

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MAURÍCIO BORGES LONGHI

**CONTROLE DE SISTEMAS
QUADRÁTICOS SUJEITOS À
SATURAÇÃO DE ATUADORES**

Porto Alegre
2014

MAURÍCIO BORGES LONGHI

**CONTROLE DE SISTEMAS
QUADRÁTICOS SUJEITOS À
SATURAÇÃO DE ATUADORES**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre
2014

MAURÍCIO BORGES LONGHI

**CONTROLE DE SISTEMAS
QUADRÁTICOS SUJEITOS À
SATURAÇÃO DE ATUADORES**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Sophie Tarbouriech, LAAS-CNRS, França
Doutora pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Porto Alegre, Julho de 2014.

*Para meus pais, Valdenor e Dalva,
e minha irmã, Carolina.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., pela disponibilidade em realizar a orientação desse trabalho, e pela generosidade em compartilhar seu conhecimento, tendo respondido com precisão aos meus questionamentos.

Ao Prof. Dr. Maurício Zardo Oliveira, pelos valiosos esclarecimentos a respeito das LMIs resultantes dos seus trabalhos de doutorado.

Aos colegas, pelo apoio durante as (árduas) disciplinas de pós-graduação, em especial ao Eng. Alessandro N. Schildt, ao Eng. César A. A. Durán, ao Eng. Me. Manuel R. V. Ávila, à Eng^a. Me. Mariana Resener, ao Eng. Me. Paulo R. Eckert, ao Me. Eng. Rafael Rui, ao Eng. René A. Benvenuti, ao Eng. Me. Ricardo S. da Rosa, ao Eng. Rodolfo A. S. Machado e ao Eng. Me. Thiago J. Michelin.

Ao Prof. Tristão J. G. dos Santos e ao Prof. Dr. Renato V. Bayan Henriques, pelo apoio durante o estágio de docência.

Ao PPGEE — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, seu corpo docente e demais servidores, pelo ensino de qualidade e pela atenção dedicada a mim no decorrer do curso.

À CAPES, pela provisão da bolsa de mestrado.

À UFRGS, à Escola de Engenharia, bem como à sua Biblioteca, pelo espaço e demais recursos de aprendizagem.

Aos examinadores membros da banca, pelas contribuições oferecidas.

RESUMO

O presente trabalho aborda o problema de estabilização local de sistemas não lineares quadráticos contínuos no tempo (possivelmente instáveis em malha aberta) e sujeitos a saturação de atuadores. Além disso o trabalho apresenta um estudo de técnicas de síntese de compensadores de *anti-windup* para sistemas quadráticos sujeitos à saturação de atuadores. A abordagem do estudo é comparativa em relação a duas formas de representação dos sistemas quadráticos. A primeira forma de abordagem é a Representação Algébrico-Diferencial — DAR (do inglês, *Differential Algebraic Representation*), aplicável a toda a classe de sistemas racionais. A segunda forma, por sua vez, consiste em uma decomposição quadrática, particular para sistemas quadráticos. Em ambos os casos, utiliza-se a não linearidade de zona morta e uma condição generalizada de setor para tratar da saturação. Para ambas representações, condições baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares — LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) dependentes dos estados são obtidas para fornecer uma lei de controle linear, com o objetivo de estabilizar o sistema em malha fechada enquanto fornece uma região maximizada de estabilidade garantida associada a uma função de Lyapunov. A partir da mesma metodologia, são propostas técnicas de síntese de compensadores de *anti-windup* estáticos e dinâmicos. Exemplos numéricos são apresentados para verificar a eficácia dos métodos propostos.

Palavras-chave: anti-windup, representação algébrico-diferencial, sistema não linear, sistema quadrático.

ABSTRACT

This work addresses the problem of local stabilization of continuous-time quadratic systems (possibly open-loop unstable) and subject to actuator saturation. Furthermore, the work addresses a study of techniques for synthesis of anti-windup compensators for quadratic systems subject to actuator saturation. The study approach is comparative in the sense of considering two representations of quadratic systems. The first one is the Differential Algebraic Representation — DAR, suitable for the entire class of rational systems. The second representation consists in a quadratic decomposition, particular for quadratic systems. In both cases, it is used the deadzone nonlinearity and the generalized sector condition in order to deal with the saturation. For both representations, state-dependent Linear Matrix Inequalities — LMIs conditions are obtained to provide a control law with the aim of stabilize the closed-loop system while providing a region of guaranteed stability, associated to a Lyapunov function. Based on the same methodology, techniques are proposed for the synthesis of static and dynamic anti-windup compensators. Numerical examples are presented to verify the effectiveness of proposed methods.

Keywords: anti-windup, nonlinear system, quadratic system, differential algebraic representation.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	10
LISTA DE ABREVIATURAS	11
LISTA DE SÍMBOLOS	12
1 INTRODUÇÃO	14
2 RESULTADOS PRELIMINARES	18
2.1 Sistemas Racionais, Polinomiais e Quadráticos	18
2.1.1 Sistemas Polinomiais e Racionais	18
2.1.2 Sistemas Quadráticos	19
2.1.3 Modelagem DAR	20
2.2 Estabilidade no Sentido de Lyapunov	22
2.3 Sistemas com Saturação	24
2.3.1 Modelagem por Não Linearidade do Tipo Zona Morta	25
3 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS QUADRÁTICOS COM SATURAÇÃO	26
3.1 Introdução	26
3.2 Região de Estados Admissíveis	27
3.3 Abordagem Quadrática	27
3.3.1 Condição de Setor Generalizada	28
3.3.2 Função Candidata de Lyapunov	29
3.3.3 Resultados Principais	31
3.3.4 Problema de Otimização	32
3.4 Abordagem DAR	33
3.4.1 Condição Generalizada de Setor	34
3.4.2 Resultado Principal	34
3.4.3 Problema de Otimização	35
3.5 Conclusões	38
4 ANTI-WINDUP	39
4.1 Abordagem DAR	40
4.1.1 Formulação do Problema	40
4.1.2 Conceitos Preliminares	41
4.1.3 Resultado Principal	43

4.1.4	Problema de Otimização	48
4.1.5	Estabilização \mathcal{L}_2	51
4.1.6	Estabilização \mathcal{L}_2 com AW Estático	55
4.2	Abordagem Quadrática	59
4.2.1	Formulação do Problema	59
4.2.2	Condição de Setor Generalizada	61
4.2.3	Função Candidata de Lyapunov	61
4.2.4	Resultados Principais	64
4.2.5	Problema de Otimização	64
4.3	Conclusões	67
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	68
	REFERÊNCIAS	71
	APÊNDICE A FERRAMENTAS PARA MANIPULAÇÃO DE	
	LMIs	74
A.1	Lema de Finsler	74
A.2	Complemento de Schur	74

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Publicações a respeito de <i>anti-windup</i>	16
2	Publicações a respeito de <i>anti-windup</i> e <i>nonlinear system</i>	16
3	Região de estabilidade garantida do sistema em malha fechada . .	36
4	Resposta temporal do sistema em malha fechada, Exemplo 5 . . .	37
5	Regiões de estabilidade obtidas por DAR e por decomposição quadrática	37
6	Compensação por <i>anti-windup</i>	39
7	Regiões $\mathcal{R}_{\bar{x}}$ de estabilidade garantida do sistema em malha fechada	49
8	Resposta temporal da saída y e do sinal de controle	50
9	Comparativo entre regiões de estabilidade garantida, Exemplo 9 .	65
10	Comparativo entre regiões de estabilidade garantida, Exemplo 10	66

LISTA DE TABELAS

1	Traços das matrizes P que descrevem as regiões de estabilidade garantida, conforme o tipo de lei de controle empregada, Exemplo 5	38
2	Traços das matrizes P que descrevem as regiões de estabilidade garantida, conforme o tipo de compensador de <i>anti-windup</i> , Exemplo 6	50
3	Desempenho \mathcal{L}_2 com compensador de <i>anti-windup</i> , Exemplo 7 . .	58
4	Desempenho \mathcal{L}_2 com compensador de <i>anti-windup</i> , Exemplo 8 . .	59

LISTA DE ABREVIATURAS

AW	<i>Anti-Windup</i>
DAR	<i>Differential Algebraic Representation</i>
Eq.	Equação
Fig.	Figura
LFR	<i>Linear Fractional Representation</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
PI	Proporcional Integral
PPGEE	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

LISTA DE SÍMBOLOS

\triangleq	Definido como
\equiv	Corresponde a
\forall	Para todo
\in	Pertence a
\subseteq	Subconjunto de
\subset	Está contido
\cup	União
\cap	Intersecção
\mapsto	Mapeia para
\Rightarrow	Implica
\rightarrow	Tende para
Σ	Somatório
\mathbb{N}	Conjunto dos números Naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números Reais
\mathbb{R}^n	Espaço Euclideano de ordem n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
I	Matriz Identidade de dimensões apropriadas
I_n	Matriz Identidade de ordem n
0	Escalar zero, bem como a matriz de zeros, de dimensões apropriadas
$0_{n \times m}$	Matriz de zeros de dimensão $n \times m$
A'	Matriz transposta da matriz real A
$A > 0$	Matriz A é simétrica positiva definida
$A \geq 0$	Matriz A é simétrica semipositiva definida
$A < 0$	Matriz A é simétrica negativa definida
$A \leq 0$	Matriz A é simétrica seminegativa definida
$A_{(i)}$	i -ésima linha da matriz A

$\text{He}\{A\}$	$A + A'$
∞	Infinito
$\lim_{t \rightarrow \infty}(\cdot)$	Limite quando $t \rightarrow \infty$
$\min(\cdot)$	Função de minimização
$\text{sat}(\cdot)$	Função saturação
$\text{sign}(\cdot)$	Função sinal
$\text{sup}(\cdot)$	Valor supremo
$\text{bkdg}\{\cdot\}$	Matriz bloco-diagonal
$\text{Co}\{\cdot\}$	Envelope convexo
$\text{Tr}\{A\}$	Traço da matriz A
$\mathcal{V}(\Phi)$	Conjunto dos vértices do politopo Φ
t	O tempo
\dot{x}	Derivada primeira de x em relação a t
$ x $	Vetor composto pelos valores absolutos dos componentes de x
$\ x\ $	Norma Euclideana do vetor x , isto é, $\ x\ = \sqrt{x'x}$
$\ x\ _2$	Norma \mathcal{L}_2 do vetor x , isto é, $\ x\ _2 = \sqrt{\int_0^\infty x'x dt}$
\star	Bloco simétrico, fora do bloco diagonal principal, em matriz simétrica
\square	Fim de demonstração
\diamond	Fim de teorema, definição ou lema
\circ	Fim de exemplo

1 INTRODUÇÃO

O campo de controle de sistemas não lineares têm sido objeto constante de pesquisa, especialmente nas últimas décadas, o que conduziu a uma extensa produção de artigos científicos e livros (KHALIL, 1996).

Sistemas dinâmicos não lineares descrevem fenômenos mecânicos, elétricos além de outros correlatos às disciplinas de engenharia. Em geral, são modelados por um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Diferentemente dos sistemas lineares, eles não se submetem ao princípio da superposição (KHALIL, 1996). Por essa razão, a obtenção de soluções para problemas de controle não linear estão, em geral, restritas a classes específicas de sistemas.

Além disso, os sistemas não lineares podem apresentar diversos fenômenos indesejados, tais como ciclo limite, múltiplos pontos de equilíbrio e instabilidade. Sendo assim, o desenvolvimento de métodos de controle genéricos para tais sistemas pode conduzir a soluções deveras conservadoras, tamanha diversidade de fenômenos (KHALIL, 1996; OLIVEIRA, 2012).

As não linearidades dos sistemas em questão podem ser oriundas de fenômenos como resistências não lineares, circuitos chaveados, zona morta de operação e histerese (KHALIL, 1996). Do ponto de vista da modelagem matemática, os sistemas não lineares podem apresentar, por exemplo, estados elevados a expoentes com grau maior do que um, multiplicados entre si ou, ainda, com estados sendo argumentos de funções trigonométricas. Nos casos particulares em que cada uma das derivadas dos estados depende de uma função polinomial nos estados, tem-se a classe de sistemas não lineares polinomiais. Os sistemas racionais são aqueles em que a derivada de cada estado depende da razão entre dois polinômios nos estados. Os sistemas quadráticos são, nesse contexto, uma forma particular de sistema polinomial. Os sistemas racionais têm sido tratados pela abordagem de Representação Linear Fracional — LFR (do inglês, *Linear Fractional Representation*) (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996) e pela abordagem de Representação Alébrico-Diferencial — DAR (do inglês, *Differential Algebraic Representation*). A DAR consiste em expressar, no espaço de estados, o sistema não linear usando um vetor auxiliar que contenha os termos não lineares (COUTINHO et al., 2004, 2008; COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010). Entretanto, a síntese de controladores utilizando DAR conduz, em geral, a um problema não convexo. Para superar esse problema, condições de projeto podem ser consideradas, ao custo de levar a resultados potencialmente conservadores (COUTINHO et al., 2008).

Por outro lado, modelos baseados em expansões de Taylor, que são aproximações do sistema nas adjacências de um ponto de operação, têm sido aplicados para síntese de controladores para sistemas não lineares. Entretanto, a expan-

são de Taylor é, geralmente, truncada nos termos de primeira ordem, ou seja, uma aproximação linear, o que reduz a validade das condições de projeto a uma pequena vizinhança do ponto de operação. Uma aproximação mais apurada do modelo é feita considerando termos adicionais na expansão como, por exemplo, a classe de sistemas quadráticos (isto é, aqueles que apresentam não linearidades quadráticas nos estados e termos bilineares no estado e no sinal de controle). Além disso, sistemas quadráticos representam uma larga quantidade de tipos de sistemas físicos, tais como colunas de destilação, processos de bioinformática, motores de indução, sistemas de aquecimento e condicionamento de ar e conversores DC-DC (ESPAI; LANDAU, 1978; FIGALLI; CAVA; TOMASI, 1984; ARG, 1999; FUAD; KONING; WOUDE, 2004; THOUNTHONG; PIERFEDERICI, 2010; KULKARNI et al., 2010). Em vista disso, tem sido obtida uma diversidade de resultados envolvendo projeto de controladores para essa classe de sistemas. Por exemplo, em (AMATO; COSENTINO; MEROLA, 2010) foram propostas condições suficientes para estabilização de sistemas quadráticos considerando um controlador linear, em (COUTINHO; SOUZA, 2012) foi abordado o projeto de controladores para realimentação quadrática de estados, garantindo uma região de estabilidade para o sistema em malha fechada, e em (VALMORBIDA; TARBOURIECH; GARCIA, 2010) foram estudados o projeto de uma realimentação de estados para uma classe de sistemas quadráticos (precisamente, quadrático no estado com uma entrada linear de controle) sujeito a saturação do atuador.

Além das não linearidades próprias do sistema, o fenômeno de saturação de atuadores faz parte do conjunto de problemas em tela. Trata-se de um limitante ao sinal de controle, seja por razões físicas ou de segurança (TARBOURIECH et al., 2011). O limitante mais comum é de magnitude do sinal que efetivamente pode ser aplicado à planta, mas há casos em que a limitação é em velocidade, caso típico de aninhamento de funções de saturação (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA Jr., 2006).

A literatura têm fornecido duas abordagens para o problema de saturação, no sentido de melhorar o desempenho dos sistemas em malha fechada. A primeira, consiste em projetar um controlador considerando os efeitos da saturação *a priori*. A segunda forma é adicionar, ao sistema, um compensador de AW — *anti-windup*¹, tendo em conta um controlador preconcebido.

O compensador de AW tem por entrada a diferença entre o sinal de controle e o sinal saturado de controle. Sua saída é, então, aplicada ao controlador, como forma de mitigar os efeitos da saturação.

A título ilustrativo, foi realizado um levantamento do volume de trabalhos científicos publicados na área de engenharia, a respeito do referido tema, na base de dados Scopus². Na busca pelo termo *anti-windup*, a base de dados encontrou 996 resultados. O número de trabalhos dos últimos 10 anos corresponde a 79 % desse total, enquanto os primeiros trabalhos remetem ao final da década de 70. O volume de trabalhos mostra comportamento ascendente, principalmente a partir dos anos 90, conforme ilustra a Fig. 1.

Já a quantidade de trabalhos envolvendo a intersecção dos termos *anti-windup* e *nonlinear system* foi de 63 unidades. Esse número representa 8 % da quantidade

¹ *Wind up* é uma palavra inglesa utilizada para expressar o que é inesperado ou indesejado (GILLARD et al., 2003).

² Scopus é uma base de dados bibliográficos fornecida comercialmente pela Elsevier B.V.

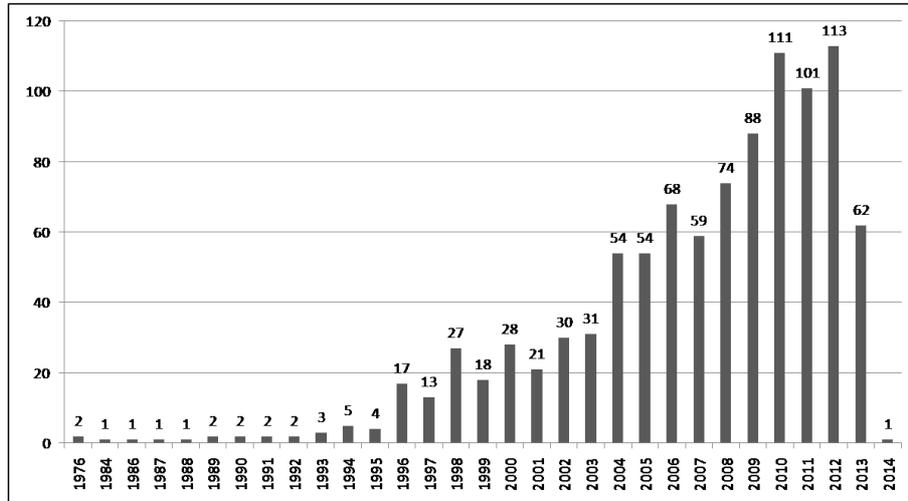


Figura 1: Número anual de publicações a respeito de *anti-windup* nas áreas de engenharia e ciências exatas (Scopus, 2013).

encontrada rastreando-se apenas o termo *anti-windup*. Percebe-se também, que emergência dos estudos que tratam simultaneamente de ambos os temas deu-se a partir de 1986, uma década mais tarde do que os estudos que tratam só de *anti-windup*, conforme ilustrado pela Fig. 2. A quantidade de trabalhos dos últimos 10 anos, nesse caso, compreende mais de três quartos do total da produção científica sobre na área. Esses dados sugerem que, em relação ao cenário geral de *anti-windup*, a pesquisa em *anti-windup* para sistemas não lineares se inclina mais para a insuficiência do que para a exaustão, isto é, a base de dados dá conta de que há terreno a ser explorado no que concerne técnicas de *anti-windup* em sistemas não lineares.

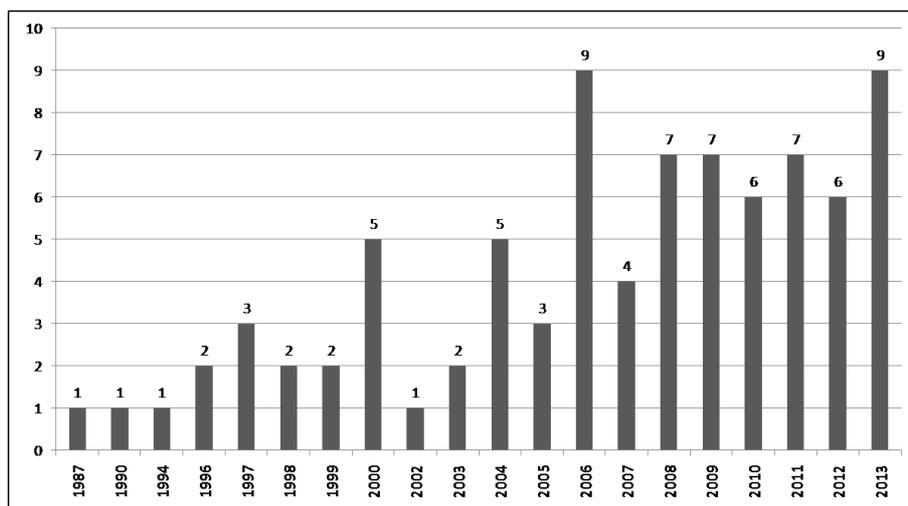


Figura 2: Número anual de publicações a respeito de *anti-windup* e *nonlinear system* nas áreas de engenharia e ciências exatas (Scopus, 2013).

Métodos de projeto de *anti-windup* têm sido propostos nos últimos anos (OLIVEIRA et al., 2013). Entretanto, a maior parte deles se concentra em modelos lineares (TARBOURIECH et al., 2011). Por outro lado, um dos problemas-chave da caracterização da estabilidade em sistemas não lineares é determinar uma

estimativa não conservadora da região de sua atração, isto é, determinar uma região maximizada de estabilidade garantida. Nesse sentido, foi demonstrado que o compensador *anti-windup* pode ser utilizado para aumentar a região de atração em sistemas sujeitos à saturação de atuadores (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014).

Em vista do cenário construído até então, este trabalho se lança com o objetivo de estudar técnicas de estabilização voltadas a sistemas dinâmicos quadráticos nos estados, contínuos no tempo, e sujeitos à saturação de atuadores. Ao lado disso, técnicas de *anti-windup* serão propostas para o mesmo tipo de sistemas. O estudo seguirá uma abordagem comparativa no que tange a modelagem dos sistemas quadráticos, ora via DAR, ora via decomposição quadrática dos estados. Condições estabilizantes baseadas em LMIs, a partir de uma função quadrática de Lyapunov, serão propostas para projetar uma realimentação de estados estabilizante, bem como para projetar compensadores estáticos e dinâmicos de *anti-windup*. Problemas convexos de otimização serão propostos a fim de maximizar o tamanho da região de estabilidade garantida do sistema em malha fechada.

