se destinar a determinação da resistência última à torção de uma seção de concreto armado, os resultados do cálculo do momento de inércia à torção para este modelo não diferem significativamente para os de seção cheia.

3.3.2 - Determinação da Rigidez Torsional dos Elementos

3.3.2.1 - Propriedades das Seções Delgadas Fechadas

Para o desenvolvimento desta formulação, considerar-se-á o elemento prismático da Fig. 3.14, posicionado conforme o sistema de coordenadas x, y, z , de tal forma que o eixo dos z , coincide com o eixo da barra prismática, e os outros dois com os eixos principais de inércia da seção transversal.

Designando-se por A a área da seção e por I_x e I_y os seus momentos de inércia em relação, respectivamente, aos eixos dos x e dos y , tem-se

$$\begin{aligned} \int_A dA &= A \quad ; \quad \int_A y \, dA = 0 \quad ; \\ \int_A x \, dA &= 0 \quad ; \quad \int_A x y \, dA = 0 \quad ; \\ \int_A y^2 \, dA &= I_x \quad ; \quad \int_A x^2 \, dA = I_y \end{aligned} \quad (3.48)$$

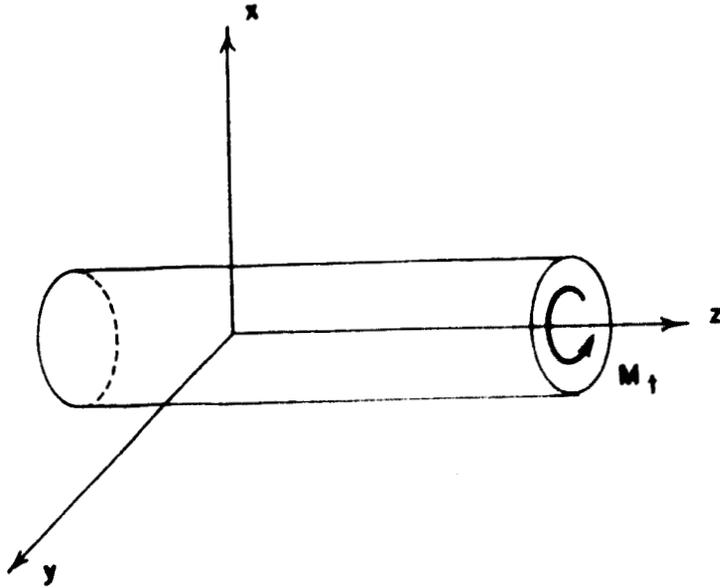


Figura 3.14 - Elemento prismático submetido à torção

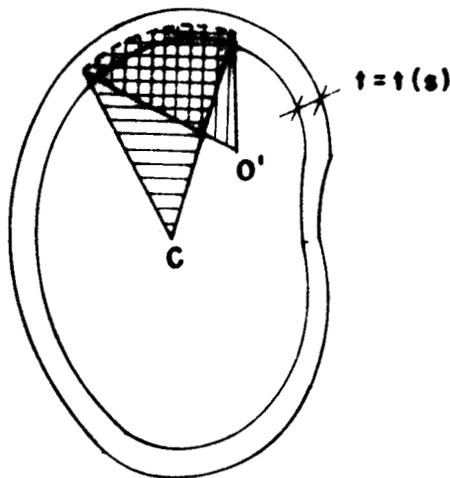


Figura 3.15 - Centro de corte e centro de rotação

Pode-se determinar para uma seção transversal, conforme a Fig. 3.15, a área setorial $\bar{\omega}$ correspondente a um centro de rotação qualquer O' . A partir desta, pode se chegar a área setorial principal ω , aplicando-se a seguinte expressão

$$\omega = \bar{\omega} + ax + by + c \quad (3.49)$$

A área setorial principal correspondem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \int_A \omega \, dA &= 0 \quad ; \quad \int_A y \, \omega \, dA = 0 \quad ; \\ \int_A x \, \omega \, dA &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Usando a Eq. (3.49) e as propriedades dadas pelas Eqs. (3.48) e Eqs. (3.50), tem-se

$$\begin{aligned} \int_A \omega \, dA &= \int_A \bar{\omega} \, dA + a \int_A x \, dA + b \int_A y \, dA + c \int_A dA = \\ &= \int_A \bar{\omega} \, dA + c A = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

De maneira análoga

$$\int_A x \, \omega \, dA = \int_A x \, \bar{\omega} \, dA + a I_Y = 0 \quad (3.52)$$

$$\int_A y \, \omega \, dA = \int_A y \, \bar{\omega} \, dA + b I_X = 0 \quad (3.53)$$

Donde se conclui que

$$\begin{aligned} a &= - \frac{1}{I_Y} \int_A \bar{\omega} \, x \, dA \\ b &= - \frac{1}{I_X} \int_A \bar{\omega} \, y \, dA \\ c &= - \frac{1}{A} \int_A \bar{\omega} \, dA \end{aligned} \quad (3.54)$$

Estes são os coeficientes a se introduzir na Eq. (3.49) para obter-se a área setorial procurada. Conhecida a área setorial $\bar{\omega}$ correspondente ao centro de rotação O' , de coordenadas x_0 e y_0 , é possível determinar as coordenadas x_C e y_C do centro de corte C, com as seguintes fórmulas, onde a e b são os coeficientes dados pelas Eqs. (3.54)

$$x_C = x_0 + b \quad (3.55)$$

$$y_C = y_0 - a$$

Ainda, para seções delgadas fechadas tem-se que

$$\omega = \bar{\omega} - A^* \int_L \frac{ds}{t} \quad (3.56)$$

onde s é a coordenada que descreve o desenvolvimento L da parede, t é a espessura da parede e A^* é uma constante da seção que vale

$$A^* = \frac{I_t}{2A_m} \quad (3.57)$$

onde A_m é a área limitada pelo eixo da parede e I_t é o momento de inércia à torção, dado por

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\int_L \frac{ds}{t}} \quad (3.58)$$

3.3.2.2 - Cálculo das Propriedades dos Elementos

A seguir, serão determinadas as propriedades da seção, conforme o item anterior, a partir das coordenadas dos vértices do perímetro médio da seção efetiva do elemento.

As propriedades da seção - área, momentos estáticos e momentos de inércia - podem ser obtidos pelas seguintes expressões

$$A = \sum_{i=1}^{NL} \{t_i [(x_{i+1} - x_i) \cos \alpha_i + (y_{i+1} - y_i) \text{sen} \alpha_i]\} \quad (3.59a)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{NL} \left[\frac{t_i}{2 \text{sen} \alpha_i} (y_{i+1}^2 - y_i^2) \right]$$

$$\text{ou quando } \text{sen} \alpha_i = 0 \quad (3.59b)$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{NL} [t_i y_i (x_{i+1} - x_i) \cos \alpha_i]$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{NL} \left[\frac{t_i}{2 \cos \alpha_i} (x_{i+1}^2 - x_i^2) \right] \quad (3.59c)$$

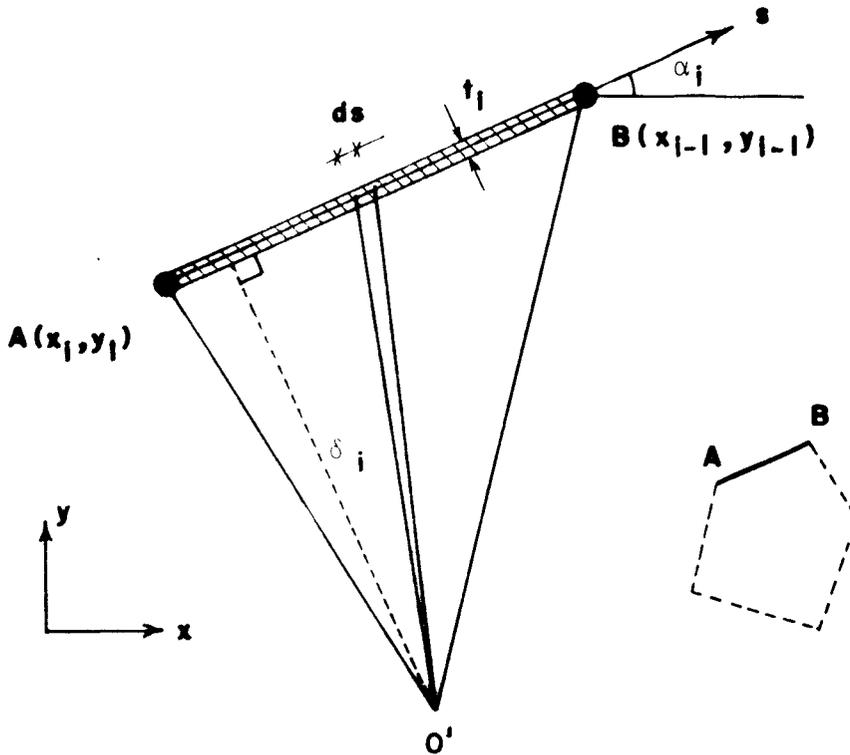


Figura 3.16 - Lado genérico da seção transversal do elemento

ou quando $\cos \alpha_i = 0$

$$S_Y = \sum_{i=1}^{NL} [t_i x_i (y_{i+1} - y_i) \operatorname{sen} \alpha_i] \quad (3.59c)$$

$$I_X = \sum_{i=1}^{NL} \left[\frac{t_i}{3 \operatorname{sen} \alpha_i} (y_{i+1}^3 - y_i^3) \right] \quad (3.59d)$$

ou quando $\operatorname{sen} \alpha_i = 0$

$$I_X = \sum_{i=1}^{NL} [t_i y_i^2 (x_{i+1} - x_i) \operatorname{cos} \alpha_i]$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^{NL} \left[\frac{t_i}{3 \operatorname{cos} \alpha_i} (x_{i+1}^3 - x_i^3) \right] \quad (3.59e)$$

ou quando $\cos \alpha_i = 0$

$$I_Y = \sum_{i=1}^{NL} [t_i x_i^2 (y_{i+1} - y_i) \operatorname{sen} \alpha_i]$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{NL} \left\{ t_i \left[\frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} \operatorname{sen} \alpha_i + \frac{y_{i+1}^3 - y_i^3}{3} \operatorname{cos} \alpha_i + \right. \right.$$

$$+ (y_i \cos \alpha_i - x_i \operatorname{sen} \alpha_i) \frac{(x_{i+1}^2 - x_i^2 + y_i^2 - y_{i+1}^2)}{2}] \quad (3.59f)$$

onde NL é o número de lados da seção efetiva.

Com estes valores determinam-se os eixos principais de inércia e faz-se a translação e a rotação necessárias. Por simplificação da notação, serão mantidos x_i, y_i , agora como coordenadas que definem a seção efetiva com relação aos eixos principais da seção.

A distância δ_i do centro de rotação O' até o lado i da seção é dada por

$$\delta_i = \operatorname{sen} \alpha_i (x_0 - x_i) + \cos \alpha_i (y_i - y_0) \quad (3.60)$$

onde x_0, y_0 são as coordenadas de O' .

O comprimento b_i do lado é dado por

$$b_i = \cos \alpha_i (x_{i+1} - x_i) + \operatorname{sen} \alpha_i (y_{i+1} - y_i) \quad (3.61)$$

A área limitada pelo eixo da parede A_m e o momento de inércia à torção I_t serão assim dados por

$$A_m = \sum_{i=1}^{NL} \left(\frac{b_i \delta_i}{2} \right) \quad (3.62)$$

e

$$I_t = \frac{4 A_m^2}{\sum_{i=1}^{NL} \left(\frac{b_i}{t_i} \right)} \quad (3.63)$$

Usando a Eq. (3.56), obtêm-se a expressão para a área setorial

$$\bar{\omega} = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{Tj} + \left(\delta_i - \frac{I_t}{2 A_m t_i} \right) [(x - x_i) \cos \alpha_i + (y - y_i) \operatorname{sen} \alpha_i] \quad (3.64)$$

onde

$$\bar{\omega}_{Tj} = \left(\delta_j - \frac{I_t}{2 A_m t_j} \right) [(x_{j+1} - x_j) \cos \alpha_j + (y_{j+1} - y_j) \operatorname{sen} \alpha_j] \quad (3.65)$$

Com a expressão para a área setorial $\bar{\omega}$, Eq. (3.64), pode-se determinar o valor das integrais que aparecem nas Eqs. (3.54). Assim, obtêm-se

$$\begin{aligned} \int_A \bar{\omega} x \, dA = & \sum_{i=1}^{NL} \left\{ \left(\delta_i t_i - \frac{I_t}{2A_m} \right) \left[\frac{y_{i+1}^3 - y_i^3}{3 \operatorname{tg} \alpha_i} + y_i^2 \frac{y_{i+1} - y_i}{\operatorname{tg} \alpha_i} - \right. \right. \\ & - y_i \frac{y_{i+1}^2 - y_i^2}{\operatorname{tg} \alpha_i} + x_i \frac{y_{i+1}^2 - y_i^2}{2} - x_i y_i (y_{i+1} - y_i) + \\ & \left. \left. + \frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} - x_i \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} \right] + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{Tj} \right) \left[\frac{t_i}{2 \cos \alpha_i} (x_{i+1}^2 - x_i^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \int_A \bar{\omega} y \, dA = & \sum_{i=1}^{NL} \left\{ \left(\delta_i t_i - \frac{I_t}{2A_m} \right) \left[\frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} \operatorname{tg} \alpha_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + (y_i - 2x_i \operatorname{tg} \alpha_i) \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} + x_i (x_{i+1} - x_i) (x_i \operatorname{tg} \alpha_i - y_i) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{y_{i+1}^3 - y_i^3}{3} + y_i \frac{y_{i+1}^2 - y_i^2}{2} \right] + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{Tj} \right) \left[\frac{t_i}{2 \operatorname{sen} \alpha_i} (y_{i+1}^2 - y_i^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

No caso em que o $\cos \alpha_i = 0$ ($x_i = x_{i+1}$), as expressões acima ficam reduzidas para

$$\begin{aligned} \int_A \bar{\omega} x \, dA = & \sum_{i=1}^{NL} \left\{ \left(\delta_i t_i - \frac{I_t}{2A_m} \right) \left[\frac{x_i}{2} (y_{i+1} - y_i)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{Tj} \right) \left[t_i x_i (y_{i+1} - y_i) \operatorname{sen} \alpha_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \int_A \bar{\omega} y \, dA = & \sum_{i=1}^{NL} \left\{ \left(\delta_i t_i - \frac{I_t}{2A_m} \right) \left[\frac{y_{i+1}^3}{3} - \frac{y_i y_{i+1}^2}{2} + \frac{y_i^3}{6} \right] + \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{Tj} \right) \left[\frac{t_i}{2} (y_{i+1}^2 - y_i^2) \operatorname{sen} \alpha_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Quando $\operatorname{sen} \alpha_i = 0$ ($y_i = y_{i+1}$), as Eq. (3.66) e Eq. (3.67) ficam como

$$\int_A \bar{\omega} x dA = \sum_{i=1}^{NL} \left\{ \left(\delta_i t_i - \frac{I_t}{2A_m} \right) \left[\frac{x_{i+1}^3}{3} - \frac{x_i x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^3}{6} \right] + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{Tj} \right) \left[\frac{t_i}{2} (x_{i+1}^2 - x_i^2) \cos \alpha_i \right] \right\} \quad (3.70)$$

$$\int_A \bar{\omega} y dA = \sum_{i=1}^{NL} \left\{ \left(\delta_i t_i - \frac{I_t}{2A_m} \right) \left[\frac{y_i}{2} (x_{i+1} - x_i)^2 \right] + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_{Tj} \right) \left[t_i y_i (x_{i+1} - x_i) \cos \alpha_i \right] \right\} \quad (3.71)$$

Entrando com estes valores nas Eqs.(3.54), determinam-se a e b. Substituindo a e b nas Eqs.(3.55), obtêm-se as coordenadas do centro de corte da seção.

