

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física

**Comparação entre Algoritmos de Tomografia
Computadorizada Aplicada a Imagens Ruidosas**

Fernando de Amorim Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Jacob Scharcanski

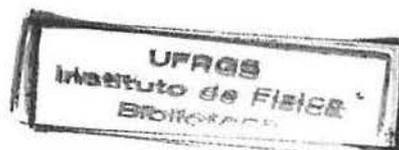
Instituto de Informática / UFRGS

RESUMO

Inicialmente descrevemos os princípios de instabilidade de substâncias radioativas e as radiações ionizantes existentes, destacando os raios gama, utilizados em medicina nuclear. Passando pelo estudo da interação da radiação com a matéria e de modelos estatísticos, foi possível descrever os princípios dos detectores existentes, demonstrando assim porque da utilização dos cintiladores em equipamentos de imagens (gama-câmera e PET/CT) [1,2]. A descrição dos elementos de uma gama-câmera (colimadores, cristal de cintilação, fotomultiplicadoras, pré-amplificadores e etc. [2,3]) foi um passo fundamental por ser o equipamento no qual estive me baseado durante esse trabalho, mesmo que a técnica de reconstrução de imagens seja a mesma para outros equipamentos, e por facilitar a visualização de como simples contagens são transformadas em imagens.

Como os eventos tratados têm natureza estocástica, estudei a distribuição estatística mais utilizada para obter parâmetros que serviram na comparação entre os métodos de reconstrução simulados [1,2,4].

As técnicas de aquisição foram separadas em duas: estática e SPECT (Single Positron Emission Tomography). SPECT foi o foco principal desse



trabalho que comparou alguns dos diferentes métodos de reconstrução, Retro-Projeção Filtrada (FBP, o mais utilizado) e os chamados Métodos Iterativos [2,5,6,7]. A parte experimental foi feita através de simulações computacionais no software MATLAB em que os métodos de reconstrução foram aplicados sobre dados ruidosos gerados a partir de fantoms matemáticos, de forma que foi possível acompanhar e comparar os parâmetros de análise [5, 8].

ABSTRACT

Initially we described the principles of instability of radioactive substances and radiation, highlighting the gamma ray, used in nuclear medicine. Turning to the study of the interaction of radiation with matter and the statistical models were unable to describe the principles of the existing detectors, thus demonstrating the reason of the the use of scintillators in equipment of images (gamma-camera and PET/CT) [1,2]. The description of the elements of a gamma-camera (collimators, scintillation crystal, photomultiplier, pre-amplifiers and others. [2,3]) was a key step for the equipment in which I based this work, even if the technique of reconstruction of images is the same for other equipment, and facilitate the visualization of how simple counts are converted into images.

As the events treated have stochastic nature, I studied the more used statistical distribution for obtain parameters that permit the comparison between the methods of reconstruction simulated [1,2,4].

The techniques of acquisition were separated into two: static and SPECT (Single Positron Emission Tomography). SPECT was the main focus of this work that compared some of the different methods of reconstruction, Filtered Back Projection (FBP, the most widely used in practice) and so-called Iterative Methods [2,5,6,7]. The experimental part was done through computational simulations in MATLAB software in which the methods of reconstruction have been applied on noisy data generated as mathematical phantoms, so that it was possible to monitor and compare the parameters of the analysis [5,8].

SUMÁRIO

<i>Introdução</i>	3
<i>Radiatividade</i>	4
<i>Interação da Radiação com a Matéria</i>	5
<i>Descrição Estatística</i>	6
<i>Câmara de Cintilação</i>	8
<i>Formação da Imagem</i>	11
<i>Métodos de Reconstrução</i>	13
<i>Retro-projeção filtrada</i>	13
<i>Métodos Iterativos</i>	17
<i>EM</i>	18
<i>MLEM</i>	19
<i>MAPEM</i>	20
<i>OSEM</i>	22
<i>Procedimento Experimental</i>	23
<i>Resultados</i>	24
<i>Conclusões</i>	28
<i>Bibliografia</i>	29

INTRODUÇÃO

O processo de obtenção, formação e reconstrução de imagens por cintilografia, ou mais geralmente por emissão, exige um esforço interdisciplinar de áreas como engenharia elétrica (processamento de sinal), ciência da computação (estrutura de dados, engenharia de software), física (modelamento dos processos de emissão e detecção), matemática, estatística e outras [9], isto é, devemos compreender desde princípios básicos até modelos matemáticos e/ou estatísticos complexos a fim de que possamos determinar em cada caso qual método será o ótimo para minimizar fatores de degradação primários, como características do detector; secundários, como posicionamento

do paciente e movimento, e terciários que incluem parâmetros de reconstrução e correções como atenuação, espalhamento, filtragem e etc.