Com este escopo, esta dissertação de mestrado apresenta-se na seguinte estrutura:

O Capítulo 2º aborda resultados preliminares referentes à estabilidade e estabilização de sistemas quadráticos. Resgata, outrossim, conceitos ferramentais da teoria de Lyapunov para controle de sistemas, ferramental básico para o desenvolvimento deste trabalho.

O Capítulo 3º apresenta as modelagens de sistemas quadráticos com saturação e a síntese de realimentação de estados estabilizante para tais sistemas.

O Capítulo 4º, por sua vez, mostrará técnicas de *anti-windup* para os sistemas quadráticos tendo em conta a abordagem quadrática e a abordagem DAR.

O Capítulo 5º, por derradeiro, tece considerações finais acerca do estudo desenvolvido nesta dissertação.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar conceitos de base para o desenvolvimento do trabalho, especialmente aqueles relacionados à estabilidade de sistemas não lineares, a técnicas de modelagem e à saturação de atuadores. Primeiramente, serão formalizadas as definições de sistemas quadráticos, polinomiais e racionais. Em seguida, será apresentada a modelagem DAR, bem como modelagens particulares para sistemas quadráticos. Ao lado disso, serão reunidos os principais conceitos da teoria de Lyapunov para sistemas não lineares. Por fim, será apresentada a não linearidade de zona morta, associada a uma condição de setor generalizada, utilizadas para manipular o problema de saturação.

2.1 Sistemas Racionais, Polinomiais e Quadráticos

Nesta seção, serão perfiladas as definições de sistemas polinomiais, racionais e quadráticos, objetos de análise deste trabalho, para os quais serão estudados métodos de síntese de controladores na presença de entradas saturantes, bem como métodos de síntese de compensadores de AW.

2.1.1 Sistemas Polinomiais e Racionais

Sistema polinomial é um tipo de sistema em que as derivadas temporais dos estados são funções polinomiais dos estados. Em (KOOIJ; CHRISTOPHER, 1993), é apresentada uma definição adequada para sistemas reais no plano. Em (CHESI, 2010), por sua vez, é apresentada a seguinte definição:

Definição 1. (*Sistema Polinomial*) Considere dois vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x^y \triangleq x_1^{y_1} x_2^{y_2} \dots x_n^{y_n} \quad (1)$$

e o monômio

$$m(x) = c_a x^a \quad (2)$$

$$= c_a (x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}) \quad (3)$$

em que c_a é um coeficiente real. O sistema $\dot{x} = f_p(x)$ é dito polinomial se $f_p(x) :$

$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ for tal que:

$$f_{p_1}(x) = \sum_{i=1}^{N_1} m_{1_i}(x) \quad (4)$$

$$f_{p_2}(x) = \sum_{i=1}^{N_2} m_{2_i}(x) \quad (5)$$

\vdots

$$f_{p_n}(x) = \sum_{i=1}^{N_n} m_{n_i}(x) \quad (6)$$

◇

A partir dessa definição, tem-se que um sistema racional é aquele em que as derivadas temporais dos estados são representados por uma função racional dos estados da seguinte forma:

$$\dot{x} = f_r(x) , \quad (7)$$

em que

$$f_{r_i}(x) = \frac{f_i(x)}{h_i(x)}, \quad i = 1, \dots, n , \quad (8)$$

com $f(x)$ e $h(x)$ sendo funções polinomiais, respectivamente. Assim, os sistemas polinomiais constituem uma classe particular dos sistemas racionais (7) quando $h_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, forem uma constantes não nulas.

Exemplo 1. (*Sistema Polinomial*) Considere o sistema não linear sem presença de saturação apresentado por (COUTINHO; GOMES DA SILVA Jr., 2010):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (1 + x_1^2)x_1 + (2 + 8x_2^2)x_2 . \end{aligned} \quad (9)$$

Com efeito, nesse caso $f_{p_1}(x) = x_2$ e $f_{p_2}(x) = (1 + x_1^2)x_1 + (2 + 8x_2^2)x_2$. ○

Exemplo 2. (*Sistema Racional*) Considere o sistema não linear abaixo (OLIVEIRA, 2012):

$$\dot{x} = 4x - \frac{x}{1 + x^2} - \frac{2x^2}{1 + x^2} . \quad (10)$$

Os dois últimos termos do lado direito da equação indicam tratar-se de um sistema racional em x . ○

2.1.2 Sistemas Quadráticos

Sistemas quadráticos são uma classe particular de sistemas polinomiais em que uma das funções polinomiais $Y(x, q)$, $Z(x, q)$ tem grau $n = 2$ em (6). Os sistemas não lineares quadráticos servem como modelos de fenômenos em uma grande variedade de áreas, tanto em engenharia (sistemas elétricos de potência, reatores químicos e robótica), como em biologia, ecologia e economia. Uma das formas de se representar os sistemas quadráticos é a seguinte (AMATO; COSENTINO; MEROLA, 2007):

$$\dot{x} = Ax + B(x) , \quad (11)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz constante e

$$B(x) = \begin{bmatrix} x' B_1 x \\ x' B_2 x \\ \vdots \\ x' B_n x \end{bmatrix}, \quad (12)$$

com $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, n$.

Alternativamente, tem-se a representação utilizada por (COUTINHO; SOUZA, 2012):

$$\dot{x} = A(x)x, \quad (13)$$

em que

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i \quad (14)$$

com x_i denotando o i -ésimo componente de x , e A_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, sendo matrizes constantes de dimensões apropriadas.

Exemplo 3. Considere o sistema abaixo, versão modificada daquele apresentado por (VALMORBIDA et al., 2010):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_1^2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Uma representação por decomposição quadrática do sistema (15) pode ser dada pela seguinte equação:

$$\dot{x} = (A_0 + A_1 x_1)x, \quad (16)$$

em que

$$x = [x_1' \ x_2']', \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \circ$$

OBSERVAÇÃO 1. Considere o seguinte sistema em malha fechada (MOHLER, 1970; HIRSCHORN, 1979; FIGALLI; CAVA; TOMASI, 1984):

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{n_u} B_i u_i x, \quad (17)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e B_i , $i = 1, \dots, n_u$, são matrizes constantes. Sistemas da forma (17), em que há produto dos estados da planta e dos estados do controlador, são chamados de sistemas bilineares. Observe que, no caso em que u é uma realimentação linear de estados, o sistema em malha fechada resultante é quadrático.

2.1.3 Modelagem DAR

A DAR — Representação Algébrico-Diferencial (do inglês, *Differential Algebraic Representation*) é uma forma de representar sistemas racionais no espaço de estados. Considere o seguinte sistema:

$$\dot{x} = f(x), \quad (18)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado e $f(x)$ é uma função racional vetorial de dimensões apropriadas. O sistema (18) pode ser representado na seguinte forma (COUTINHO et al., 2004):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(x)x + A_2(x)z \\ 0 &= \Omega_1(x)x + \Omega_2(x)z, \end{aligned} \quad (19)$$

em que $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é um vetor auxiliar que contém os termos polinomiais (de ordem maior do que dois) e racionais de $f(x)$. Além disso, $A_1(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_2(x) \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$, $\Omega_1(x) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ e $\Omega_2(x) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ são matrizes afins em x .

O vetor auxiliar z deve satisfazer a seguinte relação:

$$z = -\Omega_2(x)^{-1}\Omega_1(x)x. \quad (20)$$

Sendo assim, a matriz $\Omega_2(x)$ deve ser inversível para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por isso, assume-se que $\Omega_2(x)$ possui posto completo para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

OBSERVAÇÃO 2. *Nos casos em que $f(x)$ depender quadraticamente de x , o vetor auxiliar z será igual a zero em (20). Dessa forma, tem-se $A_2(x) = 0$, $\Omega_1(x) = 0$ e $\Omega_2(x) = 0$.*

Exemplo 4. Considere o sistema (15) dado no Exemplo 3. Sua forma em DAR é dada pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 & x_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Tendo em conta a representação (19), tem-se para (21):

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 & x_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = 0, \quad \Omega_1(x) = 0 \text{ e } \Omega_2(x) = 0. \quad \circ$$

Oriunda das técnicas desenvolvidas para modelagem de sistemas incertos, outra forma de representar sistemas racionais nos estados é a LFR — Representação Linear Fracionária (do inglês, *Linear Fractional Representation*) (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996). A LFR, em particular, utiliza exclusivamente funções de Lyapunov quadráticas para verificar a estabilidade do sistema (18). Com base na estratégia LFR, foram desenvolvidos problemas convexos de otimização voltados à síntese de controladores. Há, também, algoritmos específicos para calcular LFRs e um *toolbox* do MATLAB^{®1} pode ser utilizado para obter-se representações desse tipo (EL GHAOUI; SCORLETTI, 1996; GHAOUI; NICULESCU, 2000).

A DAR, por outro lado, têm sido utilizada para o desenvolvimento de técnicas de *anti-windup* para sistemas não lineares racionais nos estados (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014). Além disso, possui vantagem sobre a representação LFR porque conduz, em geral, a resultados menos conservadores.

¹MATLAB[®] é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.

2.2 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Alexandr M. Lyapunov foi um matemático e engenheiro russo que propôs uma teoria a respeito da estabilidade de sistemas dinâmicos. Grosso modo, um ponto de equilíbrio é estável se todas as trajetórias iniciadas próximas dele permanecem em seus arredores. Paralelamente, ele será assintoticamente estável se todas as soluções iniciadas próximas de pontos de equilíbrio tendem para ele à medida que o tempo tende a infinito. Formalmente, tem-se a seguinte definição (KHALIL, 1996):

Definição 2. (*Estabilidade do Ponto de Equilíbrio*) Considere um sistema

$$\dot{x} = f(x) , \quad (22)$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, em que $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^n$ é um mapa localmente Lipschitz de um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dentro de \mathbb{R}^n . O ponto de equilíbrio $x = 0$ de (22) é

- estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

- instável, se não for estável; ou
- assintoticamente estável, se for estável e δ possa ser escolhido tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad \diamond$$

Existem os métodos direto e indireto de Lyapunov para a verificação da estabilidade de um ponto de equilíbrio.

De um lado, o método indireto investiga a estabilidade fazendo um linearização do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio e determinando se ela é estável ou não. Trata-se, portanto, de uma caracterização local. Caso seja marginalmente estável, nada pode ser afirmado acerca da estabilidade do sistema em questão (KHALIL, 1996).

Por outro lado, o método direto de Lyapunov (também conhecido como segundo método de Lyapunov) verifica a estabilidade do sistema através da solução do conjunto de equações diferenciais que o descrevem. Em vista disso, o seguinte Teorema pode ser enunciado (KHALIL, 1996):

Teorema 1. (*Estabilidade por Lyapunov*) *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema (22). Seja, ainda, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que contém o referido ponto de equilíbrio e $V : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função no domínio \mathcal{D} . Se V satisfizer*

$$V(0) = 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ em } \mathcal{D} - \{0\} , \quad (23)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ em } \mathcal{D} , \quad (24)$$

então $x = 0$ é estável. Por outro lado, se

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } \mathcal{D} - \{0\}, \quad (25)$$

então $x = 0$ é assintoticamente estável. ◇

No caso em que a trajetória $x(t)$ converge para o ponto de equilíbrio de interesse, à medida que $t \rightarrow \infty$, para toda condição inicial, a estabilidade do sistema é considerada global. Dessa forma, diz-se que tal ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável. Em vista disso, um novo Teorema advém da teoria de Lyapunov:

Teorema 2. (Estabilidade Global por Lyapunov) *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema (22) e seja $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que*

- $V(0) = 0$ e $V(x) > 0, \forall x \neq 0$,
- $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$,
- $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$,

então $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável. \diamond

Nos casos em que a estabilidade global não pode ser determinada, há possibilidade de se estimar uma região que contenha condições iniciais de trajetórias convergentes. É nesse sentido que a definição de região de atração emergirá (KHALIL, 1996).

Definição 3. (*Região de Atração*) Considere que uma solução $x(t)$ de (22) se inicia num estado x_0 e num tempo $t_0 = 0$. A região de atração \mathcal{R}_a é o conjunto de todos os pontos x_0 para os quais $x(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. \diamond

Encontrar-se a região de atração analiticamente é uma tarefa complexa ou até impossível. Por isso, funções de Lyapunov podem ser utilizadas para encontrar uma região de estabilidade garantida contida na região de atração. Tais regiões podem ser vistas como estimativas analíticas da região de atração. Em vista disso, o seguinte Definição pode ser estabelecida (KHALIL, 1996):

Definição 4. Um conjunto fechado $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, com a origem sendo um ponto interior a \mathcal{R} , é uma região de estabilidade garantida do sistema (22) se:

1. \mathcal{R} for um conjunto invariante e contrativo para o sistema (22); e
2. existir uma função de Lyapunov $V(x)$ tal que:

$$(a) \quad V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{R}, x \neq 0,$$

$$(b) \quad \dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{R}. \quad \diamond$$

Com base nessas considerações, e da Teoria de Lyapunov, o seguinte resultado pode então ser apresentado (KHALIL, 1996):

Lema 1. *Considere o sistema (22), em que $f : \mathcal{B}_x \mapsto \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$, é uma função localmente Lipschitz tal que $f(0) = 0$. Assuma que existem escalares reais positivos ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3 , além de uma função continuamente diferenciável $V : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$\epsilon_1 x'x \leq V(x) \leq \epsilon_2 x'x, \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (26)$$

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon_3 x'x, \forall x \in \mathcal{B}_x \text{ e} \quad (27)$$

$$\mathcal{R}(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : V(x) \leq \delta\} \subset \mathcal{B}_x, \quad (28)$$

para algum escalar δ . Então,

1. O ponto de equilíbrio $x = 0$ é localmente exponencialmente estável e V é uma função de Lyapunov em \mathcal{B}_x ;
2. o conjunto $\mathcal{R}(\delta)$ é contrativo positivamente invariante, isto é, para qualquer $x(0) \in \mathcal{R}(\delta)$, $x(t) \in \mathcal{R}(\delta)$, $\forall t \geq 0$ e x tende à origem à medida que $t \rightarrow \infty$, ou seja, $\mathcal{R}(\delta)$ é uma região de estabilidade garantida. \diamond

2.3 Sistemas com Saturação

Considere um sistema não linear da forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \text{sat}(u) \quad (29)$$

em que $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é uma entrada de controle e $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n_u}$ são funções não lineares em x que satisfazem as condições de existência e unicidade de solução $\forall x \in \mathcal{B}_x$. A função $\text{sat}(\cdot)$, por sua vez, é uma função clássica de saturação definida como (TARBOURIECH et al., 2011):

$$\text{sat}(u_{(i)}) = \text{sign}(u_{(i)}) \min \left\{ |u_{(i)}|, u_{0(i)}, i = 1, \dots, n_u \right\}, \quad (30)$$

em que $u_{(i)}$ é o i -ésimo componente de u e $u_{0(i)} > 0$, para $i = 1, \dots, n_u$, denota o nível simétrico de saturação para o i -ésimo atuador. Alternativamente, tem-se a seguinte versão detalhada da definição (30):

$$\text{sat}(u_{(i)}) = \begin{cases} u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)} > u_{0(i)} \\ u_{(i)} & \text{se } -u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)} \\ -u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)} < -u_{0(i)}, \end{cases} \quad (31)$$

para $i = 1, \dots, n_u$.

A fim de modelar a não linearidade introduzida por (31) no sistema (29), várias estratégias são apresentadas em (TARBOURIECH et al., 2011) para representar sistemas sujeitos à saturação de atuadores.

A primeira estratégia consiste em utilizar inclusões diferenciais politópicas. São uma descrição local do sistema (29) através de um modelo politópico, o que permite a solução do problema utilizando técnicas de controle robusto.

A segunda estratégia é reescrever o sistema (29) substituindo a função $\text{sat}(\cdot)$ por uma não linearidade do tipo zona morta. Nesse caso condições de setor podem ser utilizadas para relaxar as condições de estabilização do sistema.

A terceira forma é descrever a função de saturação, dividindo o espaço de estados em regiões, em cada uma das quais a dinâmica do sistema é descrita por um sistema linear.

Por fim, uma quarta forma de tratar a função de saturação é através de incertezas limitadas em norma.

Neste trabalho, a modelagem da saturação será por não linearidade do tipo zona morta, através da qual condições de estabilidade podem ser diretamente na forma de LMIs, sobretudo para o problema de síntese de compensadores de AW, o que evita procedimentos iterativos (OLIVEIRA, 2012). Além disso, é a técnica utilizada pelos trabalhos de síntese de *anti-windup* que serão alvo de comparação nesta dissertação (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014; OLIVEIRA et al., 2011, 2013).

2.3.1 Modelagem por Não Linearidade do Tipo Zona Morta

A não linearidade de zona morta é definida como

$$\psi(u) \triangleq u - \text{sat}(u) \quad (32)$$

ou, equivalentemente,

$$\psi(u_{(i)}) = \begin{cases} u_{(i)} - u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)} > u_{0(i)} \\ 0 & \text{se } -u_{0(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{0(i)} \\ u_{(i)} + u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)} < -u_{0(i)} \end{cases}, \quad (33)$$

para $i = 1, \dots, n_u$.

Nesse caso, o sistema (29) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u - g(x)\psi(u). \quad (34)$$

Considere, agora, um vetor $v \in \mathbb{R}^{n_u}$ tal que o seguinte conjunto \mathcal{S} possa ser definido:

$$\mathcal{S} = \left\{ u, v \in \mathbb{R}^{n_u} : \left| (u_{(i)} - v_{(i)}) \right| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, n_u \right\}. \quad (35)$$

Tendo em conta a não linearidade (32) e o conjunto \mathcal{S} definido em (35), o seguinte Lema pode ser enunciado (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH, 2005; TARBOURIECH et al., 2011):

Lema 2. *Se $u, v \in \mathcal{S}$, então a relação*

$$\psi(u)'T[\psi(u) - v] \leq 0 \quad (36)$$

é verificada para qualquer matriz diagonal e definida positiva $T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$. \diamond

A condição de setor generalizada enunciada no Lema 2 é de especial interesse no contexto deste trabalho. Diferentemente de sua congênere, a condição de setor clássica, ela se aplica especificamente a não linearidades do tipo zona morta, característica que fornece resultados menos conservadores do que aqueles que seriam obtidos através da aplicação da condição de setor clássica (TARBOURIECH et al., 2011).

3 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS QUADRÁTICOS COM SATURAÇÃO

3.1 Introdução

Este capítulo trata da síntese de realimentação de estados para sistemas quadráticos sujeitos à saturação em atuadores. A primeira parte do capítulo o fará através de uma decomposição quadrática (COUTINHO; SOUZA, 2012). A segunda parte do capítulo abordará o problema através da formulação DAR, particularizando para o caso quadrático os resultados apresentados em (OLIVEIRA, 2012), que tratou de toda a classe de sistemas racionais.

Considere, inicialmente, um sistema quadrático sujeito à saturação de atuadores na forma:

$$\dot{x} = f(x)x + g(x) \text{sat}(u) , \quad (37)$$

em que $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados da planta, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle. As funções $f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ são quadráticas em x e satisfazem as condições de existência e unicidade de solução para todo $x \in \mathcal{B}_x$. A função $\text{sat}(\cdot)$ é a função clássica de saturação definida em (31).

Equivalentemente, (37) pode ser reescrita utilizando-se a definição de zona morta em (32), como segue:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t) - g(x)\psi(u(t)) . \quad (38)$$

Em vista disso, o objetivo desse capítulo é a estabilização do sistema (37) através de uma realimentação estática de estados da forma

$$u(t) = K(x)x, \quad (39)$$

em que $K(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$.

O problema de calcular $K(x)$, tal que a região de atração do sistema em malha fechada seja maximizada, pode ser reformulado para o problema de calcular $K(x)$ juntamente com o cálculo de uma função de Lyapunov $V(x)$ associada a uma região de estabilidade garantida, para (37)-(39), a partir da aplicação do Lema 1.

