

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA CÓSMICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

HEVANS VINICIUS PEREIRA

Porto Alegre, Setembro de 2014

Hevans Vinicius Pereira

INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA CÓSMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera.

Porto Alegre, Setembro de 2014

Dissertação submetida por Hevans Vinicius Pereira¹ como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Banca Examinadora

Dr. Carlos Felipe Lardizabal Rodrigues (PPG-MAT/UFRGS)

Dr. Patricia Kruse Klaser (PPG-MAT/UFRGS)

Dr. Fernando Kokubun (FURG)

Dr. Alexandre Tavares Baraviera (orientador, PPG-MAT/UFRGS)

¹Bolsista da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Dedicatória

Dedico este trabalho para os meus pais,
por sempre me apoiarem.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao Professor Doutor Alexandre Tavares Baviera por ter me recebido muito bem, por ter aceito me orientar nesse tema e permitir que eu estudasse com calma um assunto que me interessava há alguns anos, e principalmente por ser sempre muito paciente e tolerante comigo. Também gostaria de agradecer pela confiança depositada em mim na forma de proceder durante o mestrado e por aceitar me orientar no doutorado.

Não citarei nomes para não correr o risco de esquecer alguém, mas gostaria também de agradecer aos meus amigos e colegas da pós-graduação pelos vários momentos juntos, e por tornarem esses dois anos menos traumáticos, e até divertidos em vários momentos.

Em especial, gostaria de agradecer meus amigos Fabiano Pereira, por juntamente comigo, ter aceito desbravar as longínquas terras do estado do Rio Grande do Sul; e juntamente com o Paulinho Demeneghi (sim, o nome dele é Paulinho mesmo!) pelos dois anos de convivência, por não terem me deixado enlouquecer sozinho (enlouquecemos todos juntos), pelas várias conversas sobre matemática, séris e afins e pelas várias pizzas.

Também gostaria de agradecer aos professores da UFRGS que sempre me trataram muito bem e contribuíram muito para a minha formação, gostaria também de agradecer aos membros da banca pelas conversas e comentários que vieram a contribuir para o trabalho e para que eu entendesse melhor alguns tópicos dos assuntos estudados.

Epígrafe

“Duas coisas são infinitas: o universo e a estupidez humana. Mas, não estou certo quanto a primeira.”

Frase atribuída à Albert Einstein.

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns aspectos de geometria e topologia de variedades com o objetivo de aplicar tais resultados juntamente com dados observacionais para tentar determinar as variedades tridimensionais que possam servir de modelo para a parte espacial do universo.

Palavras-chave: Topologia; Geometria; Topologia C3smica.

Abstract

In this work we study some aspects of geometry and topology of manifolds with the goal of applying such results with observational data to try to determine the tridimensional manifold that can serve as a model for the spatial part of the universe.

Keywords: Topology; Geometry; Cosmic Topology.

Sumário

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Epígrafe	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Cosmologia: Dos Mitos da Criação à Moderna Cosmologia	3
1.1 Astronomia Antiga	3
1.2 Universo Grego	4
1.3 Universo Hindu	6
1.4 Astronomia da Renascença	6
1.5 Astronomia Moderna	7
2 Variedades	8
2.1 Variedade Topológica	8
2.2 2-variedades	10
2.2.1 Soma Conexa	15
2.3 Característica de Euler	15
2.4 Variedades com Bordo	20
2.5 Insolubilidade do Problema de Homeomorfia	22
3 Geometria de 2-Variedades	25
3.1 Geometria Euclidiana, Esférica e Hiperbólica	25
3.2 Superfície em \mathbb{R}^3	25
3.3 Ladrilhamento	27
3.4 Sólidos de Platão	29
3.5 Orientabilidade e Número de Lados de uma Superfície	30
3.6 Teorema de Gauss-Bonnet	31
4 3-Variedades	32
4.1 Construção de 3-variedades	32
4.2 Orientabilidade e Característica de Euler	36
4.3 Geometria Riemanniana	38

4.3.1	Homogeneidade e Isotropia	38
4.3.2	Curvatura e Topologia	43
4.4	Geometria Tridimensional	45
4.4.1	Variedades Euclidianas	47
4.4.2	Variedades Esféricas	49
4.4.3	Variedades Hiperbólicas	50
4.5	O início do estudo de 3-variedades	54
5	Topologia Algébrica	55
5.1	Grupo Fundamental	55
5.2	Espaço de Recobrimento e Recobrimento Universal	60
6	Topologia Cósmica	65
6.1	Conceitos de Astrofísica	65
6.1.1	Expansão do Universo	65
6.1.2	Densidade de Matéria e Energia	66
6.2	Dimensionalidade do Espaço	67
6.3	Princípio Cosmológico	69
6.4	Paradoxo da Borda	71
6.5	Modelos Multiconexos	71
6.6	Cristalografia Cósmica	73
6.7	Circles on the Sky	77
6.8	Considerações Finais	80
	Referências Bibliográficas	81

Introdução

Neste trabalho estudamos aspectos topológicos e geométricos de 3-variedades com o intuito de determinar sob determinadas hipóteses, como orientação e isotropia, por exemplo, quais são as possíveis variedades que servem de modelo para a parte espacial do nosso universo, para tanto vamos estudar matematicamente quais são os modelos possíveis e o que queremos dizer com forma, e estaremos interessados apenas na sua descrição sem nos preocuparmos com a causa do seu surgimento.

Nosso objetos de interesse são variedades e abordaremos o assunto do ponto de vista da topologia, e essencialmente, faremos isso por não estarmos, em princípio, preocupados com medidas como ângulos e distâncias, e neste sentido a topologia permite tratar o assunto com bastante generalidade.

Vamos assumir que o leitor tenha conhecimentos em Topologia Geral e Análise em \mathbb{R}^n , e que ao longo do texto o leitor tenha em mente que usaremos a “geometria da folha de borracha”, ou seja, vamos ver um tipo de “geometria” que estuda invariantes que são preservados por deformações do tipo encolher e esticar.

Vale ressaltar que o presente trabalho não tem a pretensão de ser um texto totalmente completo, a fim de exaurir o tema, por ser tratar de uma área vasta que contempla várias outras. O texto tenta ser autocontido e fornece referências para trechos mais técnicos que não são feitos por uma questão de tempo e para que o trabalho não fique excessivamente grande.

O capítulo 1 é um histórico do problema.

No capítulo 2 apresentamos as definições de variedade topológica, orientação e característica de Euler, e usamos essas definições para provar teoremas importante da área como, por exemplo, o teorema de classificação de 2-variedades conexas compactas sem bordo e o teorema da impossibilidade de classificação de n -variedades, para $n > 3$.

No capítulo 3 apresentamos algumas características de geometria de 2-variedades com o intuito de comparar com os análogo multidimensionais destas características em capítulos posteriores.

No capítulo 4 estudamos mais a fundo as 3-variedades, que são os objetos de fundamental interesse do trabalho, e vemos aspectos topológicos e geométricos que são característicos desta dimensão, também neste capítulo são introduzidas as definições referentes à geometria riemanniana e são apresentados alguns teoremas desta área.

No capítulo 5 estudamos um pouco de grupo fundamental e espaços de recobrimento, portanto apresentamos neste capítulos todas as definições e teoremas relacionados a estes tópicos.

No capítulo 6 apresentamos algumas características físicas com o intuito de ver

como a matemática apresentada até então nos permite descartar alguns modelos e restringir outros, ainda no final deste capítulo são apresentados dois métodos que tem por objetivos responder à questão da topologia do universo.

Apesar do texto seguir o encadeamento citado, devido ao fato de esses tópicos não seguirem uma estrutura linear e existirem interligações entre eles, há citações de conceitos em partes do texto que apenas serão definidas em capítulos posteriores.

Capítulo 1

Cosmologia: Dos Mitos da Criação à Moderna Cosmologia

O presente capítulo foi fortemente inspirado em [O.N.] e tem a intenção de apresentar um histórico do problema, podendo ser omitido caso o leitor esteja interessado na parte matemática dos capítulos posteriores.

1.1 Astronomia Antiga

Desde a antiguidade o homem sempre se preocupou em conhecer o ambiente no qual estava inserido como parte do processo de entender o mundo ao seu redor e seu próprio lugar nele.

A humanidade na antiguidade passou de coletora e caçadora para criadora, e no período de fixação o dia a dia era marcado por uma incessante luta pela sobrevivência, e a imprevisibilidade quanto ao futuro era presente todos os dias; neste contexto a periodicidade de fenômenos celestes sugeria uma perfeição que não havia na Terra. A humanidade acabou percebendo a relação entre a periodicidade de certos fenômenos com suas próprias atividades, fenômenos como eclipses e cometas eram imprevisíveis e assustavam os povos antigos, a humanidade também começou a observar o céu e as estrelas para prever as épocas mais adequadas para o plantio e a colheita de seus alimentos, a busca por regularidade e explicações à respeito de tais fenômenos levou várias culturas à deificação do céu, e as pessoas passaram a atribuir ao céu parte da responsabilidade por suas vidas e destinos, e a criarem histórias que os ajudassem a explicar a periodicidade de tais fenômenos.

Diferentes culturas acabaram desenvolvendo idéias próprias a respeito do céu. Os sumérios, por volta de 2500 a.C., estudavam o céu por questões práticas e para adquirir conhecimentos sobre os astros.

Os babilônios, por volta de 1800 a.C., compilaram catálogos estelares e registraram o movimento dos planetas. Foram capazes de prever eclipses e preparar calendários que prediziam as estações do ano e as épocas de lua cheia e lua nova, e agruparam as estrelas em constelações. Os babilônios também perceberam o aparente movimento retrógrado de alguns planetas mas não procuraram explicações para o fenômeno, atribuindo ao trabalho dos deuses; todo esse trabalho de registro

de posições era feito com objetivo de predição e adivinhação religiosa. A figura 1.1 ilustra o modo dos babilônios de imaginar o universo.

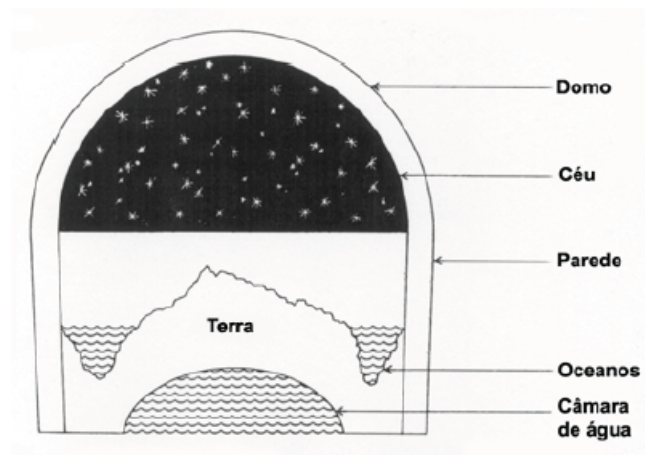


Figura 1.1: Universo Babilônico. Fonte: Observatório Nacional [O.N.].

Várias idéias dos babilônios sobre astronomia e astrologia foram influenciadas pelos caldeus.

Os assírios também foram influenciados pelos caldeus que acreditavam em misticismos, de forma que a astronomia dos assírios era voltada somente para a natureza profética, mística e religiosa do céu.

A cosmologia dos egípcios também refletia suas crenças.



Figura 1.2: Universo Egípcio. Fonte: Observatório Nacional [O.N.].

Na figura 1.2, extraída do Livro dos Mortos, vemos a deusa Nut (céu) com seu corpo suspenso pelo deus Shu (ar), e o deus Geb (terra) aos seus pés. De acordo com os egípcios Geb e Nut casaram-se sem a aprovação do deus Ra, de modo que este ordenou a Shu que separasse Geb de Nut para sempre.

1.2 Universo Grego

Os filósofos gregos tentavam explicar o mundo à sua próprias maneira, Heraclitus (540 a.C. - 480 a.C.) parecia acreditar que o universo era periódico e que a cada

dia um novo sol aparecia, Parmenides (512 a.C. - 400 a.C.) achava que o universo era esférico, Anaxagoras (500 a.C. - 428 a.C.) sugeriu que a mente controlava o universo, que a Terra era plana e estava suspensa no ar.

Os desenvolvimentos feitos na astronomia pelos membros da escola de Pitágoras estavam associados a esferas cristalinas, uma para cada planeta, centradas na Terra e ela mesmo em movimento ao redor de um “fogo central” que estava no centro do universo, este fogo é que fornecia energia para o movimento dos planetas.

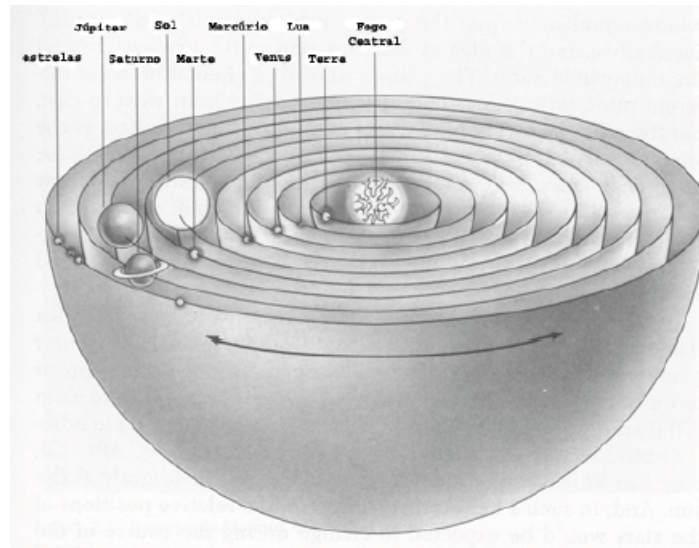


Figura 1.3: Universo Aristotélico. Fonte: Observatório Nacional [O.N.].

De acordo com Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) a Terra era esférica e estava imóvel no centro do universo que na época se restringia ao sistema solar, ele também adotou o sistema de esferas concêntricas de Pitágoras para descrever os planetas.

Aristarco (310 a.C. - 230 a.C.) segundo tudo indica foi o primeiro a acreditar em um modelo heliocêntrico. Supôs que o movimento diário das estrelas era devido à rotação da Terra, também criou métodos para estimar os tamanhos relativos do Sol, da Lua e da Terra e das distâncias relativas.

Erastóstenes (275 a.C - 195 a.C.) observou que na cidade de Siena no vale do Nilo, a 800 km do sul de Alexandria, ao meio-dia do solstício de verão, colunas verticais não projetavam sombra alguma enquanto em Alexandria no mesmo dia e hora, colunas verticais projetavam sombra suficientemente grandes e a partir disso concluiu que a Terra era redonda e estimou seu raio com cerca de 10% de diferença do valor atual.

Ptolomeu (90 d.C. - 168 d.C.) viveu e trabalhou em Alexandria, no Egito, foi o primeiro a notar que a luz estelar é refratada na atmosfera da Terra. Foi o responsável pelo “Almagesto”, um grande compêndio de astronomia, das observações e idéias dos antigos astrônomos. Ptolomeu também desenvolveu o mais sofisticado modelo matemático até então conhecido para descrever os movimentos dos planetas no Sistema Solar; seu trabalho estava baseado no modelo geocêntrico e em órbitas circulares fora do centro (epiciclos). Segundo Ptolomeu a Terra era esférica, estacionária e muito pequena em relação à esfera celeste, as estrelas eram pontos fixos de luz dentro da esfera celeste e a rotação desta resultava na noite e no dia.

1.3 Universo Hindu

Os filósofos indianos ficaram fascinados com a astronomia grega [O.N.], no entanto, eles estavam pouco preocupados com dados puramente observacionais, seu principal interesse estava nos princípios que governavam os astros, ou seja, no modelo matemático.

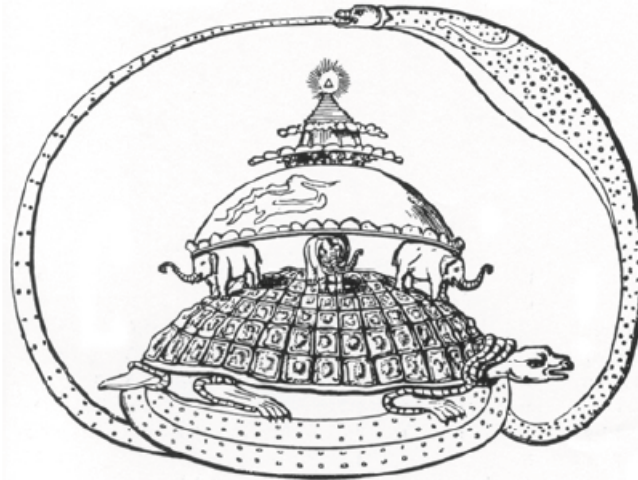


Figura 1.4: Universo Hindu. Fonte: Observatório Nacional [O.N.].

Na representação hindu do universo, figura 1.4, a Terra e as regiões infernais eram transportadas por uma tartaruga, símbolo da força e poder criativo, que repousava sobre uma serpente que comia a própria cauda, símbolo da eternidade. A região superior era a morada dos deuses, a Terra na região intermediária separava a região superior da região inferior infernal. Um triângulo no topo da região superior simbolizava a criação.

Aryabhata (476 d.C - 550 d.C.) foi um matemático, o primeiro a usar álgebra na astronomia, ele acreditava que existem fórmulas algébricas e princípios geométricos capazes de explicar toda a mecânica celeste, ele não aceitava o processo ptolomaico.

1.4 Astronomia da Renascença

Com o passar do tempo o modelo de Ptolomeu já não era o modelo mais simples capaz de reproduzir as posições planetárias, o modelo de Copérnico (1473 d.C. - 1543 d.C.) mantinha os movimentos circulares mas com o Sol no centro, este modelo só veio a ser conhecido no livro “Sobre as Revolução das Esferas Celestes” publicado em 1543.

Pouco tempo depois em 1610, Galileu (1564 d.C. - 1642 d.C.) publicou suas primeiras descobertas com telescópios, entre elas estava o fato de que com os telescópios poderia se ver uma quantidade maior de estrelas, refutando a idéia de Aristóteles de que o céu tinha um número fixo de estrelas.

Em 1616 a igreja católica censura as idéias de Copérnico. Em 1624 Galileu começou um texto, que só veio a ser publicado em 1632, sobre as marés, que fornecia provas da teoria heliocêntrica. Em 1609 Kepler (1571 d.C. - 1630 d.C.) publica a lei das órbitas elípticas e a lei das áreas, baseado nas observações extremamente precisas de Tycho Brahe (1546 d.C. - 1601 d.C.). Em 1619 Kepler publica a lei que relaciona o período orbital com as distâncias. Como consequência das leis de Kepler os planetas descreviam órbitas elípticas com o Sol em um dos focos e a velocidade dos planetas não era constante.

No período posterior a ciência mudou e evoluiu consideravelmente, Newton (1642 d.C. - 1727 d.C.) publicou o livro “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, em 1687, com suas leis que regem a mecânica dos corpos, e em particular, quando aplicada ao Sistema Solar reproduzem as leis de Kepler.

1.5 Astronomia Moderna

Com o desenvolvimento dos telescópios descobrimos que existem várias galáxias e que o universo é muito vasto. Com o desenvolvimento de teorias como a Teoria da Relatividade Especial, em 1905, e depois pela Teoria da Relatividade Geral, em 1916, por Albert Einstein (1879 d.C. - 1955 d.C.), a humanidade teve mais ferramentas teóricas para descrever globalmente o universo.

Em 1929, Hubble (1889 d.C. - 1953 d.C.) observa que todas as galáxias estão se afastando mutuamente e conclui que o universo está em expansão, e com base nessa idéia surgirá depois a teoria do Big Bang.

Em 1965, Penzias e Wilson detectaram a radiação cósmica de fundo, um tipo de radiação que permeia o universo, fornecendo evidências da teoria do Big Bang.

Como pudemos ver acima, no começo acreditava-se que a Terra era plana e estava no centro do universo, mas com o passar do tempo a humanidade mudou seu ponto de vista e com isso alterou também seu próprio papel dentro do universo, o homem deixou de ser o centro do universo para apenas ser parte do todo.

Mesmo com o conhecimento tendo avançado por teorias e observações ainda não conseguimos responder a uma pergunta: qual é a forma do nosso universo?

Ele parece localmente euclidiano, deveríamos assumir que matematicamente ele deve ser representado por \mathbb{R}^3 ? Como vimos no caso da superfície da Terra, não podemos ter certeza da forma global baseado apenas em aspectos locais.

O desenvolvimento tecnológico expandiu o domínio dos fenômenos observados e então encontramos comportamentos muito diferentes do que esperávamos encontrar na natureza, talvez a forma do nosso universo seja algo totalmente distinto do que nossa intuição diz.

Capítulo 2

Variedades

Neste capítulo definiremos e estudaremos variedades, dando principalmente atenção para as variedades de dimensão 1 e 2. Serão abordados teoremas importantes em topologia, como o teorema de classificação de 2-variedades compactas, e propriedades topológicas importantes de variedades, como orientação e a característica de Euler. Ainda veremos um resultado sobre a impossibilidade de classificar variedades de dimensão maior que 3.

2.1 Variedade Topológica

Uma variedade topológica n -dimensional é uma generalização do conceito de superfície para dimensão n , de forma que seja localmente euclidiana e bem comportada. Mais precisamente temos

Definição 2.1.1 (Variedade Topológica). *Uma variedade topológica n -dimensional (ou n -variedade) é um espaço topológico Hausdorff X com uma base enumerável tal que cada $x \in X$ possui uma vizinhança que é homeomorfa a uma bola aberta de \mathbb{R}^n .*

Exemplo 2.1.1 (Caso unidimensional). *Como veremos abaixo os exemplo de 1-variedades sem bordo consistem basicamente em dois casos, o círculo e a reta, denotados respectivamente por \mathbb{S}^1 e \mathbb{R} .* ■

Teorema 2.1.1 (Classificação de 1-variedades). *Seja X uma 1-variedade sem bordo.*

- (i) *Se X é conexa e compacta então X é homeomorfa a \mathbb{S}^1 ;*
- (ii) *Se X é conexa e não compacta então X é homeomorfa a \mathbb{R} ;*
- (iii) *Se X é desconexa, então é a união de uma coleção enumerável de componentes, cada uma das quais é homeomorfa a \mathbb{S}^1 ou a \mathbb{R} .*

Demonstração. (i) Por definição, todo conjunto compacto admite cobertura finita de abertos, que neste caso são homeomorfos ao intervalo $(0, 1)$. Vamos utilizar indução finita nos membros da cobertura.

Se a cobertura U contém apenas dois conjuntos U_1 e U_2 então $U_1 \cap U_2$ consiste

de duas componentes C_1 e C_2 que são abertos (interseção de abertos) e homeomorfos a $(0, 1)$. Sejam $c_1 \in C_1$ e $c_2 \in C_2$, e seja l o caminho ligando c_1 a c_2 por U_1 e \tilde{l} o caminho ligando c_1 a c_2 por U_2 .

Podemos considerar estes caminhos como sendo definidos por $l : [0, 1] \rightarrow U_1$ e $\tilde{l} : [0, 1] \rightarrow U_2$ de forma que sejam bijeções contínuas. As imagens destes caminhos, que por abuso de notação chamaremos de l e \tilde{l} , são compactos. Sejam agora $f : l \rightarrow \cup S^1$ e $\tilde{f} : \tilde{l} \rightarrow \cap S^1$ funções bijetivas contínuas, onde $\cup S^1$ é o hemisfério inferior e $\cap S^1$ é o hemisfério superior.

Como $\cup S^1$ e $\cap S^1$ são espaços Hausdorff, segue de [Lima1] página 180, que f e \tilde{f} são homeomorfismos. Portanto, X é homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Supondo o teorema válido para uma cobertura U descrita acima contendo $n \geq 2$ conjuntos. Considere agora a cobertura dada pelos abertos U_1, \dots, U_{n+1} , homeomorfos a $(0, 1)$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que nenhum dos abertos está contido na união dos restantes. Considerando qualquer par de abertos que se intersecta, digamos U_i e U_j , $i \neq j$, então $U_i \cap U_j$ é conexa e portanto $U_i \cup U_j$ é homeomorfo a $(0, 1)$. Seja $U_s = U_i \cup U_j$ e vamos considerar a cobertura $U = U_1 \cup \dots \cup \widehat{U_{i,j}} \cup \dots \cup U_{n+1} \cup U_s$, onde $\widehat{U_{i,j}}$ significa que este termo não pertence à união. Esta cobertura possui n conjuntos e segue da hipótese de indução que o teorema vale.

- (ii) Seja $D = \{d_1, d_2, \dots\} \subset X$ um subconjunto enumerável denso. Como X tem dimensão 1 e é conexa então é conexa por caminhos, pois X já é um caminho que liga quaisquer dois de seus pontos. Por X ser conexa por caminhos, existe um homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre um caminho A_1 com ponto inicial d_1 e ponto final d_2 . Seja d_{n_3} o primeiro $d_i \in D$ tal que $d_i \in A_1$. Um caminho A_2 de d_{n_3} até A_1 é um caminho de d_{n_3} até d_1 ou até d_2 ; se A_2 intersecta d_1 primeiro, estabelecemos um homeomorfismo de $[-1, 0]$ sobre A_2 , se A_2 intersecta d_2 primeiro, estabelecemos um homeomorfismo de $[1, 2]$ sobre A_2 . Seja d_{n_4} o primeiro elemento da sequência d_1, d_2, \dots que não está contido em $A_1 \cup A_2$. De modo análogo estabelecemos um caminho A_3 que liga d_{n_4} a $A_1 \cup A_2$.

Procedendo desta maneira construímos um homeomorfismo h entre \mathbb{R} e X que cobre um conjunto denso D .

Resta mostrar que h é sobrejetora. Supondo que h não seja sobrejetora e seja $x \in X$ um ponto que não está na imagem de h . Seja U um aberto contendo x , homeomorfo a $(0, 1)$. Como D é denso em X podemos tomar $d, \tilde{d} \in D$ tal que $l \cap U \neq \emptyset$, onde l é o caminho ligando d a \tilde{d} .

Mas o homeomorfismo h tem l como imagem por algum intervalo $[a, b]$, contrariando o fato de x não pertencer a imagem de h . Portanto, h é sobrejetora. Sendo assim, X é homeomorfo a \mathbb{R} .

- (iii) Se X não é conexa então X é a união de componentes, cada uma das quais é uma 1-variedade conexa. Por (i) e (ii) segue que X é a união disjunta de subespaços homeomorfos a \mathbb{S}^1 ou a \mathbb{R} .

□

Esta demonstração encontra-se em [Adams & Fransoza].

Observação 1. Muitos livros utilizam a notação E^1 para o conjunto \mathbb{R} com a topologia usual; aqui não faremos tal distinção e denotaremos seus análogos multidimen-

sionais por \mathbb{R}^n .

Tendo um melhor entendimento de 1-variedades vamos agora olhar o caso mais interessante de 2-variedades.

2.2 2-variedades

Vamos começar falando de uma 2-variedade chamada toro, para isso vamos ver uma rápida construção.

Vamos considerar as seguintes transformações $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $T_1(x, y) = (x + 1, y)$ e $T_2(x, y) = (x, y + 1)$. Como usualmente, T_1^n denota a composição de T_1 consigo mesmo n vezes se $n \geq 0$ e a composição de T_1^{-1} n vezes se $n < 0$, e tal inversa sempre existe, basta tomar $T_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_1^{-1}(x, y) = (x - 1, y)$.

Observando que

$$\begin{aligned} (T_1^n T_2^m)(x, y) &= [(T_1^n) \circ (T_2^m)](x, y), \quad n, m \in \mathbb{Z} \\ &= (T_1^n)(x, y + m) \\ &= (x + n, y + m) \\ &= T_2^m(x + n, y) \\ &= (T_2^m \circ T_1^n)(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

ou seja, temos $T_1^n T_2^m = T_2^m T_1^n$.

Seja $\text{span}\{T_1, T_2\} = \{T_1^n T_2^m; n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $T_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, 2$, então $(\text{span}\{T_1, T_2\}, \circ)$ é um grupo. De fato,

(i) associatividade: Sejam $T_1^n T_2^m, T_1^\alpha T_2^\beta, T_1^l T_2^k \in \text{span}\{T_1, T_2\}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quaisquer, então:

$$\begin{aligned} [[(T_1^n T_2^m) \circ (T_1^\alpha T_2^\beta)] \circ (T_1^l T_2^k)](x, y) &= [[(T_1^n T_2^m) \circ (T_2^\beta T_1^\alpha)] \circ (T_1^l T_2^k)](x, y) \\ &= [[T_1^n \circ (T_2^m T_2^\beta) \circ T_1^\alpha] \circ (T_1^l T_2^k)](x, y) \\ &= [[T_1^n \circ (T_2^{m+\beta} T_1^\alpha)] \circ (T_1^l T_2^k)](x, y) \\ &= [[(T_1^n T_1^\alpha) \circ T_2^{m+\beta}] \circ (T_1^l T_2^k)](x, y) \\ &= [(T_1^{n+\alpha} T_2^{m+\beta}) \circ (T_1^l T_2^k)](x, y) \\ &= [T_1^{n+\alpha} \circ (T_2^{m+\beta} T_1^l) \circ T_2^k](x, y) \\ &= [T_1^{n+\alpha} \circ (T_1^l T_2^{m+\beta}) \circ T_2^k](x, y) \\ &= [(T_1^{n+\alpha} \circ T_1^l) \circ (T_2^{m+\beta} \circ T_2^k)](x, y) \\ &= (T_1^{(n+\alpha)+l} T_2^{(m+\beta)+k})(x, y) \\ &= (T_1^{n+(\alpha+l)} T_2^{m+(\beta+k)})(x, y) \\ &= [(T_1^n T_2^m) \circ (T_1^{\alpha+l} T_2^{\beta+k})](x, y) \\ &= [(T_1^n T_2^m) \circ [(T_1^\alpha T_2^\beta) \circ (T_1^l T_2^k)]](x, y) \end{aligned}$$

(ii) elemento neutro: o elemento neutro é $T_1^0 T_2^0 = I$, pois $(T_1^n T_2^m) \circ (T_1^0 T_2^0) =$

$$T_1^n T_2^m = (T_1^0 T_2^0) \circ (T_1^n T_2^m).$$

(iii) elemento simétrico: para cada $T_1^n T_2^m \in \text{span}\{T_1, T_2\}$ seu simétrico é $T_1^{-n} T_2^{-m} = T_2^{-m} T_1^{-n}$.