RADIATIVIDADE

Os elementos químicos podem ser separados em estáveis e instáveis sendo que um único elemento pode ter diversos isótopos, elementos com mesmo número de prótons, em qualquer uma dessas classificações. Os isótopos instáveis são os objetos de interesse desse trabalho por serem emissores naturais de radiação, também chamados de radioisótopos ou radionuclídeos [10], o que será fundamental para a formação de imagens anatômicas e fisiológicas de uma estrutura, seja ela orgânica ou não. Os radioisótopos emitem radiação como uma forma de buscar estabilidade energética e dependendo do que for emitido, podem se tornar outro elemento químico ou outro isótopo do mesmo elemento, ficando estáveis ou não. Existe ainda a possibilidade de um átomo emitir radiação devido à interação com partículas e/ou radiações. As radiações podem ser originadas por processos nucleares ou atômicos (na camada eletrônica) e classificadas da seguinte forma [1]:

Classificação	Tipo	Exemplos
Partículas Carregadas	Elétrons Rápidos	β^+ , β^-
	Partículas Pesadas	Íons energéticos, produtos de fissão, α , p
Partículas não carregadas	Radiação Eletromagnética	γ , X
	Nêutrons	Nêutrons rápidos, nêutrons lentos

Tabela 1: Tipos de Radiações

Os diversos processos que originam a radiação não serão descritos neste trabalho, apesar de que alguns processos não são totalmente compreendidos estão amplamente estudados em diversas bibliografias tais

como [1,10]. O intervalo de energia dessas radiações pode variar muito (10eV – 10⁶MeV) e por isso elas podem ser aproveitadas de diversas maneiras, assim como podem ser muito prejudiciais à saúde. As radiações chamadas ionizantes são aquelas que atingem uma energia mínima que produza ionização (direta ou indiretamente) de um material.

A radiação gama tem fundamental importância no contexto desse estudo, pois é a radiação utilizada pelas câmaras de cintilação (ou cintiladores) nas quais está baseado o desenvolvimento experimental que será aqui descrito. Contudo essa restrição foi tomada apenas por simplificação, uma vez que a generalização para tomografia computadorizada por raios X, tomografia por emissão de pósitrons (β^+) e até ressonância magnética nuclear dependeria apenas de aplicar correções como fatores de geometria do feixe, geometria do equipamento e características da radiação utilizada. Como a formação de raios gama ocorre por emissão nuclear, é importante ter em mente os conceitos de atividade (A) e meia-vida ($t_{1/2}$) de uma fonte.

Atividade: É a Razão de decaimento (emissão de radiação, desintegrações) do átomo e depende de sua meia-vida. Sua unidade de medida foi definida inicialmente como Curie (C), mas no Sistema Internacional de Unidades é Becquerel (Bq).

Meia-vida: É o intervalo de tempo necessário para que metade dos átomos de certo elemento instável decaia.

INTERAÇÃO DA RADIAÇÃO COM A MATÉRIA

A razão da utilização da radiação como ferramenta de "transporte de informação" é que ela pode atravessar um meio com pouca ou nenhuma interação. Em uma imagem simples de raios X, por exemplo, a informação reside nos diferentes valores de atenuação gerados quando um feixe quase monoenergético atravessa um material com estruturas de diferentes densidades. Inversamente, para a cintilografia a atenuação é indesejada. Adicionando quimicamente fármacos aos radioisótopos, são produzidos os chamados radiofármacos que por características próprias vão se distribuir em

locais esperados ou não do corpo, destacando possíveis defeitos fisiológicos e/ou anatômicos. A difícil interação da radiação com a matéria é então muito útil, mas também faz com que seja necessário um grande esforço no sentido de detectar a radiação obtendo o mínimo de perda de informação possível. Ou seja, o estudo da interação dos raios gama com a matéria e suas formas de detecção é fundamental nesse trabalho.

Diferentemente de partículas carregadas, os raios gama não interagem diretamente com a matéria e por isso têm poder de penetração muito maior, assim sua localização só poderá ser detectada quando o feixe atuar sobre algum átomo da rede gerando então, normalmente, elétrons rápidos. A quantificação da penetração é probabilística, é função da energia incidente e é definida como secção de choque. Existem três modos principais de interação:

Efeito Fotoelétrico – Transferência total da energia da radiação para um elétron orbital que é ejetado com alguma energia cinética;

Espalhamento Compton - Transferência parcial da energia da radiação para um elétron com baixa energia de ligação. Assim o fóton muda a direção e perde energia.

Formação de Par – Se o fóton tiver energia superior ao dobro da massa de repouso do elétron ($2 \times 511 \text{ keV}$), perto do forte campo elétrico do núcleo, este fenômeno torna-se provável. Assim o fóton some dando lugar a um par elétron-pósitron os quais se deslocam em direções opostas com energia mínima de 511 keV .

A ocorrência dos fenômenos pode ser relacionada com a energia do fóton e o meio em que ocorre.

DESCRIÇÃO ESTATÍSTICA

As distribuições estatísticas e seus conceitos são muito importantes nesse tipo de trabalho. Podemos destacar fatores como o processo de decaimento nuclear que tem caráter aleatório (não pode ser determinado ou previsto exatamente), a forma probabilística da interação do fóton com a matéria, o ruído inerente a qualquer sistema eletrônico não ideal. Ou seja,

qualquer medida que for feita estará sujeita flutuações estatísticas que não podem ser evitadas e, normalmente, terão papel principal na incerteza associado.

A estatística de contagens é importante quando tratamos com dados aleatórios podendo ser aplicada de modos distintos. Por exemplo, poderíamos testar o bom funcionamento de um equipamento medindo um certo fator, enquanto todos os outros ficam aproximadamente constantes, e comparando o erro obtido com as flutuações esperadas. De outra forma, se temos apenas uma medida, podemos supor que o sistema se encaixe em uma certa distribuição conhecida, sendo possível quantificar a precisão e a incerteza esperada [1]. Dessa forma podemos definir o desvio padrão (s^2) como uma forma de obter as flutuações no conjunto de dados e a razão pico sinal ruído (PSNR) como um fator de qualidade da imagem:

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad PSNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{|A|}{s^2}$$

Em que x_i representa uma contagem com média \bar{x} , N é o número de elementos e A é a magnitude do sinal amostrado.