Nesse sentido, considera-se uma função quadrática como sendo candidata de Lyapunov:

$$V(x) = x'Px , \quad (40)$$

em que $P = P' > 0$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A região relacionada com a função de Lyapunov pode ser normalizada e descrita pelo seguinte conjunto elipsoidal:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\} . \quad (41)$$

3.2 Região de Estados Admissíveis

Considerando que \mathcal{R} é um elipsoide, considera-se que \mathcal{B}_x é um poliedro convexo simétrico (com respeito à origem), definido como segue:

$$\mathcal{B}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : |q'_r x| \leq 1, r = 1, \dots, n_f\} \quad (42)$$

em que $q_r \in \mathbb{R}^n, r = 1, \dots, n_f$ são vetores constantes que definem as $2n_f$ faces de \mathcal{B}_x . Nesse caso, a inclusão $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ é verdadeira caso as seguintes desigualdades matriciais sejam satisfeitas (BOYD et al., 1994):

$$1 - q'_r P^{-1} q_r \geq 0, r = 1, \dots, n_f, \quad (43)$$

ou, equivalentemente, se as seguintes LMIs em P forem satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} P & q_r \\ q'_r & 1 \end{bmatrix} \geq 0, r = 1, \dots, n_f. \quad (44)$$

Alternativamente, o conjunto poliedral \mathcal{B}_x pode ser descrito em termos do envelope convexo de seus vértices denotados por $\varphi_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, \kappa$, isto é,

$$\mathcal{B}_x = \text{Co}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\kappa\}. \quad (45)$$

Isso quer dizer que qualquer $x \in \mathcal{B}_x$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices φ_i , ou seja,

$$x = \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i \varphi_i, \quad (46)$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0.$$

3.3 Abordagem Quadrática

Esta seção apresenta um método de obtenção da realimentação estática de estados através da decomposição quadrática do sistema. Considere que $f(x) \triangleq A(x)$ e $g(x) \triangleq B(x)$. Assim, o sistema (37) pode ser escrito como

$$\dot{x} = A(x)x + B(x) \text{sat}(u), \quad x(0) = x_0 \quad (47)$$

em que $A : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}^{n \times n_u}$ são funções matriciais afins em x definidas como:

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i, \quad B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^n x_i B_i, \quad (48)$$

com x_i denotando o i -ésimo componente de x , e A_i e B_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, sendo matrizes de constantes de dimensões apropriadas e o par (A_0, B_0) sendo controlável. Além disso, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em malha aberta (47) com $u(t) \equiv 0$ pode ser instável. Tem-se, ainda, a seguinte representação da matriz $B(x)$:

$$B(x) = \Delta'(x) \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (49)$$

em que

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} I_n \\ \Pi(x) \end{bmatrix}, \Pi(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_n \\ \vdots \\ x_n I_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}.$$

Considere a lei de controle dada em (39). Admita que $K(x) = \mathbf{K}(x)$ seja definida da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(x) = \mathbf{K}_1(x) + \mathbf{K}_2(x), \quad (50)$$

em que $\mathbf{K}_1(x)$ é uma função matricial afim em x , isto é,

$$\mathbf{K}_1(x) = K_0 + \sum_{i=1}^n x_i K_i, \quad K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n},$$

tal que K_i , $i = 0, 1, \dots, n$, são matrizes constantes e $\mathbf{K}_2(x)$ é uma função quadrática matricial de x . Dessa forma, o sistema em malha fechada de (47) com $u = \mathbf{K}(x)x$ é dado por:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x) \text{sat}(\mathbf{K}(x)x) \quad (51)$$

ou, equivalentemente, por

$$\dot{x} = \left(A(x) + B(x)\mathbf{K}(x) \right) x - B(x)\psi(\mathbf{K}(x)x). \quad (52)$$

3.3.1 Condição de Setor Generalizada

Tendo em conta os conceitos apresentados na Seção 2.3.1, considera-se

$$u = \mathbf{K}(x)x, \quad (53)$$

$$v = \mathbf{G}(x)x \quad (54)$$

em (35) e (36). Considere, agora, a seguinte expansão de $\mathbf{G}(x)$:

$$\mathbf{G}(x) = \mathbf{G}_1(x) + \mathbf{G}_2(x), \quad (55)$$

em que $\mathbf{G}_1(x)$ é uma função matricial afim em x , isto é,

$$\mathbf{G}_1(x) = G_0 + \sum_{i=1}^n x_i G_i, \quad G_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}, \quad (56)$$

com G_i , $i = 0, 1, \dots, n$, sendo matrizes constantes e $\mathbf{G}_2(x)$ é uma função quadrática matricial em x . Assim, se $x \in \mathcal{S}$, com

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \left(\mathbf{K}(x)_{(i)} - \mathbf{G}(x)_{(i)} \right) x \right| \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, n_u \right\}, \quad (57)$$

então a condição

$$\psi(\mathbf{K}(x)x)' T [\psi(\mathbf{K}(x)x) - \mathbf{G}(x)x] \leq 0 \quad (58)$$

é verificada para toda matriz $T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ diagonal e positiva definida.

3.3.2 Função Candidata de Lyapunov

A fim de obter condições para a síntese de $\mathbf{K}(x)$ de forma a garantir a estabilidade local (regional) do sistema (52), será considerada a seguinte função quadrática candidata de Lyapunov:

$$V(x) = x'Px, \quad P > 0, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (59)$$

e o seguinte domínio normalizado de Lyapunov:

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\} . \quad (60)$$

Note que a região \mathcal{R} é um conjunto elipsoidal.

Considerando (49), (52) e (59), a derivada temporal de $V(x)$ ao longo da trajetória do sistema (52) é dada por ¹:

$$\dot{V}(x) = 2x'P[(A(x) + B_0\mathbf{K}(x) + \Pi'\mathbf{B}\mathbf{K}(x))x - (B_0 + \Pi'\mathbf{B})\psi] . \quad (61)$$

Tendo em vista o Lema 2 e as considerações precedentes, é dado que $\dot{V} < 0$, $\forall x \in \mathcal{S}$, $x \neq 0$, se a seguinte condição for satisfeita:

$$2x'P[(A(x) + B_0\mathbf{K}(x) + \Pi'\mathbf{B}\mathbf{K}(x))x - (B_0 + \Pi'\mathbf{B})\psi] - 2\psi'T(\psi - \mathbf{G}(x)x) < 0. \quad (62)$$

Seja, agora, a seguinte transformação de similaridade:

$$\xi = Px, \quad Q = P^{-1} . \quad (63)$$

Dessa forma, a inequação em (62) pode ser reescrita como:

$$2\xi'[(A(x) + B_0\mathbf{K}(x) + \Pi'\mathbf{B}\mathbf{K}(x))Q\xi - (B_0 + \Pi'\mathbf{B})\psi] - 2\psi'T[\psi - (\mathbf{G}_1(x) + \mathbf{G}_2(x))Q\xi] < 0. \quad (64)$$

Considere, agora, a seguinte parametrização de $\mathbf{K}(x)$ (COUTINHO; SOUZA, 2012):

$$\mathbf{K}(x) = \mathbf{F}(x)Q^{-1}, \quad \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_1(x) + \mathbf{F}_2(x) , \quad (65)$$

com

$$\mathbf{F}_1(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i, \quad \mathbf{F}_2(x) = \Pi'_u(x)F\Pi(x) , \quad (66)$$

em que

$$\Pi_u(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_{n_u} & \cdots & x_n I_{n_u} \end{bmatrix}' ,$$

com $F_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, e $F \in \mathbb{R}^{n n_u \times n^2}$ sendo matrizes constantes a serem determinadas. De forma similar, as matrizes $\mathbf{G}_1(x)$ e $\mathbf{G}_2(x)$ são parametrizadas da seguinte forma:

$$\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{Y}_1(x)Q^{-1}, \quad \mathbf{G}_2(x) = \mathbf{Y}_2(x)Q^{-1} , \quad (67)$$

em que

$$\mathbf{Y}_1(x) = Y_0 + \sum_{i=1}^n x_i Y_i, \quad \mathbf{Y}_2(x) = \Pi_u(x)'Y\Pi(x) ,$$

¹Para simplificar a notação, será considerado que $\psi(\mathbf{K}(x)x) = \psi$, $\Pi(x) = \Pi$ e $\Delta(x) = \Delta$ desse ponto em diante.

com $Y_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, $i = 0, 1, \dots, n$, e $Y \in \mathbb{R}^{nn_u \times n^2}$ sendo matrizes constantes a serem determinadas.

À luz dessas definições, a desigualdade (64) pode ser escrita como segue:

$$2\xi' \left(\Lambda(x) + B_0 \Pi'_u(x) F \Pi + \Pi' \mathbf{B} \Pi'_u(x) F \Pi + \Pi' \mathbf{B} \mathbf{F}_1(x) \right) \xi - 2\xi' \left(B_0 + \Pi' \mathbf{B} \right) \psi - 2\psi' T \psi + 2\psi' T \mathbf{Y}_1(x) \xi + 2\psi' T \Pi'_u(x) Y \Pi \xi < 0, \quad (68)$$

com $\Lambda(x) = A(x)Q + B_0 \mathbf{F}_1(x)$.

Para obter-se um projeto de controle baseado em condições LMI, considere o seguinte vetor aumentado:

$$\eta_s = \begin{bmatrix} \Delta \xi \\ T \psi \end{bmatrix}$$

e as seguintes matrizes auxiliares:

$$N_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n^2} \end{bmatrix} \text{ e } N_2 = \begin{bmatrix} 0_{n^2 \times n} & I_{n^2} \end{bmatrix}.$$

Note que

$$N_1 \Delta = I_n \text{ e } N_2 \Delta = \Pi. \quad (69)$$

Assim, a condição em (68) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\eta'_s \Phi(x) \eta_s < 0, \quad (70)$$

em que

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Xi & \star \\ \left(\begin{array}{c} -S B'_0 N_1 - S \mathbf{B}' N_2 \\ + \mathbf{Y}_1(x) N_1 + \Pi'_u(x) Y N_2 \end{array} \right) & -2S \end{bmatrix}, \quad (71)$$

com $S = T^{-1}$ e

$$\Xi = \text{He} \left\{ N'_1 \Lambda(x) N_1 + N'_1 B_0 \Pi'_u(x) F N_2 + N'_2 \mathbf{B} \Pi'_u(x) F N_2 + N'_2 \mathbf{B} \mathbf{F}_1(x) N_1 \right\}. \quad (72)$$

Deve-se notar que o vetor auxiliar η_s é tal que $\hat{\Omega}(x) \eta_s = 0$, com

$$\hat{\Omega}(x) = \begin{bmatrix} \Omega(x) & 0_{n^2 \times n_u} \end{bmatrix}, \quad (73)$$

em que $\Omega(x) = [\Pi \quad -I_{n^2}]$.

Dessa forma, se

$$\eta'_s \Phi(x) \eta_s < 0, \quad \forall \eta_s : \hat{\Omega}(x) \eta_s = 0, \quad \eta_s \neq 0, \quad (74)$$

então (62) é satisfeita para todo $x \neq 0$ e, assim, tem-se que $\dot{V} < 0$ para todo $x \in \mathcal{S}$ não nulo.

A partir do Lema de Finsler (ver Apêndice A.1), tem-se que (74) é equivalente a:

$$\Phi(x) + \text{He} \{ L \hat{\Omega}(x) \} < 0, \quad (75)$$

em que $L \in \mathbb{R}^{n(n+1) \times n^2}$ é uma matriz de ponderação a ser determinada.

Contudo, a condição (75) tende a ser conservadora porque o estado x está acoplado a $\Phi(x)$ e η_s (COUTINHO et al., 2008). Em outras palavras, $\Phi(x)$ e η_s dependem de x . A fim de se obter uma condição LMI dependente de estados menos

conservadora, é introduzido um aniquilador matricial linear $\mathcal{N}(x) \in \mathbb{R}^{m \times n^2}$ de Π . Especificamente, a matriz $\hat{\Omega}(x)$ é trocada por $\Omega_a(x)$, a qual é definida como o seguinte:

$$\Omega_a(x) = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}(x) \\ \mathcal{N}_a(x) \end{bmatrix}, \quad (76)$$

em que

$$\mathcal{N}_a(x) = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & \mathcal{N}(x) & 0_{m \times n_u} \end{bmatrix}, \text{ com} \quad (77)$$

$$\mathcal{N}(x) = \begin{bmatrix} x_2 I_n & -x_1 I_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & x_3 I_n & -x_2 I_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & 0_n & x_n I_n & -x_{(n-1)} I_n \end{bmatrix}.$$

Note que $\Omega_a(x)\eta_s = 0$ e $m = n(n-1)$.

3.3.3 Resultados Principais

Embasado nos desenvolvimentos precedentes, o próximo teorema fornece condições na forma de LMIs para o projeto de um controlador por realimentação de estados localmente estabilizante para sistemas quadráticos sujeitos à saturação no atuador.

Teorema 3. *Considere o sistema definido por (47). Seja \mathcal{B}_x um conjunto poliedral definido tanto como em (42) quanto em (45). Suponha que existam matrizes reais $F, F_0, F_1, \dots, F_n, L_a, L_b, Q, Y, Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ e uma matriz diagonal positiva definida S satisfazendo as seguintes LMIs $\forall \varphi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$:*

$$Q > 0; \quad 1 - q'_r Q q_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, n_f; \quad (78)$$

$$\Phi(\varphi_j) + \text{He}\{L_a \Omega_a(\varphi_j)\} < 0, \quad j = 1, \dots, \kappa; \quad (79)$$

$$\left[\begin{array}{c} N'_1 Q N_1 + \text{He}\{L_b \Omega_b(\varphi_j)\} \\ \left(\begin{array}{c} \mathbf{F}_{1(i)}(\varphi_j) - \mathbf{Y}_{1(i)}(\varphi_j) \\ \Pi'_{u(i)}(\varphi_j)(F - Y) \end{array} \right) N_{1+} \\ \Pi'_{u(i)}(\varphi_j)(F - Y) N_2 \end{array} \right] \begin{array}{c} \star \\ u_{0(i)}^2 \\ \end{array} > 0, \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, \kappa, \\ i = 1, \dots, n_u. \end{array} \quad (80)$$

com $\Phi(\cdot)$ e $\Omega_a(\cdot)$ definidos como em (71) e (76), respectivamente, e

$$\Omega_b(x) = \begin{bmatrix} \Omega(x) \\ \mathcal{N}_b(x) \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{N}_b(x) = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & \mathcal{N}(x) \end{bmatrix}.$$

Então, a lei de controle $u = \text{sat}(\mathbf{K}(x)x)$, com $\mathbf{K}(x) = \mathbf{F}(x)Q^{-1}$, em que $\mathbf{F}(x)$ é definida em (65) e (66), garante que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em malha fechada (51) é localmente assintoticamente estável e $V(x) = x'Q^{-1}x$ é uma função de Lyapunov em \mathcal{B}_x . Além disso, o conjunto $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\}$, com $P = Q^{-1}$, é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada, isto é, para todo $x(0) \in \mathcal{R}$, a trajetória $x(t) \in \mathcal{R} \forall t \geq 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. \diamond

Prova. Primeiramente, note que as LMIs em (78) garantem a não singularidade de Q , bem como $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$.

Suponha que as condições em (79) e (80) são satisfeitas. Então, por convexidade elas são satisfeitas para todo $x \in \mathcal{B}_x$, isto é, com $\varphi_j = x$, $\forall x \in \mathcal{B}_x$.

Seja $V(x) = x'Px$ com $P = Q^{-1}$. Dessa forma, tem-se

$$\varepsilon_1 x'x \leq V(x) \leq \varepsilon_2 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (81)$$

em que ε_1 e ε_2 são o menor e o maior autovalores de P , respectivamente.

Em seguida, considere o conjunto de LMIs em (79). Assim,

$$\Phi(x) + \text{He}\{L_a \Omega_a(x)\} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x.$$

Como a desigualdade acima é estrita, existe um escalar suficientemente pequeno ε_3 tal que

$$\Phi(x) + \text{He}\{L_a \Omega_a(x)\} \leq -\varepsilon_3 N_3' N_3, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x, \quad (82)$$

em que $N_3 = \begin{bmatrix} Q & 0_{n \times n^2} & 0_{n \times n_u} \end{bmatrix}$. Assim, pré e pós-multiplicando-se (82) por η_s' e η_s , respectivamente, e levando-se em conta (59), (62), (63), (65) e o fato de que $\Omega_a(x)\eta_s = 0$, dos desenvolvimentos apresentados na Seção 3.3.2, tem-se que:

$$\dot{V}(x) \leq -\varepsilon_3 x'x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}. \quad (83)$$

Dessa forma, dos Lemas 1 e 2, conclui-se que \mathcal{R} é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (51), caso seja garantido que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$.

Agora, será mostrado que (80) implica em $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$. Para isso, aplicando-se o complemento de Schur (ver Apêndice A.2) a (80) e pré e pós-multiplicando-se a desigualdade resultante por $\xi'\Delta'$ e $\Delta\xi$, respectivamente, obtém-se

$$\xi'Q\xi - [\xi'\mathbf{F}(x)'_{(i)} - \xi'\mathbf{Y}(x)'_{(i)}]u_{0(i)}^{-2}[\mathbf{F}(x)_{(i)} - \mathbf{Y}(x)_{(i)}\xi] > 0, \quad (84)$$

uma vez que $\Omega_b(x)\Delta = 0$, por construção. À luz de (63), (65) e (67), a desigualdade (84) conduz a

$$x'[\mathbf{K}(x)_{(i)} - \mathbf{G}(x)_{(i)}]'[\mathbf{K}(x)_{(i)} - \mathbf{G}(x)_{(i)}]x < u_{0(i)}^2 x'Q^{-1}x < u_{0(i)}^2,$$

para todo $x \in \mathcal{R}$. Em outras palavras, tem-se que:

$$\left| (\mathbf{K}(x)_{(i)} - \mathbf{G}(x)_{(i)})x \right| < u_{0(i)} \quad i = 1, \dots, n_u,$$

e, dessa forma, $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, o que conclui a prova. \square

3.3.4 Problema de Otimização

Na sequência, será mostrado como aplicar o Teorema 3 para maximizar a região de estabilidade garantida \mathcal{R} do sistema em malha fechada. Para isso, considere uma matriz auxiliar simétrica $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} W & I_n \\ I_n & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (85)$$

A partir de (85), segue-se que $W > Q^{-1}$ e dessa forma $\text{Tr}(W) > \text{Tr}(P)$, já que $P = Q^{-1}$. Então, para um dado politopo \mathcal{B}_x , o seguinte problema de otimização pode ser aplicado para maximizar o tamanho de \mathcal{R} :

$$\begin{cases} \min & \text{Tr}(W) \\ & F, F_0, F_1, \dots, F_n, L_a, L_b, \\ & Q, S, Y, Y_0, Y_1, \dots, Y_n \\ \text{sujeito a} & (78), (79), (80) \text{ e } (85). \end{cases} \quad (86)$$

Note que a minimização de $\text{Tr}(W)$ implica na minimização de $\text{Tr}(P)$ que maximiza aproximadamente a soma dos quadrados dos semi-eixos do elipsoide \mathcal{R} . Há outras funções custo que podem ser aplicadas para maximizar o tamanho de \mathcal{R} tais como maximização de volume, maximização do menor eixo e a maximização em determinada direção. Uma discussão detalhada sobre essa questão pode ser encontrada no Capítulo 2 do livro (TARBOURIECH et al., 2011) e nas suas referências.

Além disso, note que (78), (79), (80) e (85) são LMIs e, portanto, podem ser solucionadas pelos recursos computacionais convencionais.

OBSERVAÇÃO 3. *O problema de otimização (86) também é capaz de fornecer uma realimentação estática de estados na forma $u = Kx$, isto é, com $K(x) = K$ em (39). Para isso, basta considerar $F = 0$ e $F_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$.*

OBSERVAÇÃO 4. *O desenvolvimento do Teorema 3 considerou uma matriz diagonal real T na condição de setor generalizada (ver Seção 3.3.1). Para deixar a solução do problema com mais graus de liberdade, pode-se fazer $T = T(x)$ em (58), tal que*

$$T(x) = T_0 + \sum_{i=0}^n x_i T_i . \quad (87)$$

OBSERVAÇÃO 5. *A escolha apropriada do polítopo \mathcal{B}_x é determinante para uma solução que apresente uma região de estabilidade garantida, de fato, otimizada.*

De um lado, a escolha dos vértices de \mathcal{B}_x é feita pelo projetista, na prática em forma de um hiper-retângulo, em que as condições de existência e unicidade de solução são satisfeitas.

Por outro lado, o tamanho da região de estabilidade garantida \mathcal{R} depende do tamanho de \mathcal{B}_x . Se \mathcal{B}_x for pequeno, a região \mathcal{R} poderá ser conservadora demais. Ocorre que o problema de otimização simultânea de \mathcal{B}_x e de \mathcal{R} é não convexo.

Em vista disso, uma das soluções é parametrizar \mathcal{B}_x como um hiper-retângulo com a seguinte definição:

$$\mathcal{B}_x = \{x : |x_i| \leq \alpha, i = 1, \dots, n\} . \quad (88)$$

Depois, pode-se iniciar com valores (suficientemente) pequenos de α , incrementando-os até que as condições LMI do Teorema 3 sejam infactíveis (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014).

Outra solução é utilizada por trabalhos recentes como em (COUTINHO; SOUZA, 2012). Nele, é implementada uma busca iterativa, em dois passos, do polítopo e da região de estabilidade garantida. É iniciado com valores (suficientemente) pequenos de α_i para o polítopo dado a seguir:

$$\mathcal{B}_x = \{x : |x_i| \leq \alpha_i, i = 1, \dots, n\} . \quad (89)$$

Em seguida, para as matrizes encontradas, o polítopo \mathcal{B}_x é maximizado sobre $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. A parada do algoritmo ocorre quando não há mudança significativa no tamanho de \mathcal{R} .

3.4 Abordagem DAR

Admita a seguinte DAR para o sistema (37) (COUTINHO et al., 2004):

$$\dot{x} = A_1(x)x + A_3(x)\psi(u) + A_4(x)u , \quad (90)$$

em que $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ são funções matriciais afins em x .

Considere a lei de controle (39). Fazendo-se $K(x) = K$, tem-se uma realimentação estática de estados linear da forma:

$$u = Kx . \quad (91)$$

Assim, o sistema em malha fechada (37)-(91) pode ser representado pela seguinte equação:

$$\dot{x} = (A_1(x) + A_4(x)K)x + A_3(x)\psi(u) . \quad (92)$$

3.4.1 Condição Generalizada de Setor

Tendo em conta os conceitos apresentados na Seção 2.3.1, considera-se que

$$u = Kx , \quad (93)$$

$$v = Gx \quad (94)$$

em (35) e (36). Assim, se $x \in \mathcal{S}$, tal que

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| (K_{(i)} - G_{(i)})x \right| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, n_u \right\} , \quad (95)$$

então a condição

$$\psi(Kx)'T[\psi(Kx) - Gx] \leq 0 \quad (96)$$

é verificada para toda matriz $T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ diagonal e positiva definida.