Vamos agora olhar para as órbitas de $T_1^n T_2^m$. Dizemos que $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ estão na mesma órbita se existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $T_1^n T_2^m(x, y) = (x_1, y_1)$. Como T_1 é a translação de x por uma unidade temos que em cada intervalo aberto de comprimento 1 há exatamente um representante para a órbita de T_1 e analogamente para T_2 . Como estamos interessados nas órbitas de pontos de \mathbb{R}^2 por $T_1^n T_2^m$ é suficiente nos concentrarmos em um quadrado de lado 1 que por simplicidade escolhemos $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

Vemos assim que cada ponto do interior de Q é o único representante de sua órbita em Q , e como cada ponto $(0, y)$ será levado em $(1, y)$ por T_1 então estes dois pontos estão na mesma classe de equivalência pela aplicação $T_1^1 T_2^0$. Analogamente, $(x, 0)$ e $(x, 1)$ estão na mesma classe. Ainda, temos que $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ estão na mesma classe.

Assim, temos a seguinte identificação:

Seja $f : (\text{span}\{T_1, T_2\}, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, dada por $f(T_1^n T_2^m) = (n, m)$, então f é homomorfismo de grupos. De fato,

$$\begin{aligned} f((T_1^n T_2^m) \circ (T_1^l T_2^k)) &= f(T_1^{n+l} T_2^{m+k}) \\ &= (n+l, m+k) \\ &= (n, m) + (l, k) \\ &= f(T_1^n T_2^m) + f(T_1^l T_2^k), \quad \forall T_1^n T_2^m, T_1^l T_2^k \in \text{span}\{T_1, T_2\}. \end{aligned}$$

Pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo de Grupos, veja, por exemplo, [Rotman], temos que $\text{span}\{T_1, T_2\} / \ker f \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Sendo assim obtemos o toro como sendo a identificação das classes de equivalência de \mathbb{R}^2 por $\text{span}\{T_1, T_2\}$, ou seja, o toro é $\mathbb{R}^2 / \text{span}\{T_1, T_2\}$, ou $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, pois $\ker f = \{0\}$.

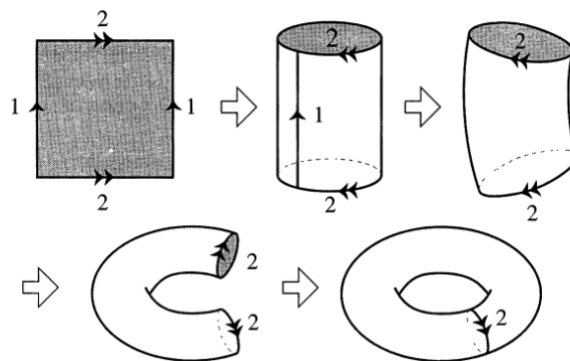


Figura 2.1: O Toro \mathbb{T}^2 . Fonte: [Adams & Fransoza], p. 106.

De forma análoga poderíamos construir outras relações de equivalência e tentar obter outras 2-variedades; a partir de agora, vamos apenas partir da representação da variedade como um polígono com os lados identificados em pares, chamada representação poligonal, e assumir que as relações existem, sem explicitá-las.

Definição 2.2.1 (Domínio Fundamental). *O polígono com lados identificados dois a dois é chamado Domínio Fundamental. Em dimensões maiores também chamaremos de domínio fundamental os análogos multidimensionais dos polígonos, isto é, em dimensão 3 polígono fundamental será um poliedro cujas faces estão identificadas aos pares.*

Vejam agora como verificar se uma identificação dos lados de um polígono gera de fato uma superfície.

Exemplo 2.2.1 (Garrafa de Klein). *Vamos mostrar que a Garrafa de Klein é uma 2-variedade. Partindo da representação poligonal, como na figura 2.2, temos*

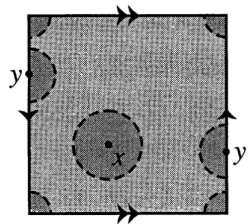


Figura 2.2: Figura do exemplo 2.2.1. A Garrafa de Klein \mathbb{K}^2 . Fonte: [Adams & Fransoza], p. 112.

Qualquer ponto x interior ao quadrado tem como vizinhança uma 2-bola aberta. Os pontos y no interior das arestas tem como vizinhança duas meia 2-bolas abertas que ao serem coladas dão uma 2-bola aberta, e os vértices tem como vizinhanças um quarto de uma 2-bola aberta, que ao serem coladas constituem uma 2-bola aberta. Portanto todo ponto da garrafa de Klein tem uma 2-bola aberta como vizinhança.

Dados dois pontos distintos na garrafa de Klein podemos encontrar 2-bolas abertas, meias 2-bolas ou quartos de 2-bolas que separam pontos. Portanto, a garrafa de Klein é Hausdorff. Tomando a interseção do quadrado com todas as bolas abertas com raios racionais centradas em pontos com coordenadas racionais obtemos uma base enumerável para a topologia da garrafa de Klein. ■

Exemplo 2.2.2. *De forma análoga mostramos que o toro, a esfera e o plano projetivo são 2-variedades.*

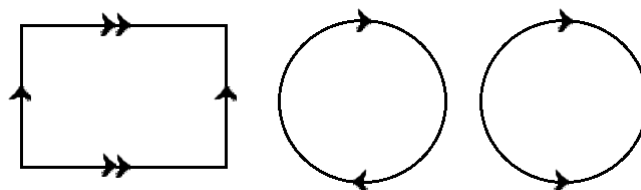


Figura 2.3: Figura do exemplo 2.3. Da esquerda para a direita: $\mathbb{T}^2, \mathbb{P}^2$ e \mathbb{S}^2 .

Exemplo 2.2.3 (Faixa de Möbius). *Vamos considerar o objeto gerado pela figura 2.4, este objeto não é uma variedade pois o ponto x tem como vizinhança uma meia 2-bola que ao final do processo de identificação indicado na figura (colagem) está em uma meia 2-bola que não é homeomorfa a uma 2-bola. ■*



Figura 2.4: Figura do exemplo 2.2.3. Faixa de Möbius. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 112.

Apesar de não ser uma 2-variedade a faixa de Möbius é muito importante no estudo de 2-variedades, como ficará claro ao longo deste capítulo.

Definição 2.2.2 (Variedade Orientável). Uma 2-variedade que contém uma faixa de Möbius é chamada não orientável, caso contrário é chamada orientável.

Exemplo 2.2.4. A garrafa de Klein e o plano projetivo são não orientáveis.

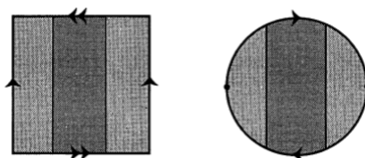


Figura 2.5: Figura do exemplo 2.5. Da esquerda para a direita, \mathbb{T}^2 e \mathbb{P}^2 . Fonte: [Adams & Fransoza], p. 445.

A faixa de Möbius é importante pois a orientabilidade é uma propriedade topológica, mais precisamente temos o

Teorema 2.2.1. Sejam M_1 e M_2 2-variedades homeomorfas, então M_1 é orientável se, e somente se, M_2 é orientável.

Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [Adams & Fransoza] ou [Lee1], e resultados semelhantes para o contexto de variedades suaves podem ser vistos em [Lee2].

Outra noção importante que será usada para definir um importante invariante topológico é o de triangulação.

Definição 2.2.3 (Triangulação). Uma triangulação T de uma superfície compacta M é uma cobertura finita de triângulos em M tal que quaisquer dois triângulos em T ou não se intersectam, ou se intersectam em apenas um vértice ou tem um lado em comum.

Para obtermos um triângulo em M basta tomar um triângulo Δ no plano e um mergulho $f : \Delta \rightarrow M$, neste caso dizemos que $f(\Delta)$ é um triângulo em M , analogamente obtemos arestas e vértices de $f(\Delta)$ em M .

O resultado abaixo é muito importante e foi provado por Tibor Radó em [Radó].

Teorema 2.2.2. Toda superfície compacta possui uma triangulação.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [Moise].

Um resultado importante que vai nos permitir avançar com a teoria sem ambiguidades é que todas as triangulações de uma variedade são equivalentes. Para tornar isso mais claro precisaremos primeiro de duas definições.

Definição 2.2.4. *Seja T uma triangulação de uma superfície compacta M . Então*

- (i) *Uma triangulação T' é chamada uma subdivisão de T se todo triângulo em T pode ser expresso como a união de triângulos em T' ;*
- (ii) *Uma triangulação T^* é dita equivalente a T se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que leva triângulos de T em triângulos de T^* .*

Definição 2.2.5. *Sejam T_1 e T_2 triangulações de uma superfície compacta M . As triangulações são ditas em posição geral se:*

- (i) *todo vértice de uma triangulação está no interior de algum triângulo da outra triangulação,*
- (ii) *toda aresta de uma triangulação intersecta toda aresta da outra triangulação um número finito de vezes.*

Agora estamos em condições de enunciar o

Teorema 2.2.3. *Sejam T_1 e T_2 triangulações de uma superfície compacta M . Então existem triangulações T'_1 e T'_2 que são equivalentes e são subdivisões de T_1 e T_2 , respectivamente.*

Demonstração. Se T_1 e T_2 estão em posição geral então podemos construir uma triangulação T' que é subdivisão de T_1 e T_2 . Para construir T' basta seguir os passos abaixo.

- (i) os vértices de T_1 e T_2 são vértices de T' ,
- (ii) cada ponto de interseção entre arestas de T_1 e T_2 é vértice de T' ,
- (iii) cada aresta de T_1 ou de T_2 é uma aresta de T' ou é subdividida em arestas de T' por vértices do passo (ii),
- (iv) novos vértices e arestas são adicionados nas arestas para formar triângulo fora das regiões que são limitadas por apenas duas arestas,
- (v) novas arestas são adicionadas em regiões limitadas por mais de três arestas para subdividir esta região em triângulos.

A triangulação T' é subdivisão de T_1 e T_2 . Se T_1 e T_2 não estão em posição geral então podemos obter uma triangulação equivalente a uma das duas, digamos T_1^* , tal que T_1^* e T_2 estão em posição geral. Pelo que vimos acima há uma triangulação \tilde{T} de T_1^* e T_2 , por T_1 ser equivalente a T_1^* por algum homeomorfismo f então f^{-1} leva \tilde{T} em uma subdivisão T'_1 de T_1 , assim obtemos T'_1 e \tilde{T} que são triangulações de T_1 e T_2 e são equivalentes. \square

Esta demonstração encontra-se em [Adams & Fransoza].

Tendo visto o conceito de triangulação podemos definir orientação de outra maneira.

Definição 2.2.6. *Seja M uma superfície e T uma triangulação de M . A triangulação é dita coerentemente orientada se a cada triângulo em T pode ser associada uma direção de rotação tal que se dois triângulos se intersectam em uma aresta então as direções herdadas de cada triângulo são opostas, como na figura 2.6.*

Teorema 2.2.4. *Uma superfície compacta M é orientável se, e somente se, possui uma triangulação que pode ser orientada coerentemente.*

Para a demonstração deste fato consultar [Adams & Fransoza].

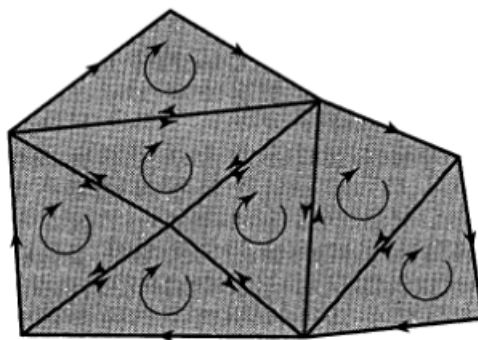


Figura 2.6: Fonte: [Adams & Fransoza], p. 449.

2.2.1 Soma Conexa

Vamos ver agora um método de construir superfícies compactas a partir de outras duas.

Definição 2.2.7. Dadas duas superfícies M_1 e M_2 , a soma conexa de M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \# M_2$, é a superfície obtida removendo o interior de um disco de cada superfície e colando estas duas bordas.

A menos de homeomorfismo a soma conexa não depende do disco escolhido e da colagem realizada. Observe que $M \# S^2 = M$, ou seja, a esfera é a identidade para a operação de soma conexa, na verdade o conjunto das superfícies com a operação de soma conexa forma um semi-grupo.

Vale observar que $M_1 \# M_2$ é orientável se, e somente se, M_1 e M_2 são orientáveis, para quaisquer superfícies compactas M_1 e M_2 .

2.3 Característica de Euler

Definição 2.3.1 (Característica de Euler). Seja T uma triangulação de uma superfície compacta M . Definimos a característica de Euler de T por $\chi(T) = V - A + F$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces de todos os triângulos da triangulação. E diremos que $\chi(T)$ é a característica de Euler da superfície M , que denotaremos por $\chi(M)$.

Vamos mostrar que χ está bem definida no próximo teorema, para isso precisamos do

Lema 2.3.1. Seja M uma superfície compacta com triangulação T , e seja T' uma subdivisão de T , então $\chi(T) = \chi(T')$.

Demonstração. Podemos construir T' aplicando uma sequência das operações¹:
(i) adicionando novo vértice em uma aresta, subdividindo uma aresta em duas novas;

¹Estas operações podem ser aplicadas mais de uma vez e em diferentes ordens até se obter uma triangulação como desejada.

- (ii) adicionando novo vértice e nova aresta;
 (iii) adicionando nova aresta ligando vértices de T .

Vamos ver o efeito de cada uma dessas operações sobre T .

No primeiro caso, aumentamos um vértice e criamos uma aresta, então $\chi(T') = (V + 1) - (A + 1) + (F) = V - A + F = \chi(T)$; no segundo caso, aumentamos um vértice e uma aresta, então $\chi(T') = (V + 1) - (A + 1) + (F) = V - A + F = \chi(T)$; no terceiro caso, aumentamos uma aresta e subdividimos uma face em duas, então $\chi(T') = (V) - (A + 1) + (F + 1) = V - A + F = \chi(T)$. \square

Esta demonstração encontra-se em [Adams & Fransoza].

Teorema 2.3.1. *Sejam T_1 e T_2 triangulações de uma superfície compacta M . Então $\chi(T_1) = \chi(T_2)$.*

Demonstração. Se T_1 e T_2 são equivalentes não há nada a demonstrar. Se T_1 e T_2 não são equivalentes então pelo teorema 2.2.3 existem triangulações equivalentes T'_1 e T'_2 que são subdivisões de T_1 e T_2 , respectivamente.

Pelo lema anterior a característica de Euler é preservada por subdivisões, então $\chi(T_1) = \chi(T'_1)$, $\chi(T_2) = \chi(T'_2)$ e por T'_1 e T'_2 serem equivalentes temos $\chi(T'_1) = \chi(T'_2)$, portanto $\chi(T_1) = \chi(T_2)$. \square

Esta demonstração encontra-se em [Adams & Fransoza].

Corolário 2.3.1. *Se M e M' são superfícies compactas homeomorfas então $\chi(M) = \chi(M')$.*

Demonstração. Como as superfícies são homeomorfas suas triangulações são equivalentes, então, pelo teorema, $\chi(M) = \chi(M')$. \square

Vamos agora enunciar um resultado central:

Teorema 2.3.2. *Toda superfície compacta é homeomorfa a \mathbb{S}^2 , $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \dots \# \mathbb{T}^2$ ou a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \dots \# \mathbb{P}^2$.*

Demonstração. Vamos fornecer uma prova construtiva, ou seja, um método que possa reduzir qualquer superfície a \mathbb{S}^2 , $n\mathbb{T}^2$ ou $n\mathbb{P}^2$. Para isso vamos seguir os passos abaixo, que devem ser feitos na ordem em que aparecem. Antes vamos observar que as arestas que não estiverem sendo consideradas no estudo serão omitidas através de uma representação serrilhada.

Passo 1: Toda superfície M admite representação poligonal, portanto vamos considerar tal representação.

Passo 2: Para encurtar os passos descritos a seguir quando diferentes faces aparecerem em sequência e na mesma ordem mais de uma vez, vamos considerá-las como sendo uma única face, como por exemplo, na figura 2.7.

Observe que pares de lados podem aparecer de duas maneiras: pares reversos e pares concordantes, como ilustrado na figura 2.8.

Passo 3: Podemos eliminar pares concordantes adjacentes, como na figura 2.9, pois isto representa a soma conexa com \mathbb{S}^2 .

Passo 4: Deve-se determinar quantas classes de vértices há na representação poligonal e executar a operação ilustrada na figura 2.10 para diminuir um vértice de uma classe e aumentar um vértice na outra classe. Deve-se repetir o processo até

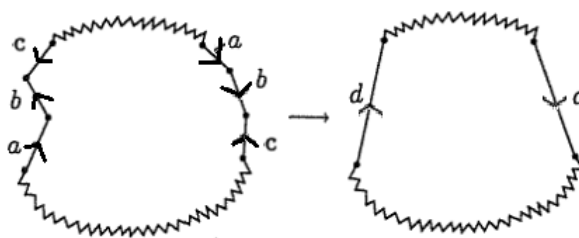


Figura 2.7: Passo 2. Fonte: [Kinsey], p. 80.

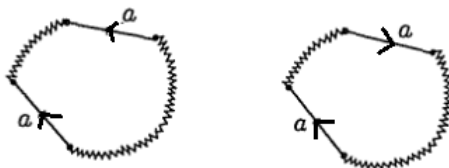


Figura 2.8: À esquerda, um exemplo de par reverso, à direita, um exemplo de par concordante. Fonte: [Kinsey], p. 81.

que reste apenas uma classe de vértices.

Por exemplo, na figura 2.10, vamos eliminar um vértice Q e aumentar um vértice P .

Passo 5: Devemos deixar os pares concordantes todos adjacentes, para isto procedemos como na figura 2.11.

Se restarem apenas pares reversos então a representação poligonal é na verdade a soma conexa de n planos projetivos, ou seja, a superfície é $n\mathbb{P}^2$.

Passo 6: Se os passos de 1 a 5 já foram realizados então os pares reversos ocorrem aos pares, como na figura 2.12.

Pois caso contrário haveria apenas um par de pares reversos, o que geraria mais de uma classe de equivalência de vértices, contrariando o fato de já termos realizado os passos de 1 a 5.

Pares de pares reversos podem ser colocados juntos por um procedimento como ilustrado na figura 2.13.

Se não restam pares concordantes então a representação poligonal é a soma conexa de n toros, ou seja, $n\mathbb{T}^2$.

Passo 7: Se a superfície ainda não foi classificada é porque restaram pares reversos e concordantes indicando a soma conexa de toros e planos projetivos, mas pelo exemplo 2.3.1, $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = 3\mathbb{P}^2$, e portanto podemos encontrar tal superfície realizando esta simplificação tantas vezes quantas forem necessárias e obter uma superfície do tipo $n\mathbb{P}^2$. □

Esta demonstração encontra-se em [Kinsey].

Exemplo 2.3.1. Qual seria a superfície homeomorfa a $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ expressa em termos de \mathbb{S}^2 , $n\mathbb{T}^2$ e $n\mathbb{P}^2$?

Como \mathbb{P}^2 é não orientável então $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ é não orientável, e portanto $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$ é $n\mathbb{P}^2$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Observando a figura 2.14 temos que $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 = 3\mathbb{P}^2$. ■

Observação 2. Temos $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, onde \simeq indica a relação de homeomorfismo, mas não é verdade que $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, pois \mathbb{T}^2 é orientável e $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ não é

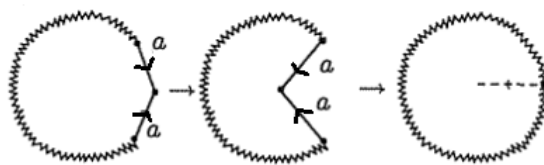


Figura 2.9: Passo 3. Fonte: [Kinsey], p. 81.

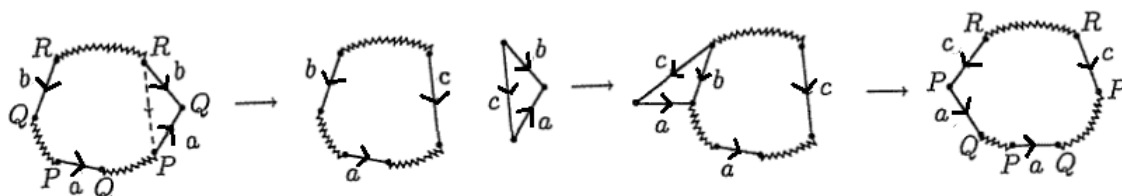


Figura 2.10: Passo 4. Fonte: [Kinsey], p. 82.

orientável, ou seja, não vale a lei do cancelamento para a soma conexa, isto acontece porque o conjunto das superfícies compactas com a operação de soma conexa forma um semi-grupo.

Uma demonstração mais natural para o teorema 2.3.2 foi fornecida por John H. Conway em 1992, tal demonstração pode ser encontrada em [Weeks2].

Corolário 2.3.2. *Toda superfície compacta pode ser obtida pela representação de um polígono com $4n$ lados.*

Demonstração. Segue do teorema de classificação de variedade compactas que toda variedade é \mathbb{S}^2 ou pode ser obtida como soma conexa de toros e planos projetivos, portanto basta mostrar que cada uma dessas três superfícies admite representação por um polígono de 4 lados. \mathbb{S}^2 e \mathbb{P}^2 admitem representação com dois lados, como visto no exemplo 2.3, tomando a soma conexa com \mathbb{S}^2 obtemos polígonos de 4 lados que são homeomorfos a \mathbb{S}^2 e \mathbb{P}^2 , respectivamente. Já vimos acima que o toro admite representação por um polígono de 4 lados. \square

Vamos agora provar três teoremas que nos ajudarão a determinar mais facilmente a característica de Euler sem precisarmos recorrer a técnica do exemplo acima.

As demonstrações dos teoremas abaixo encontram-se em [Adams & Fransoza].

Teorema 2.3.3. *Para todo $n \geq 3$ temos*

$$n\mathbb{P}^2 \simeq \begin{cases} \frac{n-1}{2}\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{n-2}{2}\mathbb{T}^2 \# \mathbb{K}^2 & \text{se } n \text{ par.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Demonstração. Vamos primeiro mostrar que se n é ímpar e $n \geq 3$ então $n\mathbb{P}^2 \simeq \frac{n-1}{2}\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$. Como vimos no exemplo acima, $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq 3\mathbb{P}^2$. Vamos utilizar o método de indução finita. Por hipótese de indução $\frac{n-1}{2}\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq n\mathbb{P}^2$. Então, $\frac{n+1}{2}\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq \frac{n-1}{2}\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq \frac{n-1}{2}\mathbb{T}^2 \# 3\mathbb{P}^2 \simeq (\frac{n-1}{2}\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2) \# 2\mathbb{P}^2 \simeq n\mathbb{P}^2 \# 2\mathbb{P}^2 \simeq (n+2)\mathbb{P}^2$.

Observando agora que $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq 3\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq 4\mathbb{P}^2$, para n par e $n \geq 3$, basta fazer um processo análogo ao de cima. \square

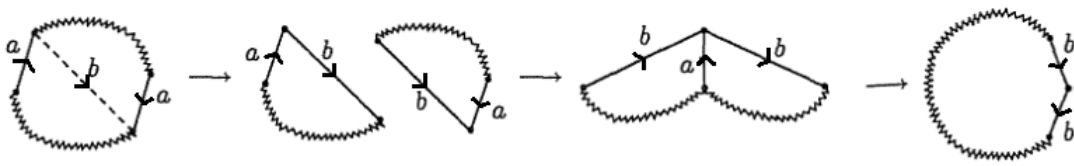


Figura 2.11: Passo 5. Fonte: [Kinsey], p. 83.

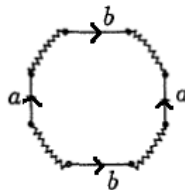


Figura 2.12: Passo 6. Fonte: [Kinsey], p. 83.

Teorema 2.3.4. *Se M_1 e M_2 são superfícies compactas então $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.*

Demonstração. Considerando uma triangulação para M_1 e uma triangulação para M_2 , o interior do disco removido de cada triangulação no processo de soma conexa é o interior de um triângulo. Identificando os vértices e as arestas temos que a respectiva triangulação de $M_1 \# M_2$ vai perder 3 vértices, 3 arestas e 2 faces, portanto $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) + 3 - 3 - 2 = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$. \square

Podemos aplicar o teorema acima para calcular a característica de Euler para qualquer superfície compacta $n\mathbb{T}^2$ e $n\mathbb{P}^2$, como vemos pelo

Teorema 2.3.5. *Para superfícies compactas $n\mathbb{T}^2$ e $n\mathbb{P}^2$, a característica de Euler é dada por $\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n$ e $\chi(n\mathbb{P}^2) = 2 - n$.*

Demonstração. Para $n\mathbb{T}^2$ temos $\chi(n\mathbb{T}^2) = \chi(n\mathbb{T}^2 \# \mathbb{S}^2) = \chi(\mathbb{T}^2) + \chi((n-1)\mathbb{T}^2 \# \mathbb{S}^2) - 2$ repetindo o processo mais $n - 1$ vezes obtemos $\chi(n\mathbb{T}^2) = n\chi(\mathbb{T}^2) + \chi(\mathbb{S}^2) - 2n$, mas $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$ e $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$, portanto $\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n$. Analogamente obtemos $\chi(n\mathbb{P}^2) = 2 - n$. \square

Pelo teorema anterior vemos que dadas $n\mathbb{T}^2$ e $m\mathbb{T}^2$, com $n \neq m$, elas não são homeomorfas, pois a característica de Euler é diferente, o mesmo vale para $n\mathbb{P}^2$ e $m\mathbb{P}^2$, respectivamente. Como $n\mathbb{P}^2$ é não orientável e $n\mathbb{T}^2$ é orientável então podemos sempre distinguir quaisquer duas superfícies.

Em outras palavras, tendo a característica de Euler e a orientação podemos agora enunciar um resultado central:

Corolário 2.3.3. *Duas superfícies compactas são homeomorfas se, e somente se, elas tem mesma característica de Euler e ambas são orientáveis ou ambas são não orientáveis.*

O corolário acima e o teorema dão uma completa caracterização de superfícies.

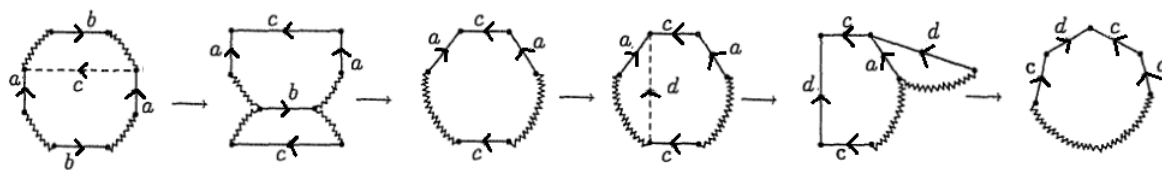


Figura 2.13: Passo 7. Fonte: [Kinsey], p. 84.

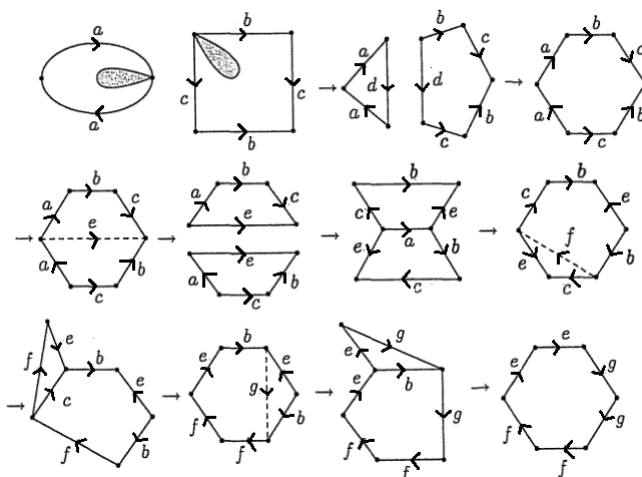


Figura 2.14: Figura do exemplo 2.3.1. Fonte: [Kinsey], p. 85.

Exemplo 2.3.2. Revisitando o exemplo 2.3.1 temos $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$, como \mathbb{P}^2 é não orientável e $\chi(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2) = \chi(\mathbb{T}^2) + \chi(\mathbb{P}^2) - 2 = 0 + (-1) - 2 = -3$, portanto $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq 3\mathbb{P}^2$. ■

Um resultado para a classificação de superfícies não compactas pode ser encontrado em [Richards].