As distribuições Binomial, de Poisson e Gaussiana (Normal) são as mais difundidas e de maior relevância para aplicações relativas a esse trabalho, em que, o número total de medidas (contagens) pode ser visto como o número de sucessos relativos a um número de tentativas, ou seja, um processo binário. Na verdade os casos limites da distribuição Binomial definem as outras duas distribuições. Quando é possível realizar um número muito grande de medidas, com muitos sucessos, pelo teorema do limite central podemos utilizar a distribuição Gaussiana. A distribuição de Poisson (mostrada a baixo) é utilizada no caso de a probabilidade de sucesso de uma medida ser muito pequena, por exemplo, quando o tempo de medida for muito menor que o de meia-vida de uma fonte, que é o caso mais comum em sistemas de imagem por emissão. Nesse caso, o valor médio será dado pela probabilidade de sucesso

multiplicado pelo número de tentativas e o desvio padrão é obtido pela raiz quadrada do valor médio.

$$P(x) = \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!}$$

CÂMARA DE CINTILAÇÃO

O sistema de detecção de uma câmara de cintilação pode ser esquematizado conforme a figura 2.

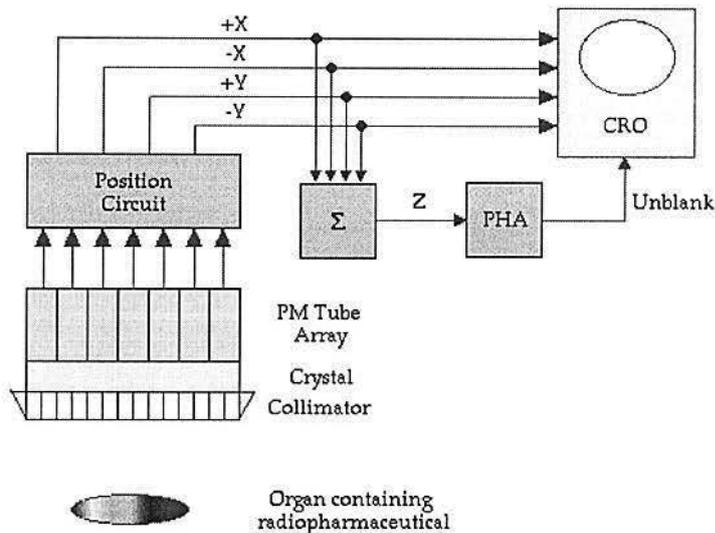


Figura 2: Esquema da câmara de cintilação

O primeiro "obstáculo" que o feixe encontra em seu caminho é o colimador. A colimação é fundamental pelo fato de que cada átomo do radiofármaco é uma fonte pontual e pode assim emitir fótons gama em qualquer direção. Esse dispositivo é constituído de uma placa de, basicamente, chumbo com septos (paredes entre furos) para a passagem dos fótons e pode ser configurado para diversos propósitos. Funcionando como uma lente, variando a angulação dos septos, ele pode ser convergente ou divergente, mas a forma mais utilizada é a paralela. À medida que diminuimos o tamanho dos

septos aumentamos a colimação do feixe, logo fótons incidentes na direção oblíqua aos septos serão barrados (no caso ideal em que nenhum fóton atravessa o chumbo) o que aumenta a resolução espacial enquanto diminui a sensibilidade (eficiência). No caso inverso, tamanho de septos grande, temos melhora na sensibilidade e perda de resolução. A espessura do chumbo determinará o intervalo de energia para o qual aquele colimador terá utilidade. Os colimadores são classificados quanto a energia (alta, média, baixa) e resolução espacial (alta, baixa, propósito geral).

O feixe colimado incide sobre o cristal cintilador que tem a função de absorver o máximo de fótons gama possível com a conseqüente emissão de fótons de luz. A eficiência do cristal, junto com a sensibilidade do colimador, são fatores determinantes do tempo de exame necessário para atingir a estatística de contagens necessária, uma vez que o material ativo injetado no paciente deve ser a mais baixa possível. Existem diversos tipos de cristais com características diferentes e de forma variada (orgânicos e inorgânicos, sólidos e líquidos); uma boa descrição pode ser encontrada em [1]. O mais utilizado para o caso é o de iodeto de sódio dopado com tálio [NaI(Tl)]. Além da eficiência, outras características são importantes, como: linearidade na conversão de gama em luz, menor tempo de decaimento possível (reduzindo a saturação), baixo índice de refração e de absorção da luz.

Acoplado ao cristal por meio de uma graxa ótica estão as fotomultiplicadoras (PMs). Estes dispositivos, assim como grande parte do processo de formação da imagem, foram utilizados inicialmente na astronomia e transformam uma simples cintilação do cristal em um pulso elétrico com grande eficiência sem que seja adicionado muito ruído eletrônico. Eles são encontrados em diversas geometrias e tamanhos, dependendo do interesse do fabricante, por exemplo, melhor acoplamento ou maior superfície de contato. Equipamentos modernos de imagem como os de PET/CT podem chegar a ter milhares de PMs; no caso da cintilografia não passam de cem.