3.4.2 Resultado Principal

Em vista dos conceitos desenvolvidos, o seguinte resultado pode ser apresentado, particularizado para o caso de sistemas quadráticos a partir do trabalho mostrado em (OLIVEIRA, 2012), em que toda a classe de sistemas racionais foi abordada:

Teorema 4. *Admita o sistema (37) e sua DAR em (90). Se existir uma matriz constante $Q_2 = Q_2' > 0$, matrizes Q_3 , Q_k e G_q de dimensões apropriadas e uma matriz diagonal $F > 0$, satisfazendo o seguinte conjunto de LMIs, $\forall \varphi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$:*

$$\begin{bmatrix} -Q_1 - Q_1' & A_1(\varphi_j)Q_2' + A_4(\varphi_j)Q_k & A_3(\varphi_j)F \\ \star & \text{He} \left\{ A_1(\varphi_j)Q_2 + A_4(\varphi_j)Q_k \right\} & A_3(\varphi_j)F + G' \\ \star & \star & -2F \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, \dots, \kappa; \quad (97)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 q_r \\ \star & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, \dots, n_f; \quad (98)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_{k(i)}' - G_{q(i)}' \\ \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_u. \quad (99)$$

Então, a lei de controle por realimentação estática de estados dada por $u = \text{sat}(Kx)$, com $K = Q_k(Q_2)^{-1}$, garante que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em malha fechada (51) é localmente assintoticamente estável e $V(x) = x'Q_2^{-1}x$ é uma função de Lyapunov em \mathcal{B}_x . Além disso, o conjunto $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x'Px \leq 1\}$, com $P = Q_2^{-1}$, é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada, isto é, para todo $x(0) \in \mathcal{R}$, a trajetória $x(t) \in \mathcal{R} \forall t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. \diamond

Prova. Considere que as matrizes A_1, A_3, A_4 sejam afins em x e que as desigualdades (97)-(99) sejam satisfeitas para cada $x \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$. Por convexidade, elas também serão satisfeitas para todo $x \in \mathcal{B}_x$. Em suma, o conjunto de condições (97) garante que, para todo $x(0) \in \mathcal{R}$, a trajetória $x(t)$ pertence a \mathcal{R} e converge assintoticamente para a origem quanto $t \rightarrow \infty$, desde que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$. As condições, (98) e (99), por sua vez, garantem a inclusão $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x \cap \mathcal{S}$. \square

O desenvolvimento e a prova do Teorema 4 estão detalhados em (OLIVEIRA, 2012), tese em que foram deduzidas condições de síntese de realimentação estática de estados para toda a classe de sistemas racionais, representados através de uma DAR apropriada.

3.4.3 Problema de Otimização

O Teorema 4 pode ser utilizado para encontrar-se um ganho K tal que a região \mathcal{R} seja tão grande quanto possível. Nesse sentido, a solução das condições (97)-(99) pode ser feita através de problema de otimização convexa, uma vez que o número de vértices de \mathcal{B}_x é finito, e tendo em conta que o tamanho e a forma de \mathcal{R} dependem de $P = Q_2^{-1}$. Para isso, considere uma matriz auxiliar simétrica $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} Q_2 & I_n \\ I_n & N \end{bmatrix} > 0. \quad (100)$$

Dessa forma, o seguinte problema de otimização pode ser estabelecido:

$$\begin{cases} \min & \text{Tr}(N) \\ & Q_2, Q_3, Q_k, \\ & G_q, F \\ \text{sujeito a} & (97), (98), (99) \text{ e } (100). \end{cases} \quad (101)$$

Exemplo 5. Considere o seguinte sistema bilinear, que foi considerado por (TARBOURIECH et al., 2009) e (COUTINHO; SOUZA, 2012), desprezando-se a saturação:

$$\dot{x} = Ax + (B_0 + x_1 B_1 + x_2 B_2) \text{sat}(u), \quad (102)$$

em que $x = [x'_1 \ x'_2]'$, $u = [u'_1 \ u'_2]'$,

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assume-se que as entradas de controle são simetricamente delimitadas como $|u_1| \leq 1$ and $|u_2| \leq 1$. Além disso, considera-se $\mathcal{B}_x = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq \mu_i, i = 1, 2\}$.

A solução do problema de otimização (86), com $\mu_1 = 9,5$ e $\mu_2 = 1,2$, conduz ao seguinte resultado:

$$Q^{-1} = P = \begin{bmatrix} 0,0799 & 0,0355 \\ 0,0355 & 0,7102 \end{bmatrix}.$$

As matrizes que definem a realimentação não linear de estados $\mathbf{K}(x) = (\mathbf{F}(x))Q^{-1}$, conforme (65) e (66), são dadas por:

$$F_0 = 10^5 \begin{bmatrix} 2,2596 & 1,1298 \\ -0,6835 & 0,6835 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = 10^5 \begin{bmatrix} -2,8246 & -1,1298 \\ -1,3669 & -1,7087 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = 10^5 \begin{bmatrix} -1,1298 & -0,5649 \\ -1,7087 & -1,3669 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0,0004 & -0,0121 & -4,4321 \cdot 10^5 & 5,0726 \cdot 10^5 \\ 0,0102 & 0,0039 & -6,0867 \cdot 10^5 & -5,8098 \cdot 10^4 \\ 4,4321 \cdot 10^5 & -5,0726 \cdot 10^5 & 0,5665 & 0,2739 \\ 6,0867 \cdot 10^5 & 5,8098 \cdot 10^4 & -0,1745 & -0,0035 \end{bmatrix}.$$

A lei de controle resultante é, então, dada por $u(t) = [u_1(t)' \ u_2(t)']'$, com

$$u_1(t) = -3,9749 \times 10^{-4}x_1^3 - 0,0132x_1^2x_2 - 2,6585 \times 10^4x_1^2 + 0,0301x_1x_2^2 - 1,0130 \times 10^5x_1x_2 + 2,2070 \times 10^4x_1 + 0,2146x_2^3 - 4,4130 \times 10^4x_2^2 + 8,8260 \times 10^4x_2$$

e

$$u_2(t) = 9,5179 \times 10^{-4}x_1^3 - 0,0011x_1^2x_2 - 1,6989 \times 10^4x_1^2 - 0,0045x_1x_2^2 - 1,4471 \times 10^5x_1x_2 - 3,0372 \times 10^3x_1 - 0,0087x_2^3 - 1,0314 \times 10^5x_2^2 + 4,6115 \times 10^4x_2.$$

A região resultante \mathcal{R} é mostrada na Fig. 3, junto da região real de atração do sistema em malha fechada.

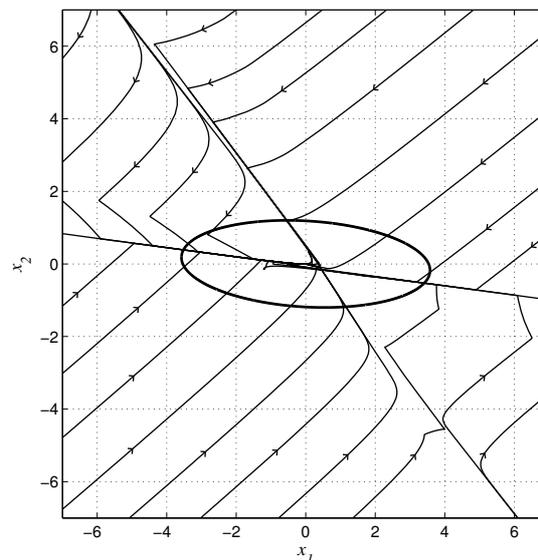


Figura 3: Região de estabilidade garantida do sistema em malha fechada (linha contínua) e várias trajetórias pertencentes à região de atração (linhas com setas).

Além disso, para a condição inicial

$$x(0) = [3,5273 \quad -0,3735]' , \quad (103)$$

a resposta temporal da trajetória de estado e da trajetória do sinal de controle são mostrados na Fig. 4. Note-se que, embora o atuador inicie saturado, a convergência dos estados é atingida.

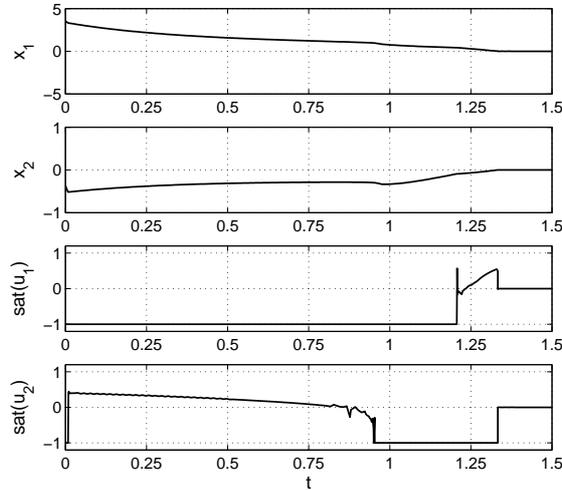


Figura 4: Resposta temporal para uma condição inicial (103).

A Fig. 5, por sua vez, mostra uma comparação entre as regiões de estabilidade garantida obtidas através da presente abordagem e através da abordagem DAR em (OLIVEIRA, 2012) para síntese de realimentação linear de estados para sistemas racionais. Considerando-se a abordagem DAR, o maior politopo que fornece uma solução factível às condições é dado por $\mathcal{B}_{x(DAR)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq \mu_i, i = 3, 4\}$ com $\mu_3 = 0,51$ e $\mu_4 = 0,12$.

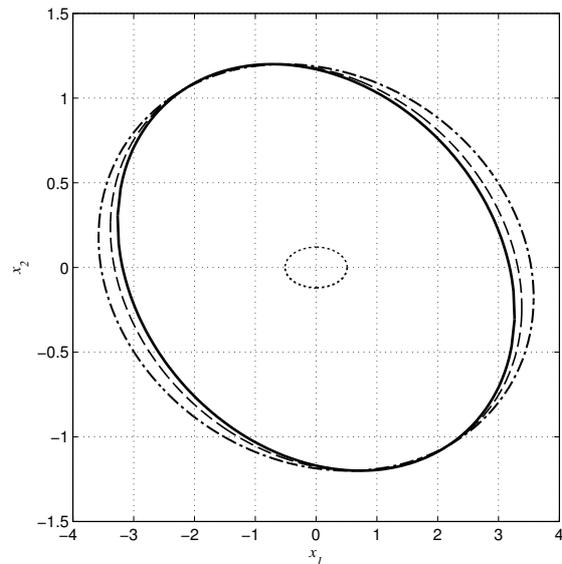


Figura 5: Comparativo entre regiões de estabilidade garantida do sistema em malha fechada obtida através da abordagem DAR (linha pontilhada) e através do método proposto de realimentação não linear de estados (linha traço-ponto), de realimentação afim nos estados (linha tracejada) e de realimentação linear de estados (linha contínua).

Além da realimentação não linear, o problema de otimização (101) foi aplicado para calcular uma realimentação afim nos estados, isto é, com $Y = 0$ e $F = 0$. A região de estabilidade obtida está representada na Fig. 5. Note que, nesse caso, a parcela quadrática do ganho $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{K}_2(x)$, que resulta nos termos cúbicos de $u(t)$, não influencia significativamente o tamanho da região de estabilidade garantida, ainda que uma maior região seja obtida nesse caso, como esperado.

Uma vez que a abordagem DAR dá conta de uma realimentação linear, o método proposto nessa seção também foi aplicado para a síntese de uma realimentação linear de estados, fazendo-se $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F = 0$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$ e $Y = 0$. A região de estabilidade garantida obtida por esses moldes também está representada na Fig. 5. Fica claro, nesse caso, uma redução significativa de conservadorismo quando uma abordagem específica para o caso de sistemas quadráticos é considerada.

O traço de cada uma das matrizes P que descrevem as regiões de estabilidade garantida são resumidamente apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Traços das matrizes P que descrevem as regiões de estabilidade garantida, conforme o tipo de lei de controle empregada, Exemplo 5.

$u(t)$	$\text{Tr}(P)$
$\mathbf{K}(x)$	0,7901
$\mathbf{K}_1(x)$	0,8131
K (abordagem quadrática)	0,8294
K (abordagem DAR)	73,2891

Os resultados mostrados na Tabela 1 endossam os resultados mostrados graficamente na Fig. 5, em que a maior elipse é descrita pela matriz P que tem o menor Traço. ○

3.5 Conclusões

Este capítulo apresentou uma abordagem LMI para o projeto de uma realimentação não linear de estados voltada a sistemas quadráticos sujeitos à saturação de atuadores.

Condições de estabilidade retiradas da teoria de Lyapunov foram trabalhadas em um *framework* de LMIs, juntamente com a condição de setor generalizada para lidar com o problema da saturação.

A formulação DAR fornece uma solução mais genérica do que a decomposição quadrática, uma vez que admite sistemas racionais, quadráticos e polinomiais. Entretanto, pode apresentar solução mais conservadora para o problema de estabilização, conforme ficou evidenciado no Exemplo 5. A abordagem DAR, outrossim, não utilizou aniquiladores, diferentemente da técnica específica para sistemas quadráticos, o que explica a redução do conservadorismo obtida com esta técnica.

Os resultados apresentados nesse capítulo foram fonte do seguinte trabalho aceito para apresentação e publicação:

LONGHI, M. B. et al. Nonlinear state feedback design for quadratic systems with saturating actuators. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 20., 2014, Belo Horizonte. **Anais...** Campinas: Sociedade Brasileira de Automática, no prelo 2014.

4 ANTI-WINDUP

A estratégia de *anti-windup* é utilizada para reduzir os efeitos de saturação do atuador. Basicamente, tal técnica pode ser representada pelo diagrama de blocos mostrado na Fig. 6.

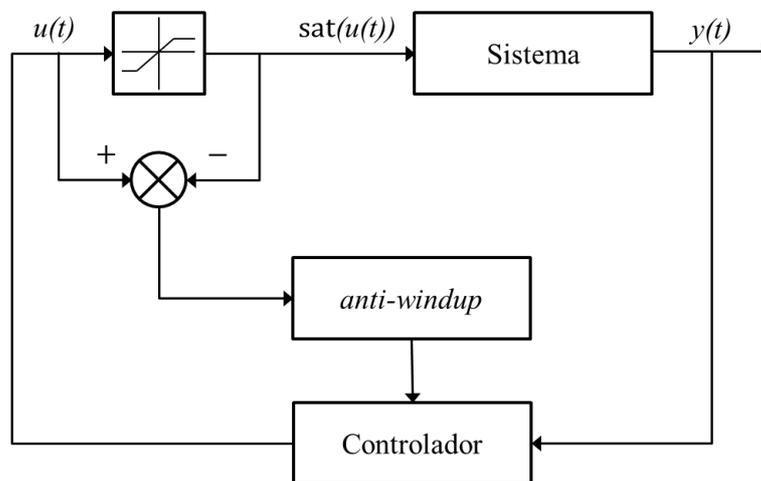


Figura 6: Compensação por *anti-windup*.

A técnica de AW consiste em realimentar, no controlador, a diferença entre o sinal de controle saturado e o sinal dado pela saída do controlador, por meio de um ganho (AW estático) ou de um sistema dinâmico (AW dinâmico) (OLIVEIRA, 2012).

Técnicas de *anti-windup* já atingiram certo amadurecimento em relação a sistemas lineares. Por exemplo, em (TARBOURIECH et al., 2011), há um sólido aporte de algoritmos baseados em LMIs para síntese desse tipo de compensador. No campo dos sistemas não lineares, há o trabalho (MORABITO; TEEL; ZACCARIAN, 2004), que propôs métodos de AW para sistemas Euler-Lagrange. Além disso, em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014) foram propostas estratégias de síntese de um compensador de *anti-windup* estático para uma classe de sistemas não lineares, qual seja, a de sistemas racionais. Em (VALMORBIDA et al., 2010), por sua vez, é proposto um compensador de *anti-windup* para um sistema quadrático cujo controlador foi concebido por inversão dinâmica não linear.

Em vista desse cenário, este capítulo apresenta propostas de síntese de compensadores de *anti-windup* a fim de minimizar efeitos indesejados provocados pela saturação em sistemas quadráticos que possuem uma realimentação dinâmica de saída previamente concebida. Serão comparadas estratégias de AW concebidas a

partir da abordagem DAR e estratégias de AW concebidas através da decomposição quadrática do sistema.

4.1 Abordagem DAR

Nesta seção, há interesse em obter-se um meio sistemático para calcular compensadores estabilizantes de *anti-windup* dinâmicos para uma classe de sistemas não lineares cujo comportamento pode ser descrito por uma DAR (TROFINO, 2000). Logo, aplicam-se ao caso particular de sistemas quadráticos, tema central desta dissertação. Considerando sistemas descritos por DARs, em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014) a síntese de *anti-windup* estático foi tratada. Esta seção segue uma abordagem similar para derivar resultados capazes de lidar com a síntese de *anti-windup* dinâmico. Em particular, é mostrado que a síntese de um compensador de *anti-windup* de ordem completa pode também ser modelado como um problema de LMIs dependente de estados. As condições LMI concebidas podem, então, ser usadas para calcular o compensador de *anti-windup* visando o aumento da região de atração do sistema em malha fechada.

4.1.1 Formulação do Problema

Considere a seguinte classe de sistemas não lineares contínuos no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_x(x) + g(x) \text{sat}(u) \\ y &= h_y(x) , \end{aligned} \quad (104)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota o vetor de estados; $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida; $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle; $\text{sat}(\cdot)$ é a função clássica de saturação dada por (30); $f_x, g : \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{n_x}$ e $h_y : \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{n_y}$ são funções racionais em x .

Considerando-se o sistema (104), assume-se que um compensador dinâmico de saída tenha sido projetado para garantir requisitos de desempenho e estabilidade do sistema em malha fechada na ausência da saturação de controle. Por hipótese, também admite-se que esse controlador tenha dependência racional sobre seus estados e sobre a saída do sistema (104). Assim, pode ser genericamente descrito como o seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_\eta(\eta, y) \\ u &= h_\eta(\eta, y) , \end{aligned} \quad (105)$$

em que $\eta \in \mathbb{R}^{n_\eta}$ representa o estado do controlador; $y(t)$ é a entrada do controlador; $u(t)$ é a saída do controlador; $f_\eta : \mathbb{R}^{n_\eta} \times \mathbb{R}^{n_y} \mapsto \mathbb{R}^{n_\eta}$ e $h_\eta : \mathbb{R}^{n_\eta} \times \mathbb{R}^{n_y} \mapsto \mathbb{R}^{n_u}$ são funções racionais em η e y .

Visando mitigar os efeitos indesejáveis causados pela saturação de controle, um laço de *anti-windup* pode ser adicionado ao controlador. Em particular, assume-se que esse compensador é dado pela seguinte estrutura dinâmica linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= A_a x_a + B_a \psi(u) \\ \theta &= C_a x_a + D_a \psi(u) , \end{aligned} \quad (106)$$

em que $x_a(t) \in \mathbb{R}^{n_{x_a}}$ representa o estado do compensador de *anti-windup*; $\theta(t)$ é a saída do compensador de *anti-windup* e $\psi(u)$ é uma não linearidade do tipo zona morta descentralizada como em (32), ou seja, a entrada do compensador de AW é a

diferença entre o sinal de controle e o sinal efetivamente aplicado pelo controlador (sinal saturado).

O estado do controlador (105) é, portanto, corrigido pela saída do compensador de *anti-windup* conforme o seguinte:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_{\eta}(\eta, y) + \theta \\ u &= h_{\eta}(\eta, y) .\end{aligned}\tag{107}$$

Considerando a configuração estabelecida, o principal objetivo desta seção é deduzir condições LMI para o projeto do compensador de *anti-windup* (106), isto é, para calcular as matrizes A_a , B_a , C_a e D_a a fim de garantir a estabilidade regional do sistema em malha fechada obtido pela interconexão de (104), (106) e (107). As condições LMI obtidas serão, então, agrupadas em um problema convexo de otimização para maximizar a região elipsoidal de estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Esse problema visa, assim, implicitamente maximizar a região de atração do sistema em malha fechada através do projeto do compensador de *anti-windup*.

4.1.2 Conceitos Preliminares

Esta seção apresenta alguns resultados necessários para derivar-se um método baseado em LMIs para tratar do cálculo do *anti-windup* conforme estabelecido na Seção 4.1.1.

4.1.2.1 Representação Algébrico-Diferencial

Considere os seguintes vetores

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \text{ e } \xi = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_a \end{bmatrix} ,$$

em que $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\xi}}$ e $n_{\xi} = n_x + n_{\eta} + n_{x_a}$.

Como, por hipótese, f_x , h_y , g , f_{η} e h_{η} são funções racionais e (106) é um sistema linear, tem-se que o sistema em malha fechada resultante é racional. Decorre disso que o sistema em malha fechada pode ser convenientemente expressado em uma DAR da seguinte forma (COUTINHO et al., 2004; DUROLA; DANÈS; COUTINHO, 2008):

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \mathcal{A}_a(\bar{x})\xi + \mathcal{A}_b(\bar{x})z + \mathcal{A}_c(\bar{x})\psi \\ 0 &= \Omega_a(\bar{x})\xi + \Omega_b(\bar{x})z + \Omega_c(\bar{x})\psi ,\end{aligned}\tag{108}$$

em que $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é uma função vetorial auxiliar não linear em (x, η) contendo termos racionais e polinomiais (tendo termos de ordem igual ou superior a dois) em $f_x(x) + g(x)u - g(x)\psi$, $h_y(x)$, $f_{\eta}(\eta, y)$ e em $h_{\eta}(\eta, y)$; e $\mathcal{A}_a \in \mathbb{R}^{n_{\xi} \times n_{\xi}}$, $\mathcal{A}_b \in \mathbb{R}^{n_{\xi} \times n_z}$, $\mathcal{A}_c \in \mathbb{R}^{n_{\xi} \times n_u}$, $\Omega_a \in \mathbb{R}^{n_z \times n_{\xi}}$, $\Omega_b \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ e $\Omega_c \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ são funções matriciais afins em \bar{x} , dadas da seguinte forma:

$$\mathcal{A}_a(\bar{x}) = \begin{bmatrix} A_1(\bar{x}) & WC_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_b(\bar{x}) = \begin{bmatrix} A_2(\bar{x}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_c(\bar{x}) = \begin{bmatrix} A_3(\bar{x}) + WD_a \\ B_a \end{bmatrix}, \tag{109}$$

$$\Omega_a(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \Omega_1(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_b(\bar{x}) = \Omega_2(\bar{x}) \text{ e } \Omega_c(\bar{x}) = \Omega_3(\bar{x}), \tag{110}$$

com $W = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_\eta} \\ I_{n_\eta} \end{bmatrix}$.