2.4 Variedades com Bordo

Vamos agora ampliar um pouco nossa noção de superfície com a

Definição 2.4.1 (n -variedade com bordo). Uma n -variedade M com bordo é um espaço Hausdorff com uma base enumerável tal que todo ponto tenha uma vizinhança homeomorfa ao interior da bola B^n , denotada por \mathring{B} , ou a $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathring{B}; x_n \geq 0\}$. Os pontos de M que possuem vizinhança homeomorfa a \mathring{B} são chamados pontos interiores de M , e os pontos que possuem vizinhança homeomorfa a H^n são chamados pontos do bordo. Denotaremos o bordo de M por ∂M .

Vale ressaltar uma distinção importante, o conceito de bordo como subconjunto de uma variedade pode diferir do conceito de bordo como subconjunto de um espaço topológico.

Exemplo 2.4.1. Vamos considerar o disco de raio 1 no plano, neste caso os conceitos coincidem pois a topologia do disco, que é a topologia induzida pelo plano, e a

topologia do plano são formadas pelas mesmas bolas. Agora, considere o mesmo disco em \mathbb{R}^3 , neste caso todo ponto do disco é um ponto do bordo e seu interior é vazio, quando considerado como subespaço topológico de \mathbb{R}^3 mas a noção de bordo e interior não se altera quando consideramos como subconjunto da variedade. ■

O exemplo acima estabelece a noção de propriedades intrínsecas, quando leva em consideração apenas a variedade em si sem considerar o ambiente onde ela está, e propriedades extrínsecas, que levam em consideração o ambiente onde a variedade está e como ela está em relação a este ambiente. Ao longo de todo o texto, a menos que se faça menção em contrário, consideraremos apenas as propriedades intrínsecas.

As definições de orientabilidade, característica de Euler e existência de triangulação continuam válidas para variedades com bordo.

Analogamente ao teorema 2.1.1 temos o

Teorema 2.4.1. *Uma 1-variedade com bordo é homeomorfa a $[0, 1]$ se for compacta e a $[0, \infty)$ se não for compacta.*

A demonstração deste teorema encontra-se em [Lee2].

Seja M uma superfície compacta com bordo, então cada subconjunto fechado de M é compacto, em particular, o bordo é compacto portanto é a união de componentes homeomorfas ao círculo \mathbb{S}^1 . Cada componente do bordo podemos identificar com o bordo de um disco, através da colagem dos bordos, portanto toda superfície compacta com bordo é obtida removendo-se o interior de discos de uma superfícies compacta sem bordo.

Exemplo 2.4.2. *Pelo comentário acima temos que o bordo de superfícies compactas é a união de círculos \mathbb{S}^1 , em particular, a faixa de Möbius tem dimensão 2 pois é construída a partir de um retângulo, e pela forma da sua representação poligonal temos que o bordo da faixa de Möbius é \mathbb{S}^1 .* ■

Observação 3. Se uma superfície com bordo M está mergulhada em \mathbb{R}^3 pode ocorrer que M tendo discos colados em seus bordos não possa ser mergulhada em \mathbb{R}^3 . Um exemplo marcante disso é a faixa de Möbius, se colarmos um disco em seu bordo obtemos um plano projetivo que não pode ser mergulhado em \mathbb{R}^3 .

Em virtude do teorema de classificação de superfícies e do que foi visto acima para superfícies com bordo segue que para caracterizar completamente uma superfície com bordo é suficiente conhecer sua orientabilidade, sua característica de Euler e o número de componentes de seu bordo. Para calcular a característica de Euler de uma superfície com bordo de maneira mais fácil temos o

Teorema 2.4.2. *Seja M uma superfície com bordo e M^* a superfície obtida colando-se discos em todas as componentes de seu bordo. Então, $\chi(M^*) = \chi(M) + n$, onde n é o número de componentes do bordo de M .*

Demonstração. Ao retirar-se o interior de um disco de M^* estamos retirando o interior de um triângulo, pois M^* admite triangulação e o disco é homeomorfo ao triângulo, portanto estamos diminuindo uma face e aumentando três vértices e três arestas, ou seja, $\chi(M^*) = \chi(M) + 1 - 3 + 3 = \chi(M) + 1$. Por indução finita obtemos $\chi(M^*) = \chi(M) + n$. □

Esta demonstração encontra-se em [Adams & Fransoza].

Um resultado para a classificação de superfícies não compactas com bordo pode ser encontrado em [Prishlyak & Mischenko].

2.5 Insolubilidade do Problema de Homeomorfia

Agora que temos uma classificação satisfatória de 2-variedades vamos ver um resultado importante sobre variedades de dimensões maiores que afirma que não é possível classificar variedades de dimensão maior ou igual a 4. A demonstração deste resultado foi fornecida por A. A. Markov em 1958. Um esboço da demonstração segue abaixo, para mais detalhes consultar [Markov].

Vamos considerar o problema de encontrar um algoritmo que determina se duas variedades triangularizáveis são homeomorfas, ou equivalentemente o problema de fixada uma variedade triangularizável N encontrar um algoritmo que, para qualquer variedade M , determina se N e M são homeomorfas. Este problema é chamado problema de homeomorfia.

Teorema 2.5.1. *Para $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, existe uma variedade M^n , onde n denota a dimensão da variedade, tal que o problema de homeomorfia para M^n é indecidível.*

Ser indecidível significa que não se pode mostrar que algo é verdadeiro, tão pouco que sua negação seja verdadeira; a possibilidade deste tipo de problema foi apontado por Gödel.

*A ideia da demonstração baseia-se no fato de que o problema de determinar se um grupo com r geradores e k relações é o grupo trivial ou não é indecidível. Portanto basta mostrar a existência de uma dada variedade M^4 que tenha grupo fundamental² que seja um grupo com r geradores e k relações. Mais detalhes sobre esse resultado sobre a indecidibilidade de grupos podem ser encontrados em “Defining relations and algorithmic relations and algorithmic problems for groups and semi-groups”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, number 85, 1967, S. I. Adjan.*

Vamos esboçar a construção de uma variedade que tenha grupo fundamental como descrito acima.

Seja B^4 uma bola em \mathbb{S}^4 , com bordo \mathbb{S}^3 , $J = [-1, 1]$, $Z = B^3 \times J$ e $r \in \mathbb{N}$. Considere um sistema de r parametrizações diferenciáveis $\phi_1, \dots, \phi_r : Z \rightarrow \mathbb{S}^4$ com $\phi_i(Z) \cap \phi_j(Z) = \emptyset$, $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$, tal que $B^4 \cap \phi_i(Z) \subset \mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^3 \cap \phi_i(Z) = \phi_i(B^3 \times \{-1, 1\})$ para $i = 1, \dots, r$.

Formamos o poliedro $L_r = B^4 \cup \bigcup_{i=1}^r \phi_i(Z)$ adicionando r alças $\phi_i(Z)$ a B^4 . Em Z obtemos de “forma canônica” seções lineares que denotaremos por $\sqsubset x, y \sqsupset$, por abuso de notação $\sqsubset x, y \sqsupset$ também representará segmentos de reta em B^4 .

Definimos um alfabeto de $2r$ letras $\Gamma_r = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_r^1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r^{-1}\}$. Seja P uma palavra construída com Γ_r .

Podemos associar a cada curva simples fechada $W \in B^4$ uma palavra P da seguinte maneira: se P é vazia então qualquer circunferência arbitrária no interior de B^4 pode ser tomada como W , se P é não vazia então P é da forma $P = \alpha_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \dots \alpha_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}}$

²Grupo Fundamental será definido num capítulo futuro.

(1), onde $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, r\}$ e $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \dots, s$. Vamos tomar pontos $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s$ no interior de B^3 tal que

$$\square (x_j, -\varepsilon_j), (y_j, \varepsilon_j) \sqsupset \cap \square (x_h, -\varepsilon_h), (y_h, \varepsilon_h) \sqsupset = \emptyset$$

$j, h = 1, \dots, s, j \neq h, i_j = i_h$; e

$$\square \phi_{i_j}(y_j, \varepsilon_j), \phi_{i_{j+1}}(x_{j+1}, -\varepsilon_{j+1}) \sqsupset \cap \square \phi_{i_h}(y_h, \varepsilon_h), \phi_{i_{h+1}}(x_{h+1}, -\varepsilon_{h+1}) \sqsupset = \emptyset$$

$j, h = 1, \dots, s, j \neq h$, onde $x_{s+1} = x_1$ e $y_{s+1} = y_1$. Isto é sempre possível.

Suponha que $W = \cup_{j=1}^s (A_j \cup B_j)$, onde $A_j = \phi_{i_j} \square (x_j, -\varepsilon_j), (y_j, \varepsilon_j) \sqsupset$ e $B_j = \square \phi_{i_j}(y_j, \varepsilon_j), \phi_{i_{j+1}}(x_{j+1}, -\varepsilon_{j+1}) \sqsupset$, $j = 1, \dots, s$.

A representação de toda palavra sobre o alfabeto Γ_r é uma curva simples, fechada e linear por partes no interior de L_r .

A representação W de uma palavra do tipo (1) pode ser construída como abaixo.

Escolhe-se c como centro da bola B^3 . A representação topológica Ψ do poliedro $B^3 \times W$ no interior de L_r pode ser construído de modo que tenha as seguintes características:

- i) $\Psi(c, x) = x, x \in W$,
- ii) Ψ é diferenciável em todo o poliedro $B^3 \times A_j$,
- iii) Ψ é diferenciável em todo o poliedro $B^3 \times B_j$,
- iv) $\Psi(B^3 \times A_j) \subset \phi_{i_j}(Z)$,
- v) $\Psi(B^3 \times B_j) \subset B^4$.

Se Ψ satisfaz essas condições vamos dizer que o interior de $\Psi(B^3 \times W)$ é um túnel da palavra P . Para uma palavra vazia os túneis são definidos analogamente com a diferença que Ψ tem que ser a imagem diferenciável do poliedro $B^3 \times W$ no interior da bola. O túnel de uma palavra sobre o alfabeto Γ_r está contido na vizinhança da imagem da palavra.

Seja $P_1 * \dots * P_m$ um sistema de palavras sobre o alfabeto Γ_r . Construímos para cada $i, 1 \leq i \leq m$, um túnel T_i de uma palavra P_i tal que $\overline{T_i} \cap \overline{T_j} = \emptyset, j = 1, \dots, m, i \neq j$.

Construímos os seguintes poliedros: $J_0 = L_r \setminus \cup_{i=1}^m T_i, J_i = \mathbb{S}^4 \setminus T_i, i = 1, \dots, m, H_{-1} = L_r \times \{-1\}$ e $H_j = J_j \times \{j\}, j = 0, \dots, m$.

Agora construímos o poliedro M' a partir de $H_i, i = -1, \dots, m$, colando os seguintes pontos:

- (1) os pontos $(x, 0)$ e $(x, -1)$ são colados, sempre que x está na borda de L_r em \mathbb{S}^4 , e
- (2) os pontos $(x, 0)$ e (x, i) são colados, sempre que x está na borda dos túneis $T_i \in \mathbb{S}^4, i = 1, \dots, m$.

Esta construção é feita de modo que o poliedro M' seja inconfundível com respeito a homeomorfia do sistema de palavras definido $P_1 * \dots * P_m$ e o número r .

Vamos denotar o poliedro resultante por $M(P_1 * \dots * P_m * r)$.

Esta variedade tem dimensão 4.

Esta construção foi feita de modo que a variedade tenha um grupo fundamental especial. Ainda, com base em [Seifert&Threlfall] pode-se provar:

Lema 2.5.1. Existe sempre um sistema de palavras $P_1 * \dots * P_m$ sobre Γ_r tal que o grupo fundamental da variedade $M(P_1 * \dots * P_m * r)$ é isomorfo ao grupo definido pelo sistema de relações $P_i \longleftrightarrow \Lambda$, $i = 1, \dots, m$ entre elementos $\alpha_1^1, \dots, \alpha_r^1$.

Lema 2.5.2. As variedades $M(P_1 * \dots * P_m * r)$ e $M(Q_1 * \dots * Q_m * r)$ são homeomorfas se o sistema de palavras Q_1, \dots, Q_m é o resultado da substituição da palavra vazia pela interseção da palavra $\alpha_i^\varepsilon \alpha_i^{-\varepsilon}$, $i = 1, \dots, r$, $\varepsilon = \pm 1$.

Lema 2.5.3. As variedades $M(P_1 * \dots * P_m * r)$ e $M(Q_1 * \dots * Q_m * r)$ são homeomorfas se existe um número $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que Q_i é o resultado da permutação cíclica dos caracteres do alfabeto na palavra P e que $Q_j = P_j$ (3), $1 \leq j \leq m$ e $j \neq i$.

Lema 2.5.4. As variedades $M(P_1 * \dots * P_m * r)$ e $M(Q_1 * \dots * Q_m * r)$ são homeomorfas se existe um número $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que Q_i é um grupo de transformações de P_i e vale (3) com $1 \leq j \leq m$ e $j \neq i$.

Definimos o grupo das transformações da palavra P sobre Γ_r como as transformações que resultam de reverter os caracteres do alfabeto com subsequente substituição de todos os caracteres α_j^ε por $\alpha_j^{-\varepsilon}$.

Lema 2.5.5. As variedades $M(P_1 * \dots * P_m * r)$ e $M(Q_1 * \dots * Q_m * r)$ são homeomorfas se existem números $i, h \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq h$, tal que $Q_i = P_i P_h$ e vale (3) com $1 \leq j \leq m$ e $j \neq i$.

Lema 2.5.6. As variedades $M(*^k \alpha_1^1 * \dots * \alpha_r^1 * r)$ e $M(*^k 0)$ são homeomorfas se $k \in \mathbb{N}$.

Com os lemas 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5 e 2.5.6 prova-se o

Lema 2.5.7. Se o grupo com geradores $\alpha_1^1, \dots, \alpha_r^1$ que é determinado pelo sistema de relações $R_i \longleftrightarrow \Lambda$ (4), $i = 1, \dots, k$, sobre Γ_r é o grupo unitário, então a variedade $M(R_1 * \dots * R_k *^{r+1} r)$ é homeomorfa a $M(*^k 0)$.

Usando o lema 2.5.1, pode-se provar o

Lema 2.5.8. Se o grupo definido no lema 2.5.7 não é grupo unitário então a variedade $M(R_1 * \dots * R_k *^{r+1} r)$ não é homeomorfa a $M(*^k 0)$.

Agora, fixando r e k , considere o grupo gerado por $\alpha_1^1, \dots, \alpha_r^1$ que está definido por qualquer sistema de k relações (4) sobre o alfabeto Γ_r .

Vamos denotar estes grupos por (r, k) , segue dos lemas 2.5.7 e 2.5.8 que para construir um algoritmo que diga se uma dada variedade é homeomorfa a $M(*^k 0)$ basta construir um algoritmo que determina se um grupo (r, k) é não trivial, mas como comentado anteriormente, este é um problema indecidível.

Portanto, o problema de homeomorfia é indecidível em dimensão 4, para dimensão n considere $M^n = M^4 \times \mathbb{S}^{n-4}$, como será visto em um capítulo futuro, o grupo fundamental de uma variedade produto é o produto dos grupos fundamentais de cada variedade, portanto o problema de homeomorfia é indecidível para $n > 3$.

Capítulo 3

Geometria de 2-Variedades

Neste capítulo veremos alguns resultados clássicos a respeito de geometria 2-dimensional a fim de compará-los no próximo capítulo com o caso 3-dimensional.

3.1 Geometria Euclidiana, Esférica e Hiperbólica

Geometria Euclidiana, de forma simplificada, é a geometria em que vale o quinto postulado de Euclides; este afirma que: dados uma reta l e um ponto P fora desta reta, existe uma única reta passando por P no plano determinado por l e P que não intersecta l .

Existem alguns postulados que podem substituir o postulado acima e ainda gerar a mesma geometria. Vejamos alguns:

- 1) A soma dos ângulos internos em qualquer triângulo é igual a 180° .*
- 2) A razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo é a mesma para todos os círculos.*
- 3) O Teorema de Pitágoras.*

Geometria esférica é a geometria em que o quinto postulado é modificado, de forma que não exista “reta” passando por P paralelamente a l , e geometria hiperbólica é a geometria onde existam mais de uma “reta” passando por P paralelamente a l . Como consequência disso e das equivalências do quinto postulado de Euclides temos que a área de um triângulo esférico é dada por $A = r^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]$, onde r é o raio da esfera, e α , β e γ são os ângulos do triângulo, e portanto a soma dos ângulos de um triângulo esférico é sempre maior que 180° e, diferentemente do caso euclidiano, a área depende dos ângulos do triângulo.

Similarmente, a área de um triângulo hiperbólico é dada por $A = r^2[\pi - (\alpha + \beta + \gamma)]$, e portanto a soma dos ângulos de um triângulo hiperbólico é sempre menor que 180° e, como no caso esférico, a área depende dos ângulos do triângulo, portanto em geometria hiperbólica 2-dimensional nenhum triângulo tem área maior que πr^2 e quanto maior a área do triângulo menor os ângulos deste.

3.2 Superfície em \mathbb{R}^3

Um conceito muito importante em geometria, e que fará parte de nossos estudos, é o de curvatura, que é uma medida de quanto uma superfície deixa de ser plana

num dado ponto; para a definição e mais detalhes consultar [do Carmo2].

Exemplo 3.2.1. O toro \mathbb{T}^2 usual visualizado como a superfície de revolução de um círculo tem curvatura positiva em alguns pontos e negativa em outros, no entanto o toro tem geometria euclidiana, o fato dele não poder ser “mergulhado” isometricamente, com a métrica herdada de \mathbb{R}^3 , em \mathbb{R}^3 não significa que sua construção não seja legítima, mas em \mathbb{R}^4 é possível mergulhar o toro de modo que tenha curvatura nula em todos os pontos. ■

Este tipo de questão levou ao Problema do Mergulho de Riemann (Riemann Embedding Problem): É possível colocar uma variedade em algum \mathbb{R}^n de forma isométrica, isto é, de forma que a métrica natural da variedade seja a métrica herdada de \mathbb{R}^n ?

Esta questão foi resolvida depois de muitos anos por John Nash, em 1954, e mostrou-se verdadeira.

Posteriormente apareceram alguns resultados nesse sentido, como o teorema de mergulho¹ de Whitney: Qualquer m -variedade real, $m > 0$, suave, Hausdorff e segundo contável pode ser suavemente mergulhada em \mathbb{R}^{2m} .

Como encontrar a geometria de uma dada superfície partindo de sua representação poligonal? Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.2.2 ($2\mathbb{T}^2$). Podemos representar $2\mathbb{T}^2$ por um octógono regular com lados identificados como na figura 3.1, este octógono pode ser obtido fazendo-se a soma conexa de dois toros \mathbb{T}^2 . Neste caso, todos os vértices pertencem à mesma classe de equivalência, ou seja, são colados juntos e os 8 ângulos tem que se encaixar, mas cada ângulo mede 104° , portanto isso não pode ser feito numa geometria euclidiana onde a soma pode ser no máximo 360° , isto significa que $2\mathbb{T}^2$ tem geometria não-euclidiana. Podemos “colocar” $2\mathbb{T}^2$ no plano hiperbólico, que “diminui os ângulos”, e lá podemos encontrar uma configuração em que cada ângulo seja de 45° e então encaixar todos. Sendo assim, $2\mathbb{T}^2$ tem geometria hiperbólica. Como $n\mathbb{T}^2$, $n > 2$, também somam mais de 360° temos que todas essas variedades possuem geometria hiperbólica.

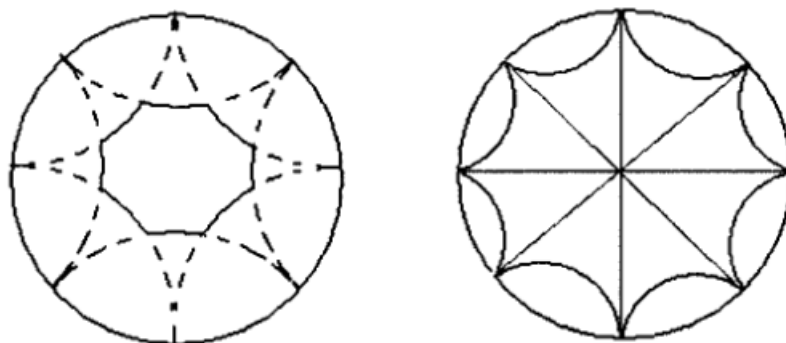


Figura 3.1: Figura do exemplo 3.2.2. Fonte: [O’Shea], p. 127.

¹Neste caso um mergulho pode ser pensado como uma função injetiva $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$.

A partir deste exemplo somos levados a pensar que se a soma dos ângulos ao redor de cada vértice é 360° então a geometria é euclidiana, se a soma for maior que 360° então podemos colocar a superfície no plano hiperbólico e esticá-la, a medida que os vértices se aproximam do infinito os ângulos vão diminuindo até sua soma perfazer 360° , então tal superfície tem geometria hiperbólica, e no caso de a soma ser menor que 360° podemos colocá-la sobre a esfera e esticá-la até que os ângulos aumentem e sua soma seja 360° .

É interessante notar também que o conhecimento da característica de Euler de uma superfície já é suficiente para conhecer o tipo de geometria que a superfície admite, pois como vimos no capítulo anterior se $\chi > 0$ então a superfície é topologicamente equivalente a \mathbb{S}^2 ou a \mathbb{P}^2 e estas são, a menos de homeomorfismos, as únicas superfícies compactas sem bordo que admitem geometria esférica; se $\chi = 0$ então a superfície é o toro ou a garrafa de Klein, e a menos de homeomorfismos, estas são as únicas superfícies compactas sem bordo que admitem geometria euclidiana; e se $\chi < 0$ a superfície admite representação por um polígono de mais de 6 lados e, como no exemplo acima, admite geometria hiperbólica.

3.3 Ladrilhamento

É preciso tomar cuidado para deduzir a geometria de uma superfície com base apenas na quantidade de lados de sua representação poligonal, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.1. Com uma representação hexagonal podemos obter os 3 tipos de geometria, como mostra a figura 3.2, isto ocorre porque existem diferentes quantidades de classes de equivalência de vértices, no primeiro caso há 3 classes de equivalência de vértices, cada uma com dois vértices, mas a soma destes é menor que 360° portanto precisamos “colocar” esta superfície na esfera e aumentar o ângulo de seus vértices, no terceiro caso há uma única classe de equivalência de vértices, ou seja, todos os 6 vértices são identificados e sua soma é maior que 360° , então colocamos no plano hiperbólico e esticamos o hexágono até a soma dos ângulos alcançar 360° , no segundo caso há duas classes de equivalência de vértices, cada uma com 3 vértices que somam 360° então a geometria é euclidiana. ■

Desta maneira toda superfície pode ser dotada de uma geometria homogênea, isto é, que tenha curvatura constante, basta particioná-la em hexágonos, por exemplo, deformar os hexágonos de modo que sejam regulares, e portanto tenham o mesmo ângulo em cada vértice, e dependendo da quantidade de vértices identificados podemos por cada hexágono em \mathbb{S}^2 , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}^2 expandí-los até que a soma alcance 360° e depois colar cada um destes hexágonos novamente.

Este processo preserva a topologia global mas altera a geometria local.

Por exemplo, $n\mathbb{T}^2$, $n \geq 2$, como pensado usualmente; em $n\mathbb{T}^2$ há pontos onde a curvatura é positiva, negativa ou nula, mas depois deste processo $n\mathbb{T}^2$ adquire geometria homogênea e tem mesma curvatura em todos os pontos, mas isso não pode ser representado em espaços euclidianos.

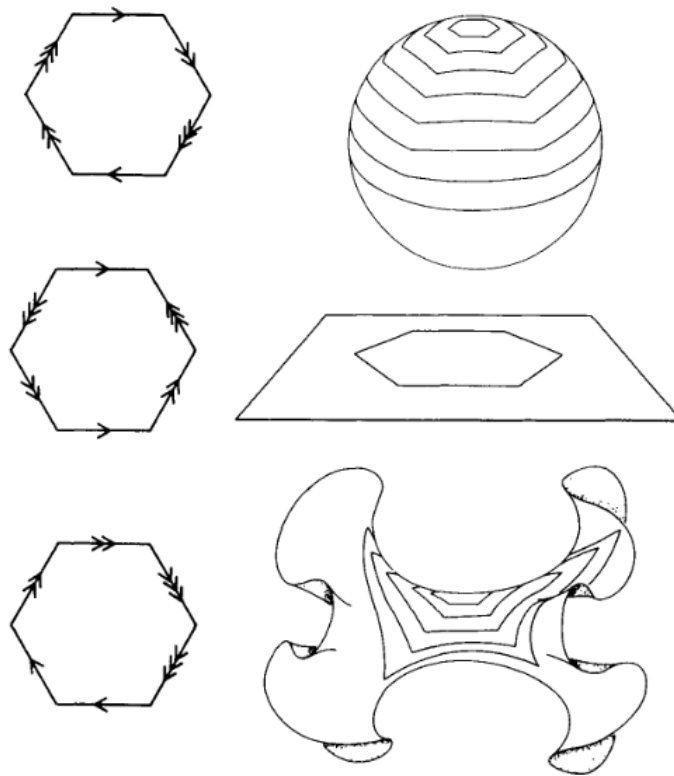


Figura 3.2: Figura do exemplo 3.3.1. Fonte: [Weeks], p. 158.

Na discussão acima, para determinar a geometria através da triangulação temos que considerar o polígono de menor quantidade de lados que gera a superfície, ou seja, sem esferas na representação poligonal, pois se fizermos a soma conexa com esferas estamos adicionando dois lados para cada esfera mas não estamos mudando a natureza topológica da superfície.

É interessante notar o fato de aparecer um hexágono deve-se ao fato de só podermos preencher o plano com três polígonos regulares: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Vamos tentar formalizar um pouco esta noção.

Definição 3.3.1 (Ladrilhamento). Um ladrilhamento de X , onde X é \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n ou \mathbb{H}^n , é uma coleção \wp de poliedros convexos n -dimensionais em X tal que

- i) os interiores dos poliedros em \wp são simultaneamente disjuntos,
- ii) a união dos poliedros em \wp é X ,
- iii) a coleção \wp é localmente finita.

Definição 3.3.2. Um ladrilhamento \wp de X é exato se, e somente se, cada lado S de um poliedro P em \wp é um lado de exatamente dois poliedros P e Q em \wp .

Intuitivamente queremos preencher o plano com uma coleção de figuras planas sem sobreposições ou lacunas.

Exemplo 3.3.2. Um ladrilhamento exato de \mathbb{R}^2 é uma cobertura de \mathbb{R}^2 por quadrados congruentes, um ladrilhamento não exato é uma cobertura de \mathbb{R}^2 por retângulos congruentes. ■

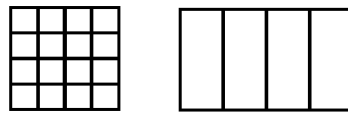


Figura 3.3: Figura do exemplo 3.3.2. À esquerda um ladrilhamento exato, à direita um ladrilhamento não exato.

Definição 3.3.3. Um ladrilhamento regular de X é um ladrilhamento exato de X consistindo de poliedros regulares congruentes.

Há 3 ladrilhamentos regulares de \mathbb{R}^2 , por triângulos, por quadrados e por hexágonos; há 5 ladrilhamentos de \mathbb{S}^2 induzidos pelos 5 sólidos de Platão, para mais detalhes ver [Ratcliffe], mas há infinitos ladrilhamentos de \mathbb{H}^2 , pois pode-se usar para este fim qualquer polígono de $4n$ lados, para $n > 1$.

Ladrilhamentos de X por poliedros congruentes são interessantes devido aos seguintes teoremas, cujas demonstrações encontram-se em [Ratcliffe].

Teorema 3.3.1. Seja P um poliedro convexo n -dimensional em X e Γ o grupo de isometrias de X . Então Γ é discreto e P é um poliedro convexo para Γ se, e somente se, $\wp = \{gP/g \in \Gamma\}$ é um ladrilhamento exato de X .

Definição 3.3.4. Uma coleção \wp de poliedros convexos n -dimensionais em X é dita conexa se, e somente se, para cada par P, Q em \wp existe uma sequência finita P_1, \dots, P_m em \wp tal que $P = P_1$, $P_m = Q$, e P_{i-1} e P_i compartilham um lado em comum para cada $i > 1$.

Teorema 3.3.2. Todo ladrilhamento exato de X é conexo.

3.4 Sólidos de Platão

Os ladrilhamentos regulares de \mathbb{S}^2 estão ligados aos sólidos de Platão, a quantidade destes depende da característica de Euler de \mathbb{S}^2 e em dimensão 3 existem apenas 5, como mostra o teorema abaixo, para dimensão 4 há 6 sólidos de Platão e para dimensões maiores há apenas 3 sólidos de Platão [Sommerville].

Teorema 3.4.1. Existem 5 sólidos de Platão em dimensão 3.

Demonstração. Suponha um poliedro regular com n arestas em cada face e m arestas que se encontram em cada vértice, seja ainda V, F e A o número de vértices, faces e arestas, respectivamente, do poliedro.

Valem as relações $A = \frac{nF}{2}$ e $V = \frac{nF}{m}$.

Pela fórmula de Euler temos $V - A + F = 2$, ou seja, $\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2$, e obtemos $F = \frac{4m}{2(n+m) - nm}$.