4 - AS DEFORMAÇÕES DEVIDAS A RETRAÇÃO E A FLUÊNCIA DO CONCRETO

4.1 - Conceitos Básicos

Uma peça de concreto colocada ao ar livre perde parte da água não fixada quimicamente durante o endurecimento. Produz-se assim uma diminuição de volume, denominada retração. Se por outro lado a peça é imersa em água, absorve água adicional e apresenta um aumento de volume.

A fluência é definida como um aumento das deformações relativas ao longo do tempo devido a tensões permanentes que atuam sobre o concreto. Uma peça de concreto ao ser carregada, sofre uma deformação imediata. Devido a esta deformação imediata, ocorrerá uma diminuição do volume da peça, provocando o deslocamento da água quimicamente inerte, existente no concreto, para regiões onde sua evaporação já tenha se processado. Isto desencadeia um processo, ao longo do tempo, análogo ao da retração, que produz um aumento das deformações, mantido constante o carregamento sobre a peça.

A fluência e a retração dependem, entre outros fatores, da umidade ambiente, das dimensões da peça, da composição do concreto, da temperatura ambiente e da velocidade de endurecimento do concreto. A separação entre fluência e retração é apenas convencional pois tratam basicamente do mesmo fenômeno físico.

4.2 - O Comportamento do Concreto ao Longo do Tempo Conforme o Código Modelo CEB/FIP

4.2.1 - Generalidades

No Boletim Nº 124/125 [21] do Código Modelo CEB/FIP, anexo e, são apresentadas uma série de funções obtidas experimentalmente, que descrevem o comportamento do concreto no tempo. No presente trabalho foi adotado este anexo para a a valiação das deformações de fluência e retração do concreto.

Este anexo concerne à fluência e à retração do concreto sob uma tensão de compressão constante, no máximo igual a $0,4 f_{cj}$, sendo j a idade de entrada em carga e sob condições termo-higrométricas constantes. Para a fluência, seu do mínio estende-se também para o concreto em tração.

4.2.2 - A Fluência

4.2.2.1 - Hipóteses

No domínio das tensões utilizadas, as deformações de fluência devidas a uma parcela de tensão aplicada em dois instantes diferentes são consideradas como aditivas (hipótese da superposição). Não se enquadram na hipótese da superposição e conseqüentemente na hipótese da linearidade sob tensão constante, aquelas em que as tensões são mais elevadas.

Da hipótese da superposição tem-se que a deformação de fluência sob tensão constante está ligada linearmente à tensão. Referindo-se convencionalmente a deformação inicial para uma peça em carga a 28 dias, o coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$ é definido pela equação

$$\epsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E_{c_{28}}} \phi(t, t_0) \quad (4.1)$$

onde:

$\epsilon_c(t, t_0)$ - é a deformação de fluência no instante t sob tensão constante σ_0 aplicada no instante t_0 .

$E_{c_{28}}$ - é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto a 28 dias.

A deformação total no instante t sob tensão constante (a deformação inicial no instante t mais a deformação de fluência) é dada por

$$\epsilon_{\text{tot}}(t, t_0) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c_{28}}} \right) \quad (4.2)$$

onde $E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade longitudinal inicial a uma idade t_0 .

O termo

$$F(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c_{28}}} \quad (4.3)$$

é chamado função de fluência. Note-se que por razões de simplificação, o índice c para o concreto é omitido daqui em diante para os símbolos ϵ e σ .

A função de fluência $F(t, t_0)$ representa a relação no tempo da deformação total do concreto no instante t sob tensão constante unitária.

4.2.2.2 - Determinação do Coeficiente de Fluência

O coeficiente de fluência pode ser determinado por

$$\phi(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \phi_d \beta_d(t-t_0) + \phi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] \quad (4.4)$$

com

$$\beta_a(t_0) = 0,8 \left(1 - \frac{f_c(t_0)}{f_{c_{\infty}}} \right) \quad (4.5)$$

onde:

ϕ_d - é o coeficiente de fluência para a parcela da deformação elástica retardada, tomado igual a 0,4.

$\phi_f = \phi_{f_1} \cdot \phi_{f_2}$ - é o coeficiente de fluência para a parcela de deformação plástica retardada.

ϕ_{f_1} - é um coeficiente que depende do meio ambiente (Tab. 4.1, coluna 3).

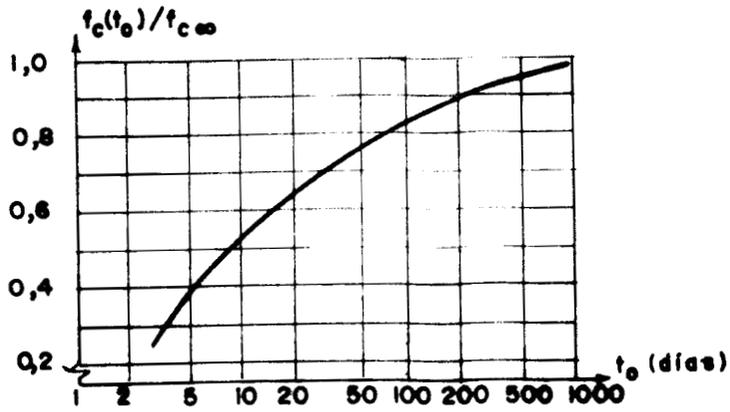


Figura 4.1 - Variação da resistência do concreto com a idade

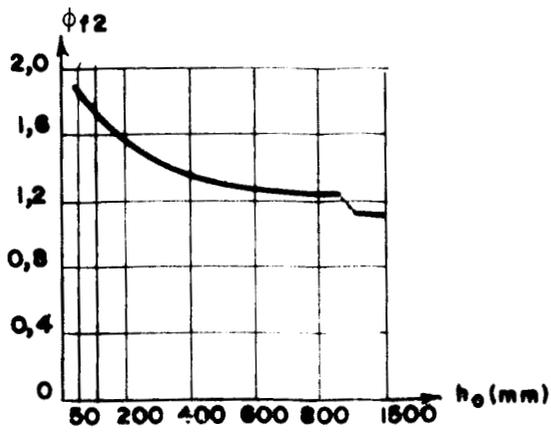


Figura 4.2 - Influência da espessura fictícia sobre a fluência

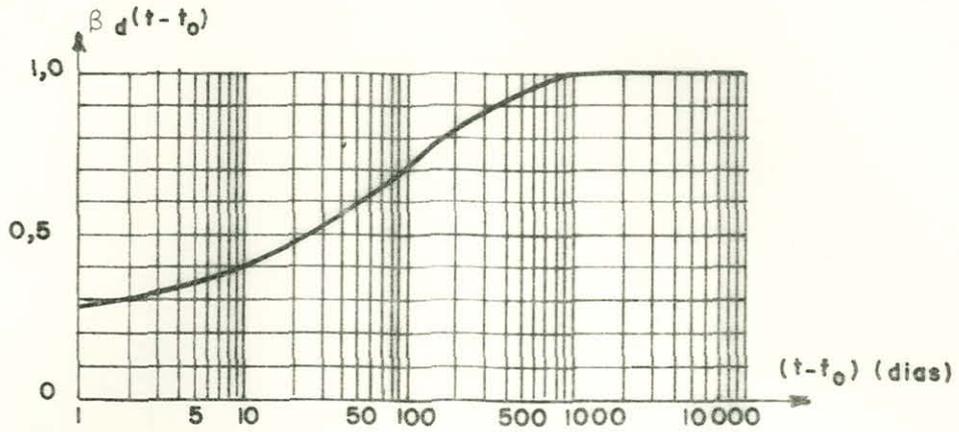


Figura 4.3 - Desenvolvimento no tempo da deformação elástica de fluência

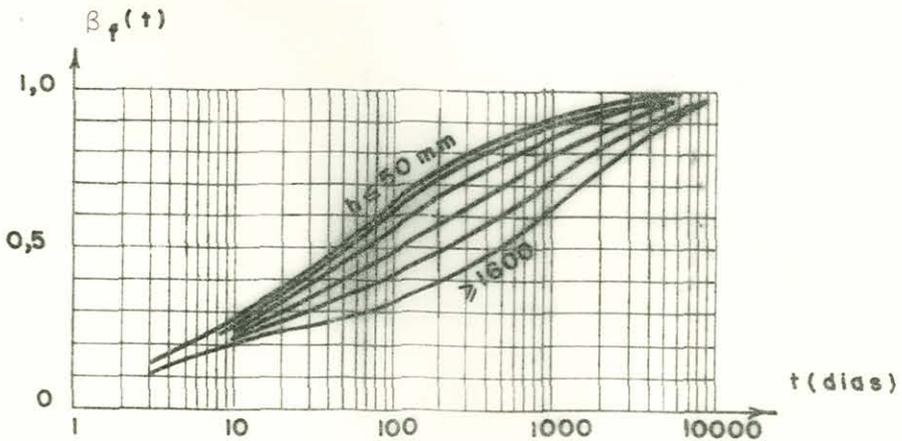


Figura 4.4 - Desenvolvimento no tempo da deformação plástica de fluência

meio ambiente	umidade relativa	coeficientes		coeficiente λ
		fluência ϕ_{f_1}	retração ϵ_{s_1}	
1	2	3	4	5
água		0,8	+0,00010	30
atmosfera muito úmida	90%	1,0	-0,00013	5
exterior em geral	70%	2,0	-0,00032	1,5
atmosfera muito seca	40%	3,0	-0,00052	1

Tabela 4.1 - Coeficientes para fluência e retração

- ϕ_{f_2} - é um coeficiente que depende da espessura fictícia h_0 (Fig. 4.2).
- β_d - é a função correspondente ao desenvolvimento no tempo da deformação elástica de fluência (Fig. 4.3).
- β_f - é a função correspondente ao desenvolvimento no tempo da deformação plástica de fluência (Fig. 4.4).
- t - é a idade do concreto no momento considerado, corrigida segundo o item 4.2.4.
- t_0 - é a idade do concreto no momento em que a peça é carregada, corrigida segundo o item 4.2.4.

A deformação total sob tensão constante unitária (função de fluência) é obtida da Eq. (4.4)

$$F(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\beta_a(t_0)}{E_{c_{28}}} + \frac{\phi_d \beta_d(t-t_0)}{E_{c_{28}}} + \frac{\phi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)]}{E_{c_{28}}} \quad (4.6)$$

O valor do módulo de elasticidade $E_c(t_0)$ que caracteriza a deformação inicial deve ter em conta somente a deformação que ocorre nos primeiros instantes após a aplicação da carga (os primeiros 30-60 segundos). Na ausência de ensaios específicos, $E_c(t_0)$ deve ser tomado igual a $1,25 E_{cm}$, com E_{cm} determinado por meio da Eq. (4.7), sendo $f_{cm}(t_0)$ a resistência do concreto no instante t_0 (idade corrigida segundo o item 4.2.4). Na falta de dados mais precisos esta resistência pode ser tirada da Fig. 4.1.

$$E_{cm} = 9500 [f_{cm}(t_0)]^{1/3} \quad (4.7)$$

Pelas Eq. (4.4) e Eq. (4.6) admite-se que a deformação lenta resulta da soma de três parcelas:

- o termo $\beta_a(t_0)/E_{c_{28}}$, representa a parcela de deformação que se desenvolve dentro das primeiras horas após a aplicação da carga (24 horas);
- o termo $\phi_d \beta_d(t-t_0)/E_{c_{28}}$, representa a parte reversível da deformação de fluência; a parcela reversível é supos-

ta independente do tempo, fato este caracterizado pelo valor constante do coeficiente ϕ_d ;

- o termo $\phi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)]/E_{C_{28}}$, representa a deformação de fluência irreversível; esta parcela varia bastante dependendo da idade de entrada em carga da peça.

Os valores indicados na Tab. 4.1 para ϕ_{f_1} e ϵ_{s_1} se referem a concretos com consistência plástica. Devem ser reduzidos de 25 % para os concretos de consistência seca e aumentados de 25 % para os concretos de consistência mole.

4.2.3 - A Retração

A deformação específica de retração que se desenvolve em um intervalo de tempo $(t-t_0)$ é dado por

$$\epsilon_s(t, t_0) = \epsilon_{s_0} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (4.8)$$

onde

$\epsilon_{s_0} = \epsilon_{s_1} \cdot \epsilon_{s_2}$ - é o coeficiente de retração;

ϵ_{s_1} - é um coeficiente que depende do meio-ambiente (Tab. 4.1, coluna 4);

ϵ_{s_2} - é um coeficiente que depende da espessura fictícia h_0 (item 4.2.5 e Fig. 4.5);

β_s - é a função que corresponde ao desenvolvimento da retração no tempo (Fig. 4.6); depende da espessura fictícia h_0 (item 4.2.5);

t - é a idade do concreto no momento considerado, corrigido segundo o item 4.2.4, empregando-se $\alpha = 1$ em todos os casos;

t_0 - é a idade do concreto a partir da qual a influência da retração é considerada, corrigida segundo o item 4.2.4, empregando-se $\alpha = 1$ em todos os casos.

4.2.4 - Idade Corrigida

Para considerar-se a temperatura ambiente que ocorre durante o endurecimento do concreto, se ela é sensivelmente diferente de 20°C, e do tipo de cimento, a idade real do

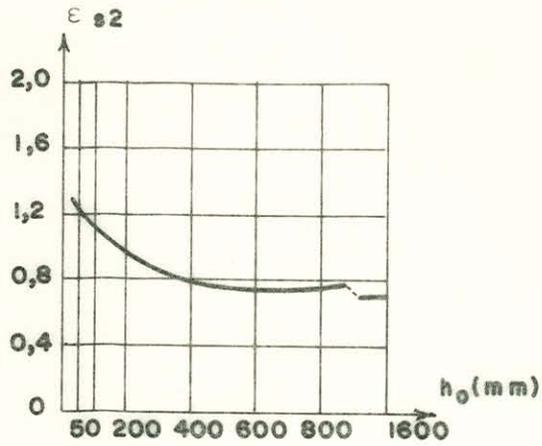


Figura 4.5 - Influência da espessura fictícia sobre a retração

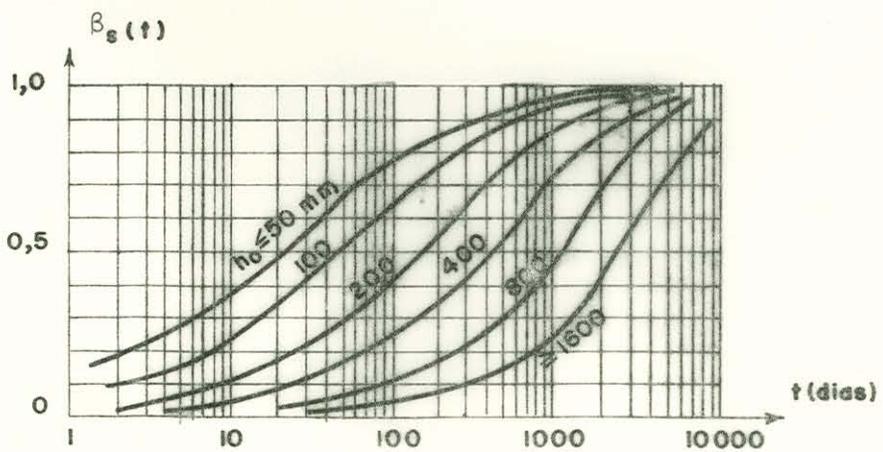


Figura 4.6 - Desenvolvimento da retração no tempo

concreto deve ser corrigida.