Além disso, considerando-se o estado aumentado ξ pode-se reescrever u em uma DAR da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= K_1(\bar{x})\xi + K_2(\bar{x})\rho \\ 0 &= \Xi_1(\bar{x})\xi + \Xi_2(\bar{x})\rho, \end{aligned} \quad (111)$$

em que $K_1(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\xi}$, $K_2(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\rho}$, $\Xi_1(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\xi}$ e $\Xi_2(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$ são funções matriciais afins em \bar{x} .

A partir de (111) pode-se considerar

$$K_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} K(\bar{x}) & 0_{n_u \times n_{x_a}} \end{bmatrix} \text{ e } \Xi_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \Xi(\bar{x}) & 0_{n_\rho \times n_{x_a}} \end{bmatrix},$$

em que $K(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_u \times \bar{x}}$ e $\Xi(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n_\rho \times \bar{x}}$ são matrizes afins em \bar{x} .

Admite-se, ainda, que \mathcal{B}_ξ é uma região politópica conhecida que contém a origem em seu interior. Assim, como no Capítulo 3, \mathcal{B}_ξ pode ser descrito por um conjunto de inequações escalares da seguinte maneira:

$$\mathcal{B}_\xi = \{ \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : q'_r \xi \leq 1, r = 1, \dots, n_f \}, \quad (112)$$

em que $q_r \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, $r = 1, \dots, n_f$, são vetores conhecidos que definem as $2n_f$ faces de \mathcal{B}_ξ . Por conveniência, \mathcal{B}_ξ pode ser alternativamente descrita pelo envelope convexo de seus vértices:

$$\mathcal{B}_\xi = \text{Co}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\kappa\}. \quad (113)$$

Em outras palavras, qualquer $\xi \in \mathcal{B}_\xi$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices φ_i , ou seja,

$$\xi = \sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i \varphi_i \quad (114)$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0.$$

Relativamente a representação do sistema em malha fechada dado por (108)-(111), assume-se que:

(H1) a origem é um ponto de equilíbrio;

(H2) para um dado domínio $\mathcal{B}_\xi \subset \mathbb{R}^{n_\xi}$ contendo a origem em seu interior, a existência e unicidade de solução de (108)-(111) são garantidas; e

(H3) as funções matriciais $\Omega_b(\bar{x})$ e $\Xi_2(\bar{x})$ têm posto completo para todo $\xi \in \mathcal{B}_\xi$.

A hipótese **H3** garante que (108) e (111) estejam bem definidos, isto é, que $z(t)$ e $\rho(t)$ possam ser eliminados de (108)-(111) conforme as seguintes relações:

$$\begin{aligned} z &= -\Omega_b(\bar{x})^{-1}(\Omega_a(\bar{x})\xi + \Omega_c(\bar{x})\psi), \\ \rho &= -\Xi_2(\bar{x})^{-1}(\Xi_1(\bar{x})\rho), \end{aligned}$$

conduzindo à representação original do sistema em malha fechada.

OBSERVAÇÃO 6. Nos casos específicos em que $\dot{\bar{x}}$ depender quadraticamente de \bar{x} , o vetor auxiliar $z = 0$ e as matrizes $\Omega_a(\bar{x}) = 0$, $\Omega_b(\bar{x}) = 0$ e $\Omega_c(\bar{x}) = 0$. Da mesma maneira, se u depender quadraticamente de x e η , o vetor auxiliar $\rho = 0$ e as matrizes $\Xi_1(\bar{x}) = 0$ e $\Xi_2(\bar{x}) = 0$.

4.1.3 Resultado Principal

Tendo em conta o Lemma 1, considera-se uma função quadrática candidata de Lyapunov para avaliar a estabilidade local do sistema em malha fechada:

$$V(\xi) = \xi' P \xi, \quad P = P' > 0, \quad (115)$$

em que $P \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$, e o seguinte conjunto de nível normalizado:

$$\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq 1\}. \quad (116)$$

Nesse ponto, versões modificadas das condições do Teorema 2 podem ser estabelecidas e são tais que, se existirem escalares reais positivos ε_1 , ε_2 e ε_3 , além de uma função continuamente diferenciável $V : \mathcal{B}_\xi \mapsto \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$\varepsilon_1 \xi' \xi \leq V(\xi) \leq \varepsilon_2 \xi' \xi, \quad (117)$$

$$\dot{V}(\xi) \leq -\varepsilon_3 \xi' \xi, \quad (118)$$

$$\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : V(\xi) \leq \tau\} \subset \mathcal{B}_\xi, \quad (119)$$

para algum escalar τ e para todo $\xi \in \mathcal{B}_\xi$, então \mathcal{R} é uma região de estabilidade garantida do sistema (104)-(106) (KHALIL, 1996).

Nesse caso, tem-se que:

$$\dot{V}(\xi) = \dot{\xi}' P \xi + \xi' P \dot{\xi}. \quad (120)$$

Considerando um vetor auxiliar $\zeta_0 = [\dot{\xi}' \quad \xi']'$, pode-se reescrever (120) como:

$$\dot{V}(\xi) = \zeta_0' \Lambda_1 \zeta_0, \quad (121)$$

com

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}. \quad (122)$$

Tendo em vista o Lema 2 e os conceitos apresentados na Seção 2.3.1, considere que

$$u = K_1(\bar{x})\xi + K_2(\bar{x})\rho, \quad (123)$$

$$v = G_1(\bar{x})\xi + G_2(\bar{x})\rho \quad (124)$$

em (35) e (36), com $G_1 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\xi}$ e $G_2 \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\rho}$ sendo matrizes afins em \bar{x} . Assim, se $\xi \in \mathcal{S}$, tal que

$$\mathcal{S} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}, \rho \in \mathbb{R}^{n_\rho} : \left| \left(K_{1(i)}(\bar{x}) - G_{1(i)}(\bar{x}) \right) \xi + \left(K_{2(i)}(\bar{x}) - G_{2(i)}(\bar{x}) \right) \rho \right| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, n_u \right\}, \quad (125)$$

então a condição

$$\psi(u)' T \left[\psi(u) - (G_1(\bar{x})\xi + G_2(\bar{x})\rho) \right] \leq 0 \quad (126)$$

é verificada para toda matriz $T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ diagonal e positiva definida. Assim, se

$$\zeta_0' \Lambda_1 \zeta_0 - 2\psi(u)' T [\psi(u) - G_1(\bar{x})\xi - G_2(\bar{x})\rho] < 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{B}_\xi, \quad (127)$$

então $\dot{V}(\xi) < 0$ para todo $\xi \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi^1$.

Considere, agora, um vetor aumentado ζ na seguinte forma:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \dot{\xi}' & \xi' & z' & \rho' & \psi(u) \end{bmatrix}' . \quad (128)$$

De posse de (128), pode-se reescrever (127) da seguinte forma:

$$\zeta' \Lambda_2 \zeta < 0 , \quad (129)$$

com

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & G_1' T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2' T \\ 0 & T G_1 & 0 & T G_2 & -2T \end{bmatrix} .$$

Consideram-se, agora, os seguintes escalares:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \dot{\xi}' M_1 (-\dot{\xi} + \mathcal{A}_a \xi + \mathcal{A}_b z + \mathcal{A}_c \psi(u)) , \\ \beta_2 &= \xi' M_2 (-\dot{\xi} + \mathcal{A}_a \xi + \mathcal{A}_b z + \mathcal{A}_c \psi(u)) , \\ \beta_3 &= z' M_3 (\Omega_a \xi + \Omega_b z + \Omega_c \psi(u)) \text{ e} \\ \beta_4 &= \rho' M_4 (\Xi_1 \xi + \Xi_2 \rho) . \end{aligned} \quad (130)$$

Tendo em conta o grupo de equações (108)-(111), decorre que as igualdades

$$0 = \beta_1 + \beta_1' , \quad 0 = \beta_2 + \beta_2' , \quad 0 = \beta_3 + \beta_3' \text{ e } 0 = \beta_4 + \beta_4' \quad (131)$$

são satisfeitas para quaisquer matrizes $M_1 \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$, $M_3 \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ e $M_4 \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$.

Das relações (131), pode-se afirmar que, se

$$\zeta' \Lambda_2 \zeta + \beta_1 + \beta_1' + \beta_2 + \beta_2' + \beta_3 + \beta_3' - \beta_4 - \beta_4' < 0 \quad (132)$$

for satisfeita, então (129) é verdadeira. Note que é possível reescrever (132) na seguinte forma:

$$\zeta' \Lambda_3(\xi) \zeta < 0 , \quad (133)$$

em que

$$\Lambda_3(\xi) = \begin{bmatrix} -M_1 - M_1' & P - M_2 + M_1 \mathcal{A}_a & M_1 \mathcal{A}_b & 0 & M_1 \mathcal{A}_c \\ \star & M_2 \mathcal{A}_a + \mathcal{A}_a' M_2' & M_2 \mathcal{A}_b + \Omega_a' M_3' & -\Xi_1' M_4' & M_2 \mathcal{A}_c + G_1' T \\ \star & \star & M_3 \Omega_b + \Omega_b' M_3' & 0 & M_3 \Omega_c \\ \star & \star & \star & -M_4 \Xi_2 - \Xi_2 M_4' & G_2' T \\ \star & \star & \star & \star & -2T \end{bmatrix} .$$

¹A partir desse ponto, a dependência em \bar{x} será suprimida da notação. Por isso, considere que $\mathcal{A}_a(\bar{x}) = \mathcal{A}_a$, $\mathcal{A}_b(\bar{x}) = \mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_c(\bar{x}) = \mathcal{A}_c$, $\Omega_a(\bar{x}) = \Omega_a$, $\Omega_b(\bar{x}) = \Omega_b$, $\Omega_c(\bar{x}) = \Omega_c$, $G_1(\bar{x}) = G_1$, $G_2(\bar{x}) = G_2$, $K_1(\bar{x}) = K_1$, $K_2(\bar{x}) = K_2$, $\Xi_1(\bar{x}) = \Xi_1$ e $\Xi_2(\bar{x}) = \Xi_2$.

com

$$\Lambda_5(\xi) = \begin{bmatrix} -\Gamma_1 & -\Gamma_2 & A_1Y + W\hat{C}_a & A_1S + W\hat{C}_a \\ \star & -\Gamma_4 & \hat{A}_a & \hat{A}_a \\ \star & \star & \text{He}\{A_1Y + W\hat{C}_a\} & A_1S + \hat{A}'_a + W\hat{C}_a \\ \star & \star & \star & \text{He}\{\hat{A}\} \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ A_2Q'_3 & 0 & A_3F + W\hat{D}_a \\ 0 & 0 & \hat{B}_a \\ A_2Q'_3 + Y\Omega'_1 & -Y\Xi & A_3F + W\hat{D}_a + H'_1 \\ S\Omega'_1 & -S\Xi & \hat{B}_a + H'_2 \\ \Omega_bQ'_3 + Q_3\Omega'_b & 0 & \Omega_cF \\ \star & -\text{He}\{Q_4\Xi'_2\} & V' \\ \star & \star & -2F \end{bmatrix}. \quad (139)$$

Assim, se (139) é verificada, conclui-se que $\dot{V}(\xi) < 0$, para todo $\xi \in \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$.

Por outro lado, para garantir-se que a região \mathcal{R} seja, de fato, uma região de estabilidade, desde que (139) seja satisfeita, é necessário assegurar que \mathcal{R} esteja contido em $\mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$. Primeiramente, a inclusão $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ é garantida se (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014):

$$\begin{bmatrix} P & \Xi'_1 M'_4 & K'_{1(i)} - G'_{1(i)} \\ \star & M_4 \Xi_2 + \Xi'_2 M_4 & K'_{2(i)} - G'_{2(i)} \\ \star & \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_u. \quad (140)$$

Definindo-se $\Pi_1 = \text{bkdg}\{Q_2, Q_4, 1\}$, e pré- e pós-multiplicando-se (140) por Π_1 e Π'_1 , respectivamente, decorre que (140) será equivalente a:

$$\begin{bmatrix} Y & S & Y\Xi' & YK'_{(i)} - H'_{1(i)} \\ \star & S & S\Xi' & SK'_{(i)} - H'_{2(i)} \\ \star & \star & \text{He}\{Q_4\Xi'_2\} & Q_4K'_{2(i)} - V'_{(i)} \\ \star & \star & \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_u. \quad (141)$$

Por outro lado, a partir de um raciocínio análogo àquele desenvolvido na Seção 3.2, a região \mathcal{R} estará contida no polítopo \mathcal{B}_ξ se a seguinte condição for verdadeira:

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 \tilde{q}_r \\ \star & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad (142)$$

em que $\tilde{q}_r = \begin{bmatrix} q_r \\ 0 \end{bmatrix}$, com $q_r \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, para $r = 1, \dots, n_f$. Em outras palavras, assume-se que \mathcal{B}_ξ é ilimitado nas direções associadas aos estados do compensador de AW, uma vez que este é linear sobre seus respectivos estados.

A partir da definição de Q_2 em (136), se a seguinte inequação for satisfeita

$$\begin{bmatrix} Y & S & Yq_r \\ \star & S & Sq_r \\ \star & \star & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1, \dots, n_f. \quad (143)$$

então (142) será verdadeira.

Em vista do exposto, o seguinte resultado pode ser enunciado:

Teorema 5. *Considere o sistema (104)-(106), satisfazendo **H1-H2**, e sua DAR (108)-(111) satisfazendo **H3**. Se houver matrizes reais $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, Y, S, \hat{A}_a, \hat{B}_a, \hat{C}_a, \hat{D}_a, H_1, H_2, V, Q_3$ e Q_4 de dimensões apropriadas e uma matriz diagonal $F > 0$ satisfazendo as seguintes inequações matriciais, para todo $\varphi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$:*

$$\Lambda_5(\varphi_j) < 0, j = 1, \dots, \kappa; \quad (144)$$

$$\begin{bmatrix} Y & S & Y\Xi' & YK'_{1(i)} - H'_{1(i)} \\ \star & S & S\Xi' & SK'_{1(i)} - H'_{2(i)} \\ \star & \star & \text{He}\{Q_4\Xi'_2\} & Q_4K'_{2(i)} - V'_{(i)} \\ \star & \star & \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \forall i = 1, \dots, n_u; \quad (145)$$

$$\begin{bmatrix} Y & S & Yq_r \\ \star & S & Sq_r \\ \star & \star & 1 \end{bmatrix} > 0, \forall r = 1, \dots, n_f. \quad (146)$$

Então o compensador linear dinâmico de anti-windup dado por $A_a = \hat{A}_a S^{-1}$, $B_a = \hat{B}_a F^{-1}$, $C_a = \hat{C}_a S^{-1}$ e $D_a = \hat{D}_a F^{-1}$ garante que o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ do sistema em malha fechada (104)-(107) é localmente assintoticamente estável e $V(\xi) = \xi' Q_2^{-1} \xi$ é uma função de Lyapunov em \mathcal{B}_ξ . Além disso, o conjunto $\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq 1\}$, com $P = Q_2^{-1}$, é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada, isto é, para todo $\xi(0) \in \mathcal{R}$, a trajetória $\xi(t) \in \mathcal{R} \forall t \geq 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$. \diamond

Prova. Primeiramente, recorde-se que as matrizes $A_1, A_2, A_3, \Omega_1, \Omega_b, \Omega_c, K, K_2, \Xi, \Xi_2, H_1, H_2$ e V são afins em ξ . Assim, se as desigualdades (144)-(146) são factíveis para cada $\varphi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$, então elas também são satisfeitas para todo $\xi \in \mathcal{B}_\xi$ a partir de argumentos de convexidade. Note-se que, como Ω_b e Ξ_2 devem ser não singulares (de **H3**), os termos $\Omega_b Q'_3 + Q_3 \Omega'_b < 0$ (de (144)) e $\Xi_2 Q'_4 + Q_4 \Xi_2 > 0$ (de (146)) garantem que Q_3 and Q_4 são não singulares. Além disso, já que $\begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \star & \Gamma_4 \end{bmatrix} > 0$ (de (144)) e (por hipótese) $Q_2 > 0$, resulta que a matriz Π_0 definida em (134) é inversível. Assim, se $\Lambda_5(\xi) < 0$, decorre que $\Lambda_4(\xi) < 0$ e $\Lambda_3(\xi) < 0$. Dessa forma, em vista de (131), conclui-se que (127) é satisfeita com $Q_2^{-1} = P > 0$. Consequentemente, se $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{B}_\xi$ e considerando-se $V(\xi) = \xi' P \xi$, segue que $\dot{V} < 0, \forall \xi \in \mathcal{R}$, o que assegura que, para todo $\xi(0) \in \mathcal{R}$, as trajetórias de malha fechada ξ pertencem a \mathcal{R} e se aproximam da origem à medida que $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, (145) e (146) garantem que $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ e $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi$, respectivamente, o que conclui a prova. \square

OBSERVAÇÃO 7. *No caso particular em que u depende linearmente ou bilinearmente (quadraticamente) de x e η , resulta que $\rho = 0$ em (111) e, por isso, pode-se considerar $K_2(\bar{x}) = 0, \Xi_1(\bar{x}) = 0$ e $\Xi_2(\bar{x}) = 0$. Nesse caso, a relação (145) deve ser substituída por*

$$\begin{bmatrix} Y & S & YK'_{1(i)} - H'_{1(i)} \\ \star & S & SK'_{2(i)} - H'_{2(i)} \\ \star & \star & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, n_u. \quad (147)$$

Além disso, a sexta linha e a sexta coluna de (144) devem ser excluídas.

4.1.4 Problema de Otimização

O resultado apresentado no Teorema 5 pode também ser aplicado para calcular-se um compensador dinâmico de *anti-windup* a fim de se forçar a maximização da região de atração do sistema em malha fechada. De fato, o objetivo é implicitamente atingido se a região \mathcal{R} , associada ao ganho a ser calculado, for maximizada.

Nesse trabalho, há interesse em maximizar a região de estabilidade em direções associadas aos estados da planta e controlador. Note- que o corte de \mathcal{R} (definida a partir de Q_2^{-1} dada em (137)) sobre o hiperplano definido pelos estados da planta e do controlador é descrito como:

$$\mathcal{R}_{\bar{x}} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^{n_x+n_\eta} : \bar{x}' X \bar{x} \leq 1 \right\}.$$

Assim, o objetivo é maximizar $\mathcal{R}_{\bar{x}}$. Nesse sentido, considere uma matriz auxiliar $M \in \mathbb{R}^{n_{\bar{x}}}$ e a seguinte restrição LMI:

$$\begin{bmatrix} M & I \\ I & Y - S \end{bmatrix} > 0. \quad (148)$$

A partir de (148), tem-se que $M > (Y - S)^{-1} = X$. Dessa forma, o seguinte problema de otimização pode ser utilizado para maximizar o tamanho de $\mathcal{R}_{\bar{x}}$:

$$\begin{cases} \min & \text{Tr}(M) \\ \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \hat{A}_a, \hat{B}_a, \hat{C}_a, \hat{D}_a \\ H_1, H_2, V, Q_3, Q_4, Y, S, F \\ \text{sujeito a} & (144), (145), (146) \text{ e } (148). \end{cases} \quad (149)$$

Note que a minimização de $\text{Tr}(M)$ é um critério que conduz implicitamente à maximização do tamanho de $\mathcal{R}_{\bar{x}}$. Outros critérios clássicos de conjuntos elipsoidais tais como maximização de volume, maximização do menor eixo e a maximização em determinadas direções podem também ser aplicados (veja, por exemplo, o Capítulo 2º em (TARBOURIECH et al., 2011) e suas referências internas). Deve ser reiterado que (144), (145) e (146) são LMIs em $\varphi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$. Portanto, o problema (149) é convexo e pode ser resolvido pelos algoritmos convencionais de solução de LMIs.

Exemplo 6. Considere o sistema não linear tratado em (OLIVEIRA et al., 2011):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - 1)x + \text{sat}(u) \\ y &= x, \end{aligned} \quad (150)$$

com $u_0 = 1$, e o controlador

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -x \\ u &= \eta - 2y. \end{aligned} \quad (151)$$

Considerando a DAR dada em (108) e as definições em (109) e (110) com $z = x^2$, tem-se o seguinte conjunto de matrizes para (150)-(151):

$$\begin{aligned} A_1(\bar{x}) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_3(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \Omega_1(\bar{x}) &= \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_b(\bar{x}) = -1, \quad \Omega_c(\bar{x}) = 0 \text{ e } K = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que, nesse caso, pode-se considerar $\rho = 0$ (veja a Observação 6). Então, tem-se $K_2(\bar{x}) = 0$, $\Xi_1(\bar{x}) = 0$ e $\Xi_2(\bar{x}) = 0$.