Como $F > 0$ e $m > 0$, o denominador da expressão acima deve ser positivo, ou seja, $2(n+m) > nm$. Dessa desigualdade obtemos, $m < \frac{2n}{n-2}$, e como a desigualdade é simétrica, também vale $n < \frac{2m}{m-2}$.

Como cada face é ao menos um triângulo, temos $n, m \geq 3$ e portanto temos $3 \leq n, m < 6$.

Sendo assim, $(n, m) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$. Deste pares apenas $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ e $(5, 3)$ satisfazem $2(n + m) > nm$.

Substituindo estes valores de n e m para V , A e F encontramos, respectivamente, o tetraedro, o octaedro, o icosaedro, o cubo e o dodecaedro. \square

Esta demonstração encontra-se em [Sommerville].

3.5 Orientabilidade e Número de Lados de uma Superfície

A faixa de Möbius é não orientável e possui apenas um lado. Embora esses dois fatos pareçam estar relacionados isto é apenas consequência do vício de nossa parte se sempre imaginar as superfícies em \mathbb{R}^3 .

Orientabilidade é propriedade intrínseca, entretanto o número de lados de uma superfície é propriedade extrínseca; como \mathbb{R}^3 é orientável e a faixa de Möbius é não orientável, ao colocarmos ela em \mathbb{R}^3 esta terá apenas um lado, mas há 3-variedades em que a faixa de Möbius possui dois lados mesmo sendo não orientável.

Exemplo 3.5.1. *Vamos considerar a faixa de Möbius no centro da variedade $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{S}$, como na figura 3.4, onde as setas do cubo indicam a ordem da colagem. O quadrado no centro do cubo vai ter seus lados identificados da maneira induzida pela colagem dos lados do cubo, e se considerarmos uma faixa que vai da face frontal até a face traseira teremos uma faixa de Möbius mas esta terá dois lados pois se alguma figura está sobre a face da faixa voltada para cima se deslocar até a borda, frontal ou traseira, da faixa de Möbius retornará pela outra borda ainda estando na face voltada para cima, ou seja, a face voltada para baixo é inacessível, analogamente chegamos à mesma conclusão para a face voltada para baixo, portanto esta faixa de Möbius possui dois lados.*

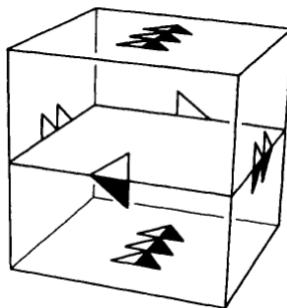


Figura 3.4: Figura do exemplo 3.4. Fonte: [Weeks], p. 128.

É possível a ocorrência de quatro casos:

1. Superfície orientável de 2 lados. Por exemplo, \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}^3 , e \mathbb{T}^2 em \mathbb{R}^3 .

2. Superfície não orientável de 2 lados. Exemplo 3.5.1.
3. Superfície não orientável de 1 lado. Por exemplo, \mathbb{P}^2 em \mathbb{R}^3 .
4. Superfície orientável de 1 lado.

A prova deste fato encontra-se em [Seifert & Threlfall].

3.6 Teorema de Gauss-Bonnet

Teorema 3.6.1 (Gauss-Bonnet). *Seja M uma superfície compacta de curvatura k igual a $1, 0$ ou -1 se M é esférica, euclidiana ou hiperbólica, respectivamente, então $k \cdot \text{Area}(M) = 2\pi\chi(M)$.*

Demonstração. Se $k = 1$ temos $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ e $\chi(\mathbb{P}^2) = 1$ e $\text{Area}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$, e $\text{Area}(\mathbb{P}^2) = 2\pi$ pois ao identificarmos os pontos antípodas acabamos dividindo a superfície pela metade. Portanto, a relação vale para $k = 1$.

Se $k = 0$ temos \mathbb{T}^2 e a garrafa de Klein, ambos com característica de Euler zero. Portanto a relação vale trivialmente.

Se $k = -1$, considere T uma triangulação de M , então $k \cdot \text{Area}(M) = k \cdot \text{Area}(T)$, se T possui f triângulos que denotaremos por $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, onde α, β, γ são os ângulos do triângulo. Sendo assim, $k \cdot \text{Area}(M) = k \cdot \sum_{i=1}^f \text{Area}(\Delta_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)) = k \sum_{i=1}^f (\pi - (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i)) = k(f\pi - 2\pi v) = 2\pi(v - \frac{f}{2})$, onde v é o número de vértices da triangulação e devido à colagem vale $e = \frac{3f}{2}$, então $\chi(M) = v - e + f = v - \frac{f}{2}$, portanto vale a relação. \square

Esta demonstração encontra-se em [Ratcliffe], para outras demonstrações deste teorema consultar [do Carmo2].

Segue do teorema de Gauss-Bonnet que cada superfície não admite mais do que uma geometria homogênea pois a “curvatura” da geometria ($k = 0, 1, -1$) tem que possuir o mesmo sinal da característica de Euler.

Exemplo 3.6.1. *Qualquer $n\mathbb{T}^2$, $n > 1$, pode ser modelado em \mathbb{H}^2 e pode ser representada por um polígono com $4n$ lados, o comprimento R dos lados do polígono é determinado pela curvatura $k = -1/R^2$ de \mathbb{H}^2 . A característica de Euler fornece $\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n$ e pelo teorema de Gauss-Bonnet temos $\chi(n\mathbb{T}^2) = \frac{1}{2\pi} \int \int k d\sigma$, onde $d\sigma$ é o elemento de área, portanto a área de $n\mathbb{T}^2$ é $4\pi(n - 1)R^2$. \blacksquare*

Devido aos resultados acima temos que as 2-variedades mais fáceis de serem estudadas são as que admitem geometria esférica e euclidiana, devido a suas simetrias, mas existe apenas dois representantes de cada uma dessas classes, todas as outras infinitas variedades possuem geometria hiperbólica, ou seja, num certo sentido as geometrias mais “acessíveis”, isto é, as que existem em maior quantidade, são as incomuns.

Capítulo 4

3-Variedades

Riemann, em sua célebre palestra “On the Foundations that underlie Geometry”, em junho de 1854, deixou claro que era preciso distinguir entre o conceito de espaço na matemática e na física, e apesar de falar apenas sobre tais conceitos em matemática ele sabia que a ideia de variedade poderia ser usada para estabelecer a forma do universo físico, e propôs \mathbb{S}^3 como modelo para o universo [O’Shea].

4.1 Construção de 3-variedades

Estudar 3-variedades torna-se complicado por não podermos enxergá-las, embora tenhamos a impressão de estar em um ambiente parecido com \mathbb{R}^3 . Por isso, mesmo que o estudo de tais variedades não requeira um ambiente no qual elas estejam imersas não há perda de generalidade ao fazer a suposição de que tais variedades estejam em algum ambiente euclidiano de dimensão maior, como afirma o Teorema de Imersão de Nash [Nash].

Algumas noções que valem para variedades de dimensão 2 também valem para dimensão 3, por exemplo, da mesma maneira que podemos triangularizar uma 2-variedade, podemos decompor uma 3-variedade em tetraedros, este fato foi provado na década de 50 por Edwin Moise e pode ser encontrado em [Moise], e surpreendentemente, nem toda variedade de dimensão maior que 3 pode ser triangularizada conforme mostrou Andrew Casson no final da década de 60; também vale que toda decomposição por tetraedros é equivalente [Moise].

Existem várias maneiras de construir 3-variedades: o Método de Heegaard, que essencialmente consiste em identificar as faces de duas superfícies; Cirurgia de Dehn, que utiliza nós para a construção de variedades; e o método combinatório que é o análogo multidimensional de colar polígonos, ou seja, podemos colar poliedros. Esses métodos podem gerar todas as 3-variedades [Andrade], para mais detalhes ver [Seifert & Threlfall].

Exemplo 4.1.1. *Consideremos um cubo cujas faces opostas estão identificadas sem que haja rotações ou inversões. A identificação como feita produz o toro tridimensional \mathbb{T}^3 , todo ponto de \mathbb{T}^3 possui uma 3-bola aberta como vizinhança. ■*

Na colagem do poliedro devemos ter faces identificadas com faces, arestas com arestas e vértices com vértices.

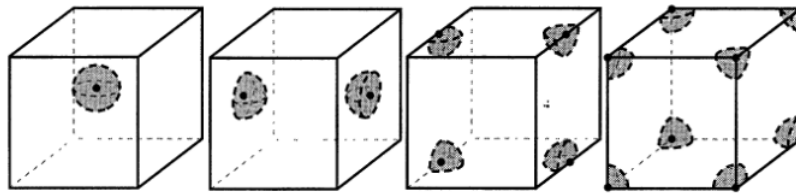


Figura 4.1: Figura do exemplo 4.1.1. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 466.

Ao estudar 3-variedades Poincaré considerou a classe de variedades que podem ser obtidas ao se identificar faces de um poliedro e mostrou que nem sempre tal identificação gera uma variedade, pois os pontos interiores do poliedro sempre terão uma 3-bola como vizinhança, os pontos das faces sempre terão 3-bolas como vizinhanças pois a identificação das faces garante a identificação de duas semi-bolas, mas os pontos das arestas e dos vértices podem não ter 3-bolas como vizinhanças dependendo da colagem, e neste caso o espaço quociente obtido da colagem não é uma 3-variedade.

Isso basicamente acontece porque os pontos do interior do poliedro formam classes de equivalência no espaço quociente que possuem um único ponto, os pontos das faces formam classes de equivalência que possuem dois pontos mas as classes de equivalência de arestas e vértices possuem um número variável de pontos, conforme a colagem.

Para identificar mais facilmente se uma colagem de poliedros gera ou não uma variedade temos que ter uma maneira de controlar as classes de equivalência de arestas e de vértices.

Para arestas temos o seguinte teste:

Ordenamos apropriadamente os p vértices de cada classe de equivalência de vértices de modo a formar uma sequência de faces e arestas como segue

$F_{[1,1]}e_1F_{[1,2]}, F_{[2,1]}e_2F_{[2,2]}, \dots, F_{[p,1]}e_pF_{[p,2]}$, onde e_i é a aresta comum às faces $F_{[i,1]}$ e $F_{[i,2]}$ para cada $i = 1, \dots, p$; cada face $F_{[i,2]}$ é colada a $F_{[i+1,1]}$ para cada $i = 1, \dots, p-1$ e $F_{[p,2]}$ é colada com $F_{[1,1]}$.

Seja e^* o conjunto no espaço quociente que resulta da colagem do interior das arestas. Escolhendo vizinhanças no poliedro de forma que sua colagem seja uma vizinhança de e^* no espaço quociente, a sequência de faces e arestas indica uma ordem de colar todas as vizinhanças em torno de e^* .

Orientando e_1 , acabamos por orientar todas as outras arestas pois elas serão identificadas, e então teremos que e_p pode ou não possuir a mesma orientação de e_1 . Se e_1 e e_p tem mesma orientação então a vizinhança de e^* é homeomorfa à uma 3-bola e a colagem pode ser uma variedade dependendo da colagem dos vértices, se e_1 e e_p tem orientação oposta então a vizinhança de e^* não é homeomorfa à uma 3-bola e o espaço quociente não é variedade.

Como a orientação de e_1 induz a mesma orientação nas outras arestas e a reordenação delas preserva a orientação, segue que toda sequência de faces e arestas, para uma mesma classe de equivalência de vértices, vai produzir uma 3-bola como vizinhança ou toda sequência não produzirá uma 3-bola.

Sendo assim, este teste está bem fundamentado.

Exemplo 4.1.2. Considere uma colagem como abaixo.

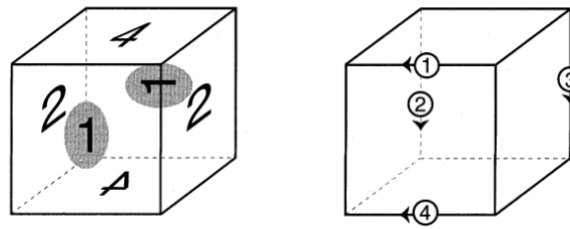


Figura 4.2: Figura do exemplo 4.1.2. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 468.

As arestas numeradas de 1 a 4 formam uma classe de equivalência. Seja T, B, F, B', E e D , as faces do topo, da base, da frente, do fundo, da esquerda e da direita, respectivamente, então $T1F, B'2E, D3B', F4B$ é uma sequência de faces e arestas para a classe de equivalência. Orientando a aresta 1 como indicado na figura 4.2, as outras herdam as orientações mostradas na figura. Devido a colagem das faces do topo e da base as arestas 1 e 4 adquirem orientação diferente. Portanto esta colagem não produz uma variedade. ■

Resumindo, em um espaço quociente obtido de um poliedro, se alguma classe de arestas não possui vizinhança homeomorfa a uma 3-bola então o espaço quociente não é uma variedade.

Vejamos agora um teste para as classes de vértices.

No conjunto dos vértices, dois vértices são equivalentes se eles forem identificados. Cada classe de vértices produz um ponto no espaço quociente.

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma classe de vértices e v^* o ponto correspondente no espaço quociente. Se fizermos um corte no poliedro, próximo do vértice, cada vértice será o ápice de uma pirâmide cujas faces estão nas faces do poliedro e a base está no interior do poliedro.

Considere agora a coleção de todas as pirâmides para uma mesma classe de vértices, depois de identificadas estas pirâmides darão origem a um conjunto B no espaço quociente de forma que v^* está no interior de B .

Para que o espaço quociente tenha chance de ser uma variedade devemos ter que o interior de B é homeomorfo a uma 3-bola aberta.

Pela maneira como B foi construído temos que sua borda é uma superfície compacta, por ser colagem das bases das pirâmides.

Se a borda de B não é homeomorfa a \mathbb{S}^2 então o espaço quociente não pode ser variedade.

Observação 4. Para verificar se a borda é homeomorfa a \mathbb{S}^2 podemos aproveitar a “triangulação” natural obtida da construção da região B e calcular sua característica de Euler.

Exemplo 4.1.3. Considere a colagem da figura 4.3.

O vértice de cima não é identificado com nenhum outro, portanto sua classe de equivalência contém apenas um ponto. Fazendo um corte próximo do vértice obtemos uma pirâmide como mostrada abaixo. A colagem do octaedro induz uma colagem na base da pirâmide, que forma a borda para uma vizinhança do vértice no espaço quociente. Como indicado na figura a base da pirâmide é um toro que não é homeomorfo a \mathbb{S}^2 . Portanto, esta colagem não produz uma variedade. ■

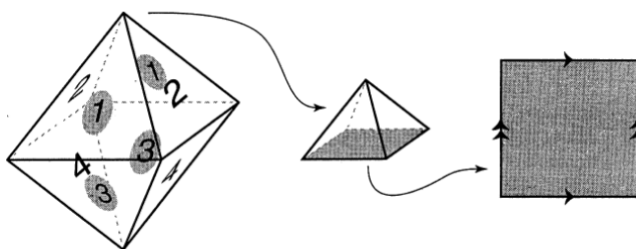


Figura 4.3: Figura do exemplo 4.1.3. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 470.

Dos dois testes acima temos o

Teorema 4.1.1. *Seja M espaço quociente obtido de um poliedro por colagem de seus lados aos pares. Então M é 3-variedade se, e somente se, não falha no teste da aresta e no teste do vértice.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Adams & Fransoza]. Vejamos alguns exemplos de 3-variedades.

Exemplo 4.1.4. *A variedade abaixo é chamada de “variedade rotacionada por um quarto”.* ■

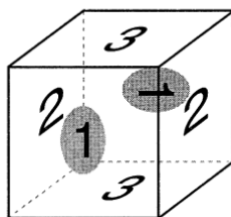


Figura 4.4: Figura do exemplo 4.1.4. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 471.

Exemplo 4.1.5. *A variedade abaixo é chamada de “variedade rotacionada por um sexto”.* ■

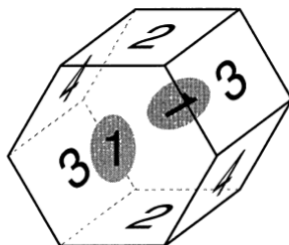


Figura 4.5: Figura do exemplo 4.1.5. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 472.

Exemplo 4.1.6. *A variedade abaixo obtida identificando-se os pares de faces opostas de um dodecaedro por um décimo de giro no sentido horário é chamada Dodecaedro de Poincaré.* ■

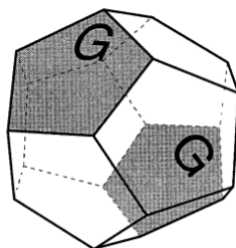


Figura 4.6: Figura do exemplo 4.1.6. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 472.

Exemplo 4.1.7. *A variedade abaixo obtida identificando-se os pares de faces opostas de um dodecaedro por três décimos de giro no sentido horário é chamada Dodecaedro de Seifert-Weber, esta variedade, assim como o Dodecaedro de Poincaré, apareceu pela primeira vez em 1933 num artigo de Weber e Seifert “The two dodecahedral spaces”(Die beiden Dodekaederräm).* ■

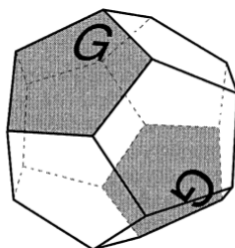


Figura 4.7: Figura do exemplo 4.1.7. Fonte: [Adams & Fransoza], p. 473.

Poliedros em espaços de geometria elíptica possuem ângulos maiores que em espaços euclidianos que são maiores que em espaços hiperbólicos.

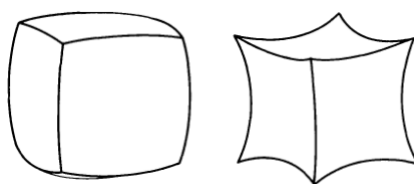


Figura 4.8: À esquerda, um poliedro em espaço esférico; à direita, um poliedro em espaço hiperbólico. Fonte: [Weeks], p. 209 e 215.

4.2 Orientabilidade e Característica de Euler

Em dimensão 2 a característica de Euler é um invariante topológico muito importante, entretanto em dimensão 3 ela é um invariante topológico muito útil para identificar variedades entretanto não fornece absolutamente nenhuma informação que ajude a diferenciar topologicamente uma variedade de outra; mais especificamente temos o

Teorema 4.2.1. *Seja M' um poliedro e M o espaço quociente obtido de M' pela identificação de suas faces. M é variedade se, e somente se, $\chi(M) = 0$.*

Demonstração. Vamos denotar o número de vértices, arestas, faces e tetraedros de M por V, A, F e T , respectivamente, sendo assim $\chi(M) = V - A + F - T$.

Os vértices de M' tem vizinhança de forma piramidal, que podem ser decompostos em tetraedros. Ao identificarmos os lados de M' acabamos identificando os lados da pirâmide e portanto as arestas da base da pirâmide são identificadas com outras arestas formando uma variedade de dimensão 2 que é \mathbb{S}^2 se, e somente se, M é variedade.

Vamos relacionar o número de vértices, arestas, faces e tetraedros de M' , denotamos, respectivamente, por V', A', F' e T' , somados sobre todos os vértices de M' com A, F e T em M .

Cada face do tetraedro possui 3 arestas e devido à colagem temos $A' = 3F'$. Cada tetraedro de M' é também tetraedro de M , portanto $T' = T$, e como cada tetraedro em M' possui 4 faces temos $F' = 4T' = 4T$.

Se olharmos só para a base dos tetraedros temos $V' = A'$, mas cada A' vai ser colado a outra aresta, portanto $V' = A' = 2A$.

Portanto, $V' - A' + F' = 2A - 3F + 4T$.

Como cada face dos tetraedros em M' é identificada com outra, temos $F = 2T' = 2T$. Substituindo na relação acima obtemos $V' - A' + F' = 2A - 2F + 2T$.

Como $V' - A' + F' = (v_1 + \dots + v_V) - (a_1 + \dots + a_V) + (f_1 + \dots + f_V) = (v_1 - a_1 + f_1) + \dots + (v_V - a_V + f_V) = 2V$, onde v_i, a_i, f_i representam o número de vértices, arestas e faces da pirâmide no vértice i .

$v_i - a_i + f_i = 2$ pois a característica de Euler do tetraedro é 2.

Portanto, $\chi(M) = V - A + F - T = \left(\frac{V' - A' + F'}{2} \right) - A + F - T = (A - F + T) - A + F - T = 0$. □

Esta demonstração encontra-se em [Adams & Fransoza].

A noção de orientabilidade, também muito importante de dimensão 2 ainda faz sentido em dimensão 3, para formalizar esta ideia vamos precisar de duas definições.

Definição 4.2.1. *Uma Garrafa de Klein Sólida é o espaço quociente obtido identificando-se os discos opostos de um cilindro sólido por uma reflexão, como na figura 4.9.*



Figura 4.9: Figura da definição 4.2.1. Fonte: [Adams & Fransoza]. p. 473.

Definição 4.2.2. *Uma 3-variedade é não orientável se contém uma garrafa de Klein sólida. Caso contrário é dita orientável.*

Exemplo 4.2.1. *A 3-variedade obtida pela identificação como na figura 4.10 é não orientável, pois existe uma garrafa de Klein sólida cujos discos estão nas faces indicadas com o número 4.* ■

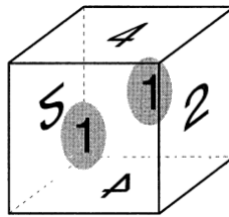


Figura 4.10: Figura do exemplo 4.2.1. Fonte: [Adams & Fransoza]. p. 474.

4.3 Geometria Riemanniana

4.3.1 Homogeneidade e Isotropia

Nosso objetivo será definir matematicamente os conceitos de isotropia e homogeneidade, para isso precisaremos de alguns conceitos de geometria Riemanniana.

Definição 4.3.1 (Métrica Riemanniana). Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Definição 4.3.2. Uma variedade com uma métrica riemanniana será chamada variedade riemanniana.

Denotaremos por $\mathcal{C}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M , e por $C^\infty(M, \mathbb{R})$ o conjunto das funções de classe C^∞ de M para \mathbb{R} .

Definição 4.3.3 (Conexão Afim). Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$ que se indica por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ e para $X, Y, Z \in \mathcal{C}(M)$, e $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ satisfaz:

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Um conceito muito importante é o de conexão de Riemann de M , para tanto precisaremos antes dos conceitos de derivada covariante e campos paralelos.

Daqui em diante, a menos que especificado o contrário, I representará o intervalo $[0, 1]$.

Proposição 4.3.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de γ , denominado derivada covariante de V ao longo de γ , tal que:

$$(a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de γ e f é uma função diferenciável em I ,

(c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{C}(M)$, isto é, $V(t) = Y(\gamma(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}Y$.

Demonstração. Suponhamos que existe uma correspondência satisfazendo (a), (b) e (c). Seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas com $\gamma(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ e seja $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I$. Vamos denotar $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então podemos expressar o campo V localmente como $V = \sum_j v^j X_j$, $j = 1, \dots, n$, onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(\gamma(t))$.

$$\text{Por (a) e (b) temos } \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Por (c) e (i) da definição acima, temos $\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X_j = \nabla_{(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{x_i} X_j$,
 $i, j = 1, \dots, n$.

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{x_i} X_j. \quad (4.1)$$

Esta expressão garante que se existe uma correspondência satisfazendo às condições da proposição então tal correspondência é única, pois os X_j formam uma base para $T_{\gamma(t)}M$.

Para mostrar a existência, definamos $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$ por (4.1). (4.1) possui as propriedades desejadas, isto é consequência de $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e das propriedades de derivada. Se $y(W)$ é outra vizinhança coordenada, com $y(W) \cap x(U) \neq \emptyset$ e definirmos $\frac{DV}{dt}$ em $y(W)$ por (4.1), as definições coincidem em $y(W) \cap x(U)$, pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$. Segue-se que a definição pode ser estendida para toda a variedade M , mostrando sua existência. \square

Esta demonstração encontra-se em [do Carmo].

Uma vez definida a derivada covariante podemos enunciar a

Definição 4.3.4 (Campo Paralelo). *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0, \forall t \in I$.*

Definição 4.3.5. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando para toda curva diferenciável γ e qualquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de γ , tivermos $\langle P, P' \rangle = c$, onde c é uma constante.*

Definição 4.3.6. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] := XY - YX, \forall X, Y \in \mathcal{C}(M)$.

Com estas definições podemos enunciar o

Teorema 4.3.1 (Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo:

- a) ∇ é simétrica
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Suponhamos que existe tal ∇ , então

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (4.2)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (4.3)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (4.4)$$

Fazendo (4.2)+(4.3)-(4.4), e usando a simetria de ∇ temos

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Portanto,

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle) - \frac{1}{2}(\langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle).$$

Esta expressão mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica \langle, \rangle .

Portanto, se existe tal ∇ ela é única.

Para mostrar a existência defina ∇ pela expressão acima. Segue das propriedades de \langle, \rangle e $[,]$ que ∇ satisfaz as propriedades da definição de conexão afim, é simétrica e compatível com a métrica. \square

Esta demonstração encontra-se em [do Carmo].

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *Conexão Riemanniana de M* .

Definição 4.3.7. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{C}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$ dada por $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \in \mathcal{C}(M)$, onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Vamos enunciar algumas propriedades da curvatura Riemanniana de M .

Proposição 4.3.2. A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz:

- i) R é bilinear, isto é, $R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$ e $R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2) \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}(M)$;
- ii) $\forall X, Y \in \mathcal{C}(M)$, o operador $R(X, Y) : \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathcal{C}(M)$ é linear, isto é, $R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$ e $R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z, f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), Z, W \in \mathcal{C}(M)$;

- iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$;
- iv) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0$;
- v) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle$;
- vi) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle$;
- vii) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle$;
- viii) $\nabla R(X, Y, Z, W, T) + \nabla R(X, Y, W, T, Z) + \nabla R(X, Y, T, Z, W) = 0, \forall X, Y, Z, W, T \in \mathcal{C}(M)$.

A demonstração destas propriedades podem ser encontradas em [Petersen].

Decorre de i) e ii) que $R(x, y)z$ para $x, y, z \in T_p M$ está bem definida.

Definição 4.3.8 (Curvatura Seccional). *Seja M variedade Riemanniana, dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número $K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}$, onde $\{x, y\}$ é base de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .*

Observação 5. $K(\sigma)$ está bem definido pois não depende dos vetores $x, y \in \sigma$.

Agora estamos em condições de enunciar duas definições que serão muito importantes ao longo deste texto.

Definição 4.3.9 (Variedade Isotrópica). *Seja M variedade Riemanniana, diremos que M é variedade isotrópica se, para cada $p \in M$, a curvatura seccional $K(p, \sigma)$ não depende de $\sigma \subset T_p M$, ou seja, se a curvatura seccional é constante em cada ponto.*

Definição 4.3.10 (Variedade Homogênea). *Seja M variedade Riemanniana, diremos que M é variedade homogênea se a curvatura seccional $K(p, \sigma)$ não depende do ponto p .*

Definição 4.3.11. *Se M é variedade isotrópica e homogênea diremos que M é uma variedade de curvatura constante.*

Vamos agora mostrar um resultado importante publicado por Schur, em 1886, mas para isso precisaremos primeiro de dois lemas.

As demonstrações destes lemas encontram-se em [do Carmo].

Lema 4.3.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 2, munido de um produto interno. Sejam $R : V \times V \times V \rightarrow V$ e $R' : V \times V \times V \rightarrow V$ aplicações trilineares tais que as condições da proposição anterior sejam satisfeitas para $\langle R(x, y)z, t \rangle$ e $\langle R'(x, y)z, t \rangle$. Se x, y são dois vetores linearmente independentes, escrevamos, $K(\sigma) = \frac{\langle R(x, y)z, t \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}$, $K'(\sigma) = \frac{\langle R'(x, y)z, t \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}$, onde σ é o subespaço bidimensional gerado por x e y . Se para todo $\sigma \subset V$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.*

Demonstração. Basta provar que $\langle R(x, y)z, t \rangle = \langle R'(x, y)z, t \rangle \forall x, y, z, t \in V$.

Por hipótese, $\langle R(x, y)x, y \rangle = \langle R'(x, y)x, y \rangle \forall x, y \in V$.

Então $\langle R(x+z, y)(x+z), y \rangle = \langle R'(x+z, y)(x+z), y \rangle$, ou seja,

$$\langle R(x, y)x, y \rangle + 2\langle R(x, y)z, y \rangle + \langle R(z, y)z, y \rangle = \langle R'(x, y)x, y \rangle + 2\langle R'(x, y)z, y \rangle + \langle R'(z, y)z, y \rangle.$$

Portanto, $\langle R(x, y)z, y \rangle = \langle R'(x, y)z, y \rangle \forall x, y, z \in V$.

Usando esta relação temos

$$\begin{aligned} \langle R(x, y+t)z, y+t \rangle &= \langle R'(x, y+t)z, y+t \rangle \\ \langle R(x, y)z, t \rangle + \langle R(x, t)z, y \rangle &= \langle R'(x, y)z, t \rangle + \langle R'(x, t)z, y \rangle \\ \langle R(x, y)z, t \rangle - \langle R'(x, y)z, t \rangle &= \langle R(y, z)x, t \rangle - \langle R'(y, z)x, t \rangle. \end{aligned}$$

Esta equação nos diz que $\langle R(x, y)z, t \rangle - \langle R'(x, y)z, t \rangle$ é invariante por permutações cíclicas dos três primeiros elementos.