Considerando-se cada período real Δt_m , no curso do qual a temperatura média ambiente é $T(t_m)$, o tempo corrigido é obtido pela relação

$$t = \frac{\alpha}{30} \sum_0^{t_m} \{ [T(t_m) + 10] \Delta t_m \} \quad (4.9)$$

onde:

α - é um coeficiente que assume os seguintes valores:

- 1, para os cimentos com endurecimento normal e lento
- 2, para os cimentos com endurecimento rápido
- 3, para os cimentos com endurecimento rápido e de alta resistência.

T - é a temperatura média diária do concreto em graus centígrados;

Δt_m - número de dias em que a temperatura diária média teve o valor T .

4.2.5 - Espessura Fictícia

A espessura fictícia é definida por

$$h_0 = \lambda \frac{2 A_c}{u} \quad (4.10)$$

onde:

λ - é um coeficiente que depende do meio-ambiente (Tab. 4.1, coluna 5);

A_c - é a área da seção de concreto;

u - é o perímetro em contato com a atmosfera.

4.2.6 - Formulação Geral

Pela aplicação do princípio da superposição, a deformação total no concreto será

- para variações descontínuas da tensão:

$$\epsilon_{tot}(t, t_0) = \epsilon_n(t) + \sigma_0 F(t, t_0) + \sum F(t, t_i) \Delta \sigma(t_i) \quad (4.11)$$

- para uma variação contínua da tensão:

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t, t_0) = \varepsilon_n(t) + \sigma_0 F(t, t_0) + \int_{t_0}^t F(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (4.12)$$

com

$\varepsilon_n(t)$ - deformação independente da tensão (retração);

$F(t, \tau)$ - função de fluência;

$\Delta\sigma(t_i)$ - variação da tensão no instante t_i ;

$d\sigma(\tau)$ - variação da tensão em um intervalo infinitesimal de tempo.

4.3 - Ajustagem das Curvas que Descrevem o Comportamento do Concreto no Tempo

4.3.1 - Generalidades

Para automatizar o cálculo das deformações assumidas pelo concreto no decorrer do tempo, é necessário que se tenham expressões analíticas para o conjunto de curvas propostas pelo CEB e que foram apresentadas no item 4.2. Com este propósito fez-se a ajustagem destas curvas com curvas do tipo logarítmico, Eq. (4.13), ou potencial, Eq. (4.14). O CEB propôs expressões analíticas para algumas destas curvas em um anexo do Boletim Nº 136 [22]. Contudo não foi possível obter estas expressões até a data de conclusão deste trabalho.

$$y = a + b \ln x \quad (4.13)$$

$$y = a x^b \quad (4.14)$$

Conforme a necessidade, a ajustagem foi feita por trechos, de forma a permitir que a expressão obtida para a curva fosse a mais fiel possível.

4.3.2 - Resultados Obtidos

4.3.2.1 - Variação da Resistência do Concreto com a Idade

A expressão obtida para a curva da Fig. 4.1, que relaciona a variação da resistência do concreto com a idade de $(f_c(t_0)/f_{c\infty} \times t_0)$ foi da forma seguinte

$$f_c(t_0) / f_{c\infty} = a + b \ln t_0 \quad (4.15)$$

onde os valores de a e b estão apresentados na Tab. 4.2, e t_0 é dado em dias.

4.3.2.2 - Influência da Espessura Fictícia sobre a Fluência

A curva logarítmica definida pela Eq.(4.16) representa adequadamente a curva da Fig. 4.2, que expressa a influência da espessura fictícia sobre a fluência

$$\phi_{f_2} = 2,6833 - 0,21392 \ln h_0 \quad (4.16)$$

onde h_0 é dado em dias.

4.3.2.3 - Desenvolvimento no Tempo da Deformação Elástica de Fluência

A expressão que de melhor maneira descreve a curva do desenvolvimento no tempo da deformação elástica de fluência, conforme a Fig. 4.3, é da forma potencial apresentada pela Eq.(4.17).

$$\beta_d(t-t_0) = a (t-t_0)^b \quad (4.17)$$

onde t e t_0 são dados em dias e os valores de a e b são os que aparecem na Tab. 4.3.

4.3.2.4 - Desenvolvimento no Tempo da Deformação Plástica de Fluência

As curvas apresentadas na Fig. 4.4, que descrevem o desenvolvimento no tempo da deformação plástica de fluência foram divididas para ajustagem em diversos trechos. Determinados trechos apresentaram melhor ajustagem por uma curva logarítmica, enquanto outros se ajustaram melhor a uma curva potencial. Desta maneira, as curvas da Fig. 4.5 ficaram avaliadas ou por uma expressão de curva logarítmica, Eq.(4.18), ou por uma expressão de curva potencial, Eq.(4.19).

$$\beta_f(t) = a + b \ln t \quad (4.18)$$

onde t é dado em dias e os coeficientes a e b são dados pela Tab. 4.4.

$$\beta_f(t) = a t^b \quad (4.19)$$

t	a	b
$t \leq 20$	0,080161	0,18899
$20 < t < 200$	0,30811	0,11526
$200 \leq t \leq 1000$	0,65541	0,048194
$t \geq 1000$	1	0

Tabela 4.2 - Coeficientes para a expressão da variação da resistência do concreto com a idade

$t - t_0$	a	b
$t - t_0 \leq 10$	0,27461	0,16049
$10 < t - t_0 \leq 100$	0,22979	0,24065
$100 < t - t_0 \leq 500$	0,31075	0,17930
$500 < t - t_0 \leq 1000$	0,58758	0,075304
$t - t_0 > 1000$	1	0

Tabela 4.3 - Coeficientes para a expressão do desenvolvimento no tempo da deformação elástica de fluência

h_0	≤ 50	100	200	400	800	≥ 1600
$t \leq 10$		a=0,024880 b=0,097768	a=0,024568 b=0,092598	a=0,023403 b=0,08756	a=0,024956 b=0,081142	a=0,029617 b=0,072656
$10 \leq t \leq 100$		a=-0,12015 b=0,15826	a=-0,077985 b=0,13716	a=-0,034540 b=0,11179		a=0,062386 b=0,058251
$100 \leq t \leq 1000$	a=0,11431 b=0,11917	a=0,066765 b=0,12187	a=-0,009245 b=0,12655	a=-0,14792 b=0,13713		
$t \geq 1000$	a=0,71150 b=0,032525	a=0,59100 b=0,045564	a=0,46520 b=0,058785	a=0,25272 b=0,081344	a=-0,071800 b=0,11659	a=-0,40237 b=0,15181

Tabela 4.4 - Coeficientes para a expressão logarítmica para o desenvolvimento no tempo da deformação plástica de fluência

h_0	≤ 50	100	200	400	800	≥ 1600
$t \leq 10$	a=0,074882 b=0,57253					
$10 \leq t \leq 100$	a=0,12723 b=0,35828				a=0,11001 b=0,29572	
$100 \leq t \leq 1000$					a=0,14940 b=0,22864	a=0,09222 b=0,278407
$t \geq 1000$						

Tabela 4.5 - Coeficientes para a expressão potencial para o desenvolvimento no tempo da deformação plástica de fluência

onde t é dado em dias e os coeficientes a e b são dados pela Tab. 4.5.

4.3.2.5 - Influência da Espessura Fictícia sobre a Retração

A curva apresentada na Fig. 4.5 que exprime a influência da espessura fictícia sobre a retração é aproximada pela expressão

$$\epsilon_{S_2} = a h_0^b \quad (4.20)$$

onde h_0 é dado em dias e a e b são obtidos na Tab. 4.6.

4.3.2.6 - Desenvolvimento da Retração ao Longo do Tempo

Para as curvas da Fig. 4.6 que descrevem o desenvolvimento da retração ao longo do tempo, foi necessário adotar o mesmo critério do item 4.3.2.4 sobre o desenvolvimento no tempo da deformação plástica de fluência. Assim, trechos das curvas da Fig. 4.6 ficam avaliadas por meio de uma expressão logarítmica, Eq.(4.21), e outros por meio de uma expressão potencial, Eq.(4.22).

	a	b
$h_0 \leq 50$	1,2000	0
$50 < h_0 \leq 200$	2,7117	-0,20752
$200 < h_0 < 600$	2,0473	-0,15563
$600 \leq h_0 < 1600$	1,4387	-0,097608
$h_0 \geq 1600$	0,7000	0

Tabela 4.6 - Coeficientes para a expressão da influência da espessura fictícia sobre a retração

h_0	≤ 50	100	200	400	800	≥ 1600
$t \leq 10$	a=0,0001350 b=0,16298			a=-0,051608 b=0,041934		
$10 \leq t \leq 100$	a=-0,041320 b=0,17354	a=-0,18935 b=0,17468			a=-0,11663 b=0,045878	
$100 \leq t \leq 1000$	a=0,38061 b=0,086596	a=0,044987 b=0,13050	a=-0,49430 b=0,19764			
$t \geq 1000$		a=0,63182 b=0,043048	a=0,45867 b=0,059967	a=-0,23345 b=0,13919	a=-1,15666 b=0,23883	a=-1,85436 b=0,30033

Tabela 4.7 - Coeficientes para a expressão logarítmica para o desenvolvimento da retração ao longo do tempo

h_0	≤ 50	100	200	400	800	≥ 1600
$t \leq 10$		a=0,059435 b=0,59523	a=0,013379 b=0,92859			
$10 \leq t \leq 100$			a=0,032886 b=0,55730	a=0,0093713 b=0,71732		a=0,0001958 b=1,1858
$100 \leq t \leq 1000$				a=0,028119 b=0,46993	a=0,0047746 b=0,65274	a=0,0020192 b=0,67665
$t \geq 1000$	a=0,81970 b=0,023378					

Tabela 4.8 - Coeficientes para a expressão potencial para o desenvolvimento da retração ao longo do tempo

umidade (u)	expressões para cálculo dos coeficientes
$u \geq 90 \%$	$\phi_{f_1} = 2,8 - 2 u$ $\epsilon_{s_1} = -0,0022 + 0,0023 u$ $\lambda = -220 + 250 u$
$70 \% < u < 90 \%$	$\phi_{f_1} = 5,5 - 5 u$ $\epsilon_{s_1} = 0,00311 - 0,0049 u$ $\lambda = -10,75 + 17,5 u$
$u \leq 70 \%$	$\phi_{f_1} = (13 - 10 u)/3$ $\epsilon_{s_1} = (-0,00236 - 0,002 u)/3$ $\lambda = (1 + 5 u)/3$

Tabela 4.9 - Coeficientes dependentes da umidade para a fluência e a retração

$$\beta_s(t) = a + b \ln t \quad (4.21)$$

onde t é dado em dias e os coeficientes a e b são dados pela Tab. 4.7.

$$\beta_s(t) = a t^b \quad (4.22)$$

onde t é dado em dias e os coeficientes a e b são dados pela Tab. 4.8.

4.3.2.7 - Coeficientes Dependentes da Umidade para a Fluência e a Retração

A fim de obter-se os coeficientes dependentes da umidade para fluência e retração interpolou-se linearmente os valores apresentados na Tab. 4.1. As expressões resultantes estão apresentadas na Tab. 4.9.

4.4 - Influência da Armadura sobre a Fluência e a Retração do Concreto

Quando ocorre fluência e/ou retração em peças armadas de concreto, a armadura, devido à aderência, acompanha estas deformações e fica por isso submetida a tensões adicionais. Pelas condições de equilíbrio há uma redistribuição interna de esforços, as tensões de compressão no concreto diminuem e as tensões no aço aumentam.

Suponha-se que uma seção de concreto armado com deformações $\epsilon^{(i)}$, $\phi_x^{(i)}$ e $\phi_y^{(i)}$ tenha um incremento de deformações $\Delta\epsilon$, $\Delta\phi_x$ e $\Delta\phi_y$ devido a fluência e/ou a retração. Considerando-se a linearidade dos diagramas tensão-deformação dos materiais para a região de validade deste estudo, as resultantes de tensões para a seção antes do incremento de deformações são as seguintes

$$\begin{aligned} N &= \epsilon^{(i)} E_C A_C + \epsilon^{(i)} E_S A_S \\ M_x &= \phi_x^{(i)} E_C I_{xc} + \phi_x^{(i)} E_S I_{xs} \\ M_y &= \phi_y^{(i)} E_C I_{yc} + \phi_y^{(i)} E_S I_{ys} \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde N é o esforço normal e M_x e M_y são os momentos fletores equilibrados pela seção; E_C e E_S são os módulos de deformação do concreto e do aço respectivamente; A_C , I_{xc} , I_{yc} são a área e os momentos de inércia principais da seção de concreto; A_S , I_{xs} , I_{ys} são a área e os momentos de inércia principais da seção de aço.

Como a fluência e a retração não causam diretamente tensões adicionais no concreto e como após o incremento de deformações os esforços equilibrados pela seção não variam, as expressões para as resultantes de tensões passam a ser

$$\begin{aligned} N &= \epsilon^{(f)} E_C A_C + (\epsilon^{(f)} + \Delta\epsilon) E_S A_S \\ M_x &= \phi_x^{(f)} E_C I_{xc} + (\phi_x^{(f)} + \Delta\phi_x) E_S I_{xs} \\ M_y &= \phi_y^{(f)} E_C I_{yc} + (\phi_y^{(f)} + \Delta\phi_y) E_S I_{ys} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $\epsilon (f)$, $\phi_x (f)$, $\phi_y (f)$ são as deformações da seção, que causam tensão no concreto e são obtidas pelas Eqs.(4.25).

$$\begin{aligned}\epsilon (f) &= \epsilon (i) - \frac{\Delta \epsilon E_s A_s}{E_c A_c + E_s A_s} \\ \phi_x (f) &= \phi_x (i) - \frac{\Delta \phi_x E_s I_{xs}}{E_c I_{xc} + E_s I_{xs}} \\ \phi_y (f) &= \phi_y (i) - \frac{\Delta \phi_y E_s I_{ys}}{E_c I_{yc} + E_s I_{ys}}\end{aligned}\quad (4.25)$$

Nas Eqs.(4.25) fica evidenciada a parcela da variação de deformação no concreto devida a presença da armadura.

4.5 - Determinação das Deformações do Concreto ao Longo do Tempo

Para considerar-se a variação das tensões será empregado o princípio da superposição dos efeitos, conforme o item 4.2.6. Assim, o período referente ao tempo de atuação do carregamento será dividido em vários intervalos de tempo, ao longo dos quais a tensão será considerada constante. Devido a variação da deformação ser mais acentuada no período que se segue a aplicação da carga, determinou-se [29] que uma subdivisão logarítmica para o intervalo seria mais adequada. Conforme estudos comparativos realizados em [29] e [62] ficou demonstrado que a utilização de cinco intervalos de tempo conduz a erros inferiores a 5%, ao passo que, para oito intervalos os erros são inferiores a 1%.

Portanto, para a avaliação das deformações de fluência e retração basta aplicar à Eq.(4.11) o esquema que aparece na Fig. 4.7. Assim, o efeito da tensão σ_0 para cálculo das deformações será considerado no intervalo de tempo de t_0 até t ; o efeito do acrécimo de tensão $\Delta \sigma_1$ será considerado no intervalo de tempo t_1 até t , e assim sucessivamente.