Admita que $\mathcal{B}_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| \leq \alpha_1, |\xi_2| \leq \alpha_2\}$, em que $\alpha_1 = 1,3$ e $\alpha_2 = 2,4$. Considerando o problema de otimização proposto em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014), foi sintetizado um compensador estático de AW associado a uma região otimizada de estabilidade garantida do sistema em malha fechada. Em seguida, foi aplicado o problema de otimização (149) a fim de sintetizar um compensador dinâmico de AW associado outra região otimizada de estabilidade. A Fig. 7 mostra algumas regiões de estabilidade garantida.

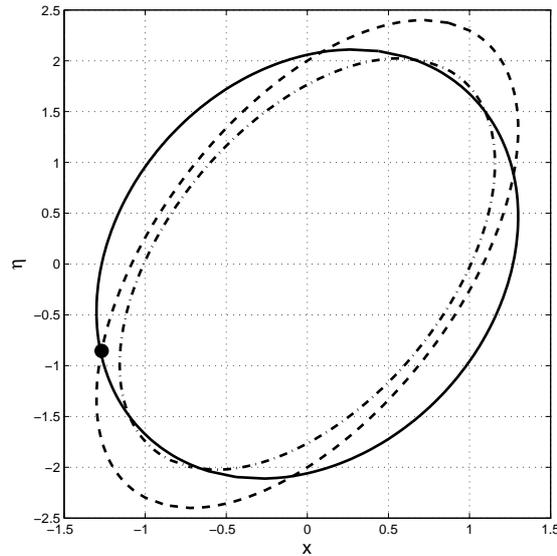


Figura 7: Regiões $\mathcal{R}_{\bar{x}}$ de estabilidade garantida do sistema em malha fechada com AW dinâmico (linha contínua), com AW estático (linha tracejada) e sem a estratégia de AW (linha traço-ponto).

No caso de *anti-windup* dinâmico, a região \mathcal{R} resultante é definida por:

$$P = \begin{bmatrix} 0,6221 & -0,0846 & -0,6221 & 0,0846 \\ -0,0846 & 0,2358 & 0,0846 & -0,2358 \\ -0,6221 & 0,0846 & 2,3860 \times 10^7 & 0,0945 \\ 0,0846 & -0,2358 & 0,0945 & 1,2604 \end{bmatrix}.$$

O compensador de AW obtido é dado pelas seguintes matrizes:

$$A_a = \begin{bmatrix} -7,0324 \times 10^7 & 13,9864 \\ 3,0228 \times 10^8 & -3,1369 \times 10^5 \end{bmatrix},$$

$$D_a = 6,1324, \quad B_a = \begin{bmatrix} -2,0004 \\ 8,6520 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$C_a = \begin{bmatrix} 2,5944 \times 10^8 & -3,1369 \times 10^5 \end{bmatrix}.$$

Os traços das matrizes que descrevem as regiões de estabilidade mostrados na Fig. 7 são mostrados na Tabela 2. Os resultados mostram que o compensador

Tabela 2: Traços das matrizes P que descrevem as regiões de estabilidade garantida, conforme o tipo de compensador de *anti-windup*, Exemplo 6.

<i>Anti-Windup</i>	$\text{Tr}(P)$
Dinâmico	0,8583
Estático	1,0985
Sem AW	1,3007

dinâmico de AW fornece uma região de estabilidade garantida sensivelmente maior do que os demais.

O formato da elipse oriunda da aplicação do método de *anti-windup* estático é mais alongada em relação às demais. Isso acontece porque, embora o problema de otimização discutido em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014) seja congênere à (149), o que se observa é que o resultado produzido é mais condizente, naquele caso, com a minimização de uma função custo da forma $\min \{-\text{Tr}(Q_2)\}$. Não obstante, pode-se afirmar que a área da região $\mathcal{R}_{\bar{x}}$ obtida por meio da compensação de AW dinâmica é ligeiramente maior do que aquela obtida com o AW estático.

Considere, agora, a condição inicial (destacada na Fig. 7).

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} -1,2680 & -0,8545 \end{bmatrix}' .$$

A resposta temporal da saída y e do sinal de controle $\text{sat}(u)$ é mostrada na Fig. 8. Nela, estão representados três casos: abordagem dinâmica, abordagem estática e sem a estratégia de AW.

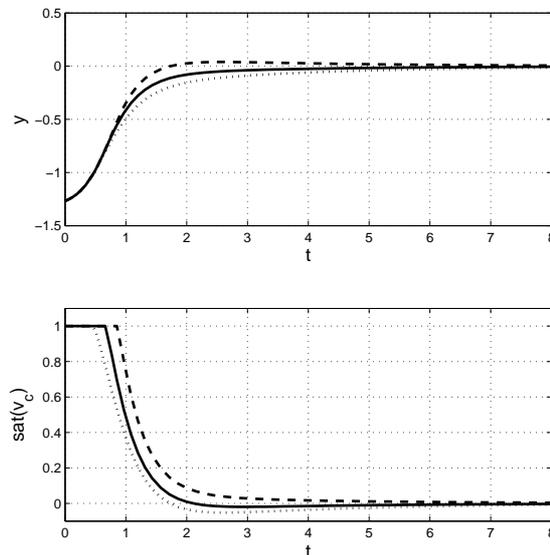


Figura 8: Resposta temporal da saída y e do sinal de controle, com abordagem dinâmica de AW (linha contínua), a abordagem estática de (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014) (linha tracejada) e sem a estratégia de *anti-windup* (linha pontilhada).

Com a abordagem de *anti-windup* estático, o sinal de controle permanece menos tempo saturado do que com a estratégia dinâmica. Entretanto, o AW dinâmico

melhora a resposta transiente, ainda que o desempenho não seja o foco do presente trabalho. \circ

4.1.5 Estabilização \mathcal{L}_2

Esta seção apresentará o desenvolvimento das condições LMI para a estabilização entrada-estado, de um sistema representado na forma DAR, sujeitos à perturbação limitada em energia. Considera-se um sistema na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_x(x(t), w(t)) + g(x(t)) \text{sat}(u(t)) \\ y &= H_x x(t) , \end{aligned} \quad (152)$$

em que $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida e $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle. Nesse caso, $f_x : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é uma função racional em x e linear com respeito a w . A matriz $H_x \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ é considerada constante. Além disso, é assumido que w é um sinal exógeno de perturbação limitado em energia, isto é, $w \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$, com

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \beta\} , \quad (153)$$

em que $\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w(t)'w(t)dt$ e $\beta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro positivo que define o tamanho do conjunto de perturbações admissíveis \mathcal{W} .

De forma similar aos desdobramentos da Seção 4.1.1, admite-se um controlador conhecido na forma (105).

Assim, o interesse nessa Seção é projetar um compensador de AW tal que os efeitos da saturação sejam mitigados num sistema que está sujeito a entradas de perturbação.

Considere, para isso, os seguintes vetores aumentados:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} \text{ e } \xi = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_a \end{bmatrix} ,$$

em que $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ e $n_\xi = n_x + n_\eta + n_{x_a}$.

O sistema (152) em malha fechada com o controlador (105) pode ser reescrito na seguinte forma DAR:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_1 \bar{x} + A_2 z + A_3 \psi + A_4 w \\ 0 &= \Omega_1 \bar{x} + \Omega_2 z + \Omega_3 \psi + \Omega_4 w . \end{aligned} \quad (154)$$

Em seguida, o sistema em malha fechada (154) aumentado com o compensador de AW (106) pode ser, então, convenientemente escrito em uma DAR da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \mathcal{A}_a(\bar{x})\xi + \mathcal{A}_b(\bar{x})z + \mathcal{A}_c(\bar{x})\psi + \mathcal{A}_d w \\ 0 &= \Omega_a(\bar{x})\xi + \Omega_b(\bar{x})z + \Omega_c(\bar{x})\psi + \Omega_d w , \end{aligned} \quad (155)$$

em que $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é uma função vetorial auxiliar não linear em (x, η) contendo termos racionais e polinomiais (tendo termos de ordem igual ou superior a dois) em $f_x(x) + g(x)u - g(x)\psi$, $f_\eta(\eta, y)$ e em $h_\eta(\eta, y)$; e $\mathcal{A}_a \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$, $\mathcal{A}_b \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_z}$, $\mathcal{A}_c \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_u}$, $\mathcal{A}_d \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_w}$, $\Omega_a \in \mathbb{R}^{n_z \times n_\xi}$, $\Omega_b \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, $\Omega_c \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ e $\Omega_d \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ são funções matriciais afins em \bar{x} , dadas como em (109) e (110),

$$\mathcal{A}_d(\bar{x}) = \begin{bmatrix} A_4(\bar{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Omega_d(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \Omega_4(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} .$$

Assumindo que o sistema (152) seja localmente estabilizável, o seu ganho \mathcal{L}_2 de w para y , $\|G_{wy}\|_2$, é definido como

$$\|G_{wy}\|_2 = \sup_{\substack{w \in \mathcal{W}, \\ w \neq 0}} \frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} : \xi(0) = 0 . \quad (156)$$

Para um dado escalar $\gamma > 0$, o requisito de desempenho $\|G_{wy}\|_2 < 1/\gamma$ é satisfeito para o sistema em malha fechada composto por (152), (105) e (106) se houver uma função de Lyapunov cuja derivada temporal ao longo das trajetórias $\xi(t)$, sob condições iniciais nulas, satisfizer a seguinte desigualdade:

$$\dot{V}(\xi(t)) + \frac{y(t)'y(t)}{\gamma} - w(t)'w(t) < 0 , \quad (157)$$

com $V(\xi(t)) = \xi'P\xi$.

Para o caso de um sistema sujeito a perturbações, é necessário definir-se, ainda, as seguintes regiões (TARBOURIECH et al., 2011):

$$\mathcal{R}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi'P\xi \leq \alpha\} , \quad (158)$$

$$\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi'P\xi \leq \sigma^{-1}\} , \quad (159)$$

com $\sigma^{-1} = \alpha + \beta$.

Considerando-se a abordagem de Lyapunov supracitada, a estabilidade no sentido \mathcal{L}_2 pode ser garantida primeiramente definindo-se:

$$\mathcal{J}(t) = \dot{V}(\xi(t)) + \frac{y(t)'y(t)}{\gamma} - w(t)'w(t) . \quad (160)$$

Se $\mathcal{J}(t) < 0, \forall t \geq 0$, então

$$\int_0^T \mathcal{J}(t)dt = V(\xi(T)) - V(\xi(0)) + \frac{1}{\gamma} \int_0^T y(t)'y(t)dt - \int_0^T w(t)'w(t)dt < 0 . \quad (161)$$

Dessa forma, assumindo-se que $\xi(0) \in \mathcal{R}_0$ e $\|w\|_2^2 \leq \beta$:

1. se $w(t) = 0$, segue que $\dot{V}(\xi(t)) + \gamma^{-1}y(t)'y(t) < 0$. Isso garante a estabilidade assintótica da origem do sistema em malha fechada; e
2. se $w(t) \neq 0$, segue que
 - (a) as trajetórias do sistema pertencem a \mathcal{R} , uma vez que, para $\xi(0) \in \mathcal{R}_0$, é válido que

$$V(\xi(T)) < V(\xi(0)) + \|w\|_2^2 - \gamma^{-1} \|y\|_2^2 \leq \sigma^{-1}, \forall T > 0; \text{ e} \quad (162)$$

- (b) a norma \mathcal{L}_2 do sinal de saída é limitada, isto é, $\|y\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(0)$.

Recorrendo ao Lema 2, tem-se que, se a inequação a seguir é válida

$$\mathcal{J}(t) - 2\psi'T[\psi - G_1(\bar{x})\xi - G_2(\bar{x})\rho] < 0 \quad (163)$$

então tem-se que $\mathcal{J}(t) < 0$, $\forall \xi \in \mathcal{S}$, com \mathcal{S} definido em (125)².

Escolhendo um vetor aumentado na forma $\zeta = [\dot{\xi}' \ \xi' \ z' \ \rho' \ w' \ \psi']'$, pode-se reescrever (163) como:

$$\zeta'\Lambda_0\zeta + \zeta'\tilde{O}(\gamma^{-1}I_{n_y})\tilde{O}'\zeta < 0, \quad (164)$$

em que

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1'T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_2'T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{n_w} & 0 \\ 0 & TG_1 & 0 & TG_2 & 0 & -2T \end{bmatrix}, \quad (165)$$

$$\tilde{O} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{H} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad (166)$$

em que

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H_x & 0_{n_y \times n_c} & 0_{n_y \times n_a} \end{bmatrix}.$$

Considere, agora, os seguintes escalares

$$\beta_1 = \dot{\xi}'M_1(-\dot{\xi} + \mathcal{A}_a\xi + \mathcal{A}_bz + \mathcal{A}_c\psi + \mathcal{A}_dw), \quad (167)$$

$$\beta_2 = \xi'M_2(-\dot{\xi} + \mathcal{A}_a\xi + \mathcal{A}_bz + \mathcal{A}_c\psi + \mathcal{A}_dw), \quad (168)$$

$$\beta_3 = z'M_3(\Omega_a\xi + \Omega_bz + \Omega_c\psi + \Omega_dw) \text{ e} \quad (169)$$

$$\beta_4 = \rho'M_4(\Xi_1\xi + \Xi_2\rho). \quad (170)$$

Como $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ (por definição do sistema), pode-se assegurar que (164) é equivalente a seguinte desigualdade:

$$\zeta'\Lambda_0\zeta + \zeta'\tilde{O}\gamma^{-1}I_{n_y}\tilde{O}'\zeta + \beta'_1 + \beta_1 + \beta'_2 + \beta_2 + \beta'_3 + \beta_3 + \beta'_4 + \beta_4 < 0. \quad (171)$$

A Equação (171) pode, dessa forma, ser reescrita como

$$\zeta'\Lambda_1\zeta + \zeta'\tilde{O}(\gamma^{-1}I_{n_y})\tilde{O}'\zeta < 0, \quad (172)$$

em que

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -M_1 - M'_1 & M_1\mathcal{A}_a - M'_2 + P & M_1\mathcal{A}_b & 0 & M_1\mathcal{A}_d & M_1\mathcal{A}_c \\ \star & M_2\mathcal{A}_a + \mathcal{A}'_aM'_2 & M_2\mathcal{A}_b + \Omega'_aM'_3 & \Xi'_1M'_4 & M_2\mathcal{A}_d & M_2\mathcal{A}_c + G'_1T \\ \star & \star & \star & 0 & M_3\Omega_d & M_3\Omega_c \\ \star & \star & \star & \text{He}\{M_4\Xi_2\} & 0 & G'_2T \\ \star & \star & \star & \star & -I_{n_w} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -2T \end{bmatrix}. \quad (173)$$

²A partir desse ponto, a dependência do tempo e de \bar{x} será suprimida da notação.

1. para todo $w \in \mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \beta\}$ e todo $\xi(0) \in \mathcal{R}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq \alpha\}$, as trajetórias do sistema em malha fechada pertencem a $\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq \sigma^{-1}\}$, com $\sigma^{-1} = \alpha + \beta$. Além disso, a desigualdade a seguir é satisfeita: $\|y\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(\xi(0))$;
2. sempre que $w(t) \equiv 0$, as trajetórias do sistema em malha fechada $\xi(t) \in \mathcal{R} \forall t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ para todo $\xi(0) \in \mathcal{R}$. \diamond

Prova. Os mesmos passos apresentados na prova do Teorema 5 podem ser aplicados considerando-se a DAR em (155). Em suma, a condição (176) garante que $\mathcal{J}(t) < 0$, $\forall \xi \in (\mathcal{B}_\xi \cap \mathcal{S})$, com \mathcal{B}_ξ definido em (112). As condições (177) e (178) garantem que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi$ e $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, respectivamente. \square

4.1.5.2 Problemas de otimização

Nessa seção, serão propostos problemas de otimização para a caracterização da estabilidade \mathcal{L}_2 , bem como estimativa do ganho \mathcal{L}_2 a partir da aplicação do Teorema 6.

1. Estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado:

O objetivo é determinar o maior β , que define o tamanho do conjunto de distúrbios \mathcal{L}_2 admissíveis, tais que as trajetórias estejam limitadas. É assumido que $\xi(0) = 0$ e que $\sigma^{-1} = \beta$. Dessa forma, baseando-se no Teorema 6, o seguinte problema de otimização pode ser formulado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \hat{A}_a, \hat{B}_a, \hat{C}_a, \hat{D}_a} \sigma \\ H_1, H_2, V, Q_3, Q_4, Y, S, F \end{array} \right. \quad (179)$$

sujeito a (176), (177) e (178) .

2. Estimativa do ganho \mathcal{L}_2 :

Dado o conjunto \mathcal{W} , deseja-se calcular o menor ganho \mathcal{L}_2 aplicando-se o Teorema 6. Nesse caso, é considerado que $\xi(0) = 0$ e, portanto, $\sigma^{-1} = \beta$. Assim, o seguinte problema pode ser estabelecido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \hat{A}_a, \hat{B}_a, \hat{C}_a, \hat{D}_a} \gamma \\ H_1, H_2, V, Q_3, Q_4, Y, S, F \end{array} \right. \quad (180)$$

sujeito a (176), (177) e (178) .

4.1.6 Estabilização \mathcal{L}_2 com AW Estático

Considere que em (105) seja definido que $\theta = E_c \psi$, isto é, um compensador de AW estático foi acoplado ao controlador, ao invés de ser considerado o sistema dinâmico linear (106). Com base nessa formulação, tem-se que o problema de estabilidade \mathcal{L}_2 pode ser aplicado ao referido sistema resultante. Seguindo-se procedimentos similares àqueles apresentados na Seção 4.1.5, em conjunto com os procedimentos de síntese de compensador de AW estático apresentados em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014), pode-se enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 7. *Considere o sistema em malha fechada obtido pela conexão de (152) e de (107), representado pela DAR em (154), com as hipóteses **H1**, **H2** e **H3** sendo satisfeitas para todo $\xi \in \mathcal{B}_\xi$. Se existirem matrizes reais constantes $Q_1, Q_2 = Q'_2 > 0, Q_3, Q_4, V_1, V_2$, uma matriz diagonal $F > 0$ de dimensões apropriadas e escalares positivos γ e σ satisfazendo as seguintes inequações matriciais para todo $\varphi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$:*

$$\Lambda_3(\varphi_j) < 0, \quad j = 1, \dots, \kappa, \quad (181)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 \Xi'_1 & Q_2 K'_{1(i)} - V'_{1(i)} \\ \star & \Xi_2 Q_4 1 + Q_4 \Xi'_2 & Q_4 K'_{2(i)} - V'_{2(i)} \\ \star & \star & \sigma u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_u, \quad (182)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 & Q_2 q_r \\ \star & \sigma \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, \dots, n_f, \quad (183)$$

com

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} -Q_1 - Q'_1 & A_1(\varphi_j)Q_2 & A_2(\varphi_j)Q'_3 & 0 \\ \star & \text{He}\{A_1(\varphi_j)Q_2\} & A_2(\varphi_j)Q'_3 + Q_2\Omega_1(\varphi_j)' & Q_2\Xi_1(\varphi_j)' \\ \star & \star & \text{He}\{\Omega_2(\varphi_j)Q'_3\} & 0 \\ \star & \star & \star & \text{He}\{\Xi_2(\varphi_j)Q'_4\} \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_4(\varphi_j) & A_3(\varphi_j)F + WE_F & 0 \\ A_4(\varphi_j) & A_3(\varphi_j)F + WE_F + V'_1 & Q_2\tilde{H} \\ \Omega_4(\varphi_j) & \Omega_3F & 0 \\ 0 & V'_2 & 0 \\ -I_{n_w} & 0 & 0 \\ \star & -2F & 0 \\ \star & \star & -\gamma I_{n_y} \end{bmatrix}.$$

Então o compensador estático de anti-windup dado por $\theta = E_c\psi$, com $E_c = E_F F^{-1}$, é tal que,

1. para todo $w \in \mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^{n_w} : \|w\|_2^2 \leq \beta\}$ e $\xi(0) \in \mathcal{R}_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi'P\xi \leq \alpha\}$, as trajetórias do sistema em malha fechada pertencem a $\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi'P\xi \leq \sigma^{-1}\}$, com $\sigma^{-1} = \alpha + \beta$. Além disso, a desigualdade a seguir é satisfeita: $\|y\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(\xi(0))$;
2. sempre que $w(t) \equiv 0$, as trajetórias do sistema em malha fechada $\xi(t) \in \mathcal{R}$, $\forall t \geq 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$ para todo $\xi(0) \in \mathcal{R}$. \diamond

Prova. Os mesmos passos apresentados na prova do Teorema 5 podem ser aplicados. Em suma, a condição (181) garante que $\mathcal{J}(t) < 0, \forall \xi \in (\mathcal{B}_\xi \cap \mathcal{S})$, com \mathcal{B}_ξ definido em (112). As condições (183) e (182) garantem que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi$ e $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, respectivamente. \square

4.1.6.1 Problemas de otimização

Nessa seção, serão propostos problemas de otimização para a caracterização da estabilidade \mathcal{L}_2 , bem como estimativa do ganho \mathcal{L}_2 a partir da aplicação do Teorema 7.