O conjunto cristal e PM constituem apenas um dos muitos detectores de radiação existentes. Algumas características importantes dos detectores são:

Modo de operação – Corrente, integral da corrente em um intervalo de tempo, ou pulso (mais utilizado) conta os pulsos individualmente;

Analizador de altura de pulso (PHA) – Quando no modo pulso possui a capacidade de discriminar diferentes tipos de radiação ou detectar flutuações do sistema;

Resolução energética – Capacidade de reconhecer entre fótons com diferentes energias, obtida através da largura de meia altura (FWHM) do pico de energia;

Eficiência de detecção – Quantidade de elementos detectados do total emitido;

Tempo morto (dead time) – Tempo necessário para que o sistema possa captar um novo pulso.

Para sistemas de imagem podemos ainda ter resolução espacial (mínima distância entre duas fontes que o sistema pode distinguir). Outros detectores destacáveis são os a gás (câmara de ionização, proporcional e Geiger Muller) e de estado sólido, porém os cintiladores ainda são os que reúnem o maior número de características desejáveis.

Como podemos ver na fig. 3, uma fonte de alta tensão é necessária nesse detector, pois entre a entrada e a saída existe uma diferença de potencial de aproximadamente 10^3V . O fotocátodo localizado na entrada do tubo é excitado com a chegada luz resultando na emissão de um elétron de baixa velocidade que incidirá sobre o dinodo. Cada dinodo repete o processo com a liberação de mais elétrons, chamados secundários (em torno de cinco), promovendo a fotomultiplicação. Esse efeito cascata gera um fator multiplicativo, dado pelo produto do número de elétrons secundários e o número de dinodos, que é utilizado para determinar a energia do fóton incidente. No final do tubo se encontra o ânodo, terminal de onde sairá o pulso. Ainda fazem parte deste sistema um pré-amplificador que, além de amplificar o fraco sinal, ajusta as impedâncias e um amplificador; todos acoplados de modo que o ruído inerente seja mínimo.

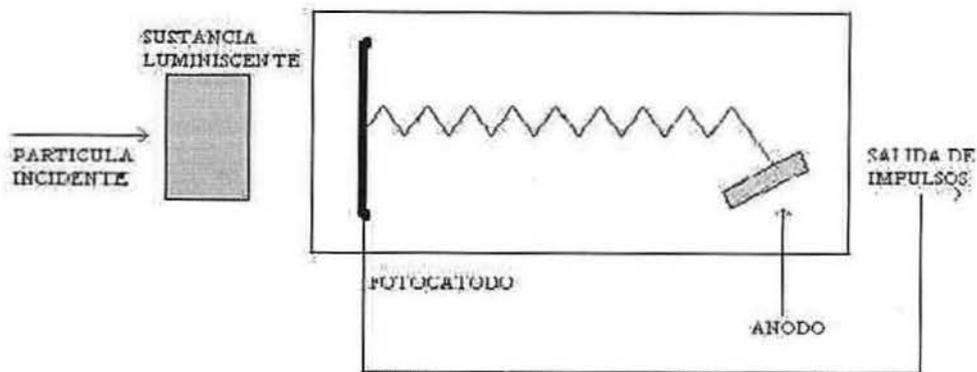


Figura 3: Fotomultiplicadora

FORMAÇÃO DA IMAGEM

Após coletada a informação, o PHA vai excluir os contagens feitas fora do intervalo de energia previamente determinado, diminuindo também a radiação espalhada por efeito Compton. A formação da imagem então ocorrerá de uma forma muito simples, através de uma matriz de posicionamento das PM que irá processar os pulsos somados de cada uma e determinar as posições através das equações [2,5]:

$$X = K.(X_+ + X_-)/Z \quad \text{e} \quad Y = K.(Y_+ + Y_-)/Z$$

em que Z é a energia do fóton e K é uma constante de proporcionalidade.

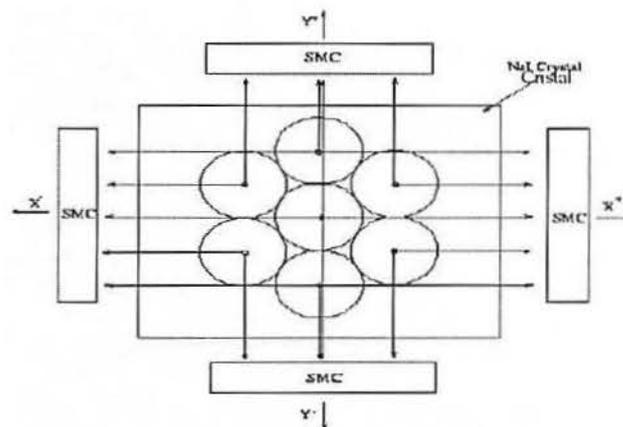


Figura 4: Sistema de localização

A imagem formada pelo sistema de detecção formará assim uma imagem estática ou plana e pode ser comparada com uma foto. Se movimentarmos o paciente sob o detector poderíamos ainda fazer uma imagem de corpo inteiro, por exemplo, fig. 5. Assim como em uma foto, não há noção de profundidade quando usamos este tipo de imagem, o que pode ser um problema se houver sobreposição de estruturas e quisermos saber onde está localizado um ponto quente (região com muitas contagens). Uma solução muito limitada é as imagens oblíquas, porém o advento da tomografia trouxe a possibilidade de visualizar tridimensionalmente um corte ou até um volume do paciente.