O processo de cálculo segue então a seguinte seqüência. Inicialmente determinam-se as deformações, considerando

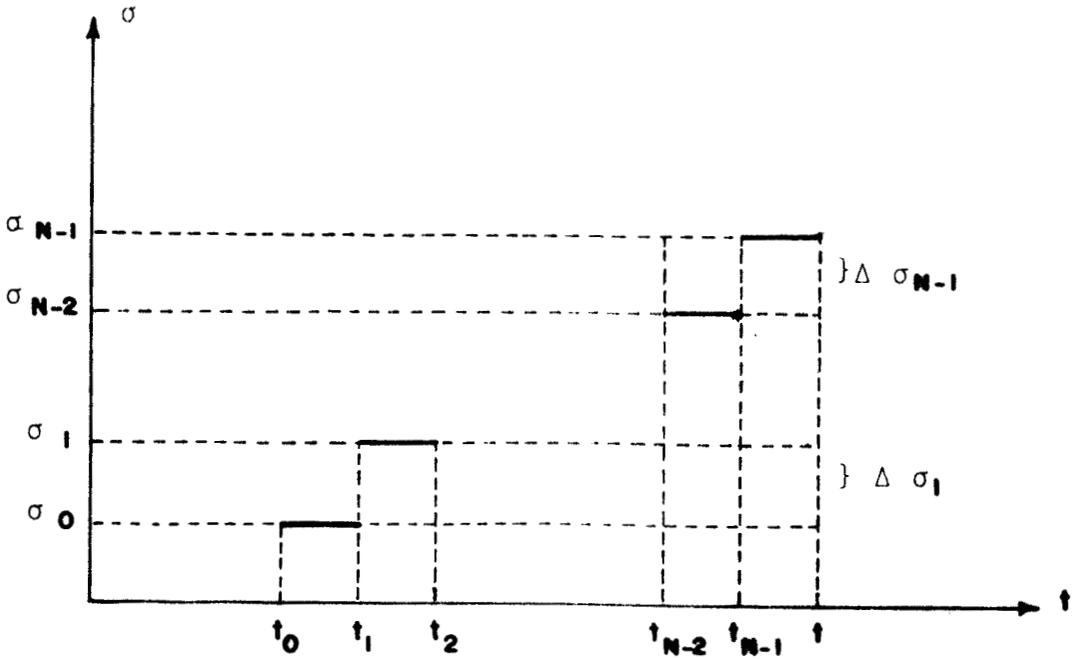


Figura 4.7 - Variação das tensões ao longo do tempo

do-se as deformações de fluência geradas pela ação da tensão σ_0 no período t_0-t , e que vão produzir o acréscimo de tensões $\Delta\sigma_1$, por meio das Eqs. (4.26).

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \left(1 + \phi(t, t_0) \frac{E_C(t_0)}{E_{C_{28}}} (1 - A) \right) + \varepsilon_n(t_0) (1 - A)$$

$$\phi_{x_1} = \phi_{x_0} \left(1 + \phi(t, t_0) \frac{E_C(t_0)}{E_{C_{28}}} (1 - B) \right) \quad (4.26)$$

$$\phi_{Y_1} = \phi_{Y_0} \left(1 + \phi(t, t_0) \frac{E_C(t_0)}{E_{C_{28}}} (1 - C) \right)$$

onde

$$A = \frac{E_S A_S}{E_C A_C + E_S A_S}$$

$$B = \frac{E_S I_{XS}}{E_C I_{XC} + E_S I_{XS}} \quad (4.27)$$

$$C = \frac{E_s I_{ys}}{E_c I_{yc} + E_s I_{ys}}$$

A seguir, determinam-se as variações de deformações que vão produzir tensões no concreto através das Eqs. (4.28), usando $i=1$.

$$\begin{aligned}\Delta \epsilon_i &= - (\epsilon_i - \epsilon_{i-1}) A \\ \Delta \phi_{xi} &= - (\phi_{xi} - \phi_{xi-1}) B \\ \Delta \phi_{yi} &= - (\phi_{yi} - \phi_{yi-1}) C\end{aligned} \quad (4.28)$$

Finalmente, determinam-se pelas Eqs. (4.29), as novas deformações, já considerada a ação de $\Delta \sigma_1$.

$$\begin{aligned}\epsilon_{i+1} &= \epsilon_i + \Delta \epsilon_i \left(1 + \phi(t, t_i) \frac{E_c(t_i)}{E_{c_{28}}} (1 - A) \right) + \\ &\quad + (\epsilon_n(t_i) - \epsilon_n(t_{i-1})) (1 - A) \\ \phi_{xi+1} &= \phi_{xi} + \Delta \phi_{xi} \left(1 + \phi(t, t_i) \frac{E_c(t_i)}{E_{c_{28}}} (1 - B) \right) \\ \phi_{yi+1} &= \phi_{yi} + \Delta \phi_{yi} \left(1 + \phi(t, t_i) \frac{E_c(t_i)}{E_{c_{28}}} (1 - C) \right)\end{aligned} \quad (4.29)$$

Repete-se a utilização das Eqs. (4.28) e Eqs. (4.29) até o último intervalo. Então ficarão determinados os acréscimos de deformações da seção devidos à fluência e à retração do concreto.

4.6 - Consideração das Deformações devidas à Fluência e à Retração no Algoritmo de Solução

Os acréscimos de deformações devidos as deformações de fluência e de retração não vão produzir diretamente tensões no concreto. Assim, para a avaliação da rigidez devida ao concreto de uma certa seção, desconta-se do valor da deformação total, determinada para esta seção, a parcela de deformação que foi originada diretamente pela fluência e/ou retração. Já, para a avaliação da rigidez devida ao aço, emprega-se a deformação total.

Da mesma maneira, os deslocamentos resultantes do acréscimo de deformação devido a fluência e a retração, não vão produzir esforços de primeira ordem no pilar. Deste modo, estes deslocamentos são simplesmente impostos à peça, e não participam do equilíbrio. Assim, na verificação do equilíbrio, no algoritmo que utiliza a rigidez secante, deve-se descontar esta parcela dos deslocamentos totais ($\{F\} = [K] \{U\}$).

5 - EXEMPLOS

Neste capítulo são apresentados diversos exemplos para a avaliação do método. Resultados experimentais e teóricos são comparados com os obtidos pela aplicação do programa.

5.1 - Exemplo 1

Com o objetivo de analisar a precisão da solução em um problema com não-linearidade geométrica, um pilar elástico com imperfeição inicial é examinado. Como mostra a Fig. 5.1, o pilar é bi-rotulado nas extremidades e tem uma deformada inicial de forma senoidal, conforme

$$u(z) = \bar{u}_0 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L} \quad (5.1)$$

onde \bar{u}_0 é o deslocamento inicial no centro do pilar, L é o comprimento do pilar e z é a coordenada que descreve o desenvolvimento do pilar.

A solução exata para o deslocamento no centro do pilar pode ser obtida através da Eq. (5.2).

$$u = \frac{\bar{u}_0}{1 - \frac{1}{\pi^2} \frac{PL^2}{EI} \left(1 - \frac{1}{\frac{EA}{P} + 1}\right)^2} \quad (5.2)$$

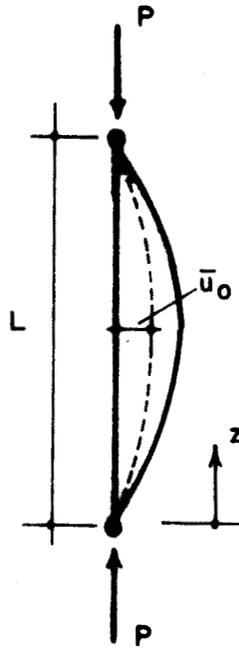


Figura 5.1 - Pilar elástico linear bi-rotulado

A carga crítica de Euler para este pilar, considerando-se que a rigidez axial seja infinita, é dada por

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (5.3)$$

Usando um pilar com deslocamento inicial de $\bar{u}_0/L = 0,0002$ e com a relação $EA/P_E = 10000$, foram obtidos os resultados que estão apresentados na Tab. 5.1 e na Fig. 5.2. Os incrementos de carga empregados foram $\Delta P = 0,10 P_E$. Nesta análise o pilar foi subdividido em oito elementos.

5.2 - Exemplo 2

Compararam-se os resultados obtidos pelo programa com os valores determinados experimentalmente apresentados em [44], para um pilar de concreto armado sob flexo-compressão oblíqua. O pilar tinha um comprimento de 514,5 cm e uma seção transversal com 17,40 x 26,55 cm. A armadura longitudinal era constituída por quatro barras de canto, sendo que a taxa total de armadura era de 2,80 %. O aço utilizado, BSt 42/50, apresentou uma tensão média de escoamento de 453,3 MPa.

P/P _E	1000 x u/L					
	TEÓRICO	TANGENTE	Δ (%)	SECANTE	Δ (%)	
0,0	0,200	0,200	-	0,200	-	-
0,1	0,222	0,222	-	0,222	-	-
0,2	0,250	0,249	-0,4	0,249	-0,4	-0,4
0,3	0,286	0,284	-0,7	0,284	-0,7	-0,7
0,4	0,333	0,331	-0,6	0,330	-0,9	-0,9
0,5	0,400	0,396	-1,0	0,395	-1,3	-1,3
0,6	0,500	0,494	-1,2	0,491	-1,8	-1,8
0,7	0,666	0,656	-1,5	0,649	-2,6	-2,6
0,8	0,999	0,980	-1,9	0,961	-3,8	-3,8
0,9	1,997	1,962	-1,8	1,921	-3,8	-3,8
1,0	∞	∞	-	∞	-	-

Tabela 5.1 - Resultados para o pilar linear elástico

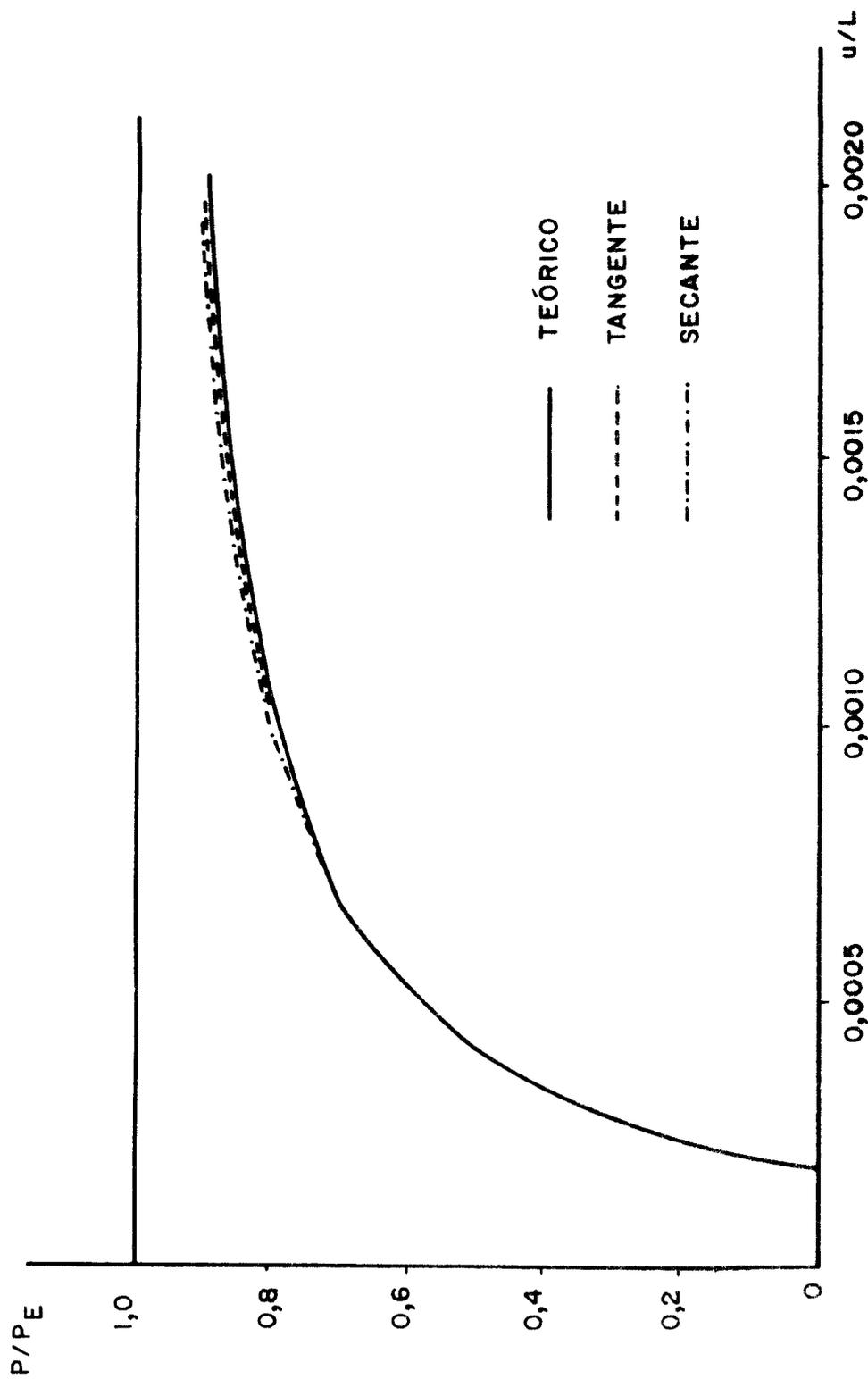


Figura 5.2 - Curva carga-deslocamento para o pilar elástico linear

A resistência prismática média do concreto determinada no dia do ensaio foi de 25,4 MPa e o módulo de elasticidade longitudinal do concreto foi de 30500 MPa. O pilar foi ensaiado aos 31 dias de idade. As características geométricas do pilar, bem como a posição de aplicação da carga, estão apresentadas na Fig. 5.3 (pilar S XII).

O carregamento do pilar foi aplicado em estágios de aproximadamente 1/10 da carga de ruptura esperada - 50000 N. Assim, compararam-se os valores das flechas obtidas no centro do pilar e das deformações nos vértices da seção transversal central do pilar, para cada um dos estágios de carga, com os valores obtidos empregando-se os algoritmos que utilizam rigidez tangente e rigidez secante. Estes valores estão apresentados na Tab. 5.2 até Tab. 5.6 e nas Fig. 5.4 até Fig. 5.8. Na análise, o pilar foi subdividido em dez elementos.

O giro da seção transversal, no seu plano, no meio do pilar, para a carga de 500 kN, medido no ensaio, foi de 0,00055 radianos. O giro determinado pelo algoritmo tangente foi igual a 0,000496 radianos e o giro pelo algoritmo secante 0,000498 radianos.