Por iv) da proposição anterior temos, $3(\langle R(x, y)z, t \rangle - \langle R'(x, y)z, t \rangle) = 0$.

Portanto, $\langle R(x, y)z, t \rangle = \langle R'(x, y)z, t \rangle \forall x, y, z, t \in V$. \square

Lema 4.3.2. *Seja M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$ por $\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle, \forall X, Y, Z, W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .*

Demonstração. Se $K(p, \sigma) = K_0 \forall \sigma \subset T_pM$. Observe que R' satisfaz as propriedades iv) a vii) da proposição anterior. Como $\langle R'(X, Y, X), Y \rangle = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$, temos que, para todo par de vetores $X, Y \in T_pM$, $\langle R(X, Y, X)Y \rangle = K_0(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2) = K_0 \langle R'(X, Y, X)Y \rangle$.

Pelo lema anterior, temos $R(X, Y, W) = K_0 R'(X, Y, W), \forall X, Y, W \in T_pM$, portanto $R = K_0 R'$.

Reciprocamente, se $R(X, Y, W) = K_0 R'(X, Y, W), \forall X, Y, W \in T_pM$, então K_0 é constante. \square

Com estes lemas podemos, finalmente, demonstrar o

Teorema 4.3.2 (Schur). *Seja M variedade Riemanniana conexa de dimensão maior que 2. Se M é isotrópica então M é homogênea.*

Demonstração. Defina $R' : \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ por $R'(W, Z, X, Y) = \langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle$.

Se $K(p, \sigma)$ não depende de σ , pelo lema anterior, $R = K(p)R'$. Portanto, $\forall U \in \mathcal{C}(M), \nabla_U R = (UK(p))R'$.

Utilizando o último item da proposição anterior, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (UK)(\langle W, X \rangle \langle Z, Y \rangle - \langle Z, X \rangle \langle W, Y \rangle) \\ &+ (XK)(\langle W, Y \rangle \langle Z, U \rangle - \langle Z, Y \rangle \langle W, U \rangle) \\ &+ (YK)(\langle W, U \rangle \langle Z, X \rangle - \langle Z, U \rangle \langle W, X \rangle) \quad (*) \end{aligned}$$

Fixando $p \in M$, como $n \geq 3$, é possível, fixando X em p escolher Y e Z em p tal que $\langle X, Y \rangle = \langle Y, Z \rangle = \langle Z, X \rangle = 0$ e $\langle Z, Z \rangle = 1$.

Fazendo $U = Z$ em p e substituindo em (*) temos, $\langle (XK)Y - (YK)X, W \rangle = 0, \forall W \in \mathcal{C}(M)$.

Portanto, $(XK)Y - (YK)X = 0$, e como X e Y são linearmente independentes segue que $XK = YK = 0 \forall X, Y \in T_pM$. Logo K é constante. \square

Nem toda variedade homogênea é isotrópica, como se vê pelo exemplo abaixo.

Exemplo 4.3.1. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}$ é não isotrópico, pois “seções horizontais” são esferas \mathbb{S}^2 enquanto que “seções verticais” são toros $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$, portanto a curvatura seccional é positiva ou nula dependendo do plano que se considera, entretanto para qualquer ponto da variedade é possível escolher pontos em que a curvatura seccional dê valor positivo ou nulo. Analogamente, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ possui curvatura seccional negativa ou nula. \blacksquare

4.3.2 Curvatura e Topologia

Para vermos como a curvatura influencia a topologia precisaremos antes de outros conceitos como variedade completa e para isso precisaremos de alguns conceitos como

Definição 4.3.12 (Geodésica). Uma curva parametrizada não constante $\gamma : I \rightarrow M$, $I = (0, 1)$, é chamada geodésica em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\gamma'(t)$ é paralelo ao longo de γ .

Dado um ponto $p \in M$ variedade riemanniana e $v \in T_pM$ vetor não nulo existe uma única geodésica parametrizada $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Denotaremos tal geodésica por $\gamma = \gamma(t, v)$.

Agora, vamos introduzir o conceito de aplicação exponencial.

Seja $p \in M$ e $U \subset TM$, $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$, um aberto então a aplicação $\exp : U \rightarrow M$ dada por $\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|})$, $(q, v) \in U$, onde γ é a geodésica que passa por q com velocidade v no tempo 1, é chamada aplicação exponencial.

Definição 4.3.13. Uma variedade Riemanniana M é completa se $\forall p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida $\forall v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas $\forall t \in \mathbb{R}$.

As demonstrações dos teoremas a seguir podem ser encontradas em [do Carmo]. O seguinte teorema mostra a importância da noção de completudeza.

Teorema 4.3.3 (Hopf e Rinow). Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. \exp_p está definida em todo o T_pM .
2. Os limitados e fechados de M são compactos.
3. M é completa como espaço métrico.
4. M é geodesicamente completa.
5. Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

6. Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $l(\gamma) = d(p, q)$.

Corolário 4.3.1. Se M é variedade compacta então M é completa.

Como uma aplicação do teorema acima temos o

Teorema 4.3.4 (Hadamard). *Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_p M$. Então M é difeomorfa a \mathbb{R}^n , $n = \dim M$; mais precisamente, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.*

Como consequência deste teorema segue que em variedades hiperbólicas simplesmente conexas, dados dois pontos, há uma única geodésica passando pelos dois.

Os espaços com curvatura seccional constante são os mais simples pois dados dois triângulos pequenos é sempre possível deslocá-los isometricamente e colocá-los em posições diferentes de maneira que possam ser superpostos.

Quando multiplicamos uma métrica Riemanniana por $c > 0$ sua curvatura seccional K fica multiplicada por $\frac{1}{c}$. Portanto podemos supor $K = -1$, $K = 0$ ou $K = 1$.

\mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n , \mathbb{H}^n são completas e simplesmente conexas e são essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas com curvatura constante, como veremos mais a frente.

Isso reduz o problema de achar todas as variedades completas de curvatura constante ao problema de determinar certos grupos de isometrias de \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n .

Para vermos mais alguns resultados relacionando curvatura e topologia vamos precisar da noção de curvatura de Ricci.

Definição 4.3.14 (Curvatura de Ricci). *Seja M variedade Riemanniana, e tome $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$, considere uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x , definimos a curvatura de Ricci por $Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \langle R(x, z_j)x, z_j \rangle$.*

Teorema 4.3.5 (Bonnet-Myers). *Seja M^n variedade Riemanniana completa. Suponhamos que $Ric_p(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0$, $\forall p \in M$, $\forall v \in T_p M$, $|v| = 1$. Então M é compacta e o diâmetro $diam(M) \leq \pi r$.*

Dois resultados importantes, derivados deste teorema são:

Corolário 4.3.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com $Ric_p(v) \geq \delta > 0$, $\forall p \in M$ e $\forall v \in T_p M$. Então, o recobrimento universal de M é compacto. Em particular, o grupo fundamental $\Pi_1(M)$ é finito.*

Corolário 4.3.3. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional $K \geq \frac{1}{r^2} > 0$. Então M é compacta, $diam(M) \leq \pi r$ e $\Pi_1(M)$ é finito.*

É interessante notar que a estimativa no teorema não pode ser melhorada pois \mathbb{S}^n tem $K = 1$ e portanto $Ric = 1$ e $diam(\mathbb{S}^n) = \pi$. E, mais surpreendentemente ainda, este é o único caso em que a igualdade é satisfeita pois se M^n é completa com $Ric_p(v) \geq \frac{1}{r^2}$, $\forall p \in M$, $\forall v \in T_p M$ e $diam(M) = \pi r$ então M^n é isométrica à \mathbb{S}^n de raio r [Cheng].

Um resultado interessante sobre pontos fixos é

Teorema 4.3.6 (Weinstein e Synge). *Seja f uma isometria de uma variedade Riemanniana M^n , orientada e compacta. Suponhamos que M possui curvatura seccional positiva e que f preserva a orientação de M se n é par, e reverte-a se n é ímpar. Então f possui um ponto fixo, isto é, existe $p \in M$ com $f(p) = p$.*

Corolário 4.3.4 (Synge). *Seja M^n uma variedade compacta com curvatura seccional positiva.*

- a) *Se M^n é orientável e n é par, então M é simplesmente conexa.*
 b) *Se n é ímpar, então M é orientável.*

Se M tem curvatura seccional negativa então “a topologia” de M está contida em $\Pi_1(M)$, pois $\Pi_1(M)$ está relacionado com o grupo de homotopia de dimensão 1 e os grupos de homotopia de dimensão maiores que 1 são triviais e portanto não dão nenhuma informação sobre a topologia de M .

Um teorema interessante que permite relacionar a curvatura seccional de certas variedades com o grupo fundamental das mesmas é o seguinte

Teorema 4.3.7 (Preissman). *Se M é uma variedade Riemanniana compacta com curvatura seccional negativa, então todo subgrupo abeliano diferente da identidade do grupo fundamental $\Pi_1(M)$ é cíclico infinito.*

Esse teorema permite prever que certas variedades não admitem métrica de curvatura negativa, como se vê pelo exemplo a seguir.

Exemplo 4.3.2. *Seja N superfície de gênero maior ou igual a dois e $M = N \times \mathbb{S}$ então M não possui métrica que torna a variedade M uma variedade de curvatura negativa, pois se $C \subset \Pi_1(N)$ é subgrupo cíclico então $C \times \mathbb{Z} \subset \Pi_1(M)$ é subgrupo abeliano que não é cíclico.*

Em particular, o m -toro \mathbb{T}^m , $m \geq 2$ não possui métrica de curvatura negativa. ■

Outro resultado muito explorado e tema ativo de pesquisa é o teorema da esfera.

Teorema 4.3.8 (Teorema da Esfera). *Seja M^n variedade Riemanniana compacta, simplesmente conexa, com curvatura seccional K . Se $0 < \frac{1}{4} < K \leq 1$ então M é homeomorfa à \mathbb{S}^n .*

4.4 Geometria Tridimensional

Thurston, em 1982, classificou as geometrias homogêneas de 3-variedades fechadas em 8 classes distintas, assim como em dimensão 2 as 3-variedades mais abundantes são as hiperbólicas e novamente os exemplos mais bem entendidos são de geometria esférica e euclidiana.

Um conceito que aparecerá ao longo deste texto é o de simplesmente conexo e multiconexo, a definição de simplesmente conexo será dada no próximo capítulo de maneira mais formal utilizando o conceito de grupo fundamental, por hora pode-se pensar que uma variedade é simplesmente conexa se for conexa e todo caminho homeomorfo a um círculo puder ser deformado em um ponto; será chamado de multiconexa a variedade que não for simplesmente conexa.

Uma diferença grande ocorre se a variedade for ou não simplesmente conexa, por exemplo, em uma variedade multiconexa quaisquer dois pontos podem ser ligados por mais de uma geodésica, embora isto ocorra para algumas variedades simplesmente conexas como \mathbb{S}^n , não ocorre para todas, como por exemplo \mathbb{R}^n .

Qualquer geometria 3-dimensional simplesmente conexa e homogênea que admite quociente compacto é equivalente a \widetilde{M}/G , onde G é um subgrupo do grupo de isometrias e \widetilde{M} pode ser $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}^1, Nil^2$ ou Sol , onde Sol é o grupo de Lie³ que pode ser representada por \mathbb{R}^3 com o produto $(x, y, z)(x', y', z') = (x + \exp(-z)x', y + \exp(-z)y', z + z')$.

O grupo G age propriamente descontinuamente em \widetilde{M} se $\forall p \in \widetilde{M}, \exists U$ vizinhança de p com $U \cap g(U) = \emptyset, \forall g \in G$.

Nas próximas seções será importante o conceito de isometria.

Definição 4.4.1 (Isometria). Sejam X, Y espaços métricos, uma função $\phi : X \rightarrow Y$, é uma isometria se $d_Y(\phi(x), \phi(y)) = d_X(x, y), \forall x, y \in X$, onde d_Y e d_X são as métricas nos espaços Y e X , respectivamente.

Note que isometrias são injeções contínuas, que a inversa de isometria é isometria e a composição de isometrias é isometria.

O conjunto de todas as isometrias de X em X com a composição formam um grupo, chamado grupo de isometrias de X .

Exemplo 4.4.1. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $T_a(v) = v + a$ é isometria pois $d(T_a(v_1), T_a(v_2)) = |(v_1 + a) - (v_2 + a)| = |v_1 - v_2| = d(v_1, v_2)$. ■

Para determinar a topologia de qualquer 3-variedade de interesse neste trabalho, ou seja, as 3-variedades orientáveis de volume finito, basta conhecer três elementos: o poliedro fundamental associado à variedade, seu recobrimento universal e os subgrupos de isometrias agindo livremente e descontinuamente no poliedro fundamental.

Vejam rapidamente os grupos de isometrias que agem nas geometrias tridimensionais simplesmente conexas, homogêneas que admitem quociente finito.

- $\widetilde{M} = \mathbb{R}^3$ (geometria euclidiana)

$G = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, produto de translações em \mathbb{R}^3 pelo grupo das matrizes ortogonais.

Estas variedades admitem curvatura constante zero.

Alguns exemplos de 3-variedades que admitem esse tipo de geometrias são: \mathbb{T}^3 e a variedade rotacionada por um quarto.

- $\widetilde{M} = \mathbb{S}^3$ (geometria esférica)

$G = SO(4)$, estas variedades admitem curvatura constante positiva.

Alguns exemplos de 3-variedades que admitem esse tipo de geometrias são: $\mathbb{S}^3, \mathbb{P}^3$ e o Dodecaedro de Poincaré.

¹ $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ é o recobrimento do grupo de matrizes reais 2×2 com determinante 1.

² Nil é o grupo de Lie de todas as matrizes de Heisenberg, isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, y, z \in \mathbb{R}.$$

³ É uma variedade diferenciável que admite uma estrutura de grupo onde as operações de multiplicação e inversão são deriváveis. Por exemplo, $(\mathbb{R}, +)$.

- $\widetilde{M} = \mathbb{H}^3$ (geometria hiperbólica)

$G = SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$, estas variedades admitem curvatura negativa.

Um exemplo de tal variedade é o Dodecaedro de Seifert-Weber.

- $\widetilde{M} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

$G = SO(3) \times \mathbb{R}$ onde \mathbb{R} é o grupo das translações em \mathbb{R} .

Apenas 7 variedades sem bordo admitem esta geometria, incluindo $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}$ e $\mathbb{P}^3 \# \mathbb{P}^3$, \mathbb{K}^3 e $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{S}$.

- $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

$G = SL_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$.

- $\widetilde{M} = \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$

$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ é o recobrimento universal de $SL_2(\mathbb{R})$.

$G = \mathbb{R} \times SL_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$

- $\widetilde{M} = Nil$

- $\widetilde{M} = Sol$

As geometrias euclidiana, esférica e hiperbólica são as únicas isotrópicas.

Da mesma maneira que podemos obter qualquer 2-variedade por um polígono com os lados identificados podemos obter qualquer 3-variedade, de interesse deste trabalho, identificando os lados de um poliedro aos pares, assim acabamos gerando um ladrilhamento tridimensional do espaço, e assim como no caso bidimensional se o poliedro fundamental possui mais de 8 faces então a 3-variedade resultante não admite mais geometria euclidiana.

Em dimensão 2 ao fazer soma conexa de duas variedades que pertencem a um dos três tipos de geometrias homogêneas, obtemos uma geometria que pertence a um dos três tipos, em dimensão 3 isso não ocorre, este tipo de ocorrência mostra que não é possível generalizar boa parte dos conceitos que valem em dimensão 2.

O trabalho de Thurston indica que se uma variedade não admite um dos oito tipos acima então ela pode ser decomposta em partes, em que cada uma admite um dos oito tipos de geometria. Esta conjectura conhecida como Conjectura da Geometrização de Thurston foi provada por Perelman em 2002.

4.4.1 Variedades Euclidianas

Toda 3-variedade euclidiana possui \mathbb{R}^3 como recobrimento universal, como veremos mais a frente.

O grupo de isometrias de \mathbb{R}^2 é composto de translações, rotações, reflexões e da composição de translações com reflexões em uma linha paralela à translação. Os subgrupos de isometrias discretos sem pontos fixos contém apenas translações e a composição de translações com reflexões em uma linha paralela à translação.

Para conhecer as 3-variedades euclidianas compactas basta olhar para os grupos cristalográficos.

Definição 4.4.2. Um grupo cristalográfico n -dimensional é um grupo discreto Γ de isometrias de \mathbb{R}^n tal que \mathbb{R}^n/Γ é compacto.

Os grupos cristalográficos recebem este nome porque se P é um poliedro convexo para um grupo cristalográfico Γ n -dimensional, então P é compacto, portanto limitado e tem um número finito de lados e podemos considerar P como um modelo

para um cristal n -dimensional e o ladrilhamento $\{gP/g \in \Gamma\}$ de \mathbb{R}^n como um modelo para uma estrutura cristalina.

O estudo de estruturas cristalinas é chamado cristalografia. No final do século 19 os grupos cristalográficos de dimensão 1, 2 e 3 já haviam sido classificados, e para cada uma dessas dimensões há apenas um número finito de grupos cristalográficos, a menos de isomorfismos.

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, David Hilbert, propôs uma lista de 23 problemas que julgara relevantes, o problema 18 era saber se os grupos cristalográficos eram finitos em cada dimensão. Este problema foi respondido de forma positiva por L. Bieberbach, em 1910.

Teorema 4.4.1. *Seja Γ um grupo discreto de isometrias de \mathbb{R}^n . Então Γ é cristalográfico se, e somente se, o subgrupo das translações de Γ tem índice finito e posto n .*

Teorema 4.4.2 (Bieberbach). *Para cada dimensão n , existem apenas finitas classes de isomorfismos de grupos cristalográficos n -dimensionais.*

A demonstração destes fatos encontra-se em [Ratcliffe].

Existem um número exato de classes de equivalência de variedades euclidianas compactas n -dimensionais, para $n = 1, 2, 3, 4$ este número é 1, 2, 10, 74, respectivamente.

Existem 18 classes de variedades que possuem geometria euclidiana, destas apenas \mathbb{R}^3 é simplesmente conexo. Dentre as outras, 7 são abertas e 10 fechadas, significando volume infinito e finito respectivamente, correspondendo as 10 classes de isomorfismos de grupos cristalográficos acima citados, destas apenas 6 são orientáveis [Levin].

Ao longo do trabalho estaremos interessado, por motivos que ficarão claros mais adiante, apenas em variedades fechadas e orientáveis, portanto vamos descrever apenas os 6 tipos que nos interessam.

- \mathbb{T}^3 , vista no exemplo 4.1.1. Podemos expressar \mathbb{T}^3 como \mathbb{R}^3/Γ , onde $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- A variedade rotacionada por um quarto de volta, vista no exemplo 4.1.4.

- A variedade meio rotacionada (rotacionada por meia volta).

- A variedade obtida de um cubo pela colagem dos pares opostos, cada um rotacionado por meia volta.

- A variedade obtida de um prisma hexagonal colando um par de faces opostas rotacionadas por dois terços de volta, e os outros lados opostos sem rotações.

- A variedade obtida de um prisma hexagonal colando um par de faces opostas rotacionadas por um terços de volta, e os outros lados opostos sem rotações.

Teorema 4.4.3. *Suponha que M é compacta com curvatura nula. Se $k < n$, não existe imersão isométrica $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$; em particular, o toro plano \mathbb{T}^n não pode ser imerso isometricamente em \mathbb{R}^{2n-1} .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [do Carmo].

O poliedro fundamental de uma 3-variedade euclidiana pode possuir volume arbitrário mas não mais do que 8 faces devido ao fato de que \mathbb{R}^3 só admite cubos e prismas hexagonais como ladrilhamentos, veremos também que 3-variedades

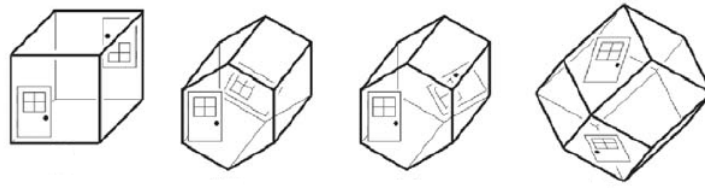


Figura 4.11: Representação dos últimos quatro exemplos de variedades euclidianas, na ordem em que são citadas acima. Fonte: [Luminet1], p. 275.

esféricas e hiperbólicas tem uma restrição quanto ao volume de seus poliedros fundamentais, as variedades esféricas possuem seus volumes máximos limitados e as hiperbólicas possuem valor mínimo não nulo, analogamente ao caso bidimensional. É possível ladrilhar \mathbb{H}^3 por poliedros com número arbitrariamente grande de lados.

4.4.2 Variedades Esféricas

As variedade esféricas possuem \mathbb{S}^3 como recobrimento universal, portanto toda 3-variedade esférica é compacta, como veremos mais a frente no teorema 5.2.1. As 3-variedades que admitem essa geometria foram classificadas, em 1932, por Seifert e Threlfall [Seifert & Threlfall].

Pode-se mostrar que \mathbb{S}^n tem curvatura seccional constante e igual a 1 [do Carmo].

Devido à Conjectura de Poincaré todas as 3-variedades esféricas, com exceção de \mathbb{S}^3 , são multiconexas.

O grupo de isometrias de \mathbb{S}^2 é o grupo $O(3)$ das matrizes 3×3 ortogonais com determinante unitário, mas o único subgrupo discreto não-trivial sem pontos fixos é \mathbb{Z}_2 , portanto há apenas duas 2-variedades esféricas: \mathbb{S}^2 e \mathbb{P}^2 .

Em dimensão 2 o grupo de isometrias de \mathbb{S}^3 é $SO(4)$, no entanto os subgrupos deste grupo que agem livremente e descontinuamente em \mathbb{S}^3 são:

- \mathbb{Z}_p , $p \geq 2$, um grupo cíclico de ordem p ; podemos pensar em rotações de $\frac{2\pi}{p}$ ao redor de um eixo arbitrário de \mathbb{R}^3 ;
- D_m , $m > 2$, é o grupo de simetrias de um polígono plano regular de m lados;
- Grupos Poliedrais. São os grupos de simetria dos poliedros regulares (sólidos de Platão).

Definição 4.4.3 (Grupo Discreto). *Um grupo discreto é um grupo topológico Γ tal que todos os seus pontos são abertos.*

Como o grupo é discreto existe uma distância não nula entre quaisquer dois pontos da mesma classe de equivalência, e os geradores, exceto a identidade, não possuem ponto fixo, também o poliedro fundamental é convexo e possui um número finito de faces [Luminet3].

Proposição 4.4.1. *Se Γ é um grupo topológico, então Γ é discreto se, e somente se, $\{id\}$ é aberto em Γ .*

Demonstração. (\Rightarrow) Se Γ é discreto então $\{id\}$ é aberto.

(\Leftarrow) Seja $\{id\}$ é aberto e $g \in \Gamma$ então $g(id) = g$ é aberto em Γ . □

Corolário 4.4.1. *Um subgrupo Γ de $O(n)$ é discreto se, e somente se, Γ é finito.*

Exemplo 4.4.2. O grupo de simetrias de um sólido regular P inscrito em \mathbb{S}^2 é um subgrupo finito de $O(3)$ cuja ordem é 24 se P é um tetraedro, 48 se P é um cubo ou octaedro, e 120 se P é um dodecaedro ou icosaedro. ■

Devido a um carater de dualidade entre os sólidos de Platão (o octaedro e o cubo são duais um do outro, o icosaedro e o dodecaedro são duais um do outro) existem apenas três grupos, que preservam o tetraedro, o octaedro e o icosaedro. Esse carater de dualidade pode ser melhor entendido como consequência do Teorema de Dualidade de Poincaré que estabelece uma dualidade entre os grupos de homologia e cohomologia, para mais detalhes ver [Lima3].

Fazendo o quociente de \mathbb{S}^3 pelos grupos acima obtemos todas as variedades homogêneas esféricas, como p e m são números em \mathbb{N} temos infinitas classes de geometrias homogenêneas esféricas.

Como $vol(M) = vol(\mathbb{S}^3)/|\Gamma|$, onde Γ é um subgrupo do grupo de simetrias, segue que quanto maior p ou m , menor o volume da 3-variedade, e o volume de qualquer 3-variedade esférica é sempre uma fração do volume de \mathbb{S}^3 , por isso $vol(M) = \frac{2\pi^2 R^3}{|\Gamma|}$ possui limite superior correspondendo ao caso $|\Gamma| = 1$ que é justamente \mathbb{S}^3 , ou seja, qualquer 3-variedade esférica tem volume máximo $2s\pi^2 R^3$, onde s é uma fração e R é o raio do recobrimento universal.

Observação 6. Ao contrário do volume, o diâmetro que atinge valor mínimo

$$\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cot \left(\frac{\pi}{5} \right) \right) \approx 0,326R, \text{ correspondendo ao dodecaedro.}$$

Exemplo 4.4.3. $\mathbb{P}^3 = \mathbb{S}^3/Z_2$ e $vol(\mathbb{P}^3) = \frac{1}{2}vol((S)^3) = \pi^2 R^3$. Qualquer duas geodésicas em \mathbb{S}^3 começando no mesmo ponto se intersectam nos seus antipodas a uma distância πR medida ao longo da geodésica, em \mathbb{P}^3 quaisquer duas geodésicas tem no máximo um ponto em comum.

\mathbb{P}^3 tem a mesma métrica de \mathbb{S}^3 mas topologia diferente. ■

Observação 7. O dodecaedro de Poincaré é variedade esférica cujo volume é 120 vezes menor que \mathbb{S}^3 , considerando os dois com mesmos raios.

Proposição 4.4.2. Toda transformação ortogonal de \mathbb{R}^{n+1} se restringe a uma isometria em \mathbb{S}^n , e toda isometria de \mathbb{S}^n se estende a uma única transformação ortogonal de \mathbb{R}^{n+1} .

Corolário 4.4.2. O grupo de isometrias de \mathbb{S}^n é isomorfo ao grupo ortogonal $O(n+1)$.

A demonstração destes dois fatos se encontram em [Ratcliffe].

4.4.3 Variedades Hiperbólicas

Variedades hiperbólicas ainda não foram classificadas este é um problema em aberto, mas Thurston mostrou que uma grande quantidade 3-variedades é hiperbólica [Thurston], mais especificamente temos o

Teorema 4.4.4 (Thurston). *Seja $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ uma variedade hiperbólica não compacta, orientável e de volume finito. Então existe uma sequência infinita de variedades hiperbólicas orientáveis e compactas $M_j = \mathbb{H}^3/\Gamma_j$, tais que $\text{vol}(M_i) \leq \text{vol}(M_j) < \text{vol}(M)$, $i < j$, e que se acumulam em torno de M , no sentido que $\lim_{j \rightarrow \infty} \Gamma_j = \Gamma$ pontualmente, e $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{vol}(M_j) = \text{vol}(M)$.*

O grupo de isometrias de \mathbb{H}^2 é $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Qualquer isometria de \mathbb{H}^2 pode ser expressa como uma transformação de Möbius $z' \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $z \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

A dificuldade de “enxergar” \mathbb{H}^2 está no fato de que ele não pode ser imerso isometricamente em \mathbb{R}^3 , este resultado conhecido como teorema de Hilbert pode ser encontrado em [do Carmo2].

Analogamente, o grupo de isometrias de \mathbb{H}^3 atuando no subespaço superior de \mathbb{R}^3 é o grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ das transformações $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc = 1$. Ou seja, é o grupo das transformações conformes de \mathbb{R}^3 que deixam o subespaço superior invariante.

O volume de 3-variedades hiperbólicas compactas não pode ser arbitrariamente pequeno, a variedade de menos volume conhecida atualmente é a variedade de Weeks mas não se sabe se esta é a de menor volume possível.

Muitos teoremas interessantes e surpreendentes aparecem no estudo de variedades hiperbólicas como o teorema de rigidez de Mostow.

Teorema 4.4.5 (Mostow). *Sejam M, N n -variedades, $n > 2$, fechadas, conexas, orientáveis e hiperbólicas e $\varphi : M \rightarrow N$ uma equivalência homotópica entre M, N então φ é homotópica a uma isometria.*

Corolário 4.4.3. *A estrutura hiperbólica em uma n -variedade, $n > 2$, hiperbólica, fechada, conexa e orientável é única a menos de isometria homotópica à identidade.*

A demonstração destes fatos encontra-se em [Ratcliffe].

Ou seja, para $n > 2$, as n -variedades admitem no máximo uma métrica hiperbólica, em contraste com o caso $n = 2$ em que uma superfície hiperbólica admite muitas métricas hiperbólicas não equivalentes. Também podemos concluir a partir deste teorema que se duas n -variedades hiperbólicas, $n > 2$, possuem grupos fundamentais isomorfos então as variedades são isométricas, e mais estranhamente ainda, para variedades hiperbólicas de dimensão maior que 2, o volume da variedade e o comprimento de arco de geodésicas fechadas se tornam invariantes topológicos!

O teorema também nos diz que fixada uma topologia hiperbólica então existe uma única métrica compatível com esta topologia, e portanto o volume é fixado por sua topologia, e sendo assim, podemos classificar 3-variedades hiperbólicas pelos seus volumes.

Como consequência dos teoremas de Mostow 4.4.5 e de Thurston 4.4.4, as 3-variedades hiperbólicas compactas podem ser ordenadas em uma sequência enumerável de sequências enumeráveis de 3-variedades tais que cada sequência de variedades satisfaz o Teorema de Thurston, a variedade de acumulação de cada sequência é uma variedade com pontas⁴ e existe uma variedade hiperbólica de volume mínimo.