Figura 5: Cintilografia estática

Na verdade a tomografia (SPECT) consiste em obter diversas imagens estáticas, usualmente chamadas projeções, oblíquas a ângulos progressivos até completar trezentos e sessenta graus (360°) e depois agrupá-las, reconstruindo um corte do corpo. A reconstrução de volumes pode ser feita a partir da simples superposição e interpolação de múltiplos cortes (mais usada para emissão) ou ainda de diversas outras maneiras, como o novo método helicoidal usado em tomógrafos por raios-X; dessa forma me limitarei a abordar as técnicas de reconstrução bidimensional.

A plotagem do valor medido por cada PM, em um corte, contra o ângulo em que foi medido é definida com sinograma. Ele é de pouca utilidade para simulações computacionais, mas em casos reais é muito importante para

garantir que não ocorreu falha durante nenhuma projeção e identificar outros erros possíveis.

MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO

O processo de detecção tem caráter *discreto* D (cada projeção x tem contagens individuais de cada PM) e o objeto imageado é uma função f *contínua* C , ou seja, um sistema $D-C$. Assim segundo a classificação utilizada em [9] podemos separar os modelos reconstrução em três grandes grupos:

$D-D$ – Nesse grupo f é modelado através da combinação linear de funções de base. A função f sempre será a incógnita e o que desejamos reconstruir, nestes modelos, as bases são multiplicadas por coeficientes os quais desejamos obter;

$C-C$ – Ao invés de tornar f discreto, os valores medidos são tomados como amostras de uma função contínua que pode ser invertida considerando sua posição, de modo a determinar f .

$D-C$ – É o modelamento do caso real e resolvido por solução direta. Considerando que um operador P atue sobre f para gerar cada projeção medida ($x = P \cdot f$), podemos invertê-lo diretamente. Porém é muito pouco usado devido ao tamanho de P . Alguns métodos estudados são Decomposição em Valores Singulares (SVD) [11] e Matriz Inversa Generalizada [12], podendo levar mais de 8 horas para completar a solução.

Retro-projeção filtrada (FBP)

O método de retro-projeção filtrada (filtered back-projection) é o mais utilizado em todos os serviços de medicina nuclear devido a sua velocidade de convergência. Este método está baseado no teorema de Fourier em que qualquer função pode ser escrita como uma soma de senóides que servirão como função base e está classificado então como $C-C$.

Como características dessas funções, pode-se destacar que à medida que aumentamos o número de senóides, mais próximo do valor exato de $f(x,y)$

estaremos, e que a informação por elas carregada pode ser representada tanto no espaço das coordenadas como no espaço das freqüências, através das transformadas de Fourier. O espaço das freqüências é muito conveniente pois permite realizar operações rapidamente (ex.: convolução), separa ruído de background (altas e baixas freqüências, respectivamente) e permite uma visualização direta do limite imposto pelo teorema de Nyquist.

O teorema de Nyquist demonstra que existe uma freqüência máxima a partir da qual ocorrerá perda de informação, artefato definido como aliasing (sobreposição de freqüências), que é inversamente proporcional ao número de pixels ou, mais especificamente, ao tamanho do pixel (D) de uma matriz [13].

$$F_n = \frac{1}{2D}$$

Freqüência de Nyquist

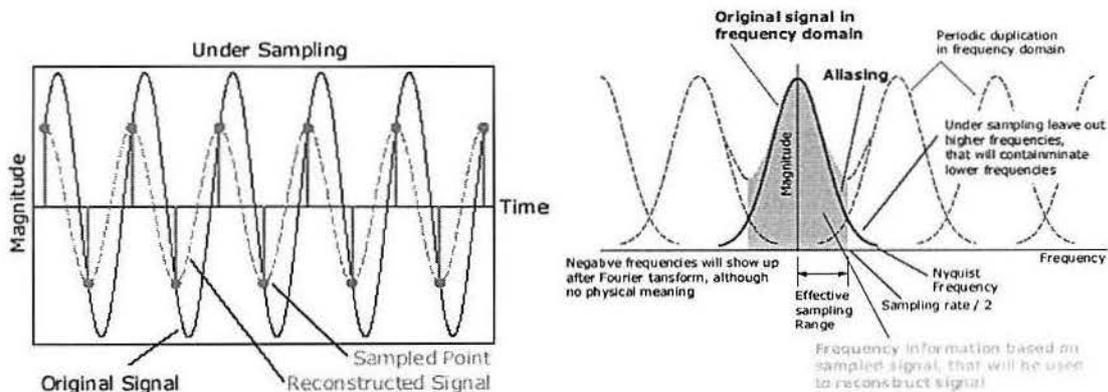


Figura 6: Aliasing

As medidas realizadas pelas PMs, no caso real, a partir de uma fonte radiativa, são feitas matematicamente pela transformada de Radon sobre um fantom matemático que simula algum tipo de estrutura. A transformada de Radon nada mais é do que uma integral de linha sobre uma função $f(x,y)$:

$$P_{\theta}(t) = \int_{(\theta,t) \text{ line}} f(x,y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