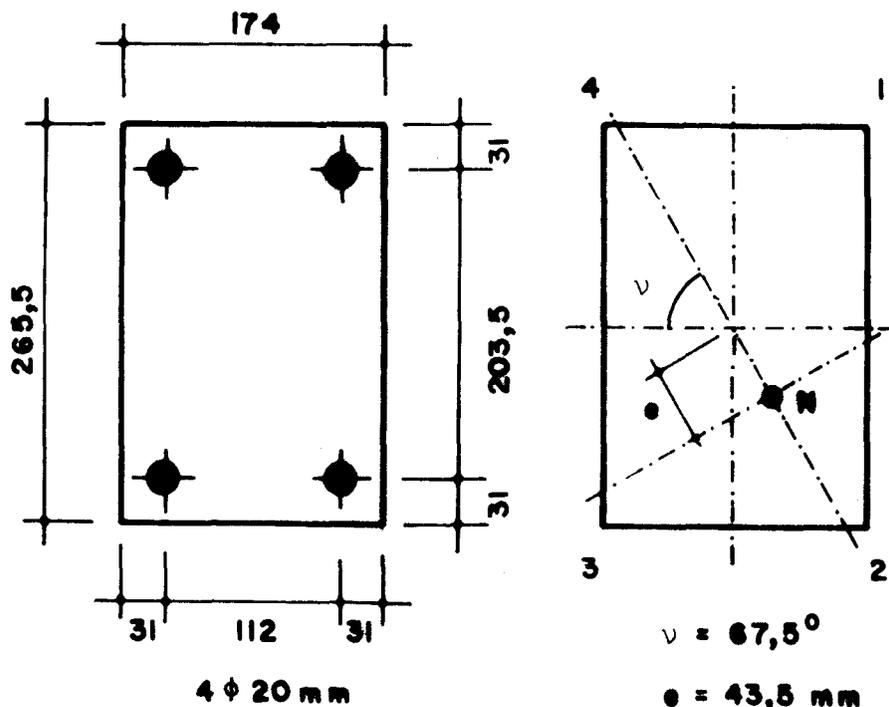


Figura 5.3 - Seção transversal do pilar

CARGA (kN)	ENSAIO		TANGENTE		SECANTE	
	f (mm)		f (mm)	Δ (%)	f (mm)	Δ (%)
0	0,000		0,000	-	0,000	-
50	0,481		0,865	79,8	0,865	79,8
100	1,583		1,810	14,3	1,817	14,8
150	2,874		2,853	-0,7	2,866	-0,3
200	4,679		4,016	-14,2	3,986	-14,8
250	5,985		5,334	-10,9	5,302	-11,4
300	7,907		6,863	-13,2	6,837	-13,5
350	10,139		8,689	-14,3	8,749	-13,7
400	13,283		11,221	-15,5	11,443	-13,9
450	17,363		15,193	-12,5	15,672	-9,7
500	24,943		22,666	-9,1	23,545	-5,6

Tabela 5.2 - Flechas no centro do pilar

CARGA (kN)	ENSAIO		TANGENTE		SECANTE	
	$\epsilon_1 \times 1000$	Δ (%)	$\epsilon_1 \times 1000$	Δ (%)	$\epsilon_1 \times 1000$	Δ (%)
0	0,000	-	0,000	-	0,000	-
50	-0,003	600,0	-0,021	600,0	-0,020	566,7
100	-0,030	50,0	-0,045	50,0	-0,043	43,3
150	-0,048	45,8	-0,070	45,8	-0,068	41,7
200	-0,094	3,2	-0,097	3,2	-0,095	1,1
250	-0,137	-7,3	-0,127	-7,3	-0,125	-8,8
300	-0,189	-14,8	-0,161	-14,8	-0,159	-15,9
350	-0,225	-10,7	-0,201	-10,7	-0,200	-11,1
400	-0,282	-10,3	-0,253	-10,3	-0,256	-9,2
450	-0,357	-7,3	-0,331	-7,3	-0,346	-3,1
500	-0,477	0,0	-0,477	0,0	-0,488	2,3
550	-0,774	-	-	-	-	-

Tabela 5.3 - Deformações no vértice 1

CARGA (kN)	ENSAIO		TANGENTE		SECANTE	
	$\epsilon_2 \times 1000$	Δ (%)	$\epsilon_2 \times 1000$	Δ (%)	$\epsilon_2 \times 1000$	Δ (%)
0	0,000	-	0,000	-	0,000	-
50	-0,042	66,7	-0,070	66,7	-0,068	61,9
100	-0,129	11,6	-0,144	11,6	-0,143	10,9
150	-0,216	3,7	-0,224	3,7	-0,223	3,2
200	-0,324	-4,0	-0,311	-4,0	-0,308	-4,9
250	-0,443	-7,9	-0,408	-7,9	-0,405	-8,6
300	-0,566	-8,8	-0,516	-8,8	-0,514	-9,2
350	-0,703	-9,0	-0,640	-9,0	-0,646	-8,1
400	-0,882	-8,5	-0,807	-8,5	-0,830	-5,9
450	-1,104	-4,2	-1,058	-4,2	-1,118	1,3
500	-1,407	5,0	-1,478	5,0	-1,618	15,0
550	-2,216	-	-	-	-	-

Tabela 5.4 - Deformações no vértice 2

CARGA	ENSAIO		TANGENTE		SECANTE	
	$\epsilon_3 \times 1000$		$\epsilon_3 \times 1000$	Δ (%)	$\epsilon_3 \times 1000$	Δ (%)
(kN)						
0	0,000		0,000	-	0,000	-
50	-0,016		-0,037	131,3	-0,035	118,8
100	-0,053		-0,073	37,7	-0,072	35,8
150	-0,097		-0,110	13,4	-0,109	12,4
200	-0,147		-0,148	0,7	-0,146	-0,7
250	-0,189		-0,185	-2,1	-0,184	-2,6
300	-0,229		-0,221	-3,5	-0,221	-3,5
350	-0,260		-0,256	-1,5	-0,258	-0,8
400	-0,282		-0,286	1,4	-0,292	3,5
450	-0,299		-0,301	0,7	-0,348	16,4
500	-0,274		-0,261	-4,7	-0,327	19,3
550	0,063		-	-	-	-

Tabela 5.5 - Deformações no vértice 3

CARGA	ENSAIO	TANGENTE		SECANTE	
		$\epsilon_4 \times 1000$	$\Delta (\%)$	$\epsilon_4 \times 1000$	$\Delta (\%)$
(kN)	$\epsilon_4 \times 1000$				
0	0,000	0,000	-	0,000	-
50	0,038	0,012	-68,4	0,013	-65,8
100	0,068	0,026	-61,8	0,028	-58,8
150	0,080	0,045	-43,8	0,047	-41,3
200	0,098	0,067	-31,6	0,068	-30,6
250	0,128	0,096	-25,0	0,096	-25,0
300	0,169	0,134	-20,7	0,134	-20,7
350	0,224	0,184	-17,9	0,189	-15,6
400	0,308	0,268	-13,8	0,282	-8,4
450	0,477	0,422	-11,5	0,457	-4,2
500	0,721	0,739	2,5	0,801	11,1
550	1,530	-	-	-	-