1. Estabilidade \mathcal{L}_2 entrada-estado:

O deste problema de otimização é determinar o maior β , que define o tamanho do conjunto de distúrbios \mathcal{L}_2 admissíveis, tais que as trajetórias estejam limitadas. É assumido que $\xi(0) = 0$ e que $\sigma^{-1} = \beta$. Dessa forma, o seguinte problema pode ser estabelecido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sigma \\ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \\ V_1, V_2, E_F, F \end{array} \right. \quad (184)$$

sujeito a (181), (182) e (183)

2. Estimativa do ganho \mathcal{L}_2 :

Dado um conjunto \mathcal{W} , o objetivo deste problema de otimização é calcular o menor ganho \mathcal{L}_2 , a partir da aplicação do Teorema 6. Nesse caso, é considerado que $\xi(0) = 0$ e, assim, $\sigma^{-1} = \beta$. Dessa forma, o seguinte problema pode ser estabelecido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \gamma \\ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \\ V_1, V_2, E_F, F \end{array} \right. \quad (185)$$

sujeito a (181), (182) e (183)

Exemplo 7. Considere o sistema não linear tratado em (OLIVEIRA et al., 2011), desta vez admitindo-se uma perturbação como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (x(t)^2 - 1)x(t) + w(t) + \text{sat}(u(t)) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (186)$$

com $u_0 = 1$, e o controlador

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -x(t) \\ u(t) &= \eta(t) - 2y(t) \end{aligned} \quad (187)$$

Considerando a representação DAR em (154), para o sistema (186)-(187) tem-se:

$$A_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_3(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_4(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2(\bar{x}) = -1, \quad \Omega_3(\bar{x}) = 0, \quad \Omega_4(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad K_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere, ainda, o politopo $\mathcal{B}_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| \leq \alpha_1, |\xi_2| \leq \alpha_2\}$, em que $\alpha_1 = 1, 3$ e $\alpha_2 = 2, 4$.

Solucionando o problema de maximização de tolerância à perturbação, obteve-se $\sigma = 1, 3800$, tanto para o AW estático, quanto para o AW dinâmico. Solucionando

Tabela 3: Desempenho \mathcal{L}_2 com compensador de *anti-windup*, Exemplo 7.

σ	$\sigma^{-1} = \beta$	γ (AW Estático)	γ (AW Dinâmico)
1,3810	0,7241	723,5895	723,5896
1,4000	0,7143	35,2181	35,2181
1,4500	0,6897	9,4169	9,4169
1,5000	0,6667	5,1690	5,1690
1,5500	0,6452	3,4487	3,4487
1,6000	0,6250	2,5281	2,5281
1,7000	0,5882	1,5784	1,5784
1,8000	0,5556	1,1313	1,1313
1,9000	0,5263	0,9228	0,9228
2,0000	0,5000	0,8065	0,8065
2,1000	0,4762	0,7340	0,7340
2,2000	0,4545	0,6859	0,6859
3,0000	0,3333	0,5829	0,5829
3,5000	0,2857	0,582716625467221	0,582716625970217
5,0000	0,2000	0,582716625393789	0,582716629971291
10,0000	0,1000	0,582716625403006	0,582716632874981
20,0000	0,0500	0,582716625412802	0,582716637269372

o problema de maximização de rejeição à perturbação, encontrou-se o conjunto de resultados mostrados na Tabela 3.

Os resultados mostram que, neste caso, não há vantagem em se utilizar o AW dinâmico, uma vez que os resultados de ganho \mathcal{L}_2 , dados pelo limitante superior γ , não são significativamente diferentes entre a abordagem estática e a abordagem dinâmica, para diferentes valores factíveis de β . \circ

Exemplo 8. Considere o sistema em malha fechada retirado de (VALMORBIDA et al., 2010):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + 2x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + w_1 + \text{sat}(u(t)) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) + w_2 \\
y(t) &= x_1(t) + 0,5x_2(t) ,
\end{aligned} \tag{188}$$

com $u_0 = 0,6$, e o controlador

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1(t) &= x_1(t) + 0,5x_2(t) - 1,480\eta_1(t) + 2,45\eta_2(t) \\
\dot{\eta}_2(t) &= 2,450\eta_1(t) \\
u(t) &= -2x_1(t)^2 - x_1(t)x_2(t) - 4,4x_1(t) - 2,2x_2(t) \\
&\quad - 15,148\eta_1(t) - 21,449\eta_2(t) .
\end{aligned} \tag{189}$$

Considerando a representação DAR em (154), para o sistema (188)-(189) tem-se:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3,4 & -2,2 & -15,148 & -21,449 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & -1,480 & 2,450 \\ 0 & 0 & 2,45 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Tabela 4: Desempenho \mathcal{L}_2 com compensador de *anti-windup*, Exemplo 8.

σ	$\sigma^{-1} = \beta$	γ (AW Estático)	γ (AW Dinâmico)
15,9826	0,0626	5562,5000	7,2307
16,0000	0,0625	336,8943	7,1310
16,5000	0,0606	14,2393	5,1427
17,0000	0,0588	7,5670	4,0891
17,5000	0,0571	5,2866	3,4389
18,0000	0,0556	4,1403	2,9994
19,0000	0,0526	2,9972	2,4467
20,0000	0,0500	2,4335	2,1173
25,0000	0,0400	1,5540	1,5019
30,0000	0,0333	1,3653	1,3523
35,0000	0,0286	1,3209	1,3198
40,0000	0,0250	1,3197037694971	1,31970917569906
45,0000	0,0222	1,3197037695318	1,31970479652926
50,0000	0,0200	1,3197037695414	1,31970265383014
60,0000	0,0167	1,3197037695073	1,31970476445600
70,0000	0,0143	1,3197037695026	1,31970549521162
80,0000	0,0125	1,3197037695100	1,31970441828648
90,0000	0,0111	1,3197037695237	1,31970396838620
100,0000	0,0100	1,3197037695059	1,31970490716546

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } K_1 = \begin{bmatrix} -4, 4 - 2x_1 & -2, 2 - x_1 & -15, 148 & -21, 449 \end{bmatrix} .$$

Considere $\mathcal{B}_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^4 : |\xi_1| \leq \alpha_1, |\xi_2| \leq \alpha_2, |\xi_3| \leq \alpha_3, |\xi_4| \leq \alpha_4\}$, em que $\alpha_1 = 0, 35$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, 6$.

Resolvendo o problema de maximização de tolerância à perturbação, obteve-se $\sigma = 15, 9776$ para o AW estático e $\sigma = 14, 8568$ para o AW dinâmico. Solucionando-se o problema de maximização de rejeição à perturbação, encontrou-se o conjunto de resultados mostrados na Tabela 4. Observa-se que, a partir de $\beta = 0, 025$, os ganhos γ não apresentam variação. Isso quer dizer que, a partir dessa faixa de valores, o sistema entrou em regime linear, ou seja, sem saturação. Nesse ponto, a abordagem \mathcal{L}_2 se equivale à solução do problema \mathcal{H}_∞ sem restrições. \circ

4.2 Abordagem Quadrática

Esta seção apresentará uma formulação por decomposição quadrática, baseada em (COUTINHO; SOUZA, 2012), a fim de resolver o problema de síntese de compensador de *anti-windup* estático para sistemas quadráticos nos estados.

4.2.1 Formulação do Problema

Reconsidere a classe de sistemas não lineares apresentados em (104). No caso específico de o sistema ser quadrático e sua saída for linear nos estados, ele pode ser

convenientemente representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x) \text{sat}(u) \\ y &= Cx , \end{aligned} \quad (190)$$

em que $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle, $A : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B : \mathcal{B}_x \mapsto \mathbb{R}^{n \times n_u}$ são funções matriciais definidas como em (48) e $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ é uma matriz constante de saída.

Considere a não linearidade de zona morta mostrada em (32). Dessa forma, o sistema (190) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x)u - B(x)\psi \\ y &= Cx . \end{aligned} \quad (191)$$

Além disso, considere um controlador dinâmico de saída estabilizante da forma (105), que tenha sido previamente projetado para o sistema (190). Admita que é um controlador quadrático no estado η e na saída y do sistema (190). Assim, pode-se expressá-lo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= F(\eta)\eta + M(\eta)y + \theta \\ u &= H(\eta)\eta + R(\eta)y , \end{aligned} \quad (192)$$

em que

$$F(\eta) = F_0 + \sum_{i=1}^{n_\eta} F_i \eta_i, \quad H(\eta) = H_0 + \sum_{i=1}^{n_\eta} H_i \eta_i , \quad (193)$$

$$M(\eta) = M_0 + \sum_{i=1}^{n_\eta} M_i \eta_i \text{ e } R(\eta) = R_0 + \sum_{i=1}^{n_\eta} R_i \eta_i , \quad (194)$$

em que $\eta \in \mathcal{B}_\eta \subset \mathbb{R}^{n_\eta}$, com η_i representando o i -ésimo componente de η , e F_i , H_i , M_i e R_i , para $i = 0, 1, \dots, n_\eta$, sendo matrizes constantes de dimensões apropriadas. O termo θ representa um compensador estático de *anti-windup* tal que:

$$\theta = E_c \psi , \quad (195)$$

em que $E_c \in \mathbb{R}^{n_\eta \times n_u}$ é uma matriz constante a ser determinada que representa o ganho do compensador estático de AW.

Considere, agora, um vetor aumentado da forma $\xi = [x' \ \eta']'$. Com isso, o sistema em malha fechada (191)–(192) pode ser escrito como o seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= [\tilde{A}(\xi) + (\tilde{B}_0 + \tilde{\Pi}(\xi)' \tilde{\mathbf{B}}) \tilde{L}(\eta) \tilde{C}] \xi \\ &\quad - [\hat{B}_0 + \tilde{\Pi}(\xi)' \hat{\mathbf{B}}] \psi + W E_c \psi, \forall \xi \in \mathcal{B}_\xi = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\eta , \end{aligned} \quad (196)$$

em que

$$\tilde{A}(\xi) = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}(\eta) = \begin{bmatrix} R(\eta) & H(\eta) \\ M(\eta) & F(\eta) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\Pi}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 I_{n_\xi} \\ \vdots \\ \xi_{n_\xi} I_{n_\xi} \end{bmatrix} .$$

Considere, ainda, as seguintes matrizes:

$$\tilde{\mathbf{B}}(\xi) = \tilde{\Delta}(\xi)' \begin{bmatrix} \tilde{B}_0 \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{B}}(\xi) = \tilde{\Delta}(\xi)' \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix},$$

em que

$$\tilde{\Delta}(\xi) = \begin{bmatrix} I_{n_\xi} \\ \tilde{\Pi}(\xi) \end{bmatrix}. \quad (197)$$

4.2.2 Condição de Setor Generalizada

Tendo em conta os conceitos apresentados na Seção 2.3.1, considera-se

$$v = \tilde{\mathbf{G}}(\xi)\xi \quad (198)$$

em (35) e (36). Repare, ainda, que:

$$u = \tilde{\mathbf{K}}(\xi)\xi, \quad (199)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{K}}(\xi) = \begin{bmatrix} R(\eta)C & H(\eta) \end{bmatrix}.$$

Considere, agora, a seguinte expansão de $\tilde{\mathbf{G}}(\xi)$:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\xi) = \tilde{G}_0 + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i \tilde{G}_i, \quad \tilde{G}_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\xi}, \quad (200)$$

com \tilde{G}_i , $i = 0, 1, \dots, n_\xi$, sendo matrizes constantes. Assim, se $\xi \in \mathcal{S}$, tal que

$$\mathcal{S} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \left| \left(\tilde{\mathbf{K}}(\xi)_{(i)} - \tilde{\mathbf{G}}(\xi)_{(i)} \right) \xi \right| \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, n_u \right\}, \quad (201)$$

então a condição

$$\psi(\tilde{\mathbf{K}}(\xi)\xi)'T[\psi(\tilde{\mathbf{K}}(\xi)\xi) - \tilde{\mathbf{G}}(\xi)\xi] \leq 0 \quad (202)$$

é verificada para toda matriz $T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ diagonal e positiva definida.

4.2.3 Função Candidata de Lyapunov

A fim de obter condições para a síntese de E_c de forma a garantir a estabilidade local do sistema (196), será considerada a seguinte função quadrática candidata de Lyapunov:

$$V(\xi) = \xi' P \xi, \quad P > 0, \quad P \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}, \quad (203)$$

e o domínio normalizado de Lyapunov conforme a seguinte equação:

$$\mathcal{R} = \{ \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq 1 \}. \quad (204)$$

Note que a região \mathcal{R} é um conjunto elipsoidal. Como nos casos precedentes, considera-se que \mathcal{B}_ξ é um poliedro convexo simétrico (com respeito à origem), definido como segue:

$$\mathcal{B}_\xi = \{ \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : |q'_r \xi| \leq 1, \quad r = 0, \dots, n_f \}, \quad (205)$$

em que $q_r \in \mathbb{R}^{n_\xi}$, $r = 1, \dots, n_f$ são vetores constantes que definem as $2n_f$ faces de \mathcal{B}_ξ .

De forma alternativa, o conjunto poliedral \mathcal{B}_ξ pode ser descrito em termos do envelope convexo de seus vértices denotados por $\varphi_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, \kappa$, isto é,

$$\mathcal{B}_\xi = \text{Co}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\kappa\}. \quad (206)$$

A derivada temporal de $V(\xi)$ ao longo da trajetória do sistema (196) é dada por:

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi'P \left[(\tilde{A}(\xi) + \tilde{B}_0\tilde{L}(\eta)\tilde{C} + \tilde{\Pi}'\tilde{\mathbf{B}}\tilde{L}(\eta)\tilde{C})\xi - (\hat{B}_0 + \tilde{\Pi}'\hat{\mathbf{B}})\psi + WE_c\psi \right]. \quad (207)$$

Tendo em vista o Lema 2 e as considerações precedentes, é dado que $\dot{V} < 0$, $\forall \xi \in \mathcal{S}, \xi \neq 0$, se a seguinte condição for satisfeita:

$$2\xi'P \left[(\tilde{A}(\xi) + \tilde{B}_0\tilde{L}(\eta)\tilde{C} + \tilde{\Pi}'\tilde{\mathbf{B}}\tilde{L}(\eta)\tilde{C})\xi - (\hat{B}_0 + \tilde{\Pi}'\hat{\mathbf{B}})\psi + WE_c\psi \right] - 2\psi'T(\psi - \tilde{\mathbf{G}}(\xi)\xi) < 0. \quad (208)$$

Seja, agora, a seguinte transformação de similaridade:

$$z = P\xi, \quad Q = P^{-1}. \quad (209)$$

Dessa forma, a inequação em (208) pode ser reescrita como:

$$2z' \left[(\tilde{A}(\xi) + \tilde{B}_0\tilde{L}(\eta)\tilde{C} + \tilde{\Pi}'\tilde{\mathbf{B}}\tilde{L}(\eta)\tilde{C})Qz - (\hat{B}_0 + \tilde{\Pi}'\hat{\mathbf{B}})\psi + WE_c\psi \right] - 2\psi'T(\psi - \tilde{\mathbf{G}}(\xi)Qz) < 0. \quad (210)$$

Considere, agora, a seguinte parametrização de $\tilde{\mathbf{G}}(\xi)$:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\xi) = \tilde{\mathbf{Y}}(\xi)Q^{-1}, \quad (211)$$

em que

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\xi) = \tilde{Y}_0 + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i \tilde{Y}_i,$$

com $\tilde{Y}_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\xi}, i = 0, 1, \dots, n_\xi$ sendo matrizes constantes a serem determinadas.

À luz dessas definições, a desigualdade (210) pode ser escrita como segue:

$$2z' \left[(\tilde{\Lambda}(\xi) + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\Pi}'\tilde{L}(\xi)\tilde{C}Q)z - (\hat{B}_0 + \tilde{\Pi}'\hat{\mathbf{B}})\psi + WE_c\psi \right] - 2\psi'T[\psi - \tilde{\mathbf{Y}}z] < 0, \quad (212)$$

com $\tilde{\Lambda}(\xi) = \tilde{A}(\xi)Q + \tilde{B}_0\tilde{L}(\xi)\tilde{C}Q$.

Considere, agora, o seguinte vetor aumentado:

$$\tilde{\eta}_s = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}z \\ T\psi \end{bmatrix}$$

e as seguintes matrizes auxiliares:

$$\tilde{N}_1 = \begin{bmatrix} I_{n_\xi} & 0_{n_\xi \times n_\xi^2} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{N}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n_\xi^2 \times n_\xi} & I_{n_\xi^2} \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\tilde{N}_1\tilde{\Delta} = I_{n_\xi} \text{ e } \tilde{N}_2\tilde{\Delta} = \tilde{\Pi}. \quad (213)$$

Assim, a condição (212) pode ser reescrita como o seguinte:

$$\tilde{\eta}'_s \tilde{\Phi}(\xi) \tilde{\eta}_s < 0, \quad (214)$$

em que

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi} & \star \\ \begin{pmatrix} -S\hat{B}'_0\tilde{N}_1 - S\tilde{\mathbf{B}}'\tilde{N}_2 \\ +\tilde{\mathbf{Y}}(\xi)\tilde{N}_1 + E'_f W'\tilde{N}_1 \end{pmatrix} & -2S \end{bmatrix}, \quad (215)$$

com $S = T^{-1}$, $E_f = E_c S$ e

$$\tilde{\Xi} = \text{He} \{ \tilde{N}'_1 \tilde{\Lambda}(\xi) \tilde{N}_1 + \tilde{N}'_2 \tilde{\mathbf{B}} \tilde{L}(\xi) \tilde{C} Q \tilde{N}_1 \}. \quad (216)$$

Observe que o vetor auxiliar $\tilde{\eta}_s$ é tal que $\hat{\tilde{\Omega}}(\xi) \tilde{\eta}_s = 0$, com

$$\hat{\tilde{\Omega}}(\xi) = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}(\xi) & 0_{n_\xi^2 \times n_u} \end{bmatrix}, \quad (217)$$

em que $\tilde{\Omega}(\xi) = [\tilde{\Pi} \quad -I_{n_\xi^2}]$.

Dessa forma, se

$$\tilde{\eta}'_s \tilde{\Phi}(\xi) \tilde{\eta}_s < 0, \quad \forall \tilde{\eta}_s : \hat{\tilde{\Omega}}(\xi) \tilde{\eta}_s = 0, \quad \tilde{\eta}_s \neq 0, \quad (218)$$

então (208) é satisfeita para todo $\xi \neq 0$ e, assim, tem-se que $\dot{V} < 0$ para todo $\xi \in \mathcal{S}$ não nulo.

Aplicando-se o Lema 4 (ver Apêndice A.1) a (218), tem-se que:

$$\tilde{\Phi}(\xi) + \text{He} \{ L \hat{\tilde{\Omega}}(\xi) \} < 0, \quad (219)$$

em que $L \in \mathbb{R}^{n_\xi(n_\xi+1) \times n_\xi^2}$ é uma matriz de ponderação a ser determinada.

A fim de se obter uma condição LMI dependente de estados menos conservadora do que (219), é introduzido um aniquilador matricial linear $\tilde{\mathcal{N}}(\xi) \in \mathbb{R}^{m \times n_\xi^2}$ de $\tilde{\Pi}$. Especificamente, a matriz $\hat{\tilde{\Omega}}(\xi)$ é trocada por $\tilde{\Omega}_a(\xi)$, a qual é definida como o seguinte:

$$\tilde{\Omega}_a(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{\tilde{\Omega}}(\xi) \\ \tilde{\mathcal{N}}_a(\xi) \end{bmatrix}, \quad (220)$$

em que

$$\tilde{\mathcal{N}}_a(\xi) = \begin{bmatrix} 0_{m \times n_\xi} & \tilde{\mathcal{N}}(\xi) & 0_{m \times n_u} \end{bmatrix}, \quad (221)$$

com

$$\tilde{\mathcal{N}}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_2 I_{n_\xi} & -\xi_1 I_{n_\xi} & 0_{n_\xi} & \cdots & 0_{n_\xi} \\ 0_{n_\xi} & \xi_3 I_{n_\xi} & -x_2 I_{n_\xi} & \cdots & 0_{n_\xi} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{n_\xi} & \cdots & 0_{n_\xi} & \xi_{n_\xi} I_{n_\xi} & -\xi_{(n_\xi-1)} I_{n_\xi} \end{bmatrix}.$$

Note que $\tilde{\Omega}_a(\xi) \tilde{\eta}_s = 0$ e $m = n_\xi(n_\xi - 1)$.

4.2.4 Resultados Principais

Embasado nos desenvolvimentos precedentes, o próximo Teorema fornece uma condições na forma de LMIs para o projeto de um compensador de *anti-windup* para sistemas quadráticos não lineares com controle dinâmico de saída sujeitos à saturação no atuador.