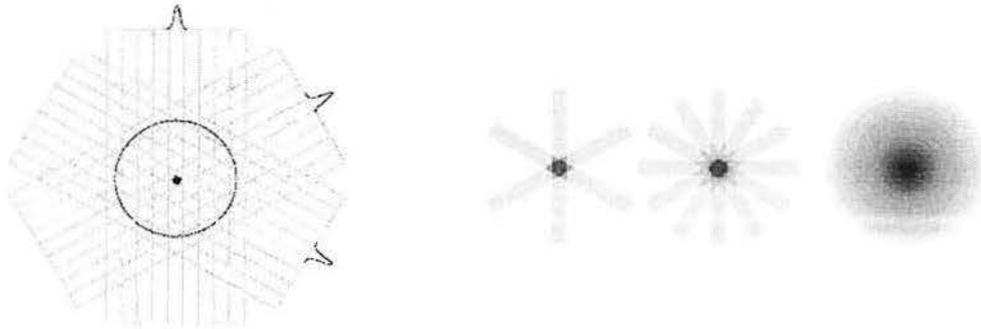


Figura 7: Projeções

O Teorema do Slice (corte) de Fourier (Fourier Slice Theorem) prova que a transformada de Fourier unidimensional de uma projeção paralela

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt$$

é igual a uma transformada de Fourier bidimensional de um slice do objeto original.

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

A prova desse teorema é feita facilmente supondo, por simplicidade, $\theta = 0$ [7]:

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx dy$$

$$P_{\theta=0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

Dessa forma é possível separar os termos independentes na transformada bidimensional que assume assim a forma de uma transformada unidimensional da projeção $P(x, \theta)$:

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] e^{-j2\pi ux} dx$$

$$F(u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\theta=0}(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$F(u, \theta) = S_{\theta=0}(u)$$

Pode-se demonstrar, da mesma forma, que o teorema é válido para qualquer ângulo θ utilizando transformações de coordenadas.

Como os detectores determinam o valor das integrais de Radon, basta realizar a transformada de Fourier sobre elas e depois retroprojetar (transformada inversa) sobre todos ângulos para reconstruir a imagem. No entanto, fica evidente um artefato do tipo estrela que é devido à superposição dos slices a vários ângulos (fig. 7). Como esse artefato mostra dependência direta com o raio, a solução desse problema é a filtragem das projeções; por simplicidade, fazemos a convolução da transformada da projeção com $2\pi|\omega|/k$. Esse é o chamado filtro rampa e tem o prejuízo de aumentar as altas frequências (ruído).

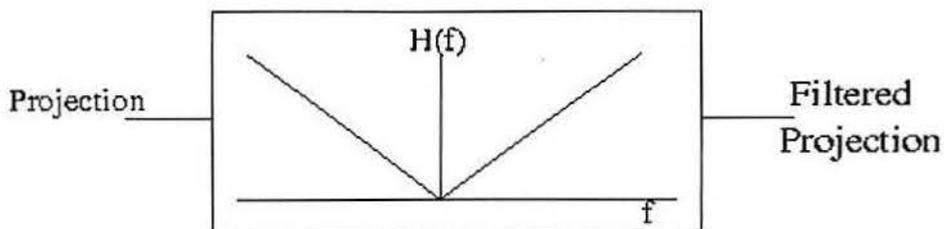


Figura 8: Filtro Rampa

Pseudo-algoritmo

Soma sobre todos os ângulos $\theta = 0^\circ$ até $\theta = 180^\circ$

Transformada de Radon (obter projeção)

Transformada unidimensional da Projeção

Aplicar filtro rampa (convolução)

Transformadas bidimensionais inversas (retro-projeção)

Métodos Iterativos

Os métodos iterativos aqui descritos são classificados como D-D e buscam solucionar uma equação do tipo $\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{f}$; assim, o objeto imageado \mathbf{f} é tido como um vetor (discretizado) e \mathbf{x} é o vetor contendo as projeções. As primeiras soluções que surgiram foram métodos algébricos como ART e SART [5,7], contudo eles são convergentes apenas para dados consistentes, de outra forma caem em um ciclo limite. O primeiro modelo a tentar incorporar o ruído inerente ao comportamento estatístico e de baixa contagem dos processos envolvidos como uma distribuição de Poisson foi o Maximum-Likelihood (ML) desenvolvido por Rockmore e Macovski (1976) [14] que no entanto só passou a ser utilizado com o surgimento do algoritmo Expectation Maximization (EM) que é uma aproximação para resolver problemas com ML [13]. A facilidade de adicionar correções, como para espalhamento, é uma das características mais relevantes destes métodos.

Basicamente podemos dizer que um método iterativo consiste de 5 componentes [9]:

Função Base – É a base na qual será representada a imagem, normalmente são pixels ou voxels;

Modelo físico do processo – Todo sistema envolvido deve ser modelado para determinar a forma da matriz de projeção. Cada elemento da matriz \mathbf{p} (p_{ij}) pode ser pensado como a probabilidade da emissão obtida na projeção i ter sido gerada pelo pixel j . Essa etapa é uma das maiores dificuldades no processo de reconstrução, uma solução poderia ser a obtenção através do método de Monte-Carlo [15];

Modelo da incerteza da medida – É necessário supor uma distribuição estatística, normalmente é a de Poisson;

Função objetiva – Será a função que determinará o critério e as propriedades de convergência do modelo;

Algoritmo – Conjuntos de regras que, baseadas nos componentes anteriores, buscarão definir o melhor vetor \mathbf{f} .

Dependendo do modelo não será necessário que tenha todos esses componentes ou que eles estejam nessa ordem.

Para esse estudo será usada uma base de pixels. A matriz de projeções foi obtida a partir dos algoritmos disponíveis no site de Fessler [16], que supõe uma câmara tomográfica com emissão de feixes paralelos. Pelas razões já demonstradas, a distribuição de Poisson é a de maior interesse e assim a função objetiva ML será a princípio estudada e implementada através do algoritmo EM. Como tentativa de solucionar os problemas existentes nesse modelo, foram implementadas as funções objetivas MAP (Maximum a Posteriori) e OS (Ordered Subset).