Tabela 5.6 - Deformações no vértice 4

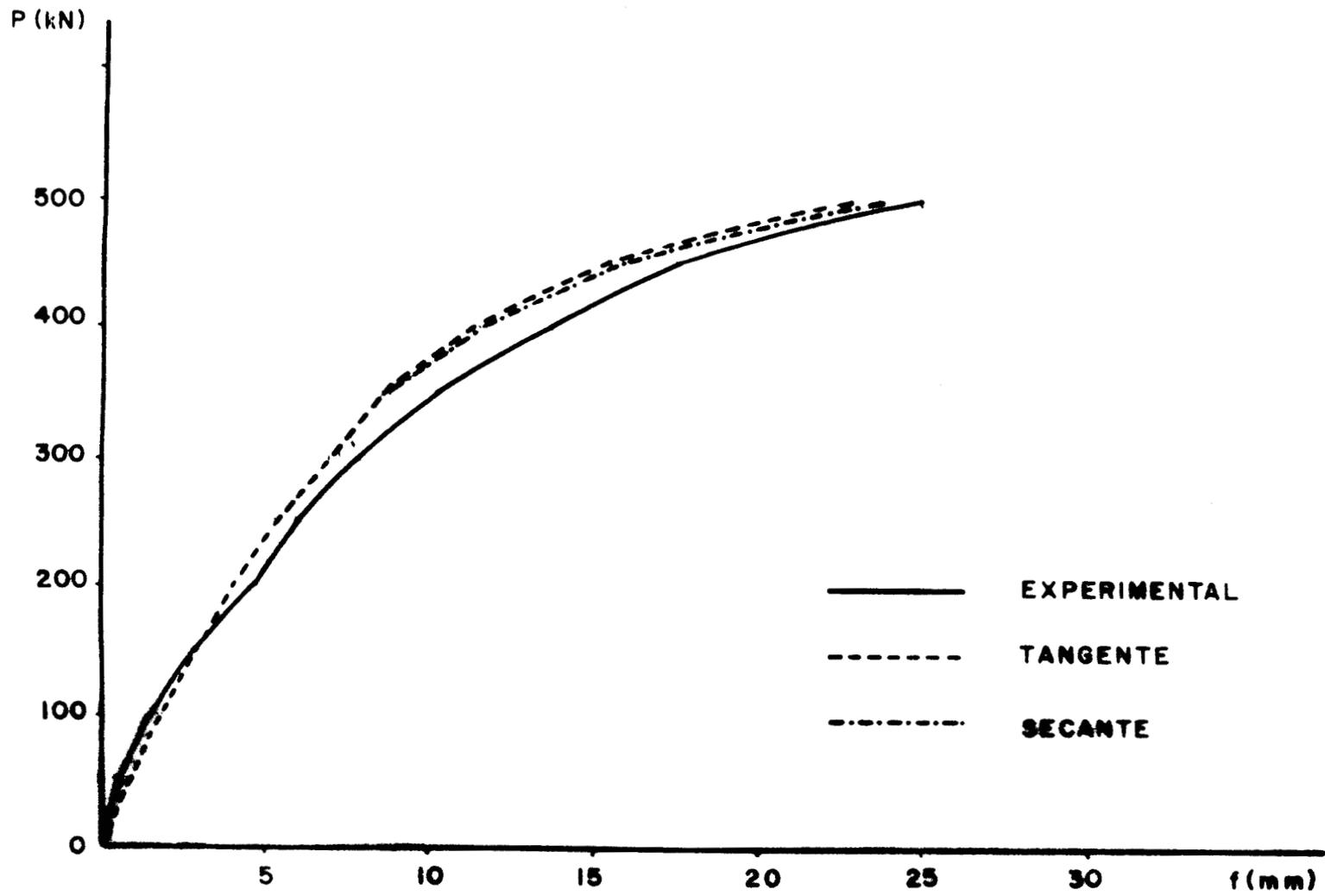


Figura 5.4 - Flechas no centro do pilar

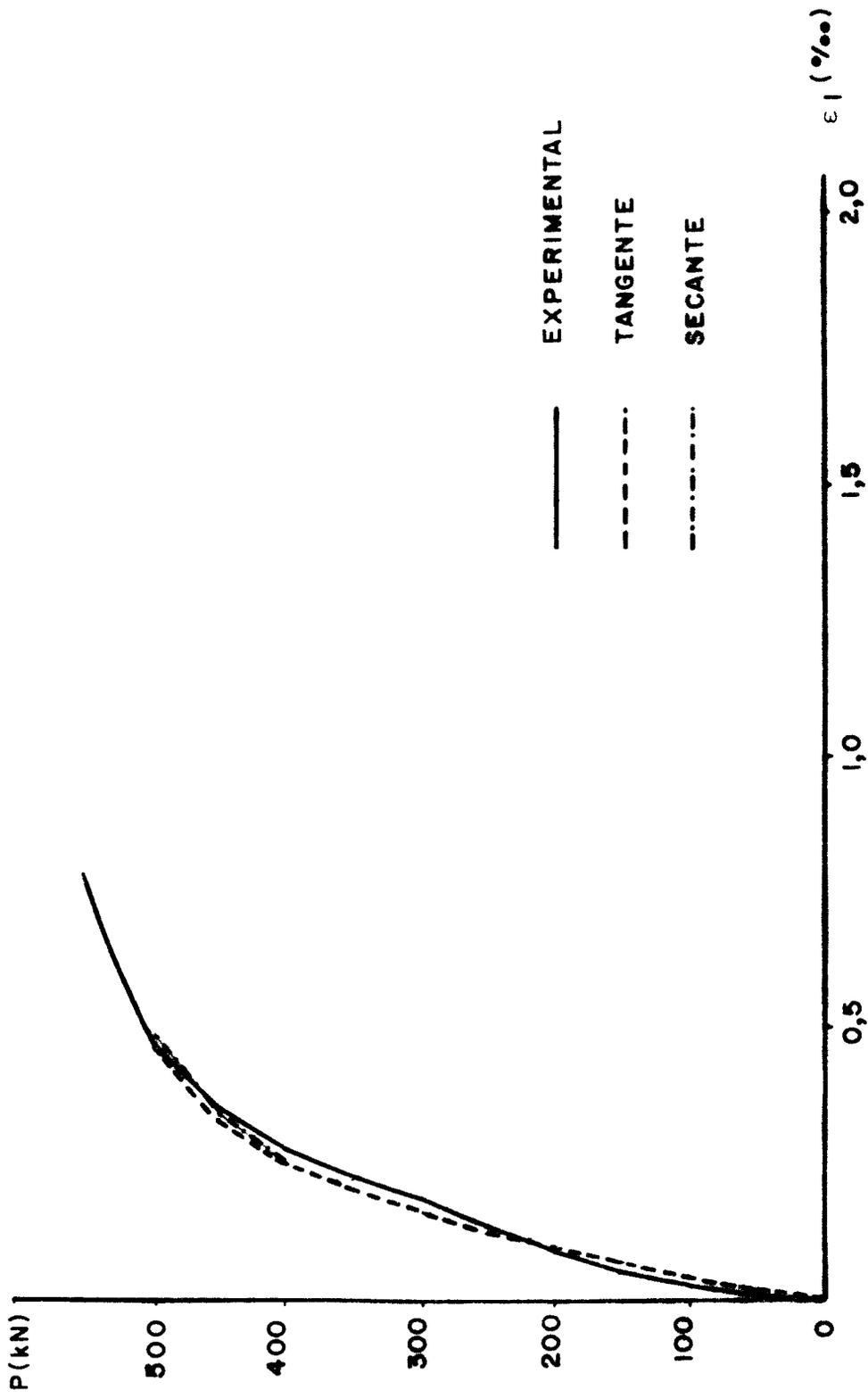


Figura 5.5 - Deformações no vértice 1

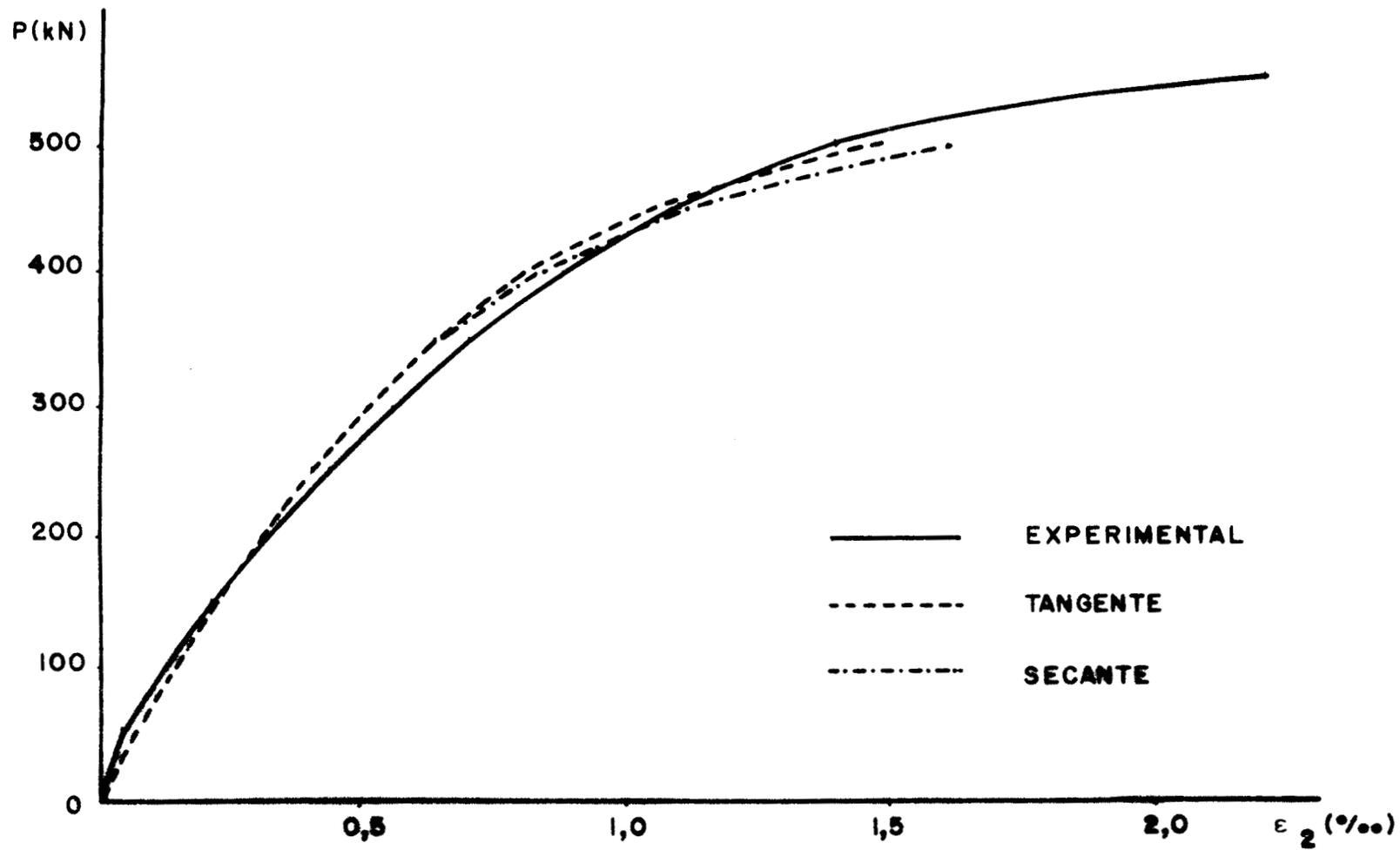


Figura 5.6 - Deformações no vértice 2

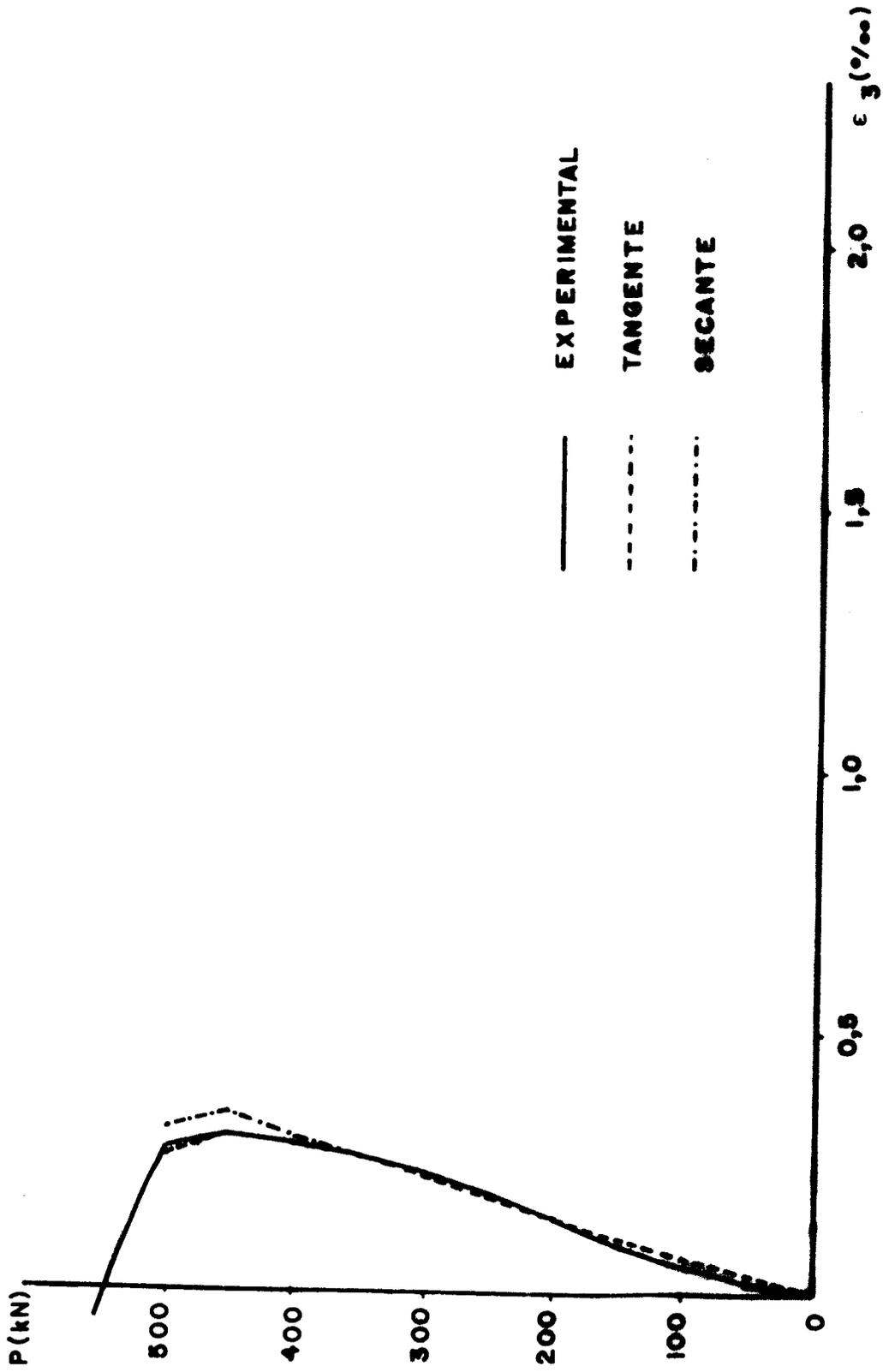


Figura 5.7 - Deformações no vértice 3

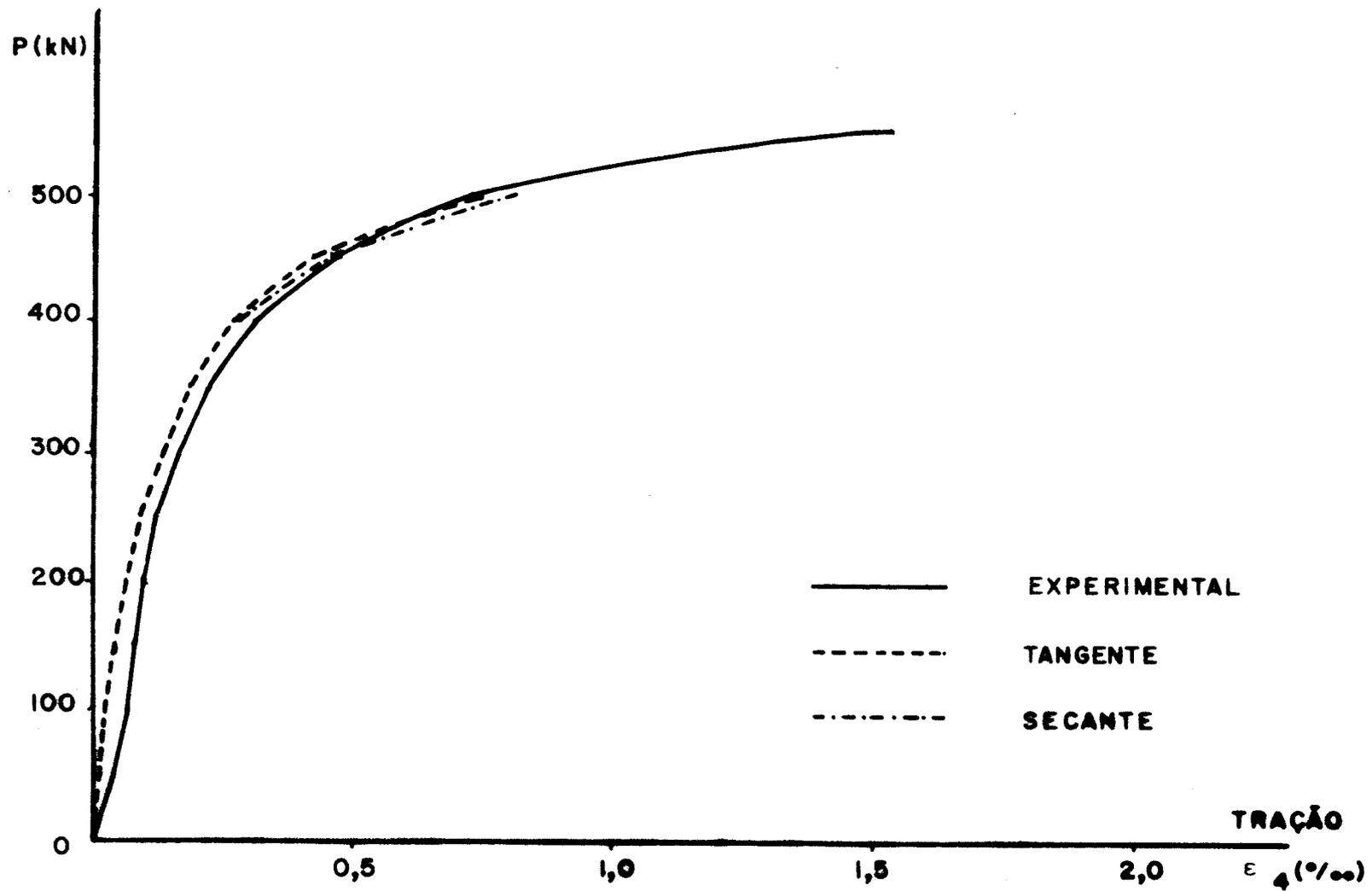


Figura 5.8 - Deformações no vértice 4

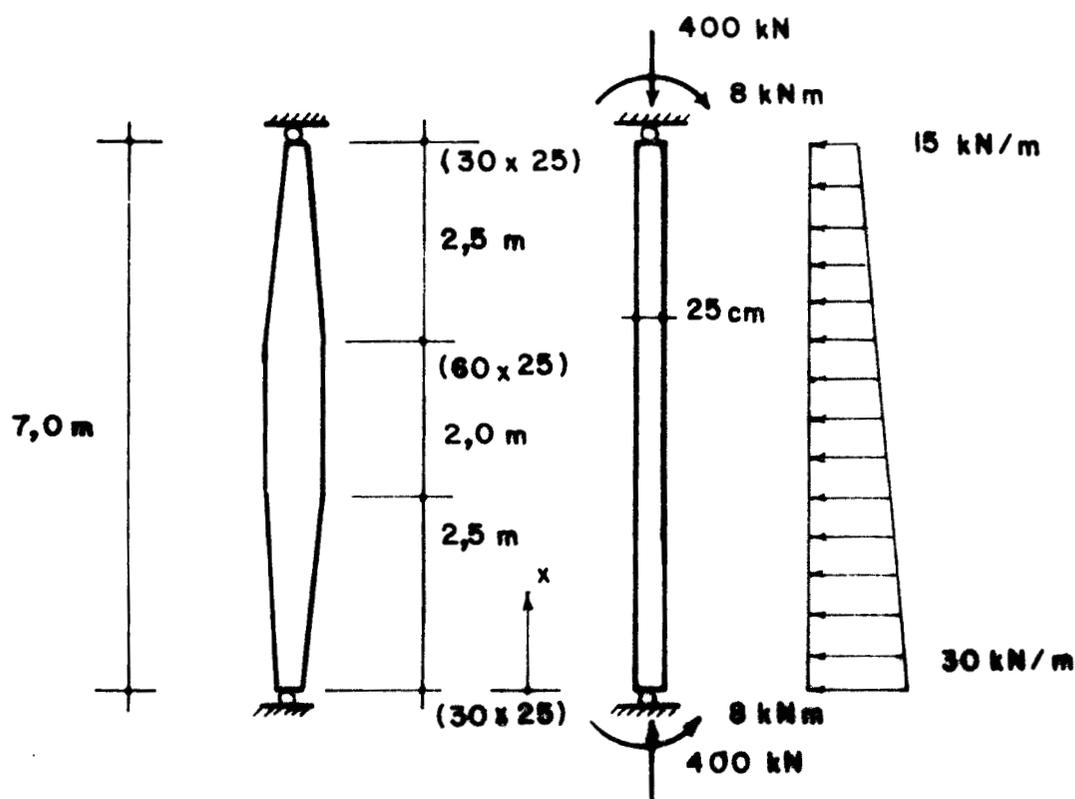


Figura 5.9 - Pilar bi-rotulado com seção transversal variável

5.3 - Exemplo 3

Analisaram-se comparativamente os resultados obtidos pelo programa com os do processo teórico para verificação à flexo-compressão reta desenvolvido em [40]. Com esta finalidade, aplicou-se o programa a um pilar bi-rotulado e a um pilar livre-engastado, que estão apresentados em [40], como exemplificação do método. Utilizou-se como resistências dos materiais para o cálculo $f_{cd} = 0,85 f_{ck} / 1,4$ e $f_{yd} = f_{yk} / 1,15$.

5.3.1 - Pilar Bi-Rotulado

Neste exemplo, verifica-se a estabilidade do pilar esquematizado na Fig. 5.9. O pilar apresenta inércia variável ao longo do comprimento e além da carga axial e do momento fletor, está solicitado por uma carga distribuída transversal, com variação linear, atuando no plano de menor inércia.

Os dados do pilar são

- Concreto: $f_{ck} = 15$ MPa
- Aço: CA-50A

- Percentagem geométrica de armadura: $\rho = \rho' = 1,97 \%$
- Recobrimento da armadura: $d'/d = 0,10$

Para a análise o pilar foi subdividido em dez elementos. Os valores obtidos estão apresentados na Tab. 5.7.

5.3.2 - Pilar Livre-Engastado

Agora verifica-se a estabilidade do pilar apresentado na Fig. 5.10. O pilar tem inércia variável ao longo do comprimento.

Os dados do problema são

- Concreto: $f_{ck} = 18 \text{ MPa}$
- Aço: CA-50A
- Percentagem geométrica de armadura: $\rho = \rho' = 0,59 \%$
- Recobrimento da armadura: $d'/d = 0,10$

Para a análise, o pilar foi subdividido em oito elementos. Os valores obtidos estão apresentados na Tab. 5.8.