Teorema 8. *Considere o sistema definido por (190) e o controlador dado por (192). Seja \mathcal{B}_ξ um conjunto poliedral definido em (205). Suponha que existam matrizes reais $\tilde{L}_a, \tilde{L}_b, Q, Y_0, Y_1, \dots, Y_n, E_f$ e uma matriz diagonal positiva definida S satisfazendo as seguintes LMIs para todo $\varphi \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_\xi)$:*

$$Q > 0; \quad 1 - q_r' Q q_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, n_f; \quad (222)$$

$$\tilde{\Phi}(\varphi_j) + \text{He}\{\tilde{L}_a \tilde{\Omega}_a(\varphi_j)\} < 0, \quad j = 1, \dots, \kappa; \quad (223)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{N}_1' Q \tilde{N}_1 + \text{He}\{\tilde{L}_b \tilde{\Omega}_b(\varphi_j)\} & \star \\ \hline (\tilde{\mathbf{K}}_{(i)}(\varphi_j) Q - \tilde{\mathbf{Y}}_{(i)}(\varphi_j)) N_1 & u_{0(j)}^2 \end{array} \right] > 0, \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, \kappa, \\ i = 1, \dots, n_u. \end{array} \quad (224)$$

com $\tilde{\Phi}(\cdot)$ e $\tilde{\Omega}_a(\cdot)$ definidos como em (215) e (220), respectivamente, e

$$\tilde{\Omega}_b(x) = \begin{bmatrix} \Omega(x) \\ \tilde{\mathcal{N}}_b(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{N}}_b(x) = \begin{bmatrix} 0_{m \times n_\xi} & \tilde{\mathcal{N}}(\xi) \end{bmatrix}.$$

Então, o compensador estático de anti-windup dado por $E_c = E_f S^{-1}$ garante que o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ do sistema em malha fechada (196) é localmente assintoticamente estável e $V(\xi) = \xi' Q^{-1} \xi$ é uma função de Lyapunov em \mathcal{B}_ξ . Além disso, o conjunto $\mathcal{R} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} : \xi' P \xi \leq 1\}$ é uma região de estabilidade assintótica para o sistema em malha fechada, isto é, para qualquer $\xi(0) \in \mathcal{R}$, a trajetória $\xi(t) \in \mathcal{R}, \forall t \geq 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$. \diamond

Prova. A prova do Teorema 7 é semelhante à prova do Teorema 3. Basicamente, a condição (223) garante que $V(\xi) < 0, \forall \xi \in (\mathcal{B}_\xi \cap \mathcal{S})$. As condições (222) e (224) garantem que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_\xi$ e $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, respectivamente. \square

4.2.5 Problema de Otimização

Nessa seção, será mostrado como aplicar o Teorema 8 para maximizar a região de estabilidade garantida \mathcal{R} do sistema em malha fechada. Para isso, considere uma matriz auxiliar simétrica $W \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ e a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (225)$$

Por argumentos similares apresentados na Seção 3.3.4, segue-se que $\text{Tr}(W) > \text{Tr}(P)$, a partir de (225). Assim, para um dado politopo \mathcal{B}_ξ , o seguinte problema de otimização pode ser aplicado para maximizar o tamanho de \mathcal{R} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad \text{Tr}(W) \\ \tilde{L}_a, \tilde{L}_b, Q, S, \\ Y_0, Y_1, \dots, Y_n, E_f \\ \text{sujeito a (222), (223), (224) e (225)}. \end{array} \right. \quad (226)$$

Exemplo 9. Considere o seguinte sistema não linear quadrático nos estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_1^2 + x_1x_2 + \text{sat}(u) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \\ y &= x_1 + 0,5x_2 \end{aligned} \quad (227)$$

e o controlador dinâmico de saída do tipo proporcional integral (PI) dado pela seguinte equação de estados:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= 0\eta + y \\ u &= -3,5433\eta - 3,5433y, \end{aligned} \quad (228)$$

que foi projetado, a partir da linearização de (227) em torno da origem, para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada.

Tem-se que a representação por decomposição quadrática do sistema (227) é dada pelo seguinte conjunto de matrizes:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = [1 \ 0,5].$$

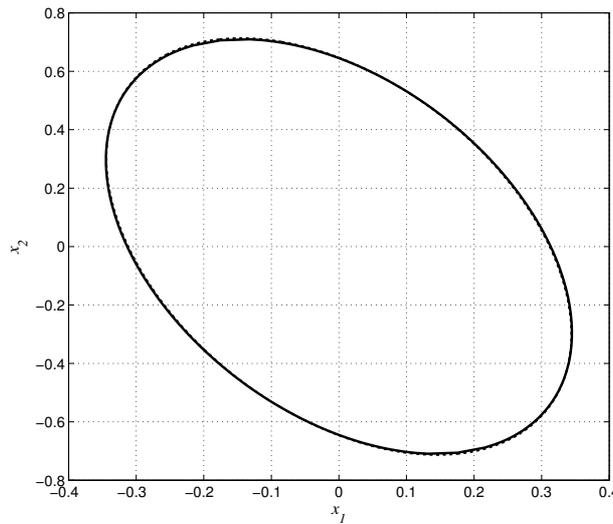


Figura 9: Comparativo entre regiões de estabilidade garantida obtidas utilizando-se abordagem quadrática (linha contínua) e utilizando-se abordagem DAR (linha pontilhada).

A representação do controlador, por sua vez, é dada pelas seguintes matrizes:

$$F_0 = 0, M_0 = 1, H_0 = -3,5433 \text{ e } R_0 = -3,5433.$$

A representação DAR, por sua vez, é dada por:

$$\mathcal{A}_a = \begin{bmatrix} -2,5433 + 2x_1 & -1,7716 + x_1 & -3,5433 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_c = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$K_1 = [-3,5433 \quad -1,7716 \quad -3,5433].$$

Assume-se que a entrada de controle $u(t)$ é simetricamente limitada, tal que $|u| \leq 1$. Admite-se, ainda, que o politopo de estados admissíveis é tal que $\mathcal{B}_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq \mu_i, i = 1, 2, 3\}$. Aplicou-se o problema de otimização (225) com $\mu_1 = 0,3650$, $\mu_2 = 1,6872$ e $\mu_3 = 1,6872$. Em seguida, aplicou-se o problema de otimização sugerido em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014) para síntese de compensador estático de AW, baseado na abordagem DAR, com $\mu_1 = 0,3700$, $\mu_2 = 1,4872$ e $\mu_3 = 1,4872$. A Fig. 9 mostra um comparativo entre as regiões de estabilidade garantida obtidas mediante a aplicação de compensação de AW estático através da abordagem DAR e através da abordagem de decomposição quadrática.

No caso de *anti-windup* via abordagem quadrática, a região \mathcal{R} resultante é definida por:

$$Q^{-1} = P = \begin{bmatrix} 10,1872 & 2,0650 & 2,6315 \\ 2,0650 & 2,4036 & 4,9695 \\ 2,6315 & 4,9695 & 13,2329 \end{bmatrix} .$$

As duas elipses mostram-se praticamente sobrepostas. Apresentam, nesse caso, áreas iguais de 0,7 unidades de área. Portanto, não há vantagem, nesse caso, em utilizar-se a abordagem quadrática. \circ

Exemplo 10. Considere o sistema bilinear dado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0x + (B_0 + B_1x_1 + B_2x_2) \text{sat}(u) \\ y &= Cx , \end{aligned} \quad (229)$$

tal que $x = [x'_1 \quad x'_2]'$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1/6 & 1 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = [1 \quad 0,5] .$$

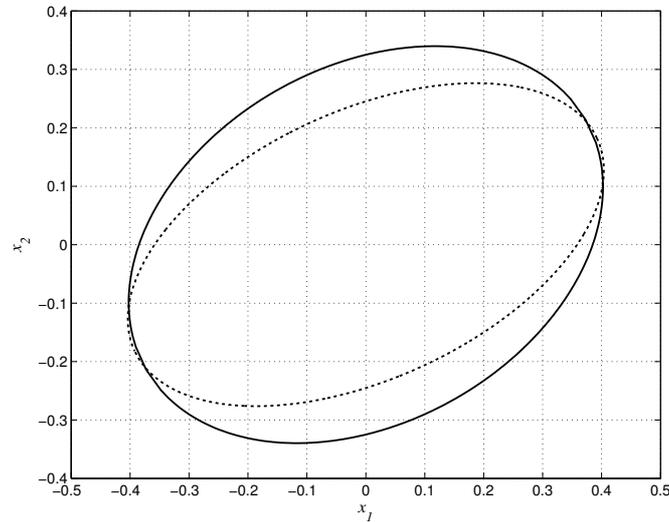


Figura 10: Comparativo entre regiões de estabilidade garantida obtida através da abordagem DAR (linha pontilhada), em que $\text{Tr}(P) = 24,4010$, e obtida através da abordagem quadrática (linha contínua), em que $\text{Tr}(P) = 16,2195$.

Considere, ainda, um controlador dinâmico de saída do tipo proporcional integral (PI) dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= 0\eta + y \\ u &= 11,8479\eta + 2,0277y . \end{aligned} \quad (230)$$

Assume-se que a saída de controle $u(t)$ é simetricamente limitada, tal que $|u| \leq 1$. Admite-se, ainda, que o politopo de estados admissíveis é tal que $\mathcal{B}_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq \mu_i, i = 1, 2, 3\}$. Aplicou-se o problema de otimização (225) com $\mu_1 = 0,43$, $\mu_2 = 0,4$ e $\mu_3 = 0,4$. Em seguida, o problema de otimização para síntese de AW estático sugerido em (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014), que utiliza abordagem DAR, também foi aplicado para fins de comparação. A Fig. 10 mostra as duas regiões de estabilidade garantida \mathcal{R} .

A região \mathcal{R} obtida pela abordagem quadrática é dada pela seguinte matriz:

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 6,7495 & -2,3291 & 6,8233 \\ -2,3291 & 9,4699 & 8,5916 \\ 6,8233 & 8,5916 & 111,7296 \end{bmatrix}.$$

Diferentemente do Exemplo 9, esse exemplo mostrou que a abordagem quadrática fornece uma região menos conservadora do que a abordagem DAR. \circ

4.3 Conclusões

Este capítulo apresentou técnicas de síntese de compensadores de *anti-windup* para sistemas não lineares racionais e especificamente para sistemas quadráticos sujeitos à saturação de atuadores.

A Seção 4.1 mostrou uma técnica de síntese de um compensador de *anti-windup* dinâmico que possui a mesma ordem do sistema em malha fechada com o controlador previamente projetado. No Exemplo 6, foi mostrada a aplicação do método proposto, em que ficou identificada uma pequena melhora no tamanho da região de estabilidade garantida produzida através da abordagem dinâmica em relação à abordagem estática de compensação por *anti-windup*.

Além disso, foram propostas técnicas de síntese de compensadores de AW dinâmicos para otimização do desempenho \mathcal{L}_2 de sistemas racionais. O Exemplo 8 mostrou que a utilização do compensador dinâmico pode favorecer a obtenção de um limitante superior para o ganho \mathcal{L}_2 menor do que aquele obtido através do compensador estático de AW.

A Seção 4.2, por sua vez, mostrou um método de síntese de compensador estático de AW para sistemas quadráticos sujeitos à saturação. No Exemplo 10, caso particular em que $B(x)$ é afim nos estados, tem-se vantagem na utilização da abordagem quadrática em relação a abordagem DAR no que diz respeito ao conservadorismo da região de estabilidade garantida. A presença de aniquiladores lineares é, muito possivelmente, a razão para que a abordagem de decomposição quadrática tenha resultado em regiões de estabilidade garantida menos conservadoras.

Parte dos resultados apresentados nesse capítulo foram fonte do seguinte trabalho aceito para apresentação e publicação:

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; LONGHI, M. B.; OLIVEIRA, M. Z. Dynamic anti-windup design for a class of nonlinear systems. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 20., 2014, Belo Horizonte. **Anais...** Campinas: Sociedade Brasileira de Automática, no prelo 2014.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho estudou o controle de sistemas não lineares quadráticos nos estados e contínuos no tempo, sujeitos à saturação nos atuadores, com foco na síntese de realimentação estática de estados e de compensadores de *anti-windup*.

Inicialmente, foi proposta uma metodologia de síntese de realimentação não linear de estados utilizando-se uma técnica de decomposição quadrática. Esse trabalho foi baseado nos resultados apresentados em (COUTINHO; SOUZA, 2012), em que uma técnica de síntese de realimentação de estados também é proposta, mas sem considerar a saturação do atuador. Outra base para este trabalho originou-se da tese (OLIVEIRA, 2012), em que a síntese de realimentação de estados é proposta a partir de uma abordagem DAR que, embora considere a saturação dos atuadores, não particulariza a metodologia para sistemas quadráticos, já que a abordagem DAR se aplica a toda a classe de sistemas racionais. O Exemplo 5 mostrou que a abordagem usando a técnica de decomposição quadrática, a qual se aplica especificamente para o caso de sistemas quadráticos, apresenta a região de estabilidade garantida menos conservadora do que aquela obtida pela abordagem DAR.

A segunda parte da dissertação, no Capítulo 4, apresentou propostas de métodos para síntese de um compensador dinâmico de *anti-windup* para sistemas racionais sujeitos à saturação de atuadores. Esse trabalho, por sua vez, foi inspirado no trabalho (GOMES DA SILVA Jr. et al., 2014), em que é apresentado um método para síntese de compensador de *anti-windup* para sistemas dessa classe, utilizando-se a abordagem DAR. O Exemplo 6 mostrou que o compensador dinâmico de AW pode apresentar uma região de estabilidade garantida maior do que o compensador estático, dependendo do problema de otimização aplicado. Em seguida, foram propostas condições em forma de LMIs, através de abordagem DAR, para síntese de compensadores estático e dinâmico de *anti-windup* tal que o desempenho \mathcal{L}_2 da saída em relação a uma perturbação limitada em energia seja otimizado. O Exemplo 8, caso de um sistema quadrático, mostrou que o desempenho \mathcal{L}_2 pode ser consideravelmente aprimorado com a utilização de um compensador de AW dinâmico.

Por fim, ainda no Capítulo 4, foram propostas condições em forma de LMIs para síntese de compensador estático de *anti-windup* para sistemas quadráticos com base na abordagem de decomposição quadrática dos estados. O Exemplo 9 mostra que a abordagem quadrática pode resultar em uma região de estabilidade garantida menos conservadora do que a abordagem DAR.

A redução de conservadorismo quando a abordagem de decomposição quadrática é utilizada se deve, muito possivelmente, à presença de aniquiladores lineares em sua formulação. Os aniquiladores lineares desacoplam os estados que estão presentes, ao mesmo tempo, na condição de estabilidade e nos vetores auxiliares oriundos da

aplicação do Lema de Finsler. Além disso, deve-se levar em consideração que a abordagem DAR se aplica a toda a classe de sistemas racionais e não é particularizada para o caso quadrático. Por essa razão, os resultados obtidos com essa abordagem tendem a ser mais conservadores para uma classe específica, como a classe de sistemas quadráticos.

Em vista disso, pode-se elencar algumas perspectivas para futuros trabalhos, tais como:

- Projeto de compensadores de *anti-windup* com base na abordagem quadrática, considerando critérios de desempenho;
- projeto de compensadores de *anti-windup* dinâmicos com base na abordagem quadrática; e
- projeto de realimentação dinâmica de saída para sistemas quadráticos.

REFERÊNCIAS

- AMATO, F.; COSENTINO, C.; MEROLA, A. On the region of attraction of nonlinear quadratic systems. **Automatica**, Tarrytown, v.43, n.12, p.2119–2123, 2007.
- AMATO, F.; COSENTINO, C.; MEROLA, A. Sufficient conditions for finite-time stability and stabilization of nonlinear quadratic systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.55, n.2, p.430–434, 2010.
- ARG, B. Nonlinear control of a heating, ventilating, and air conditioning system with thermal load estimation. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Brookline, v.7, n.1, p.56–63, 1999.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in systems and control theory**. Philadelphia: SIAM Books, 1994.
- CHESE, G. LMI techniques for optimization over polynomials in control: a survey. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.55, n.11, p.2500–2510, 2010.
- COUTINHO, D. F. et al. Stability analysis and control of a class of differential-algebraic nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.14, n.16, p.1301–1326, 2004.
- COUTINHO, D. F. et al. \mathcal{L}_2 -gain analysis and control of uncertain nonlinear systems with bounded disturbance inputs. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.18, p.88–110, 2008.
- COUTINHO, D. F.; GOMES DA SILVA Jr., J. M. Computing estimates of the region of attraction for rational control systems with saturating actuators. **IET Control Theory & Applications**, Hertford, v.4, n.3, p.315–325, 2010.
- COUTINHO, D.; SOUZA, C. E. Nonlinear state feedback design with a guaranteed stability domain for locally stabilizable unstable quadratic systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Regular Papers**, Brookline, v.59, n.2, p.360–370, 2012.
- DUROLA, S.; DANÈS, P.; COUTINHO, D. F. Set-membership filtering of uncertain discrete-time rational systems through recursive algebraic representations and LMIs. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 47., 2008, Cancun, Mexico. **Proceedings...** New York: IEEE, 2008. p.684–689.

- EL GHAOUI, L.; SCORLETTI, G. Control of rational systems using linear-fractional representations and LMIs. **Automatica**, Tarrytown, v.32, n.9, p.1273–1284, 1996.
- ESPAI, M.; LANDAU, I. D. Reduced order bilinear models for distillation columns. **Automatica**, Tarrytown, v.14, n.4, p.345–355, 1978.
- FIGALLI, G.; CAVA, M. L. A.; TOMASI, L. An optimal feedback control for a bilinear model of induction motor drives. **International Journal of Control**, Abingdon, v.39, n.5, p.1007–1016, 1984.
- FUAD, Y.; KONING, W. L. D.; WOUDE, J. W. V. D. On the stability of the pulsewidth-modulated Ćuk converter. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, Brookline, v.51, n.8, p.412–420, 2004.
- GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S. I. **Advances in linear matrix inequality methods in control**. Philadelphia: SIAM, 2000.
- GILLARD, P. et al. **Cambridge advanced learner's dictionary**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M. et al. Static anti-windup design for a class of nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, West Sussex, v.24, n.5, p.793–810, 2014.
- GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.50, n.1, p.106–111, 2005.
- HIRSCHORN, R. M. Invertibility of multivariable nonlinear control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.24, n.6, p.855–865, 1979.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. New York: Prentice Hall, 1996.
- KOOIJ, R. E.; CHRISTOPHER, C. J. Algebraic invariant curves and the integrability of polynomial systems. **Applied Mathematics Letters**, Amsterdam, v.6, n.4, p.51–53, 1993.
- KULKARNI, V. V. et al. Stability analysis of the GAL regulatory network in *Saccharomyces cerevisiae* and *Kluyveromyces lactis*. **BMC Bioinformatics**, BioMed Central: London, v.11, n.1, p.43, 2010.
- MASUBUCHI, I.; OHARA, A.; SUDA, N. LMI -based output feedback controller design using a convex parametrization of full-order controllers. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC' 95), 1995, Seattle. **Proceedings...** New York: IEEE, 1995. p.3473–3477.
- MOHLER, R. R. Natural bilinear control processes. **IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics**, Brookline, v.6, n.3, p.192–197, 1970.
- MORABITO, F.; TEEL, A. R.; ZACCARIAN, L. Nonlinear anti-windup applied to Euler-Lagrange systems. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, Brookline, v.20, n.3, p.526–537, 2004.

OLIVEIRA, M. Z. **Estabilidade e estabilização de uma classe de sistemas não-lineares sujeitos a saturação**. 2012. 123p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Porto Alegre, 2012.

OLIVEIRA, M. Z. et al. Anti-windup design for a class of nonlinear control systems. In: WORLD CONGRESS OF THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL, 18., 2011, Milano, Italy. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2011.

OLIVEIRA, M. Z. et al. Design of anti-windup compensators for a class of nonlinear control systems with actuator saturation. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, New York, v.24, n.3, p.212–222, 2013.

TARBOURIECH, S. et al. Control design for bilinear systems with a guaranteed region of stability: an LMI-based approach. In: MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION, 17., 2009, Thessaloniki. **Proceedings...** Washington: IEEE Computer Society, 2009. p.809–814.

TARBOURIECH, S. et al. **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. London: Springer, 2011.

TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA Jr., J. M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.51, p.1364–1371, 2006.

THOUNTHONG, P.; PIERFEDERICI, S. A new control law based on the differential flatness principle for multiphase interleaved DC–DC converter. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, Brookline, v.57, n.11, p.903–907, 2010.

TROFINO, A. Robust stability and domain of attraction of uncertain nonlinear systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'00), 2000, Chigago. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.5, p.3707–3711.

VALMORBIDA, G. et al. Anti-windup for NDI quadratic systems. In: IFAC SYMPOSIUM ON NONLINEAR CONTROL SYSTEMS, 8., 2010, Bologna. **Proceedings...** Tarrytown: IFAC, 2010. v.1, p.1175–1180.

VALMORBIDA, G.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. State feedback design for input-saturating quadratic systems. **Automatica**, Tarrytown, v.46, p.1196–1202, 2010.

APÊNDICE A FERRAMENTAS PARA MANIPULAÇÃO DE LMIs

A.1 Lema de Finsler

O Lema de Finsler é útil para tratar formulações em LMI sujeitas à restrição de igualdade (BOYD et al., 1994).

Lema 3. (Lema de Finsler) *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^n$, $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é tal que $\text{posto}(B) < n$ e B_0 é uma base para o espaço nulo de B . As seguintes assertivas são equivalentes:*

1. $\xi'Q\xi < 0$, $\forall \xi : B\xi = 0$, $\xi \neq 0$;
2. $B_0'QB_0 < 0$;
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B'B < 0$, $\mu > 0$; e
4. $\exists R \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + RB + B'R' < 0$. ◇

Uma versão particular do Lema 3 é proposta por (COUTINHO; SOUZA, 2012):

Lema 4. (Lema de Finsler) *Dadas as funções matriciais $\Gamma(v) \in \mathbb{R}^{r \times n_\sigma}$, $\Theta(v) = \Theta(v)' \in \mathbb{R}^{n_\sigma \times n_\sigma}$ e $\sigma(v) \in \mathbb{R}^{n_\sigma}$, com $v \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$, então*

$$\sigma(v)'\Theta(v)\sigma(v) < 0, \forall v \in \mathbb{V} : \Gamma(v)\sigma(v) = 0, \sigma(v) \neq 0 \quad (231)$$

se existir uma matriz $R \in \mathbb{R}^{n_\sigma \times r}$ tal que

$$\Theta(v) + \text{He}\{R\Gamma(v)\} < 0, \forall v \in \mathbb{V}. \quad (232)$$

◇

A.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur pode ser útil para converter inequações bilineares em LMIs.

Lema 5. (Complemento de Schur (BOYD et al., 1994)) *Sejam $Q = Q'$, $M = M'$ e R matrizes reais de dimensões apropriadas. As seguintes assertivas são equivalentes:*

1. $M - RQ^{-1}R' > 0$ e $Q > 0$;
2. $Q - R'M^{-1}R$ e $M > 0$; e
3. $\begin{bmatrix} M & R \\ R' & Q \end{bmatrix} > 0$. ◇