EM

Algoritmos como Gradient-based, Coordinate-Accent e outros seriam aplicáveis às funções objetivas que vou usar, porém parece amplamente aceito na maioria das literaturas que o método EM é o que melhor se adapta enquanto os outros necessitam de correções, ajustes e avanços para serem úteis na prática. Além disso, podemos destacar três características importantes do EM: garantia de valores sempre positivos, preservação do número de contagens e crescimento monótono até a convergência. Utilizado para tomografia por emissão desde [17], podemos separá-lo nos seguintes passos: Projeção – Nesse passo é estimado um valor para cada projeção i da imagem, ele se repetirá k vezes ou em k iterações:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^J f_j^{(k)} \cdot p_{ij}$$

Um valor inicial para o vetor \mathbf{f} deve ser dado, tipicamente um matriz uniforme. A matriz de projeções é representada pelo termo \mathbf{p}_{ij} .

Correção – Com a projeção estimada (β_i) e a projeção real (x_i), obtida pelos detectores, podemos determinar um termo de correção:

$$\Omega_i = \frac{x_i}{\beta_i}$$

Retroprojeção – Aplicando o termo de correção à matriz de projeção estamos retroprojetando a imagem (semelhante ao FBP):

$$\Psi_j = \sum_{i=1}^I \Omega_i \cdot p_{ij}$$

Update – Nesse passo os valores da imagem que queremos estimar é corrigido e substituído, completando uma iteração.

$$f_j^{(k+1)} = y_j^{(k)} \cdot \frac{\Psi_j}{\sum_i p_{ij}}$$

MLEM

É interessante começar a descrição pelo critério de ML para convergência. Os valores estimados para \mathbf{f} serão aqueles que maximizam a probabilidade de \mathbf{x} ocorrer, podendo ser provado analiticamente que é um máximo local e global. Partindo da distribuição de probabilidades de Poisson e utilizando a propriedade de que o logaritmo é uma função monótona, isto é, podemos usar a igualdade $\mathbf{p}(\mathbf{x} | \mathbf{f}) = \mathbf{L}(\mathbf{x} | \mathbf{f})$:

$$P(\mathbf{x} | \mathbf{f}) = \prod_i \frac{(\bar{x}_i)^{x_i} e^{-\bar{x}_i}}{x_i!}$$

$$L(\mathbf{x} | \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^M x_i \log(\bar{x}_i) - \bar{x}_i - \log(x_i!)$$

A garantia de que o máximo local será também um máximo global pode ser dada pela derivada de primeira e segunda ordem da equação:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x} | \mathbf{f})}{\partial f_j} = \sum_i p_{ij} \left(\frac{x_i}{\sum_k p_{ik} \cdot f_k} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{x} | \mathbf{f})}{\partial f_j \partial f_l} = - \sum_i \frac{p_{ij} \cdot p_{il} \cdot x_i}{\left(\sum_k p_{ik} \cdot f_k \right)^2} \leq 0$$

Aplicando então ML ao algoritmo EM, que é na verdade um método de substituição funcional, estaremos garantindo essas condições. A cada iteração será realizado um passo E (estimação) seguido de um passo M (maximização).

Pseudo-algoritmo

x é a matriz medida

f inicial é uma matriz uniforme de valor 1

Itera k=1 : n, n = nº de iterações

$$\phi(f; f^{(k)}) = E[L(w | f) | x; f^{(k)}]$$

$$\text{E: } \phi(f; f^{(k)}) = \sum_j [f_j^{(k)} \sum_i \frac{P_{ij} x_i}{\sum_l P_{il} f_l^{(k)} + r_i + s_i} \log(p_{ij} f_j) - f_j \sum_i P_{ij}]$$

$$\text{M: } f^{(k+1)} = \arg \max_f \phi(f; f^{(k)}) = \frac{f_j^{(k)} e_j(f^{(k)})}{\sum_i P_{ij}}$$

$$\text{onde } e_j(f^{(k)}) = \sum_i \frac{P_{ij} x_i}{\sum_l P_{il} f_l^{(k)} + r_i + s_i}$$

MAPEM

Apesar de o método MLEM convergir e ser de fácil implementação ele tem seus defeitos, sobre um desses problemas é que está apoiada a idéia da função objetiva MAP. À medida que o número de iterações aumenta para MLEM, o ruído gerado também aumenta sendo normalmente necessário utilizar um valor empírico de convergência. Então o MAP sugere que se deixe de buscar "uma imagem mais próxima possível do estimado" e passe a buscar "a imagem mais próxima possível e com mínimo de ruído". Essa modificação é possível colocando um termo de regularização associado ao de maximização.

$$\phi(f) = L(x | f) - \beta U(f)$$

A regularização é feita através de informação "a posteriori". Nesse caso será imposto um termo de interação com os pixels vizinhos, segundo descrito por Green [15]. Contudo, existem inúmeras outras formas sendo desenvolvidas [18] que podem considerar distribuições supostas previamente ou posteriormente (a posteriori), espacialmente independentes ou interagentes. Essa maximização pode ser feita através de uma modificação do EM:

$$f^{(k+1)} = \arg \max_{f \geq 0} \sum_j (f_j^{(k)}) \sum_i \frac{P_{ij} x_i}{\sum_l P_{il} f_l^{(k)} + r_i + s_i} \log(p_{ij} f_j) - f_j \sum_i p_{ij} - \beta U(f)$$

$$f^{(k+1)} = \frac{f_j^{(k)}}{\sum_i P_{ij} + \beta \frac{\partial U(f_i^{(k)})}{\partial f_i}} \sum_i \frac{P_{ij} x_i}{\sum_l P_{il} f_l^{(k)} + r_i + s_i}$$