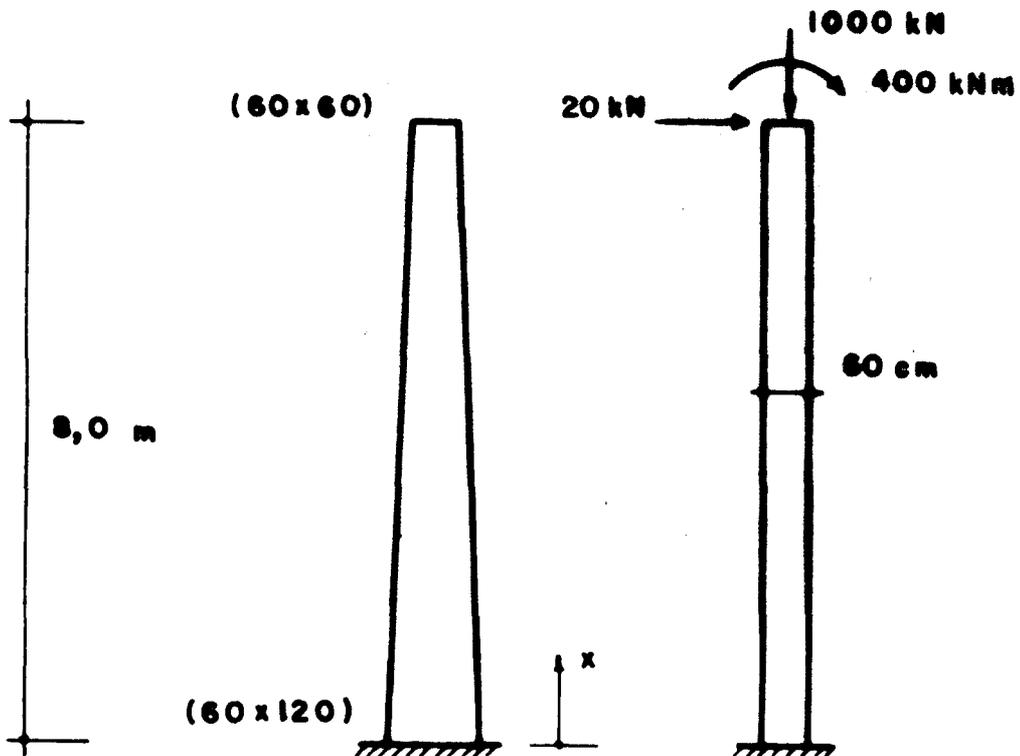


Figura 5.10 - Pilar livre-engastado com seção transversal variável

x (m)	MÉTODO [40]		TANGENTE		SECANTE	
	f (mm)	Δ (%)	f (mm)	Δ (%)	f (mm)	Δ (%)
0,0	0,000	-	0,000	-	0,000	-
0,7	19,999	8,5	21,702	8,5	22,406	12,0
1,4	36,685	10,1	40,372	10,1	41,794	13,9
2,1	48,822	10,7	54,047	10,7	56,246	15,2
2,8	55,997	11,1	62,240	11,1	64,937	16,0
3,5	58,027	11,6	64,738	11,6	67,578	16,5
4,2	54,874	11,9	61,399	11,9	64,006	16,6
4,9	47,033	11,8	52,601	11,8	54,637	16,2
5,6	34,841	11,3	38,771	11,3	40,010	14,8
6,3	18,731	10,2	20,642	10,2	21,226	13,3
7,0	0,000	-	0,000	-	0,000	-

Tabela 5.7 - Deslocamentos para o pilar bi-rotulado

x (m)	MÉTODO [40]		TANGENTE		SECANTE	
	f (mm)		f (mm)	Δ (%)	f (mm)	Δ (%)
0,0	0,000		0,000	-	0,000	-
1,0	1,930		1,750	-9,3	2,282	18,2
2,0	7,856		7,054	-10,2	9,172	16,8
3,0	17,931		16,040	-10,5	20,757	15,8
4,0	32,131		28,814	-10,3	37,018	15,2
5,0	50,501		45,453	-10,0	57,787	14,4
6,0	73,111		65,996	-9,7	82,623	13,0
7,0	99,937		90,429	-9,5	110,260	10,3
8,0	130,908		118,680	-9,3	139,780	6,8

Tabela 5.8 - Deslocamentos para o pilar livre-engastado

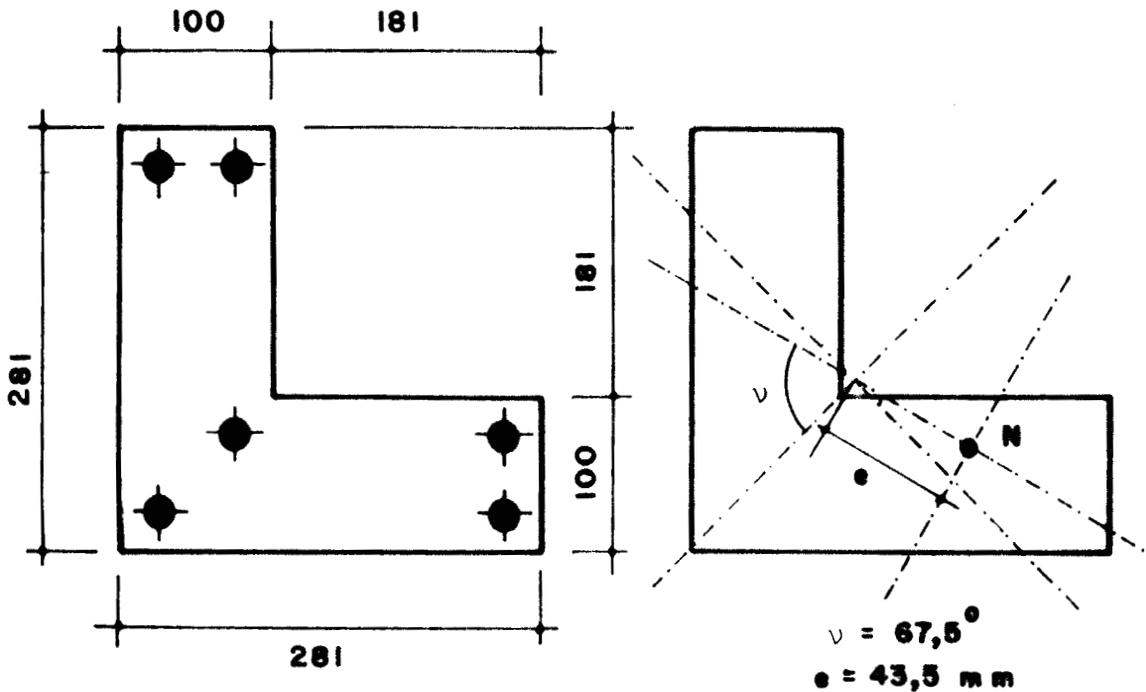


Figura 5.11 - Seção transversal em "L"

5.4 - Exemplo 4

Neste exemplo, buscou-se determinar a influência da rotação da seção transversal sobre a capacidade de carga do pilar. Com este propósito, testou-se um pilar com seção transversal em forma de "L", conforme a Fig. 5.11, e que apresenta a mesma área de concreto e de aço que o pilar do exemplo 1. O comprimento do pilar, as resistências dos materiais e a idade de entrada em carga foram também tomadas os mesmos do exemplo 1.

O pilar foi dividido para a análise em dez elementos e os resultados obtidos para a flecha no meio do vão estão apresentados na Tab. 5.9.

O giro da seção transversal obtido, no centro do pilar, na última etapa antes da ruptura, foi de 0,007342 radianos pelo algoritmo tangente e de 0,007355 radianos pelo algoritmo secante.

Analísou-se novamente o pilar, impedindo-se a

CARGA	TANGENTE	SECANTE	Δ
(kN)	f (mm)	f (mm)	(%)
0	0,000	0,000	-
200	2,652	2,603	-1,8
400	6,356	6,193	-2,6
600	12,082	11,467	-5,1
800	26,401	26,098	-1,1

Tabela 5.9 - Flechas no centro do pilar

rotação da seção transversal. A variação nos deslocamentos encontrados foi muito pequena. Para a flecha no centro do pilar na etapa que antecedeu a ruptura, a variação encontrada foi um pouco inferior a 1 %.

5.5 - Exemplo 5

Finalmente, compararam-se resultados obtidos pelo programa, com valores determinados experimentalmente, para pilares de concreto armado, submetidos a cargas de longa duração [24] (pilares B-1-B e B-3-B).

Os pilares ensaiados tinham um comprimento de 396,24 cm e uma seção transversal de 12,7 x 12,7 cm, conforme a Fig. 5.12. A armadura longitudinal era constituída por quatro barras de canto de 12,7 mm de diâmetro. O aço utilizado apresentou uma tensão média de escoamento de 394,2 MPa. Os ensaios foram realizados a uma temperatura média de 24 °C e com uma umidade relativa do ar média de 50 %.

O primeiro pilar a ser comparado apresentou o

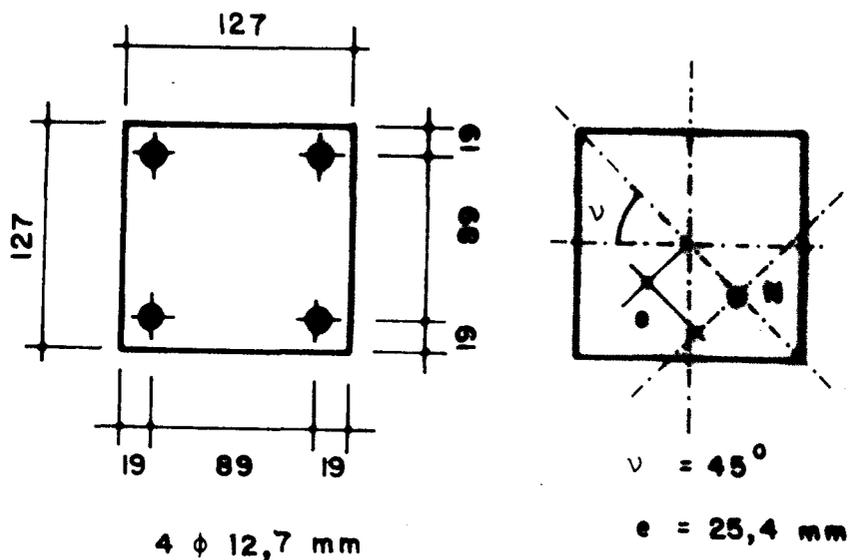


Figura 5.12 - Seção transversal dos pilares

concreto com uma resistência prismática média, determinada a 28 dias, de 24,68 MPa. Aos 28 dias o pilar foi carregado até 76.205 N. Esta carga foi mantida por 181 dias, e então, foi feito um carregamento rápido até a ruptura. A ruptura ocorreu para uma carga total de 136.080 N. Um pilar de mesmas características, ensaiado até a ruptura, aos 28 dias, rompeu para uma carga de 154.224 N. Na Fig. 5.13, estão apresentadas as curvas carga-deslocamento correspondentes a estes ensaios, utilizando-se o algoritmo que usa a rigidez tangente e o que usa a rigidez secante.

O segundo pilar a ser comparado tinha um concreto com uma resistência prismática média, a 28 dias, de 26,58 MPa. Aos 28 dias, o pilar foi carregado até 104.328 N. Esta carga foi mantida por 631 dias, e então, foi feito um carregamento rápido até a ruptura. O pilar rompeu para uma carga total de 124.740 N. Na Fig. 5.14, estão apresentadas as curvas carga-deslocamento, correspondentes a este ensaio, utilizando-se o algoritmo que usa a rigidez tangente e o que usa a rigidez secante. Nesta figura, aparecem também, as curvas para um carregamento de curta duração feito a 28 dias.

Deve-se observar que através do algoritmo proposto não é viável determinar a carga exata de ruptura da peça. Assim, nas curvas da Fig. 5.13 e Fig. 5.14 os deslocamentos máximos correspondem ao último estágio de carga que foi equilibrado pelo pilar. Ao acrescentar-se um novo invremento de carga, não foi mais possível conseguir o equilíbrio. Isto equivale a dizer que a carga de ruptura exata estimada pelo processo está dentro deste intervalo (da ordem de 8% da carga total).

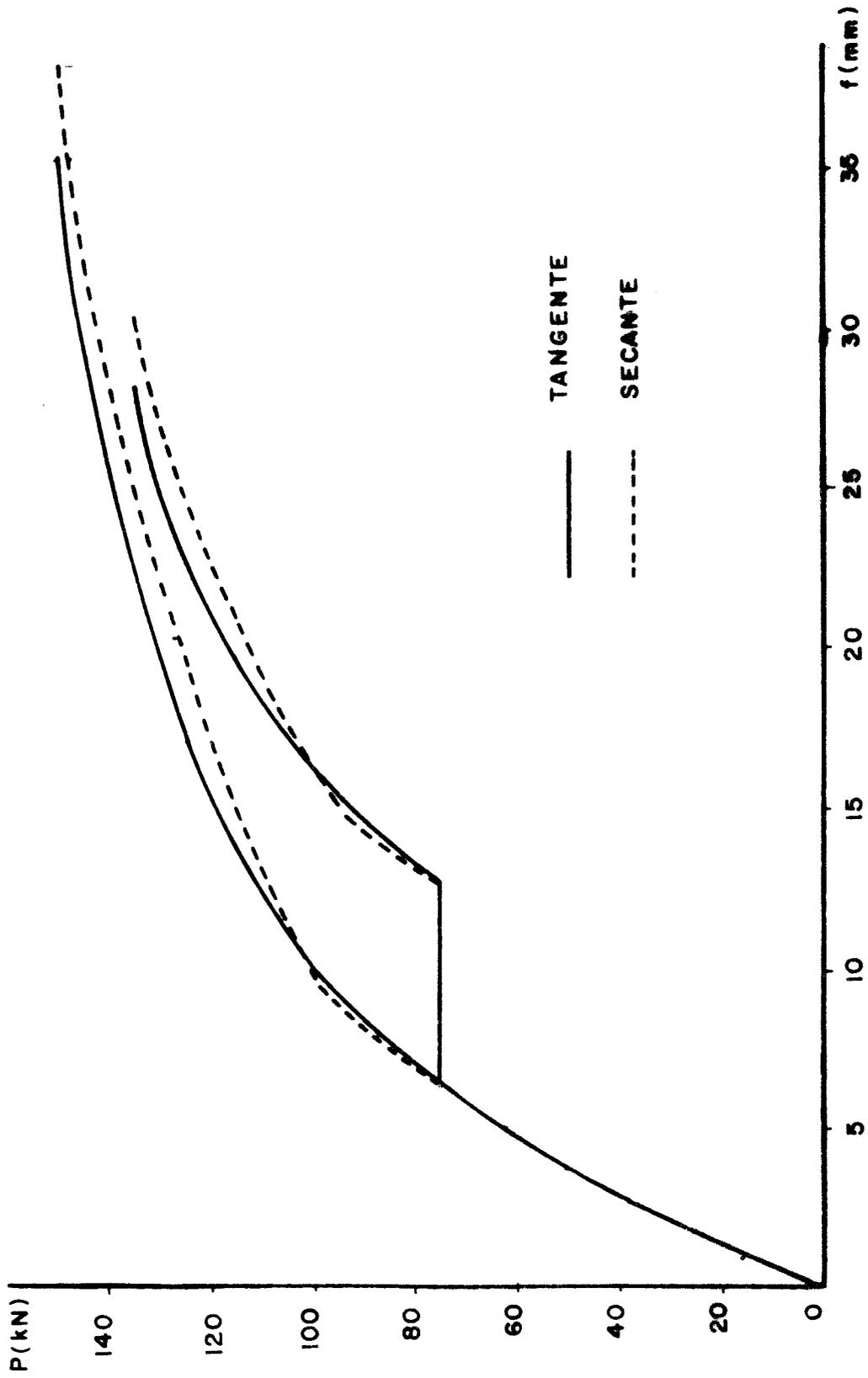


Figura 5.13 - Curva carga-deslocamento para o primeiro pilar

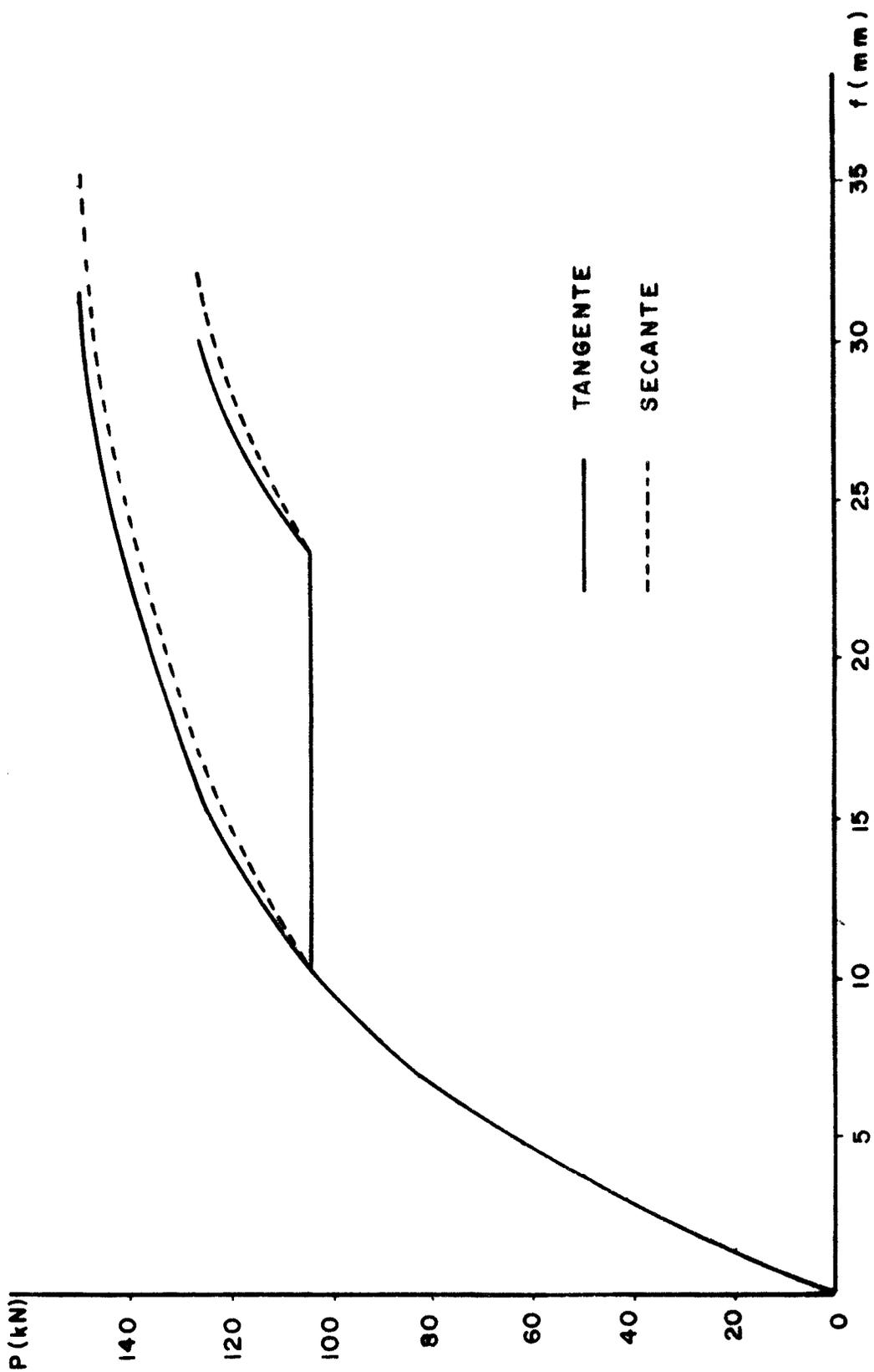


Figura 5.14 - Curva carga-deslocamento para o segundo pilar

6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os resultados obtidos através da aplicação do processo desenvolvido neste trabalho apresentaram uma boa aproximação em comparação com valores teóricos e experimentais.