⁴Variedades construídas a partir de poliedros não compactos de volume finito são chamadas variedades com pontas.

É interessante notar que

Proposição 4.4.3. *Toda variedade hiperbólica, completa, n -dimensional, $n > 1$, de volume finito tem grupo de simetria finito.*

Vamos agora dar uma descrição mais clara do espaço \mathbb{H}^n .

Podemos realizar \mathbb{H}^n como o conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}$ com a métrica $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Desta maneira \mathbb{H}^n é simplesmente conexo por ser subconjunto conexo de \mathbb{R}^n que é simplesmente conexo.

\mathbb{H}^n é chamado espaço hiperbólico de dimensão n .

Vamos calcular a curvatura seccional de \mathbb{H}^n .

Para facilitar os cálculos vamos utilizar o conceito de métricas conformes.

Definição 4.4.4. *Duas métricas \langle, \rangle e $\langle\langle, \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são ditas conformes se existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ positiva tal que $\forall p \in M$ e $\forall u, v \in T_p M$ tem-se $\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p$.*

Exemplo 4.4.4. *A métrica $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$ é conforme à métrica usual do \mathbb{R}^n dada por $f_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \delta_{ij}$. ■*

Vamos denotar por g^{ij} a matriz inversa de g_{ij} , então $g^{ij}g_{jk} = \delta_{ik}$, ou seja, $g^{ij} \left(\frac{\delta_{jk}}{x_n^2} \right) = \delta_{ik}$, daí obtemos $g^{ij} = x_n^2 \delta_{ij}$. Fazendo $f = \log(x_n)$ e denotando por f_j a derivada parcial de f em relação à x_j temos $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\delta_{ik} \frac{2}{x_n^3} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} = -2 \frac{\delta_{ik}}{x_n^2} f_j$.

Os símbolos de Christoffel são definidos por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right) g^{mk}$$

No cálculo que estamos fazendo teremos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) x_n^2 \\ &= -\delta_{jk} f_i - \delta_{ki} f_j + \delta_{ij} f_k. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{cases} f_k & \text{se } i = j \neq k \\ -f_j & \text{se } i = k \neq j \\ -f_i & \text{se } j = k \neq i \\ -f_i & \text{se } i = j = k \\ 0 & \text{se } i \neq j \neq k \text{ e } i \neq k. \end{cases}$$

Com essas relações dos símbolos de Christoffel podemos calcular os coeficien-

tes da curvatura que são definidos por:

$$\begin{aligned}
 R_{ijij} &= \sum_l R_{ijil}^l g_{lj} = R_{ijij}^j g_{jj} = R_{ijij}^j \frac{1}{x_n^2} \\
 &= \frac{1}{x_n^2} \left(\sum_l \Gamma_{ij}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{ji}^j \right) \\
 &= \frac{1}{x_n^2} \left(\sum_{l, l \neq i, l \neq j} f_l f_l + f_i^2 - f_j^2 - f_i^2 + f_j^2 + f_{jj} + f_{ii} \right) \\
 &= \sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos $R_{ijk}^i = -f_k f_j - f_{kj}$, $R_{ijk}^j = f_i f_k + f_{ki}$, $R_{ijk}^k = 0$ e $R_{ijkl} = 0$ se os quatro índices são distintos.

Calculando a curvatura seccional no plano gerado por $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ obtemos $K_{ij} = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij} x_n^4 = (-\sum_l f_l^2 + f_i^2 + f_j^2 + f_{ii} + f_{jj}) x_n^2$.

Se $i \neq n$ e $j \neq n$ teremos $K_{ij} = \left(-\frac{1}{x_n^2}\right) x_n^2 = -1$; se $i = n$ e $j \neq n$ (a mesma conta vale para $i \neq j$ e $j = n$) teremos $K_{nj} = (-f_n^2 + f_n^2 + f_{nn}) x_n^2 = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1$.

Portanto, \mathbb{H}^n tem curvatura seccional constante igual a -1.

Para mostrar que \mathbb{H}^n é completo vamos utilizar o seguinte resultado.

Proposição 4.4.4. *Seja M variedade Riemanniana. Se M é homogênea então M é completa.*

Demonstração. Suponhamos que M não é completa, então existem $p \in M$ e uma geodésica normalizada $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ que não se estende além de t_0 , pelo teorema de Hopf e Rinow 4.3.3. Sejam $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $q = \gamma(t_0 - \frac{\epsilon}{2})$ e considere as bolas $B_\epsilon(p)$ e $B_\epsilon(q)$. Seja $\phi : M \rightarrow M$ uma isometria com $\phi(p) = q$ e $v \in T_p M$, $|v| = 1$, tal que $d\phi_p(v) = \gamma'(t_0 - \frac{\epsilon}{2})$. Como γ está normalizada tem-se $|v| = |d\phi_p(v)| = |\gamma'(t_0 - \frac{\epsilon}{2})| = 1$. Por outro lado, considere a geodésica $\alpha : [0, \epsilon) \rightarrow M$ dada por $\alpha(t) = \exp_p(tv)$. Temos então que $(\phi \circ \alpha)(0) = \phi(p) = q = \gamma(t_0 - \frac{\epsilon}{2})$ e $(\phi \circ \alpha)'(0) = d\phi_p \alpha'(0) = d\phi_p(v) = \gamma'(t_0 - \frac{\epsilon}{2})$. Portanto, $\phi \circ \alpha$ é uma geodésica que parte de $q = \gamma(t_0 - \frac{\epsilon}{2})$ com velocidade $\gamma'(t_0 - \frac{\epsilon}{2})$ na bola normal $B_\epsilon(q)$. Por unicidade, $\phi \circ \alpha = \gamma|_{[t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0]}$, ou seja, podemos estender γ na bola $B_\epsilon(q)$, e portanto, além de t_0 . Absurdo. \square

Como a curvatura seccional de \mathbb{H}^n é constante segue pelo teorema de Schur 4.3.2 que \mathbb{H}^n é homogênea, e pela proposição acima segue que \mathbb{H}^n é completa.

Mais geralmente, pode-se mostrar que se \tilde{M} é um espaço de recobrimento de uma variedade Riemanniana M , então \tilde{M} é completa se e somente se M é completa. Pelos teoremas de Schur 4.3.2 e Hopf e Rinow 4.3.3, temos que para as variedades consideradas neste trabalho sempre podemos encontrar uma geodésica ligando dois pontos dados p e q .

Vejamos agora como são as isometrias de \mathbb{H}^n .

Teorema 4.4.6 (Liouville). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, uma transformação conforme de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então f é a restrição a U de uma composição de exatamente uma isometria, uma dilatação e uma inversão.*

Teorema 4.4.7. *As isometrias \mathbb{H}^n são as restrições a $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ das transformações conformes de \mathbb{R}^n que levam \mathbb{H}^n sobre si mesmo.*

Em dimensão 2 o teorema acima implica que em \mathbb{H}^2 as isometrias são as transformações de Möbius.

É possível ladrilhar \mathbb{H}^3 com poliedros que possuem um número arbitrariamente grande de lados. E, assim como no caso 2-dimensional, existe uma 3-variedade de volume mínimo, embora este volume seja desconhecido atualmente.

Meyerhoff provou que $vol_{\min} > 0,00082R^3$, onde R é o raio de curvatura do recobrimento universal, a variedade hiperbólica de menor volume conhecido atualmente foi descoberta por Jeffrey Weeks e, independentemente, por Matveev e Fomenko e possui volume de $0,94272R^3$ [Luminet2].

4.5 O início do estudo de 3-variedades

Poincaré estava interessado em determinar a forma do universo, entretanto a teoria de 3-variedades estava sendo construída naquela época, seus estudos a respeito de variedades o levou a tentar encontrar um conjunto de invariantes que permitisse distinguir quaisquer duas variedades, e devido a estes estudos acabou desenvolvendo o conceito de Grupo Fundamental, esses resultados foram publicados em 6 artigos, o primeiro em 1895 e o último em 1904 [O'Shea].

O grupo fundamental ser trivial significa que qualquer caminho homotópico a um círculo pode ser deformado a um ponto.

Continuando seus estudos, Poincaré acabou desenvolvendo, em 1900, a seguinte conjectura: Toda 3-variedade compacta com homologia trivial é homeomorfa à \mathbb{S}^3 . O próprio Poincaré encontrou, em 1904, um contra-exemplo para esta conjectura, a 3-variedade ficou conhecida como Dodecaedro de Poincaré pois pode ser construída a partir da identificação as faces opostas de um dodecaedro depois de um décimo de giro no sentido anti-horário.

Ainda, tentando caracterizar \mathbb{S}^3 Poincaré acabou formulando outra conjectura que logo ficou conhecida como Conjectura de Poincaré, esta afirma que se o grupo fundamental de uma 3-variedade compacta e conexa, sem bordo, é a identidade então esta variedade é homeomorfa a \mathbb{S}^3 . Esta conjectura demorou cerca de um século para ser resolvida na sua formulação original, Stephen Smale provou para $n > 4$, Michael Freedman provou para $n = 4$ e Gregori Perelman, em 2002, provou a conjectura original para $n = 3$. Portanto qualquer 3-variedade compacta não homeomorfa à esfera é chamada de multiconexa.

Assim, Poincaré praticamente acabou criando a Topologia Algébrica com o conceito de grupo fundamental e outros conceitos em uma série de publicações [O'Shea].

Capítulo 5

Topologia Algébrica

A topologia algébrica surgiu no espírito de diferenciar variedades que não são homeomorfas através da associação de alguma entidade algébrica à variedades, e então tentar reduzir o problema topológico para um problema algébrico. Existem vários invariantes topológicos, como, por exemplo, Grupo Fundamental, Característica de Euler, Orientação, Grupos de Homologia (Simplicial e Singular), Grupos de Homotopia, Cohomologia (incluindo o caso especial e interessante de Cohomologia de de Rham) e Grupos de Holonomia.

5.1 Grupo Fundamental

Para estabelecer a ideia de grupo fundamental precisaremos antes do conceito de homotopia.

Definição 5.1.1 (Homotopia). *Sejam X, Y espaços topológicos, e sejam $f, g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Uma homotopia entre f e g é uma função contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Se existe uma homotopia entre f e g , dizemos que f e g são homotópicas e denotaremos por $f \simeq g$.*

Exemplo 5.1.1. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x) = (x, x^2)$ e $g(x) = (x, x)$. Então $H : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $H(x, t) = (x, x^2 - tx^2 + tx)$ é homotopia de f para g . ■*

Proposição 5.1.1. *Para quaisquer espaços topológicos X, Y , a propriedade de “ser homotópico a” é uma relação de equivalência no conjunto das funções de X para Y .*

Demonstração. • $f \simeq f$, basta tomar $H(x, t) = f(x)$.

• Se existe H tal que $f \simeq g$ então $\tilde{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ é função contínua e $\forall x \in X$ temos $\tilde{H}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$ e $\tilde{H}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$. Logo, $g \simeq f$.

• Se existe homotopia F entre f e g , e uma homotopia G entre g e h , com $f, g, h : X \rightarrow Y$ então

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

é função contínua, $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$. Ou seja, se $f \simeq g$ e $g \simeq h$ então $f \simeq h$. \square

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

A relação de homotopia é preservada por composição, isto é

Proposição 5.1.2. *Se $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ e $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ são contínuas com $f_0 \simeq f_1$ e $g_0 \simeq g_1$ então $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Demonstração. Seja F homotopia entre f_0 e f_1 e H homotopia entre g_0 e g_1 . Definindo $H : X \times I \rightarrow Z$ por $H(x, t) = G(F(x, t), t)$, temos que H é função contínua, $H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_0(x), 0) = g_0(f_0(x))$ e $H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = G(f_1(x), 1) = g_1(f_1(x))$. \square

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

Exemplo 5.1.2. *Seja X espaço topológico e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto convexo. Sejam $f, g : X \rightarrow B$ então $H(x, t) = f(x) + t(g(x) - f(x))$ é função contínua com $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, ou seja, f e g são homotópicas. \blacksquare*

Vamos utilizar a ideia de homotopia juntamente com conceitos sobre caminhos para definir grupo fundamental.

Definição 5.1.2 (Caminho). *Um caminho em um espaço topológico X é uma função contínua $\gamma : J \rightarrow X$, onde $J = [s_0, s_1]$, $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$. $\gamma(s_0)$ é dito ponto inicial do caminho, e $\gamma(s_1)$ é dito ponto final do caminho. O caminho é dito fechado quando $\gamma(s_0) = \gamma(s_1)$.*

Segue do exemplo 5.1.2 juntamente com a proposição 5.1.2 que podemos considerar $J = I = [0, 1]$, sem perda de generalidade.

Definição 5.1.3 (Conexo por Caminhos). *Um espaço topológico X é dito conexo por caminhos se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um caminho.*

Teorema 5.1.1. *Seja X espaço topológico conexo por caminhos então X é conexo.*

Demonstração. Suponha $U_0, U_1 \subset X$ abertos não vazios tal que $U_0 \cup U_1 = X$ e seja $x_0 \in U_0$ e $x_1 \in U_1$. Como X é conexo por caminhos, existe um caminho γ ligando x_0 a x_1 . Vale que $\gamma^{-1}(U_0)$ e $\gamma^{-1}(U_1)$ são abertos disjuntos em I tal que $\gamma^{-1}(U_0) \cup \gamma^{-1}(U_1) = I$. Além disso, $0 \in \gamma^{-1}(U_0)$ e $1 \in \gamma^{-1}(U_1)$, ou seja, esta é uma partição não trivial de I e portanto I é desconexo. Absurdo! \square

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

Daqui em diante estaremos interessados em homotopias sobre caminhos que possuem os mesmos pontos iniciais e finais, ou seja, se γ_0 e γ_1 são dois caminhos de I em X e existe homotopia satisfazendo $H(0, t) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ e $H(1, t) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, $\forall s, t \in I$, e $H(s, 0) = \gamma_0(s)$, $H(s, 1) = \gamma_1(s)$.

Definição 5.1.4 (Produto de Caminhos). *Sejam X espaço topológico e dois caminhos $f : [a, b] \rightarrow X$ e $g : [b, c] \rightarrow X$, se $f(b) = g(b)$, definimos o produto dos caminhos, denotado por $f \vee g$, como sendo*

$$f \vee g = \begin{cases} f(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ g(t) & \text{se } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Podemos reparametrizar os caminhos e por isso, de agora em diante, consideraremos todos os caminhos definidos em I .

Lema 5.1.1. *A multiplicação de classes de equivalência de caminhos é associativa.*

Demonstração. Sejam X espaço topológico e $f, g, h : I \rightarrow X$ caminhos tais que $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$, considere $F : I \times I \rightarrow X$ definido por

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t-1-s) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h\left(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}\right) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

F é contínua,

$$F(t, 0) = \begin{cases} f(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(-1+2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

ou seja, $F(t, 0) = ((f \vee g) \vee h)(t)$, e

$$F(t, 1) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(-3+4t) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

ou seja, $F(t, 1) = (f \vee (g \vee h))(t)$ □

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

Para afirmar que dois caminhos são homotópicos é necessário que os caminhos possuam as mesmas extremidades. Em particular, podemos usar caminhos fechados.

A classe de homotopia do caminho $\gamma : I \rightarrow X$ é o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades que γ e que são homotópicos a γ com extremos fixos durante a homotopia.

O conjunto dos caminhos num espaço topológico X munido da composição de caminhos não forma um grupo, pois o produto de caminhos só está definido quando o ponto inicial de um coincide com o ponto final de outro e a composição de caminhos não é associativa e não possui elemento neutro.

No entanto, estes problemas são resolvidos quando consideramos as classes de homotopias de caminhos.

Proposição 5.1.3. $\gamma^{-1} \simeq (\gamma')^{-1}$ para $\gamma \simeq \gamma'$.

Demonstração. Seja H homotopia entre γ e γ' , então $G : I \times I \rightarrow X$, $G(s, t) = H(1-s, t)$ é homotopia entre γ^{-1} e γ'^{-1} . □

Seja $[\gamma_0]$ a classe dos caminhos de x a y , e $[\gamma_1]$ a classe dos caminhos de y a z , definiremos o produto $[\gamma_0] \vee [\gamma_1] := [\gamma_0 \vee \gamma_1]$.

Este produto está bem definido pois não depende da escolha de γ_0 e γ_1 .

Analogamente, definiremos $[\gamma_0]^{-1} := [\gamma_0^{-1}]$, onde $\gamma_0 \in [\gamma_0]$.

Proposição 5.1.4. $[\gamma] \vee [\gamma^{-1}] = [e_x]$, $[\gamma]^{-1} \vee [\gamma] = [e_y]$, $[e_x] \vee [\gamma] = [\gamma] = [\gamma] \vee [e_y]$.

Observação 8. Numa homotopia $a \simeq b \vee c$ é permitido o ponto final de b mover-se durante o processo, os extremos de $b \vee c$, iguais aos de a devem permanecer fixos.

O conjunto das classes de equivalência ainda não é grupo, pois $[\gamma][\gamma^{-1}] = [e_x]$ e $[\gamma^{-1}][\gamma] = [e_y]$.

Agora, se considerarmos a estrutura de multiplicação de caminhos como acima, mas restringindo-se ao caso particular de caminhos fechados obtemos um grupo, o chamado grupo fundamental, denotado por $\Pi_1(X, x_0)$, onde x_0 é o ponto inicial e final e será chamado ponto base do grupo fundamental.

O ponto x_0 não é fundamentalmente importante pois se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X então $\Pi_1(X, x_0)$ e $\Pi_1(X, x_1)$ são isomorfos, este é o conteúdo do

Teorema 5.1.2. Cada classe de homotopia γ de caminhos que ligam x_0 a x_1 induz um isomorfismo $\bar{\gamma} : \Pi_1(X, x_1) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$, dado por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma \vee \alpha \vee \gamma^{-1}$.

Demonstração. Seja γ uma classe de homotopia de caminhos que ligam x_0 a x_1 . Se $\alpha \in \Pi_1(X, x_1)$ então $\gamma \vee \alpha \vee \gamma^{-1}(x_0) = \gamma(x_0) \vee (\alpha \vee \gamma^{-1}) = x_1(\alpha \vee \gamma^{-1}) = x_1 \gamma^{-1} = x_0$, ou seja, $\gamma \alpha \gamma^{-1} \in \Pi_1(X, x_0)$.

Observe que $\gamma \vee (\alpha \vee \beta) \vee \gamma^{-1} = (\gamma \vee \alpha \vee \gamma^{-1})(\gamma \vee \beta \vee \gamma^{-1})$, logo $\bar{\gamma}$ é homomorfismo de grupos.

Seja $\beta \in \Pi_1(X, x_0)$, então $\gamma^{-1} \vee \beta \vee \gamma \in \Pi_1(X, x_1)$ pois $x_1 \gamma^{-1} \vee \beta \vee \gamma = x_0 \beta \vee \gamma = x_0 \gamma = x_1$ e $\bar{\gamma} \vee (\gamma^{-1} \vee \beta \vee \gamma) = \gamma \vee (\gamma^{-1} \vee \beta \vee \gamma) \vee \gamma^{-1} = \beta \in \Pi_1(X, x_0)$.

Portanto $\bar{\gamma}$ é sobrejetiva.

Agora, dados $\beta, \sigma \in \Pi_1(X, x_0)$ se $\beta = \sigma$ então, pela sobrejetividade temos que existem $a, b \in \Pi_1(X, x_1)$ tal que $\gamma \vee a \vee \gamma^{-1} = \beta$ e $\gamma \vee b \vee \gamma^{-1} = \sigma$, portanto $\gamma \vee a \vee \gamma^{-1} = \gamma \vee b \vee \gamma^{-1}$, tomando γ à direita e γ^{-1} à esquerda temos $a = b$. \square

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

Corolário 5.1.1. Se X é conexo por caminhos então para quaisquer pontos de base x_0 e x_1 , os grupos fundamentais $\Pi_1(X, x_0)$ e $\Pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.

Este resultado nos diz que as propriedades de grupo independem do ponto x e dependem apenas do espaço, desde que este seja conexo por caminhos.

Observação 9. Não existe isomorfismo natural entre os grupos fundamentais, para cada $[\gamma]$, $\bar{\gamma}$ geralmente varia. Quando o grupo é abeliano o isomorfismo independe de $[\gamma]$. $\Pi_1(X, x_0)$ depende da componente conexa por caminhos do ponto x_0 .

Teorema 5.1.3. Os grupos fundamentais de espaços homeomorfos são isomorfos.

Demonstração. Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ induz um homomorfismo $f_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ definida por $f_{\#}(\alpha) = [f \circ a]$, onde $\alpha = [a]$. $f_{\#}$ está bem definida pois $a \simeq a' \Rightarrow f \circ a \simeq f \circ a'$, de fato, $f \circ (ab) = (f \circ a)(f \circ b)$, de modo que $f_{\#}(\alpha\beta) = f_{\#}(\alpha)f_{\#}(\beta)$.

Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ contínuas então obtemos os homomorfismos induzidos $f_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ e $g_{\#} : \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(Z, g(f(x_0)))$.

Temos que $(g \circ f)_{\#}(\alpha) = [(g \circ f) \circ a] = g_{\#}([f \circ a]) = (g_{\#} \circ f_{\#})(\alpha)$. Se $id : X \rightarrow X$ é a identidade então $id_{\#} : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ é homomorfismo identidade.

Se f é homeomorfismo então $id_{\#} = (f^{-1} \circ f)_{\#} = f_{\#}^{-1} \circ f_{\#}$ e $id_{\#} = (f \circ f^{-1})_{\#} = f_{\#} \circ f_{\#}^{-1}$, ou seja, $f_{\#}$ possui inversa a direita e a esquerda logo é bijetiva. \square

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

Este resultado nos diz que o grupo fundamental é invariante topológico, a menos de isomorfismos.

Se os grupos fundamentais de dois espaços não são isomorfos então os espaços não são homeomorfos.

Pode-se provar que o grupo fundamental de qualquer variedade é enumerável [Lee2].

Definição 5.1.5 (Espaço Contrátil). *Um espaço topológico X é contrátil quando é homotópico a um ponto.*

Proposição 5.1.5. *O grupo fundamental de um espaço contrátil possui único elemento.*

Definição 5.1.6 (Simplesmente Conexo). *Um espaço topológico X diz-se simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e $\Pi_1(X, x_0) = \{0\} \forall x_0 \in X$.*

Em outras palavras, um espaço simplesmente conexo é um espaço conexo por caminhos e todo caminho fechado sem auto-interseção pode ser deformado a um ponto.

Teorema 5.1.4. *Se $n > 1$ então \mathbb{S}^n é simplesmente conexo.*

A demonstração deste fato encontra-se em [Lima2].

Agora veremos uma proposição que nos ajudará no cálculo do grupo fundamental de algumas variedades.

Proposição 5.1.6. *Se $p : X \times Y \rightarrow X$ e $q : X \times Y \rightarrow Y$ são as projeções naturais então $\varphi : \Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$, dado por $\varphi(\alpha) = (p_{\#}(\alpha), q_{\#}(\alpha))$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $\gamma_1 : I \rightarrow X \times Y$ caminho fechado com base no ponto (x_0, y_0) , então γ é da forma $\gamma_1(s) = (a_1(s), b_1(s))$, onde $a = p \circ \gamma$ é caminho fechado em X com base em x_0 , e $b = q \circ \gamma$ é fechado com base em $y_0 \in Y$. Seja $\gamma_2 : I \rightarrow X \times Y$, $\gamma_2(s) = (a_2(s), b_2(s))$ outro caminho fechado em $X \times Y$ com base em $(x_0, y_0) \in X \times Y$.

Então $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ se, e somente se, $a_1 \simeq a_2$ e $b_1 \simeq b_2$. De fato, $K(s, t) = (G(s, t), H(s, t))$ é homotopia entre γ_1 e γ_2 se, e somente se, G é homotopia entre a_1 e a_2 e H é homotopia entre b_1 e b_2 . \square

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

Esta proposição diz que o grupo fundamental de um espaço produto é isomorfo ao produto dos grupos fundamentais de cada espaço.

Proposição 5.1.7. $\Pi_1(\mathbb{S}) \simeq \mathbb{Z}$.

Ver [Lima2].

Corolário 5.1.2. $\Pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \Pi_1(\mathbb{S}) \times \Pi_1(\mathbb{S}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^2$, mais geralmente $\Pi_1(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.

Corolário 5.1.3 (Toro sólido). *Seja D o disco fechado unitário, o toro sólido é realizado como $\mathbb{S} \times D$, portanto $\Pi_1(\mathbb{S} \times D) \simeq \Pi_1(\mathbb{S}) \times \Pi_1(\mathbb{D}) \simeq \mathbb{Z} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.*

Corolário 5.1.4 (Cilindro). *O cilindro (infinito) é realizado como $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, portanto $\Pi_1(\mathbb{S} \times \mathbb{R}) \simeq \Pi_1(\mathbb{S}) \times \Pi_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z} \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}$.*

Corolário 5.1.5. \mathbb{S} e \mathbb{T}^n não são contráteis.

5.2 Espaço de Recobrimento e Recobrimento Universal

Partindo do domínio fundamental e agindo através de simetrias em cada ponto do domínio fundamental gera-se uma cobertura do espaço no qual o polígono está, chamada Espaço de Recobrimento.

Por exemplo, o espaço de recobrimento do toro pareceria como abaixo.

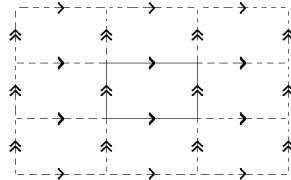


Figura 5.1: Espaço de recobrimento do toro \mathbb{T}^2 .

Ou seja, o \mathbb{R}^2 é o espaço de recobrimento do toro \mathbb{T}^2 , essa construção já apareceu no capítulo 2 no início da seção 2.2.

Definição 5.2.1 (Recobrimento). Uma aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ chama-se recobrimento quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma união de abertos dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V . O espaço \tilde{X} chama-se espaço de recobrimento de X .

O espaço de recobrimento é simplesmente conexo [Massey1].

Observação 10. Um recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local de \tilde{X} sobre X , mas nem todo homeomorfismo local de \tilde{X} sobre X é recobrimento.

Exemplo 5.2.1. Exemplos triviais de recobrimento podem ser obtidos considerando $id : X \rightarrow X$, o par (X, id) é um recobrimento de X ; e seja $p : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo, então o par (X, p) é um recobrimento de Y .

Exemplo 5.2.2. Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$, definida por $p(t) = (\sin t, \cos t)$. O par (\mathbb{R}, p) é um espaço de recobrimento do círculo \mathbb{S} .

Lema 5.2.1. Se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo local então a imagem inversa $f^{-1}(y)$ de cada ponto $y \in Y$ é um subconjunto discreto em X .

Demonstração. Cada ponto $x \in f^{-1}(y)$ possui uma vizinhança U na qual ele é o ponto que se aplica em y por f . Então $U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. □

Corolário 5.2.1. Seja X compacto, Y Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ homeomorfismo local então $f^{-1}(y)$ é finito para cada $y \in Y$.

Demonstração. $f^{-1}(y) = \bigcup_{U_y} (U_y \cap f^{-1}(y))$ são abertos em X , como X é compacto, toda cobertura aberta admite subcobertura finita, como cada $U_y \cap f^{-1}(y)$ é finito, segue que $f^{-1}(y)$ é finito. □

Teorema 5.2.1. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow p(\tilde{X})$ uma aplicação de recobrimento, com \tilde{X} compacto e $p(\tilde{X})$ conexo Hausdorff então $p(\tilde{X})$ é compacto.*

A demonstração encontra-se em [Lima2].

Agora veremos a formalização de algumas ideias que já apareceram neste capítulo.

Para obter algumas aplicações de recobrimento interessantes iremos precisar do conceito de grupos propriamente descontínuos operando livremente.

Definição 5.2.2. *Seja M um conjunto e G um grupo. Uma ação à esquerda de G em M é uma aplicação $\phi : G \times M \rightarrow M$ tal que:*

1. $\phi(id, x) = x, \forall x \in M;$
2. $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \forall g, h \in G$ e $x \in M.$

Utilizando uma notação mais corrente podemos escrever os itens acima como $id(x) = x, \forall x \in M;$ e $gh(x) = g(h(x)), \forall g, h \in G$ e $x \in M.$

Exemplo 5.2.3. *Seja M espaço métrico, o grupo das isometrias de M age em M por $\varphi(g, x) = \phi(x).$ ■*

Diz-se que G opera livremente se $G \setminus \{id\}$ não possui pontos fixos, ou seja, $\phi(g, x) \neq x, \forall g \in G \setminus \{id\}$ e $\forall x \in M,$ ou equivalentemente, se $g, h \in G \setminus \{id\}$ com $g \neq h$ então $g(x) \neq h(x), \forall x \in M.$

Definição 5.2.3 (Órbita). *A órbita de um ponto $x \in M$ relativamente a um grupo G é o conjunto $G_x = \{g(x) / g \in G\}.$*

Definição 5.2.4 (Ação Transitiva). *Uma ação é transitiva se dados $x, y \in M$ qualquer existe $g \in G$ tal que $g(x) = y.$*

A relação “existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$ ” é relação de equivalência entre os pontos $x, y \in M.$ Portanto, dados $x, y \in M$ então $G_x = G_y$ ou $G_x \cap G_y = \emptyset.$

Proposição 5.2.1. *Uma ação é transitiva se, e somente se, existe $x_0 \in M$ tal que dado $y \in M$ existe $g \in G$ tal que $g(x_0) = y.$*

Demonstração. (\Rightarrow) Se a ação é transitiva dado $x \in M$ qualquer, segue da definição de ação transitiva que existe $g \in G$ tal que dado $y \in M$ tem-se $g(x) = y.$

(\Leftarrow) Sejam $x, y \in M.$ Por hipótese, existem $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_1(x_0) = y$ e $g_2(x_0) = x,$ sendo $g = g_1 g_2^{-1}$ temos que $g(x) = g_1(g_2^{-1}(x)) = g_1 g_2^{-1}(g_2(x_0)) = g_1(x_0) = y.$ □

Em outras palavras, uma ação é transitiva se $G_x = M.$

Definição 5.2.5 (Ação Propriamente Descontínua). *Diz-se que um grupo G de homeomorfismos de M opera de modo propriamente descontínuo quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança V tal que $\forall g \in G \setminus \{id\},$ tem-se $g(V) \cap V = \emptyset,$ ou equivalentemente, se $g, h \in G,$ com $g \neq h$ então $g(V) \cap h(V) = \emptyset.$*

Dado um grupo G de homeomorfismos de M , denotaremos por M/G o espaço quociente de M pela relação de equivalência cujas classes são órbitas G_x , $x \in M$. A projeção canônica $p : M \rightarrow M/G$ associa a cada $x \in M$ sua órbita $p(x) = G_x$. A topologia de M/G tem como abertos os conjuntos $A \subset M/G$ tal que $p^{-1}(A)$ é aberto em M . Assim, os abertos de M/G tem a forma $p(U)$ onde $U \subset M$ é um aberto que é união de órbitas.

A aplicação contínua $p : M \rightarrow M/G$ é aberta pois se $V \subset M$ é aberto então $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} g(V)$ é aberto em M .

Proposição 5.2.2. *Seja G um grupo de homeomorfismos operando livremente no espaço M . Então G é propriamente descontínuo se, e somente se, $p : M \rightarrow M/G$ é recobrimento.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $y = p(x) \in M/G$ ponto arbitrário. Tome U vizinhança de x tal que $g(U) \cap h(U) = \emptyset$ para $g, h \in G$ e $g \neq h$. Como p é aplicação aberta $p(U) = V$ é vizinhança aberta de y . Temos $p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g(U)$, união de abertos dois a dois disjuntos, restrita a cada um dos quais a aplicação contínua e aberta p é injetiva, logo é um homeomorfismo sobre sua imagem $p(g(U)) = p(U) = V$.

(\Leftarrow) Se p é recobrimento então é localmente homeomorfismo e portanto localmente injetiva, ou seja, cada ponto $x \in M$ está contido num aberto U no qual não há dois pontos na mesma órbita, ou seja, $g(U) \cap U = \emptyset$. \square

Esta demonstração encontra-se em [Lima2].

Exemplo 5.2.4. *Para cada $m \in \mathbb{Z}$, seja $T_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a translação $T_m(x) = x + m$. O conjunto $G = \{T_m/m \in \mathbb{Z}\}$ age propriamente descontinuamente em \mathbb{R} . Mais geralmente, seja $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ o subgrupo aditivo formado pelos vetores cujas coordenadas são inteiras. Para cada $v \in \mathbb{Z}^n$, seja $T_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a translação $T_v(x) = x + v$. O conjunto $G = \{T_v/v \in \mathbb{Z}^n\}$ é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de \mathbb{R}^n . \blacksquare*

Exemplo 5.2.5. *Seja $\alpha : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$ a aplicação antípoda. O conjunto $G = \{id, \alpha\}$ é um grupo de homeomorfismos de \mathbb{S}^m pois $\alpha \circ \alpha = id$. G é propriamente descontínuo pois se V é um aberto contido num hemisfério então $\alpha(V) \cap V = \emptyset$. \blacksquare*

Exemplo 5.2.6 (Grupo que age contínua e transitivamente em \mathbb{S}^{n-1}). *Note que todos os pontos da esfera (centrada na origem, por convêniencia) podem ser vistos como vetores unitários de \mathbb{R}^n e que as matrizes ortogonais preservam a norma de vetores.*

Denotemos por $SO(n)$ o conjunto de todas as matrizes ortogonais de ordem n com coeficientes reais e determinante 1. Como $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ podemos definir de modo natural a ação $\phi : SO(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ por $\phi(A, x) = Ax$.

O contradomínio é \mathbb{S}^{n-1} pois $Id \in SO(n)$, e esta ação é contínua pois matrizes de $SO(n)$ são transformações lineares entre espaços de dimensão finita. Vejamos que $SO(n)$ age transitivamente.

Sejam $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$, sabemos que é possível completar x e y para bases ortonormais $\{x, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ e $\{y, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ de \mathbb{R}^n . Definindo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $T(x) = y$, $T(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n-1$. A matriz A associada a esta transformação linear em qualquer das duas bases é ortogonal e por construção $T(x) = y$.

Se $\det A = -1$ permuta-se algum par de elementos de uma das bases com exceção de x e y e então temos $\det A = 1$. Portanto, $SO(n)$ age transitivamente em \mathbb{S}^{n-1} . ■

Exemplo 5.2.7 (Grupo que age contínua e transitivamente em \mathbb{H}^2). Vamos identificar \mathbb{H}^2 como o conjunto $\mathbb{H}^2 = \{x + iy; y > 0\}$, e denotemos por $SL(2)$ o conjunto das matrizes com coeficientes reais e determinante 1. Definimos uma ação por $\phi : SL(2) \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, por $\phi(A, z) = Az = \frac{az+b}{cz+d}$, onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Esta ação é contínua por ser função racional complexa. $SL(2)$ age transitivamente em \mathbb{H}^2 , de fato tome $x_0 = i$ e considere $e + if \in \mathbb{H}^2$ e defina $A = \begin{pmatrix} \sqrt{f} & e\frac{\sqrt{f}}{f} \\ 0 & \frac{\sqrt{f}}{f} \end{pmatrix}$, então $\det A = 1$ e $Ai = e + if$, ou seja, \mathbb{H}^2 é órbita de i . ■

Exemplo 5.2.8 (Grupo que age contínua e transitivamente em \mathbb{R}^2). O grupo que agirá em \mathbb{R}^2 é o grupo das transformações afins de \mathbb{R}^2 , denotado por $A(2)$. Estas transformações nos dão todas as combinações lineares de rotações, translações e homotetias de \mathbb{R}^2 .

Intuitivamente a ação deste grupo é transitiva pois dados dois vetores em \mathbb{R}^2 é sempre possível deslocar um vetor até a posição do outro, rotacioná-lo na direção do primeiro e multiplicar seu comprimento de modo que os dois coincidam em módulo.

Mais formalmente temos que a ação $\phi : A(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\phi(A, v) = A(v)$ é contínua por ser composição de transformações contínuas. $A(2)$ age transitivamente em \mathbb{R}^2 pois \mathbb{R}^2 é a órbita de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. De fato, dado $v \in \mathbb{R}^2$ defina $A(u) = Id(u) + v$, onde Id é a identidade 2×2 . Temos $A \in A(2)$ e $A(0, 0) = v$, ou seja, $\phi(A, (0, 0)) = v$. ■

Vejam agora uma proposição que nos permite extrair uma característica especial do recobrimento sob certas hipóteses no domínio e contradomínio.

Proposição 5.2.3. Seja $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento, cujo domínio \widetilde{M} é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento $q : \widetilde{N} \rightarrow N$ com \widetilde{N} conexo, existe um recobrimento $f : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ tal que $q \circ f = p$.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [Lima2].

Em virtude deste fato, um recobrimento $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ com \widetilde{M} simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos chama-se um recobrimento universal.

Surpreendentemente, todos os recobrimentos universais de curvatura seccional constante de quaisquer variedades n dimensionais se reduzem a apenas três espaços, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 5.2.2. Seja M^n variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante K . Então o recobrimento universal \widetilde{M} de M^n , com a métrica do recobrimento, é isométrico a:

- a) \mathbb{H}^n , se $K = -1$,
- b) \mathbb{R}^n , se $K = 0$,

c) \mathbb{S}^n , se $K = 1$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [do Carmo].

Suponha M variedade Riemanniana e seja Γ subgrupo do grupo de isometrias de M que opera de modo propriamente descontínuo, então M/Γ tem uma estrutura de variedade diferenciável na qual $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ é difeomorfismo local, além disso, pode-se dar a M/Γ uma métrica riemanniana de modo que π seja isometria local. Também, pode-se provar que M/Γ é completa se, e somente se, M é completa, e que M/Γ tem curvatura seccional constante se, e somente se, M tem curvatura seccional constante. Para detalhes a respeito destes fatos consultar [do Carmo].

Um fato interessante e muito útil é que podemos obter qualquer variedade Riemanniana M de curvatura seccional constante a partir do seu recobrimento universal e de seu grupo de isometrias, mais precisamente temos o

Teorema 5.2.3. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante K igual a $1, 0$ ou -1 . Então M é isométrica a \widetilde{M}/Γ , onde \widetilde{M} é \mathbb{S}^n se $K = 1$, \mathbb{R}^n se $K = 0$ ou \mathbb{H}^n se $K = -1$, e Γ é um subgrupo do grupo das isometrias de \widetilde{M} que opera de modo propriamente descontínuo em \widetilde{M} , e a métrica de \widetilde{M}/Γ é a induzida pelo recobrimento $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [do Carmo].

Portanto, para determinar todas as variedades de interesse deste texto, basta determinar todos os subgrupos que operam de modo propriamente descontínuo do grupo das isometrias de \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n .

A determinação de tais subgrupos para \mathbb{S}^n foi completamente realizada na década de 60.

Outros resultados importantes que relacionam o grupo de simetrias de uma dada variedade e sua topologia seguem abaixo.

Teorema 5.2.4. *Seja X , onde X é \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n ou \mathbb{H}^n , $n > 1$, e Γ um grupo discreto de isometrias de X então $\Pi_1(X/\Gamma)$ e Γ são isomorfos.*

Teorema 5.2.5. *Seja Γ um grupo agindo descontinuamente em um espaço Hausdorff X localmente compacto. Então o espaço X/Γ é Hausdorff.*

Um resultado interessante é o seguinte: seja Γ um subgrupo do grupo de isometrias agindo livremente no poliedro fundamental de uma dada variedade e seja X o recobrimento universal desta variedade, então Γ é isomorfo ao grupo $\Pi_1(X/\Gamma)$. Portanto, se o subgrupo contém algum elemento além da identidade então a variedade é multiconexa [Roukema & Blanloeil] e [Lima2].

Capítulo 6

Topologia Cósmica

Topologia cósmica é o estudo da topologia global de objetos matemáticos, chamados variedades, que servem de modelo para a parte espacial do espaço-tempo, ou seja, o ambiente onde todos os fenômenos físicos ocorrem, também chamado universo. Iremos nos referir a espaço e universo de forma indistinta.

A relatividade geral mostrou que o universo não é um receptáculo vazio em que o mundo material pode ser colocado, ao contrário, possui uma estrutura que se deixa afetar pelo seu conteúdo, admitindo, por exemplo, curvatura; este tipo de característica indica a existência de uma métrica e portanto de uma topologia, sendo assim, uma variedade é o objeto matemático mais adequado para tentar descrevê-lo com relação à sua forma.

O presente capítulo não tem por objetivo fazer uma exposição detalhada de toda a física relacionada à cosmologia, pois isso seria por si só um trabalho, portanto são apresentados conceitos de forma menos rigorosa afim de que nesse contexto se faça a ligação com os temas matemáticos estudados anteriormente.

6.1 Conceitos de Astrofísica

6.1.1 Expansão do Universo

Observamos a luz das galáxias visíveis desviadas para o vermelho, no cotidiano esse fenômeno poderia ser interpretado, através do Efeito Doppler, como se as galáxias estivessem em movimento se afastando de nós, no entanto esse desvio para o vermelho não possui análogo nos fenômenos que podemos vivenciar no dia a dia; as galáxias não tem movimento devido à alguma forma de impulsão própria, o que ocorre é que o universo está expandindo e aumentando a distância entre os corpos celestes. Observacionalmente medimos que a taxa de expansão atual é de 7% por bilhão de anos [Luminet2].

A ideia da expansão do universo apareceu, em 1917, quando Albert Einstein aplicou sua teoria da relatividade geral para o universo como um todo, mas na época era consenso que o universo era estático, por isso ele introduziu um fator, chamado atualmente de constante cosmológica, em suas equações de modo que o universo fosse estático.

Em 1929, Edwin Hubble fez observações e chegou à conclusão de que as galáxias estavam se afastando e que este afastamento era proporcional à distância

da galáxia observada e por isso chamamos a taxa de expansão de constante de Hubble e denotamos por H^1 .

Se as galáxias estão se afastando com o passar do tempo, então no passado elas deveriam estar mais próximas, essa ideia proposta por Lemaître levou à Teoria do Big Bang.

É importante ressaltar que a expansão do espaço não implica na expansão dos corpos que estão no espaço.

Quando se fala em Big Bang é usual pensar na expansão do universo como tendo início a partir de um ponto que explodiu, ou seja, como a matéria se afastando de um ponto, mas essa concepção não é precisa; o Big Bang é o fenômeno a partir do qual todos os pontos do espaço começaram a se afastar uns dos outros, e pelo Princípio Cosmológico o Big Bang ocorreu em todos os pontos do universo ao mesmo tempo.

6.1.2 Densidade de Matéria e Energia

Friedmann encontrou uma relação entre densidade de matéria, a taxa de expansão e a curvatura do espaço quando aplicou a teoria da Relatividade Geral ao universo em expansão. Mais precisamente, se $\rho = \frac{3}{8\pi G}H^2$ (densidade crítica) o universo é euclidiano, se $\rho > \frac{3}{8\pi G}H^2$ o universo é elíptico e se $\rho < \frac{3}{8\pi G}H^2$ é hiperbólico, onde G é a constante de Newton, ρ é a densidade de matéria e energia e H é a constante de Hubble. Denota-se por Ω o valor da densidade real dividido pela densidade crítica, portanto para conhecer a geometria do universo basta comparar Ω a 1. Esta relação é surpreendente pois ρ e H podem ser medidos experimentalmente [Luminet1].

Atualmente, ao considerarmos a densidade de matéria e energia precisamos levar em conta os conceitos de matéria escura e energia escura.

A ideia de matéria escura surgiu para explicar os resultados do astrofísico Fritz Zwicky, que observou, em 1933, que a dispersão de velocidades das galáxias nos aglomerados de galáxias não obedeciam as leis de Kepler. Posteriormente, verificou-se que o mesmo ocorre com as estrelas em uma galáxias, como se vê na figura 6.1.

Para explicar a velocidade maior supõe-se que há mais massa do que podemos observar, essa massa é chamada matéria escura.

Com base nos dados obtidos estima-se que é necessário haver entre 10 e 100 vezes mais matéria escura do que matéria bariônica² para explicar o fenômeno [O.N.].

Estima-se a quantidade de matéria bariônica medindo as massas dos objetos luminosos com base na luminosidade que eles emitem, para calcular a massa dos gases intergalácticos e interestelares mede-se a quantidade de ondas de rádio (gás frio) e raios-X (gás quente) emitidas.

¹H é constante apenas em relação às coordenadas espaciais, devido à isotropia, mas pode depender do tempo.

²Matéria bariônica é composta por partículas como prótons e nêutrons, e apesar de não serem todos os tipos de partículas elas são basicamente responsáveis por toda a massa da matéria comum.

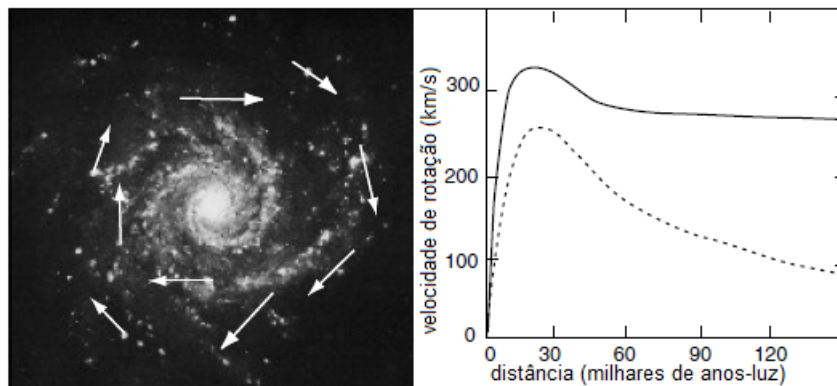


Figura 6.1: À esquerda, vê-se uma galáxia em espiral. À direita, um gráfico mostrando a velocidade de rotação conforme a distância, a linha cheia representa a velocidade observada, a linha pontilhada representa a velocidade prevista com base na quantidade de matéria observada. Fonte: [Luminet1], p. 220.

Vale ressaltar que o processo de nucleossíntese³ que ocorreu nos 3 primeiros minutos do universo foi o principal responsável pela criação de certos isótopos de elementos químicos, e com base nas medidas destes isótopos podemos estimar a densidade de prótons e neutrões no universo primordial e esses dados confirmam que não é possível que toda a matéria escura seja matéria bariônica que não vemos.

A natureza de tal matéria ainda é desconhecida, só sabe-se que se ela existe então não interage com matéria comum e por isso são muito difíceis de serem detectadas, devido a esse fato elas são chamadas de Wimps - Weakly Interacting Massive Particles (Partículas Massivas de Fraca interação) [Luminet1].

Estima-se, ainda, que parte da matéria escura seja matéria bariônica que não conseguimos detectar, por isso, vamos considerar que matéria escura é composta de buracos negros, pequenas estrelas que praticamente não brilham, gás interestelar e Wimps.

Medidas recentes apontam que temos aproximadamente 5% de matéria bariônica, 25% de matéria escura e 70% de energia escura, ou seja, a maior parte do universo é composto por entidades desconhecidas.

A quantidade de energia e de matéria bariônica e escura governam a curvatura do universo e as respectivas distribuições governam a dinâmica.

Os dados da Radiação Cósmica de Fundo obtidos pelos balões Boomerang-98 e Maxima-1, em 2000, e interpretados de acordo com certos modelos teóricos geram $0,95 < \Omega < 1,00$. Na prática algumas medidas contém erros muito grandes para permitirem conclusões, por exemplo, afirmar $\Omega = 1$ significa conhecer Ω com precisão infinita, o que não é possível experimentalmente.

6.2 Dimensionalidade do Espaço

Esta seção se baseia em [Jammer].

³Nucleossíntese é a formação de partículas pesadas através de fusão nuclear.

Se estamos interessados em encontrar uma variedade topológica de modelo para o universo, a primeira coisa que devemos nos perguntar é: Qual a dimensão do espaço?

Intuitivamente pensamos que a dimensão deveria ser 3 mas será que existe um bom motivo para isso? Vejamos alguns fatos que levam a considerar dimensão 3 para o nosso universo.

Observamos que a órbita de nosso planeta é elíptica e estável, ou seja, a órbita não deixa de ser uma elipse por perturbações como, por exemplo, a passagem de um cometa, e essa condição de órbitas estáveis só ocorre em 3 dimensões, essa argumentação foi feita por Ehrenfest em 1917.

Outro fato interessante é que a força gravitacional cai com o inverso da distância ao quadrado, $\frac{1}{r^2}$, mas em dimensões maiores cairia mais rapidamente com $\frac{1}{r^{n-1}}$, onde n é a dimensão do espaço, e neste caso o Sol não poderia existir de maneira estável, com sua pressão interna contrabalanceando a atração gravitacional, ele se desintegraria ou se tornaria um buraco negro [Hawking & Mlodinow].

Ehrenfest também estudou as consequências de $n \neq 3$ para o modelo do átomo de Bohr e constatou que uma generalização da Lei de Coulomb, preservando-se a quantização do momento angular, levaria a degenerações extremas e outras anomalias graves nos níveis de energia.

Para tentar demonstrar a tridimensionalidade do espaço, Weyl utilizou geometria não riemanniana invariante de gauge e mostrou que somente em uma variedade (3+1)-dimensional invariante de gauge existe um invariante integral muito simples, sob a forma da ação na qual se baseou a teoria de Maxwell, assim o tensor do campo eletromagnético é identificado com a curvatura da variedade e as equações de Maxwell aparecem como uma lei intrínseca. A demonstração de Weyl estaria completa se fosse possível mostrar que as leis de gravitação e do eletromagnetismo são deriváveis de um princípio variacional que precisa satisfazer as exigências dessa invariância.

Também podemos considerar um argumento que provém da termodinâmica, pois de acordo com o Teorema de Equipartição de Energia, se considerarmos um gás perfeito que possui apenas energia translacional então a energia do gás é $\frac{n}{2}k_B T$ onde n é a quantidade de dimensões em que o gás se desloca, medindo-se experimentalmente obtemos que a energia é $\frac{3}{2}k_B T$.

Houveram tentativas de se demonstrar a dimensionalidade do espaço com base em argumentos matemáticos. Poincaré, por exemplo, tentou demonstrar a dimensionalidade do espaço utilizando o seguinte argumento topológico: se retirarmos um ponto de uma reta, esta passa a ser descontínua, portanto qualquer ser unidimensional só teria acesso a uma das componentes conexas.

Se retirarmos um ponto de uma superfície, esta continua conexa, um ser que vive em tal ambiente poderá ir para qualquer ponto desta superfície, exceto o ponto retirado, entretanto se retirarmos uma curva fechada a superfície passa a ser desconexa e um ser só poderia ter acesso à parte interior da curva ou à parte exterior, este fato está relacionado com o famoso Teorema de Jordan⁴.

⁴Uma curva fechada e simples no plano divide-o em duas partes, ou seja, que o complementar da curva tem duas componentes conexas, uma das quais é limitada a outra ilimitada

Da mesma maneira uma superfície separa o espaço tridimensional em duas componentes. Se considerarmos, por exemplo, as paredes de um cômodo como sendo a envoltória de seu interior e o fato de não conseguirmos passar do lado de fora para o lado de dentro se o cômodo não possuir uma porta isso poderia soar como o análogo tridimensional dos casos acima. Essa ideia também aparece em Flatland [Abbott].

Desta maneira Poincaré argumentou que existe um limite inferior para a dimensão do espaço físico.

Com tais argumentos Poincaré acabou inspirando a definição matemática de dimensão topológica que era um conceito vago até início do século XX e era baseado na ideia do menor número de parâmetros reais contínuos suficientes para determinar a posição de um ponto.

Essa noção se mostrou deficiente pois Cantor demonstrou que existia uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e do plano.

Em 1911, Brouwer demonstrou que a dimensionalidade do espaço (matemático) é um invariante topológico e portanto os espaços \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m não são homeomorfos se $n \neq m$.

Outra argumentação de cunho matemático para demonstrar a tridimensionalidade do espaço vem da quantidade de sólidos de Platão. Em dimensão 2 existem infinitos sólidos de Platão, que neste caso são polígonos regulares; em dimensão 3 existem 5 sólidos de Platão, em dimensão 4 existem 6 hiper sólidos de Platão e para dimensões maiores existem apenas 3 hiper sólidos de Platão [Luminet1].

Se considerarmos a existência de esculturas dos 5 sólidos de Platão e a não possibilidade de esculpir um hipercubo, por exemplo, então somos levados a pensar que a única dimensão possível é 3. O leitor não convencido com tal argumento pode tentar construir um hipercubo, basta pegar 16 vértices, ligá-los usando 32 arestas de forma que tenha 24 faces e 8 volumes, esses números aparecem considerando o análogo multidimensional dos casos de dimensão menor.

Mesmo com todos os argumentos apresentados acima, favorecendo a nossa intuição⁵, a favor da tridimensionalidade do espaço físico temos que ter cuidado pois provas matemáticas são para objetos matemáticos abstratos, que por vezes são modelos para o mundo físico, mas levando-se em conta todos os argumentos mostrados acima o leitor não ficará muito incomodado por usarmos 3-variedades para tentar modelar a parte espacial do universo.

6.3 Princípio Cosmológico

Durante todo este capítulo vamos nos referir as propriedades do universo visível como sendo as propriedades de todo o universo, a razão disso é para podermos estabelecer modelos cosmológicos bem definidos; mesmo que o universo como um todo seja não homogêneo e não isotrópico tendo apenas uma pequena região isotrópica, onde nos encontramos, com regiões expandindo mais rápido que ou-

⁵Praticamente todas as pessoas tem a ideia de o espaço possuir três dimensões pois estamos acostumados a pensar em termos de largura, comprimento e altura, e isso nos é tão natural que a grande maioria das pessoas jamais se preocupou em estabelecer de maneira mais rigorosa tal percepção.

tras ou com maior quantidade de matéria, não temos como saber atualmente se tais regiões existem e nestes casos o universo seria tão grande que os métodos observacionais não nos permitiriam determinar a topologia do universo.

O Princípio Cosmológico consiste em supor que o universo é homogêneo e isotrópico.

Homogeneidade significa que quaisquer duas regiões do universo são parecidas, por exemplo, que a matéria se distribui de forma uniforme.

Isotropia significa que em qualquer direção as coisas serão parecidas não importa onde se esteja.

Consideraremos o universo isotrópico, em larga escala, porque o número de galáxias em todas as direções, a taxa de expansão e a radiação cósmica de fundo é aproximadamente a mesma em todas as direções, a radiação cósmica de fundo variando com algumas partes em 10^5 .

Localmente o universo não parece ser homogêneo. Para que o Princípio Cosmológico faça sentido é preciso olhar em uma grande escala tal que, por exemplo, o número local de galáxias seja praticamente o mesmo e o universo tem curvatura constante.

Na cosmologia utilizam-se as unidades parsec (pc) e Mpc, onde $1 \text{ parsec} = 3,26 \text{ anos-luz} = 3,08 \times 10^{16} \text{ m}$. Para se ter um parâmetro de comparação o diâmetro do nosso sistema solar é da ordem de 10^{11} m e nossa galáxia da ordem de 10^{21} m . Vale ressaltar que é comum encontrar medidas da ordem de 300 Mpc e que é a partir dessa escala que o universo parece satisfazer o Princípio Cosmológico [O.N.].

Estas duas suposições não são feitas apenas por parecem verdadeira em larga escala, o que ocorre é que as equações de Einstein $R_{ik} - \frac{g_{ik}R}{2} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$, onde g_{ik} é um tensor métrico, Λ é a constante cosmológica, G é a constante de Newton, c é a velocidade da luz e R é o escalar da curvatura de Ricci e R_{ik} é o tensor curvatura de Ricci, são muito difíceis de serem resolvidas no caso geral. Existem muitas soluções considerando certas simplificações, algumas não possuem sentido físico, mas duas grandes simplificações que reduzem o número de equações provém do Princípio Cosmológico.

Resolvendo as equações de Einstein levando em conta o Princípio Cosmológico e considerando a constante cosmológica⁶ obtém-se um conjunto de modelos cosmológicos que são chamados modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Basicamente, todos os modelos são deste tipo pois sem essas simplificações as equações são praticamente impossíveis de serem resolvidas analiticamente.

Para calcular a curvatura do universo precisamos conhecer certos objetos matemáticos, como o tensor de Ricci, que em 4 dimensões tem 16 componentes e pode ser representado por uma matriz 4x4. As hipóteses de isotropia e homogeneidade reduzem as componentes de forma que a curvatura se torna um tensor mais simples de ser determinado.

⁶A constante cosmológica se relaciona com a energia de vácuo mas seu valor experimental diverge muito do valor teórico, por uma diferença da ordem de 10^{122} .

6.4 Paradoxo da Borda

O universo é finito ou infinito?

Leucipo (480 a.C. - 420 a.C.) e Demócrito (460 a.C. - 370 a.C.) imaginavam o universo infinito, Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) imaginava a Terra no centro de uma bola finita com bordo.

No século 5 a.C., Arquitas (428 a.C. - 347 a.C.) descreveu o que é conhecido como “Paradoxo de Arquitas” ou “Paradoxo da Borda” (Edge paradox): suponha o universo finito então se uma pessoa vai até próximo de seu bordo e estica a mão para além do bordo, a nova posição da mão tem de estar no universo pois o universo abarca tudo que existe fisicamente e não faz sentido considerar que existe uma barreira material na borda do universo, Arquitas argumentou que repetindo este processo indefinidamente chegaríamos à conclusão de que o universo não pode ser finito, essa conclusão era aceitável na época pois o conceito de variedade tridimensional não era conhecido.

O universo newtoniano era infinito mas com uma quantidade finita de matéria, distribuída ocupando um volume finito, mantendo posições fixas, mas em tal universo o menor movimento causaria colapso de toda a matéria devido à sua instabilidade [Jammer].

Kant acreditou ter mostrado que tanto a finitude quanto a infinitude do universo levavam a contradições lógicas, entretanto Kant baseou suas conclusões no senso comum e geometria euclidiana, que se mostraram erradas com o desenvolvimento da geometria [Jammer].

Apesar de não haver resposta definitiva para esta questão vamos considerar somente 3-variedades fechadas pois, como defende o cosmólogo do MIT, Max Tegmark, [Tegmark], em um universo infinito podemos considerar que ele está dividido em volumes de mesmo tamanho, estes volumes admitem um número de possíveis estados que são as possíveis configurações de partículas desse volume que é tão grande quanto maior for o volume escolhido mas ainda é um número finito, e pelo Princípio da Casa dos Pombos⁷ pelo menos uma dessas configurações vai se repetir, possivelmente incluindo a configuração que contém nossa galáxia, ou seja, em um universo infinito provavelmente há várias versões de nós mesmos [Luminet1].