No primeiro exemplo, apresentado no capítulo anterior, o pilar bi-rotulado de material elástico linear, os valores obtidos tanto pelo algoritmo que emprega a rigidez tangente, como pelo algoritmo que emprega a rigidez secante, ficaram bem próximos da solução exata. A pequena variação entre os resultados é, principalmente, uma consequência do critério de convergência adotado. Assim, caso fosse empregado um critério mais rigoroso, as soluções tenderiam a se aproximar.

No segundo exemplo, os valores determinados pelo programa reproduziram de maneira bastante fiel o comportamento real do pilar submetido a um carregamento de flexo-compressão oblíqua de curta duração. A variação para os resultados experimentais, é naturalmente, em maior escala, uma decorrência da imprecisão na qualificação das propriedades dos materiais. Cabe aqui observar, que o aumento da diferença nas últimas etapas de carga, entre os resultados obtidos

pelo algoritmo que usa a rigidez tangente e o que usa a rigidez secante, é uma consequência do modelo empregado, para a obtenção da rigidez a partir da fissuração. Surge uma indeterminação ao tentar-se avaliar a rigidez tangente de uma seção fissurada. Contornou-se este problema, no algoritmo que utiliza a rigidez tangente, não se considerando a rigidez da zona tracionada do concreto a partir da fissuração. Com isto, superestima-se um pouco a rigidez da seção.

No terceiro exemplo, da comparação dos valores obtidos pelo programa, com os do processo para análise de pilares à flexo-compressão reta desenvolvido em [40], verificou-se que para os casos testados, existe uma boa aproximação de resultados.

No quarto exemplo, apesar da rotação da seção transversal do pilar em "L" ser da ordem de dez vezes superior a do pilar retangular, os efeitos decorrentes deste giro, parecem não ter importância no comportamento global da estrutura.

No quinto exemplo, as cargas de ruptura obtidas ficaram bastante próximas das determinadas experimentalmente, para os pilares submetidos a carregamentos de flexo-compressão-oblíqua de longa duração.

É necessário ainda, que se teste o modelo de resistência à tração no concreto, em peças em que a zona tracionada seja mais significativa. Com isto será possível verificar, se este é realmente um modelo adequado.

Seria também interessante, a obtenção de um modelo mais realístico para avaliação da rigidez torsional de uma peça de concreto armado. Com isto, poder-se-ia confirmar, se a rotação da seção transversal, como efeito secundário da flexo-compressão oblíqua, é efetivamente desprezível.

BIBLIOGRAFIA

1. ANG, A.H.S. & TANG, W.H. Probability concepts in engineering planning and design. New York, John Wiley, 1975 .
v.1.
2. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de obras de concreto armado: NB-1. Rio de Janeiro, 1978.
3. BASU, A.K. & SURYANARAYANA, P. Analysis of restrained reinforced concrete columns under biaxial bending. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, Ottawa, Oct. 1973. Detroit, ACI, 1975. p.211-32.
4. BERWANGER, C. Effect of axial load on the moment-curvature relationship of reinforced concrete members. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, Ottawa, Oct. 1973. Detroit, ACI, 1975. p.263-88.
5. BRANSON, D.E. Deformation of concrete structures. New York, McGraw-Hill, 1977.
6. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press, 1978.
7. _____. The finite element technique. Porto Alegre, Ed. da UFRGS, 1975.

8. BRESLER, B. Design criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending. Journal of American Concrete Institute, Detroit, 57(5):481-90, Nov. 1960.
9. BUDYNAS, R.G. Advanced strength and applied stress analysis. New York, McGraw-Hill, 1977.
10. CAVALCANTI, L.F. Automatização do dimensionamento das peças de concreto armado submetidas à flexão com força normal. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1975. 80p. Tese maestr. engenharia civil.
11. CHEN, W.F. Theory of beam-columns - the state-of-the-art review. In: INTERNATIONAL COLLOQUIUM ON STABILITY OF STRUCTURES UNDER STATIC AND DYNAMIC LOADS, Washington, May 17-19, 1977. New York, ASCE, 1977. p.631-48.
12. CHEN, W.F. & ATSUTA, T. Space behavior and design. In: Theory of beam-columns. New York, McGraw-Hill, 1976-77. v.2.
13. CHEN, W.F. & SHORAKA, M.T. Tangent stiffness method for biaxial bending of reinforced concrete columns. Mémoires. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zürich, 35(1):23-44, 1975.
14. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Buckling and instability. Paris, 1978. (Bulletin d'Information, 123)
15. _____. Buckling manual. Paris, 1975. (Bulletin d'Information, 103)
16. _____. Compléments au code-modèle CEB-FIP 1978. Paris, 1980. (Bulletin d'Information, 137)
17. _____. Design of sections under axial action effects at ultimate limit state. Paris, 1980. (Bulletin d'Information, 135)
18. _____. Documentation complémentaire au Manuel de Calcul CEB-FIP: flexion-compression. Paris, 1972. (Bulletin d'Information, 83)

19. _____. Manual bending and compression. Paris, 1972 .
(Bulletin d'Information, 82)
20. _____. Manuel de calcul "effort tranchant-torsion". Paris, 1973. (Bulletin d'Information, 92)
21. _____. v.1: Règles unifiées communes aux différents types d'ouvrages et des matériaux - v.2: Code-modèle CEB-FIP pour structures en béton. Paris, 1978. (Bulletin d'Information, 124/125)
22. _____. Structural effects of time-dependent behaviour of concrete. Paris, 1980. (Bulletin d'Information , 136)
23. DIAS, D.S.; LUCENA, A.J.P. & LIMA, F.L.F. Programação FORTRAN para estudantes de ciências e engenharia. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978.
24. DRYSDALE, R.G. & HUGGINS, M.W. Sustained biaxial load on slender concrete columns. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(5):1423-43, May 1971.
25. FARAH, A. & HUGGINS, M.W. Analysis of reinforced concrete columns subjected to longitudinal load and biaxial bending. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 66(7):569-75, July 1969.
26. FURLONG, R.W. Concrete columns under biaxially eccentric thrust. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 76(10):1093-118, Oct. 1979.
27. FUSCO, P.B. Estruturas de concreto - solicitações normais. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1981.
28. GALGOUL, N.S. Análise do efeito de flambagem de colunas esbeltas de concreto armado submetidas à flexão com - posta oblíqua considerando a retração e a fluência do concreto. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 3, Porto Alegre, 3-5 dez. 1979. Anais. Porto Alegre, Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1979. p.19-38.

29. _____. Beitrag zur Bemessung von schlanken Stahlbetonstützen für schiefe Biegung mit Achsdruck unter Kurzzeit- und Dauerbelastung. München, Technische Universität, 1978. Tese dout. engenharia.
30. _____. Dimensionamento de seção qualquer à flexão composta oblíqua. Estrutura, Rio de Janeiro, 86:99-112, 1979.
31. _____. Novos conceitos para o dimensionamento à flambagem pelo CEB-1978. Estrutura, Rio de Janeiro, 89:44-57, dez. 1979.
32. GERE, J.M. & WEAVER Jr., W. Análise de estruturas reticuladas. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1981.
33. GHALI, A.; NEVILLE, A.M.; CHEUNG, Y.K. Structural analysis: a unified classical and matrix approach. 2.ed. London, Chapman and Hall, 1978.
34. GRASSER, E. Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen. München, Technische Universität, 1968. Tese dout. engenharia.
35. HAYS, C.O. & MATLOCK, H. Nonlinear discrete element analysis of frames. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 99(10):2011-30, Oct. 1973.
36. HEIDEBRECHT, A.C. & SWIFT, R.D. Analysis of asymmetrical coupled shear walls. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(5):1407-22, May 1971.
37. HILDEBRAND, F.B. Introduction to numerical analysis. New York, McGraw-Hill, 1956.
38. HOFFMANN, J.R. Pilares esbeltos de concreto armado. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1979. 186p. Tese mestr. engenharia civil.

39. _____. Pilares esbeltos de concreto armado - método aproximado. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1980.
40. _____. Pilares esbeltos de concreto armado - método exato. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1980.
41. JAKOBSEN, A. Biaxial eccentric in ultimate load design. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 61(3), 1964.
42. JIMENEZ MONTOYA, P.; GARCIA MESENER, A.; MORAN CABRE, F. Hormigón armado. 10.ed. Barcelona, Gustavo Gili, 1979. 2v.
43. KOLLBRUNNER, C.F. & BASLER, K. Torsion in structures : an engineering approach. Berlin, Springer, 1969.
44. KORDINA, K.; RAFLA, K.; HJORTH, O. Traglast von Stahlbetondruckgliedern unter schiefer Biegung mit Achsdruck. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, n.265, 1976.
45. LAMPERT, P. Postcracking stiffness of reinforced concrete beams in torsion and bending. In: SYMPOSIUM ON ANALYSIS OF STRUCTURAL SYSTEMS FOR TORSION, Denver, Colo., Mar. 7-12, 1971. Papers. Detroit, ACI, 1973. p.385-433.
46. LANGENDONCK, T. van. Flexão composta oblíqua no concreto armado. São Paulo, Associação Brasileira de Cimento Portland, 1977.
47. _____. Resistência dos materiais: deformações. São Paulo, Ed. Científica/Edgard Blücher, 1960. 2v.
48. _____. Tensões. Rio de Janeiro, Ed. Científica, 1956.
49. LEONHARDT, F. & MÖNNIG, E. Construções de concreto. Rio de Janeiro, Interciência, 1977-79. v.1, v.4.

50. MacGREGOR, J.G.; OELHAFEN, U.H.; HAGE, S.E. A reexamination of the EI value for slender columns. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, Ottawa, Oct. 1973. Detroit, ACI, 1975. p.1-40.
51. MARIN, J. Design aids for L-shaped reinforced concrete columns. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 76(11):1197-216, Nov. 1979.
52. MARTIN, I. & OLIVIERI, E. Test of slender reinforced concrete columns bent in double curvature. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, San Francisco, Calif., 1965. Papers. Detroit, ACI, 1966. p.121-38.
53. MAUCH, S.P. Effect of creep and shrinkage on the capacity of concrete columns. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, San Francisco, Calif., 1965. Papers. Detroit, ACI, 1966. p.299-324.
54. MONDKAR, D.P. & POWELL, G.H. Towards optimal in-core equation solving. Computers & Structures, Oxford, 4(3):531-48, May 1974.
55. NEWMARK, N.M. Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads. Transactions of the American Society of Civil Engineers, New York, 108:1161-1234, 1943.
56. PACITTI, T. FORTTRAN-monitor: princípios. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1978.
57. PANNEL, F.N. Failure surfaces for members in compression and biaxial bending. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 60(1):129-39, Jan. 1963.
58. PARME, A.L.; NIEVES, J.M.; GOUWENS, A. Capacity of reinforced rectangular columns subjected to biaxial bending. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 63(9):911-22, Sept. 1966.
59. PETRUCCI, E.G. Concreto de cimento Portland. 2.ed. Porto Alegre, Globo, 1975.

60. RIAD, L. Eccentrically loaded reinforced concrete columns with variable cross section. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, San Francisco, Calif. , 1965. Papers. Detroit, ACI, 1966. p.245-62.
61. RÜSCH, H. Concreto armado e protendido. Rio de Janeiro, Ed. Campus, 1981.
62. RÜSCH, H. & JUNGWIRTH, D. Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke. In: _____. Stahlbeton-Spannbeton. Dusseldorf, Werner-Verlag, 1976. v.2.
63. SANTATHADAPORN, S. & CHEN, W.F. Tangent stiffness method for biaxial bending. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 98(1):153-63, Jan. 1972.
64. SECHLER, E.E. Elasticity in engineering. New York, John Wiley, 1952.
65. SOZEN, M.A. et alii. The reinforced concrete column in perspective. In: SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, San Francisco, Calif., 1965. Papers. Detroit, ACI, 1966. p.1-11.
66. SPERANDIO NETO, E. Pilares esbeltos de concreto armado com seção retangular sujeitos à flexo-compressão oblíqua. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1982. 163p. Tese maestr. engenharia civil.
67. SÜSSEKIND, J.C. Concreto armado. In: _____. Curso de concreto. Porto Alegre, Globo, 1980. v.1.
68. TAMBERG, K.G. & MIKLUCHIN, P.T. Torsional phenomena analysis and concrete structural design. In: SYMPOSIUM ON ANALYSIS OF STRUCTURAL SYSTEMS FOR TORSION, Denver, Colo., Mar. 7-12, 1971. Papers. Detroit, ACI, 1973. p.1-102.
69. TEBEDGE, N. & CHEN, W.F. Design criteria for H-columns

under biaxial loading. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 100(3):579-98, Mar. 1974.

70. TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. Teoria da elasticidade. 3.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
71. VIRDI, K.S. & DOWLING, P.J. The ultimate strength of biaxially restrained columns. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, 61:41-58, Mar. 1976.
72. WALPOLE, R.E. & MYERS, R.H. Probability and statistics for engineers and scientists. New York, McMillan, 1972.
73. WANG, P.C. Numerical and matrix methods in structural mechanics, with applications to computers. New York, John Wiley, 1966.
74. WARNER, R.F. Biaxial moment thrust curvature relation. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 95(5):923-40, May 1969.
75. _____. Tragfähigkeit und Sicherheit von Stahlbetonstützen unter ein- und zweiachsig Exzentrischer Kurzzeit- und Dauerbelastung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, n.236, 1974.
76. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1971.