Por considerar tal cenário muito bizarro o autor deste trabalho vai desconsiderar 3-variedades abertas como modelos para o universo; o leitor menos conservador que achar natural a ideia de existir várias versões de si mesmo pode considerar o outro caso em estudos próprios.

6.5 Modelos Multiconexos

Ao nos referirmos a variedades abertas e fechadas, estaremos nos referindo à variedades com volume infinito e finito, respectivamente.

Vamos esclarecer alguns termos que as vezes são usados de forma errônea. Se o universo possui geometria elíptica então ele é fechado, isto é, possui volume

⁷Se n objetos devem ser postos em m casas, e se $n > m$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um objeto.

finito. No entanto, se o universo possui geometria euclidiana ou hiperbólica ele pode ser fechado ou aberto.

Em parte da literatura sobre cosmologia os termos aberto e fechado são usados para a evolução temporal do universo, significando expansão ou colapso, respectivamente. No entanto, neste trabalho aberto e fechado não terão esse significado em momento algum, pois não estamos interessados na dinâmica do universo.

As equações de Einstein não dizem se o universo é aberto ou fechado. A finitude do espaço depende da geometria, mas não somente dela, há uma dependência topológica.

O primeiro a cogitar um universo multiconexo, mais especificamente \mathbb{T}^3 , foi Karl Schwarzschild, em 1900.

Em um universo simplesmente conexo⁸ apenas uma imagem de cada objeto pode ser observada, mas em um universo multiconexo podemos ver várias imagens de nós mesmos se o tamanho do universo não for muito grande, então se observarmos nossa própria galáxia ao apontarmos um telescópio para o espaço, o universo é multiconexo; se não observarmos, nada se pode afirmar pois o universo pode ser simplesmente conexo ou ser multiconexo mas muito grande para que possamos observar nossa própria galáxia.

A diferença entre variedades simplesmente conexas e multiconexas pode ser entendida por analogia ao caso de dimensão 2, por exemplo, comparando o plano \mathbb{R}^2 com um cilindro.

Os dois possuem geometria euclidiana e área infinita, no entanto, no plano há somente uma reta ligando dois pontos dados, enquanto que no cilindro existem infinitas. O plano é isotrópico mas o cilindro não, pois possui circunferência finita em uma direção mas infinita em outra. A métrica é a mesma mas algumas características mudaram devido à mudança na topologia.

Essas outras imagens que não percorrem a menor distância até o observador são chamadas imagens fantasmas ou imagens topológicas, e em princípio poderiam existir em quantidade infinita, na prática o tamanho do universo observável comparado ao tamanho do universo, a potência dos telescópios e o decaimento do brilho como inverso da distância ao quadrado são fatores limitantes do número de imagens fantasmas observáveis, caso elas existam.

A quantidade de imagens fantasmas depende da razão entre o volume do universo observável e do poliedro fundamental que gera a topologia da variedade, e é finito no caso esférico mas pode ser infinito nos outros casos.

Mas o fator mais determinante é a velocidade da luz. Como a luz viaja a uma certa velocidade ao vermos galáxias muito distantes estamos vendo como elas eram no passado, não como são “atualmente”⁹.

Galáxias mudam muito com o tempo, então se vissemos a mesma galáxia em direções distintas do espaço estaríamos vendo como ela era no passado, de diferentes ângulos, com brilhos diferentes e com orientações diferentes, o que poderia tornar qualquer galáxia irreconhecível. Jeffrey Weeks compara essa situação com a tentativa de reconhecer algumas imagens de uma mesma pessoa em uma multidão

⁸ \mathbb{S}^3 é a única variedade simplesmente conexa que permite que várias imagens de um mesmo objeto sejam observadas por um observador em um dado ponto.

⁹Na prática, devido à relatividade da simultaneidade, ao dizer atualmente estamos nos referindo a um relógio que está no referencial do observador.

com centenas de bilhões de pessoas, mas uma hora a pessoa aparece como um bebê visto de frente, outra hora como um adulto visto de costas e em outra como um idoso visto de cima [Weeks].

Se o universo possui uma topologia multiconexa então teríamos a percepção de viver no recobrimento universal do poliedro que gera a topologia do universo, como se vê na figura 6.2.

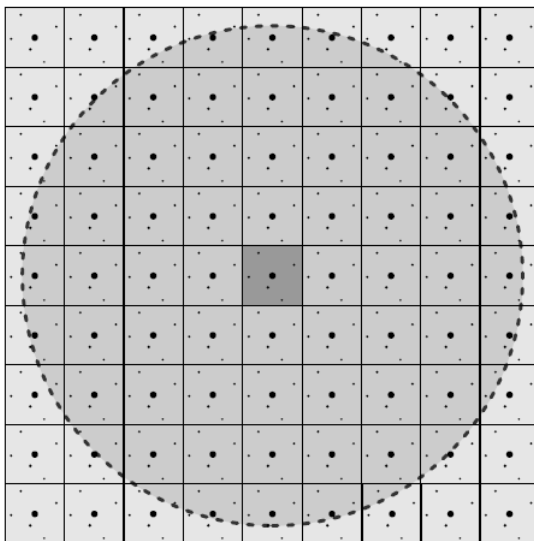


Figura 6.2: Na prática, um observador vivendo em um universo bidimensional que é um toro (quadrado do centro), veria apenas uma porção limitada do recobrimento universal do toro, este seria seu universo observável (região limitada pela linha pontilhada). Fonte: [Luminet1], p. 89.

À primeira vista, não há como um observador descobrir se vive em um universo multiconexo ou em um recobrimento universal que aparenta ser um universo simplesmente conexo.

Se conseguirmos identificar a topologia do universo poderemos determinar alguns fatores como a curvatura do universo e outros parâmetros cosmológicos sem precisar realizar medidas de quantidade de matéria e energia e de expansão do universo, isto representaria uma mudança no paradigma e eliminaria a incerteza experimental destes fatores ao caracterizá-los de maneira qualitativa.

Vejamos dois métodos experimentais que podem nos ajudar a diferenciar um universo simplesmente conexo de um multiconexo, e talvez até determinar exatamente a topologia do mesmo.

Como estamos supondo que o universo é isotrópico e homogêneo sua expansão é uniforme e portanto a mesma em todas as direções, sendo assim a topologia do universo é preservada pois sua expansão é homotética.

6.6 Cristalografia Cósmica

Este método criado por Marc Lachieze-Rey, Roland Lehoucq e Jean-Pierre Luminet, em 1996, é uma maneira de procurar padrões repetidos sem ter que focar em

nenhuma galáxia especificamente. O método consiste em criar um catálogo de galáxias e calcular a distância entre cada par de galáxias. Em um catálogo com n galáxias há $\frac{n(n-1)}{2}$ distâncias.

Na prática não há necessidade de se trabalhar com galáxias, precisa-se apenas de objetos luminosos e é mais prático trabalhar com superaglomerados de galáxias¹⁰, pois galáxias estão em movimento, cerca de 600 km/s, e a incerteza da posição em relação ao tamanho da galáxia é muito grande, mas é pequeno se comparado ao tamanho do superaglomerado. Outra vantagem é que existem centenas de bilhões de galáxias mas apenas algumas centenas de superaglomerados.

Ao invés de galáxias é possível usar erupções de raios gama (gamma-ray bursts) ou quasares, mas os primeiros não tem as distâncias conhecidas com a precisão necessária para usar o histograma, e os segundos tem um tempo de vida muito curto, cerca de 100 milhões de anos.

Na prática a observação de objetos é restrita devido à limitações observacionais, como limitação devido à baixa luminosidade, ao tempo de vida curto de alguns objetos e à ocultação da linha de visão, também é preciso conhecer a evolução da estrutura observada para conseguir reconhecer objetos que estão sendo observados. Ou seja, precisarmos observar objetos com longo tempo de vida e que não mudam muito com o tempo.

Em um universo simplesmente conexo as distâncias obedecem a distribuição estatística de Poisson, pois os objetos se distribuem de forma aleatória, e encontramos o histograma abaixo.



Figura 6.3: Fonte: [Weeks], p. 290.

Entretanto, em um universo multiconexo certas distâncias aparecem um grande número de vezes, pois a distância aparente entre duas imagens fantasmas da mesma fonte sempre mantém uma relação bem definida com o tamanho do poliedro fundamental. Em um universo multiconexo apenas os objetos originais estão distribuídos de forma aleatória, as imagens fantasmas são distribuídas em uma rede regular, como se fossem átomos em um cristal, portanto a mesma separação entre imagens fantasmas ocorre um grande número de vezes como no exemplo abaixo.

Exemplo 6.6.1. Observando a figura 6.4 vemos que as distâncias entre duas galáxias A é a mesma entre duas B e a mesma entre duas galáxias C.

À esquerda da figura 6.4 temos um espaço simplesmente conexo de área $4L^2$ contendo 17 objetos, e portanto temos 136 pares. À direita temos uma parte do

¹⁰Superaglomerados são aglomerados de aglomerados de galáxias.

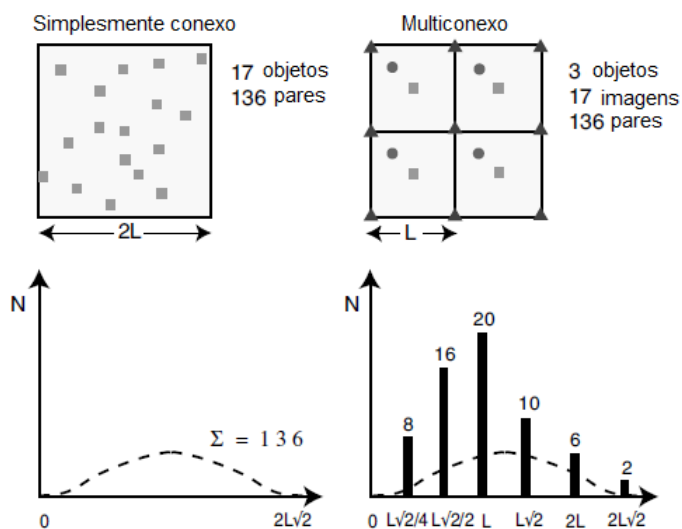


Figura 6.4: Figura do Exemplo 6.6.1. Fonte: [Luminet1], p. 109.

recobrimento universal de um espaço de área L contendo 3 objetos, um quadrado, um círculo e um triângulo. Essa parte do recobrimento universal contém 136 pares entretanto a distribuição não é mais aleatória e aparecem picos no histograma. ■

Com a mudança da topologia os picos mudam de posição e altura, revelando a assinatura topológica da variedade.

Dependendo da topologia da variedade podemos obter histogramas como abaixo.

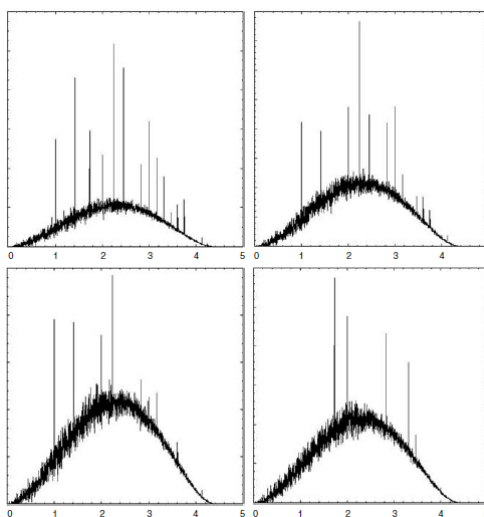


Figura 6.5: Fonte: [Luminet1], p. 110.

A partir da distância entre uma fonte real e a imagem fantasma mais próxima podemos calcular o tamanho e o volume do universo.

Infelizmente este método não funciona com todas as 3-variedades pois ao se concentrar em distâncias entre objetos o método é sensível a translações mas não a reflexões e rotações.

Exemplo 6.6.2. *Por exemplo, para a garrafa de Klein \mathbb{K}^2 a distância entre duas imagens do superaglomerado A não é necessariamente a mesma entre dois superaglomerados B mais especificamente como se vê na figura 6.6 se os dois objetos A estivessem na mesma linha horizontal, como o objeto C, a distância seria uma mas como há uma reflexão em torno de uma linha horizontal e o objeto A não está nessa linha temos que a distância de A é maior do que seria se só houvesse uma translação horizontal.*

Ao invés disso o método iria informar como resposta um toro \mathbb{T}^2 com área maior do que a área da garrafa de Klein, como pode ser visto na figura 6.7, pois no recobrimento universal o método consegue identificar a translação horizontal mas esta tem o dobro da distância devido à colagem.

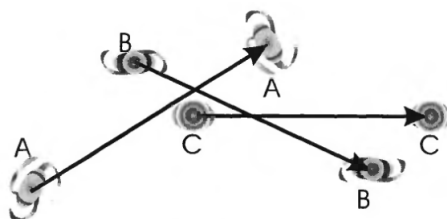


Figura 6.6: Figura do exemplo 6.6.2. Fonte: [Weeks], p. 292.

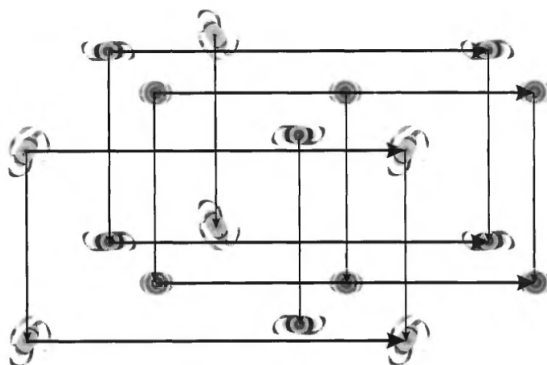


Figura 6.7: Figura do exemplo 6.6.2. Fonte: [Weeks], p. 293.

Para 3-variedades a situação é semelhante, por exemplo, para a “variedade rotacionada um quarto” o método falha pois não detecta a rotação e iria informar como resposta um toro \mathbb{T}^3 com volume quatro vezes maior que a variedade original.

Em 3-variedades hiperbólicas a distância entre duas imagens do superaglomerado A nunca é exatamente a mesma que entre duas imagens do superaglomerado B. Portanto, o método não se aplica a tais variedades.

Em 2001 existiam apenas catálogos de galáxias pouco detalhados cobrindo um volume limitado do universo e a aplicação deste método nestes catálogos não detectou nenhum padrão.

O maior catálogo de aglomerados de galáxias de três coordenadas, duas direções no céu e uma para distância aparente (desvio para o vermelho), existente contém cerca de 1000 objetos que se estendem não mais que 2 bilhões de anos luz. O

histograma para este catálogo não revelou picos, mas isso nada significa pois o tamanho do universo é estimado ser maior que 2 bilhões de anos luz.

6.7 Circles on the Sky

De acordo com a Teoria do Big Bang, no começo toda a matéria e energia do universo estava concentrada numa região pequena, pois o próprio universo era pequeno, e por causa de toda essa energia em um volume tão pequeno o universo era muito quente, atingindo temperaturas maiores que 3000 K.

A tais temperaturas toda a matéria se encontrava em um estado de plasma ionizado e nessas condições os fótons são dispersados por partículas carregadas, sendo assim tal universo pareceria opaco, caso pudéssemos estar nele, seria como estar em meio a uma neblina muito densa.

Com o passar do tempo, cerca de 400.000 anos após o Big Bang, o universo já tinha se expandido o suficiente para que a temperatura caísse e permitisse que o plasma se condensasse para um gás. O gás sendo neutro não interage com fótons, portanto o universo passou de uma plasma opaco para um gás aquecido transparente de hidrogênio e hélio.

A radiação liberada naquele momento tem viajado pelo universo até hoje. Com a expansão do universo a temperatura continua a diminuir e os fótons que foram emitidos quando a temperatura era 3000 K tem atualmente cerca de 2,7 K, estes compõem a chamada Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (Cosmic Microwave Background Radiation).

A Radiação Cósmica de Fundo foi observada experimentalmente pela primeira vez, de forma acidental, por Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965, sendo um indício da ocorrência do Big Bang; e possui uma variação de algumas partes em 10^5 , e é justamente essa variação que pode conter informações sobre a topologia do universo, vejamos como extrair tal informação.

Os fótons da Radiação Cósmica de Fundo que observamos viajaram à mesma velocidade durante os 300.000 anos do universo até hoje, portanto eles devem ter percorrido a mesma distância, ou seja, a Radiação Cósmica de Fundo observada teve origem em uma esfera gigante de radiação que é chamada Última Superfície de Espalhamento (Last Scattering Surface - LSS).

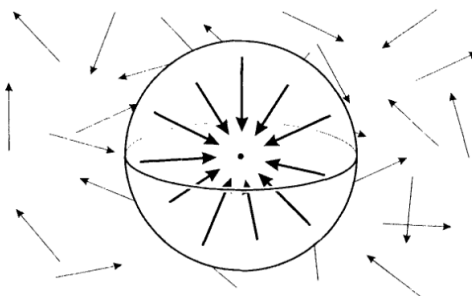


Figura 6.8: Última Superfície de Espalhamento. As flechas representam fótons e a esfera, que não possui existência material, é a LSS. Fonte: [Weeks], p. 301.

Cada observador em um dado local do universo e em um dado momento vai observar sua própria LSS.

Com o passar do tempo os fótons de regiões mais distantes terão tempo de chegar até nós, assim a LSS será maior com o tempo, essa esfera máxima que podemos ver é uma espécie de horizonte de eventos chamado horizonte cosmológico.

As variações da Radiação Cósmica de Fundo se devem ao fato de que fótons que saíram de regiões mais densas utilizaram mais energia para escapar da gravidade e portanto são mais frios que fótons de regiões menos densas, e assim conseguimos ver as variações de densidade do plasma primordial. Se nosso universo for maior que a LSS então não conseguimos nenhuma informação da Radiação Cósmica de Fundo, mas se nosso universo for menor que a LSS então ela intersecta a si mesma gerando círculos na Radiação Cósmica de Fundo.

Exemplo 6.7.1 (Toro). Se nosso universo for \mathbb{T}^3 e a LSS é menor temos o caso ilustrado em 6.9, e se a LSS é maior temos o caso ilustrado em 6.10.

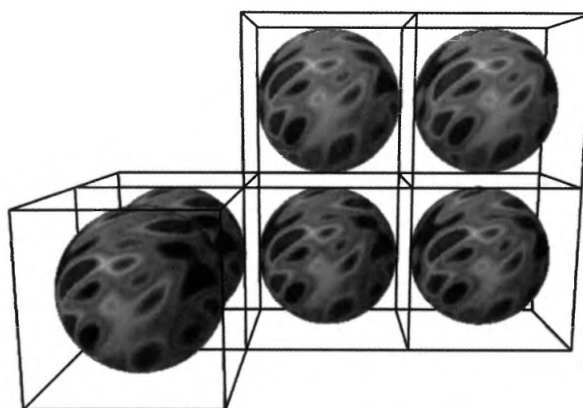


Figura 6.9: Universo observável menor que o universo. Fonte: [Weeks], p. 303.

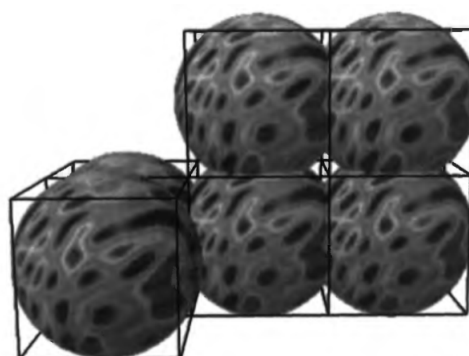


Figura 6.10: Universo observável maior que o universo. Fonte: [Weeks], p. 304.

■

Este método criado por Neil Cornish, David Spergel e Glenn Starkman consiste na análise dos círculos da auto-intersecção da LSS. Ainda considerando nosso universo como sendo \mathbb{T}^3 , menor que a LSS e nos considerando no centro da mesma, veríamos três pares de círculos como em 6.11.

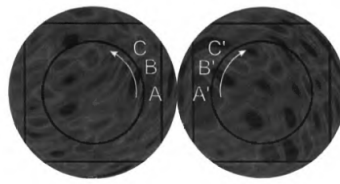


Figura 6.11: Círculos em \mathbb{T}^3 . Fonte: [Weeks], p. 305.

Os círculos estão identificados desta maneira devido à colagem de \mathbb{T}^3 .

Exemplo 6.7.2. Se o universo possuir a topologia da variedade “rotacionada um quarto” então veríamos os círculos como em 6.12. ■

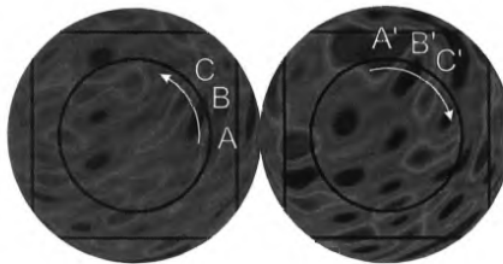


Figura 6.12: Figura do exemplo 6.7.2. Fonte: [Weeks], p. 352.

Exemplo 6.7.3. Se o universo possuir a topologia da variedade $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{S}$ então veríamos os círculos como em 6.13. ■

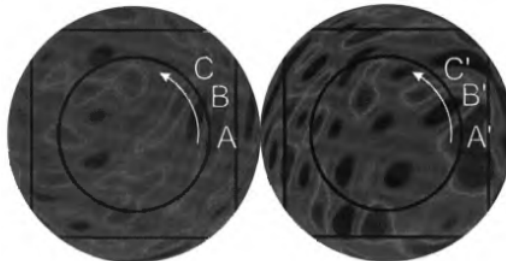


Figura 6.13: Figura do exemplo 6.7.3. Fonte: [Weeks], p. 352.

Exemplo 6.7.4. Se nosso universo possuir a topologia do dodecaedro de Poincaré ou do espaço de Seifert-Weber então veríamos 6 pares de círculos e poderíamos diferenciar uma da outra pois no dodecaedro de Poincaré os círculos opostos estariam identificados com um giro de $\frac{1}{10}$ enquanto que no espaço de Seifert-Weber os círculos opostos estariam identificados com um giro de $\frac{3}{10}$. ■

Como exatamente estes círculos podem revelar alguma informação topológica? Cada face do poliedro fundamental está no ponto médio entre uma imagem real e uma imagem fantasma, da mesma fonte; assim como cada círculo na Radiação Cósmica de Fundo está no ponto médio entre a LSS e uma imagem fantasma (imagem 6.14), portanto os círculos pertencem às faces do poliedro fundamental, e assim suas disposições relativas permitem encontrar os grupos de holonomia.

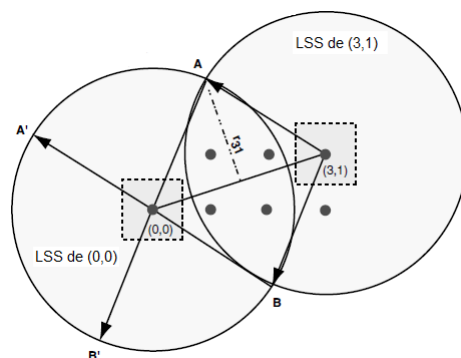


Figura 6.14: LSS e distâncias entre objetos. Fonte: [Luminet1], p. 120.

A Radiação Cósmica de Fundo por variar algumas partes em 10^5 confirma que em épocas passadas existia uma certa isotropia no universo. Mesmo assim, a busca por tais círculos não é fácil devido a várias fontes de ruído.

Em 2001 a NASA lançou o Microwave Anisotropy Probe (MAP), depois rebatizado de WMAP, para mapear a Radiação Cósmica de Fundo. Em 2009 a Agência Espacial Européia lançou o satélite Planck com capacidade de medidas mais precisas. A análise dos dados do WMAP foi submetida no final de 2012; os resultados do Planck foram liberados em 2013, parte do material gerado ainda está sob análise mas já existem resultados que limitam a topologia.

O principal objetivo destes satélites não é determinar a topologia do universo, na verdade estes satélites tem vários objetivos, como medir a taxa de expansão, a curvatura do espaço, a quantidade de energias do universo e estudar a formação de galáxias, mas os dados revelados podem esclarecer questões com relação à topologia.

6.8 Considerações Finais

O problema de tentar entender o Universo é um dos mais antigos da humanidade, e com os avanços matemáticos do último século e, principalmente, com os avanços tecnológicos das últimas duas décadas é possível tratar o assunto de forma mais clara e ter um entendimento de que talvez nosso Universo seja diferente do que pensamos.

Embora ainda estejamos longe de poder afirmar qual é a forma do nosso Universo, o futuro quanto à esta questão parece promissor. Este problema pode inspirar o surgimento de novas ferramentas em matemática, que por sua vez podem contribuir para um melhor entendimento físico do problema, como já aconteceu no passado com várias áreas da matemática.

Referências Bibliográficas

- [Abbott] Abbott, Edwin A. *Flatland*, Seeley & Co., Ltd, 1884.
- [Adams & Fransoza] Adams, Colin & Fransoza, Robert, *Introduction to Topology: Pure and Applied*. Pearson, 2009.
- [Andrade] Andrade, Eliza Ramos de, *Métodos de Construção de Variedades de Dimensão Três*. *Revista Matemática Universitária*, número 34, junho de 2003.
- [do Carmo] Carmo, Manfredo Perdigão do, *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, SBM, quarta edição, 2008.
- [do Carmo2] Carmo, Manfredo Perdigão do, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. *Textos Universitários, SBM*, terceira edição, 2008.
- [Cheng] Cheng, S. Y., *Eigenvalues comparison theorems and its geometric applications*. *Mathematische Zeitschrift* 143, 1975.
- [Hawking & Mlodinow] Hawking, Stephen & Mlodinow, Leonard *The Grand Design*, Bantam Books, 2010.
- [Jammer] Jammer, Max *Conceitos de Espaço*, Editora Contraponto, 2010.
- [Kinsey] Kinsey, L. Christine, *Topology of Surfaces*. *Undergraduate Texts in Mathematics*, Springer, 1993.
- [Lee1] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2000.
- [Lee2] Lee, John M., *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2010.
- [Levin] Levin, Janna, *Topology and the cosmic microwave background*. *Physics Reports* 365, 2002.
- [Lima1] Lima, Elon Lages, *Elementos de Topologia Geral*. *Textos Universitários, SBM*, 2009.
- [Lima2] Lima, Elon Lages, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto euclides, SBM, quarta edição, 2012.
- [Lima3] Lima, Elon Lages, *Homologia Básica*. Projeto Euclides, SBM, 2009.
- [Luminet1] Luminet, Jean-Pierre, *Wraparound Universe, The*. A K Peters Ltd., 2008.

- [Luminet2] Luminet, Jean-Pierre, & Rey, Marc Lachièze, *Cosmic Topology*. arXiv:gr-qc/9605010v2, 2003.
- [Luminet3] Luminet, Jean-Pierre, *Geometry and Topology in Relativistic Cosmology*. <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0704/0704.3374.pdf>, acessado em fevereiro de 2014.
- [Markov] Markov, A. A. *Insolubility of the Problem of Homeomorphy. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge: Cambridge University Press, 1958, 300-306.*
- [Massey1] Massey, William S., *Basic Course in Algebraic Topology*, A. Springer, 1988.
- [Tegmark] Tegmark, Max, *Our Mathematical Universe*. Deckle Edge, 2014.
- [Moise] Moise, Edwin E., *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer, 1977.
- [Nash] Nash, John, *The imbedding problem for riemannian manifolds*. *Annals of Mathematics*, 1956.
- [O.N.] *Curso EAD de Astrofísica Geral do Observatório Nacional*. http://www.on.br/ead_2013, acessado em setembro de 2013.
- [O'Shea] O'Shea, Donal *The Poincaré Conjecture*, Walker Publishing Company, Inc., 2007.
- [Petersen] Petersen, Peter, *Riemannian Geometry. Second Edition*, Springer, 2006.
- [Prishlyak & Mischenko] Prishlyak, A. O. & Mischenko, K. I., *Classification of non-compact surfaces with boundary*. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2007.
- [Radó] Radó, Tibor, *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*. *Acta Mathematica Szeged*, 1925.
- [Ratcliffe] Ratcliffe, John G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer, 1994.
- [Richards] Richards, Ian, *On the classification of noncompact surfaces*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1963.
- [Rotman] Rotman, Joseph J. *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2003.
- [Roukema & Blanloeil] Roukema, Boudweijn F. & Blanloeil, Vincent, *Three-dimensional topology-independent methods to look for global topology*. *Classical and Quantum Gravity*, 1998.
- [Roukema3] Roukema, Boudweijn F., *Topology of the Universe: Background and recent observational approaches*. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9904113>, 1999.

[Seifert & Threlfall] Seifert, H. & Threlfall, W., *Textbook of Topology*, A. Elsevier, 1980.

[Sommerville] Sommerville, D. M. Y., *An introduction to the geometry of N dimensions*. Methuen & CO. LTD., 1929.

[Thurston] Thurston, William P., *Geometry and TOpology of Three-Manifolds*, The. Princeton University Press, 1997.

[Weeks] Weeks, Jeffrey R., *Shape os Space*, The. Marcel Dekker, Inc., 2002.

[Weeks2] Weeks, Jeffrey R. & Francis, George K., *Conway's ZIP Proof*. *American Mathematical Montly*, volume 106, 1999.