Em que

$$\frac{\partial U(f_i^{(k)})}{\partial f_i} = \sum_{b \in N_j} w_{jb} (f_j^{(k)} - f_b^{(k)})$$

Pseudo-algoritmo

x é a matriz medida

f inicial é uma matriz uniforme de valor 1

Itera $k = 1 : n$, $n = n^\circ$ de iterações

E: $\phi(f; f^{(k)}) = E[L(w | f) | y; f^{(k)}]$

M: $f^{(k+1)} = \arg \max_f \phi(f; f^{(k)}) = \frac{f_j^{(k)} e_j(f^{(k)})}{\sum_i P_{ij} + \beta \sum_{b \in N_j} w_{jb} (f_j^{(k)} - f_b^{(k)})}$

onde $e_j(f^{(k)}) = \sum_i \frac{P_{ij} x_i}{\sum_l P_{il} f_l^{(k)} + r_i + s_i}$

OSEM

Outro defeito inerente ao algoritmo MLEM é o alto tempo de iteração. Este fator o afastou da prática hospitalar. Assim os métodos iterativos somente começaram a ser amplamente usados fora dos laboratórios de pesquisa com o surgimento do OSEM, em 1994 [19], que visa minimizar o tempo de convergência. Não é fácil de implementar como os outros, no entanto, o esquema utilizado é muito simples.

A parte mais custosa de um algoritmo de reconstrução estatístico ou algébrico está no tamanho de suas matrizes. Mesmo uma matriz muito pequena como a que usei, 32x32 pixels (1024 pixels), e um número pequeno de projeções, 60 a cada 6 graus que é uma matriz de 60x60 (3600 projeções), determinam uma matriz de projeções muito grande, 3600x1024.

O OSEM consiste em separar o conjunto de dados em subgrupos, gerando menor custo computacional. Aplicando assim a função objetiva a cada subgrupo:

$$\Phi(f) = \sum_{q=1}^{N_s} \Phi_q(f)$$

em que N_s é o número de subconjuntos. Cada subgrupo tem todo o conjunto de pixels da imagem a ser estimada, pois só são separadas as projeções, e será maximizado através de EM. Uma única passagem por todos os subgrupos é necessária para uma imagem aceitável, pois assim passa por todas projeções, corresponde ao tempo de uma iteração MLEM. Podemos reescrever o processo de maximização que será aplicado a cada subgrupo da seguinte forma:

$$f_j^{(k,q)} = \frac{f_j^{(k)}}{\sum_{i \in S_1} p_{ij}} \sum_{i \in S_q} \frac{p_{ij} \cdot x_i}{\sum_l p_{il} f_l^{(k,q-1)} + r_i + s_i}$$

Os subconjuntos são representados por S_q , $f^{(k,0)} = f^{(k-1)}$ e $f^{(k,N_s)} = f^{(k)}$, para $j = 1, \dots, N$ e $q = 1, \dots, N_s$. A melhora na velocidade de convergência é diretamente proporcional ao número de subgrupos, porém um número muito grande deles significa muitas iterações e conseqüentemente acréscimo no ruído. Como o

OSEM converge apenas para um ciclo limite. É importante testá-lo e obter empiricamente, ou por parâmetros de erro, o número ótimo de iterações e subgrupos.

De acordo com [19], quanto maior o espaçamento angular entre cada projeção que compõe um subgrupo, melhor vai ser a qualidade final.

Pseudo-algoritmo

x é a matriz medida

f inicial é uma matriz uniforme de valor

S_i é um subconjunto **i**

Itera **k=1** : **n**, **n** = n^o de iterações

Itera **i =1:N**, **N** = número de subconjuntos

$$\text{E: } \phi(f; f^{(k)}) = E[L(w | f) | y; f^{(k)}]$$

$$\text{M: } f^{(k+1)} = \arg \max_f \phi(f; f^{(k)}) = \frac{f_j^{(k)} e_j(f^{(k)})}{\sum_{t \in S_i} P_{tj}}$$

$$\text{onde } e_j(f^{(k)}) = \sum_{t \in S_i} \frac{P_{tj} x_t}{\sum_l P_{tl} f_l^{(k)} + r_t + s_t}$$

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O processo experimental desse trabalho foi a simulação, no software MATLAB, de todos os métodos aqui descritos (FBP, MLEM, MAPEM, OSEM) e análise estatística da qualidade através do desvio padrão ou da PSNR.

Foram utilizadas matrizes de 32x32 pixels. Sobre o fantom "Shepp-Logan", interno do software, foram obtidas 60 integrais de Radon em cada projeção (para cada ângulo) sendo que a variação angular foi de 6°, totalizando 60 projeções, ou seja, um sinograma de 60x60 que corresponde 3600 integrais. Como afirmado anteriormente, o modelo físico do detector e processos do

sistema, necessário para os métodos iterativos, que é a matriz de projeções, foi obtida através de algoritmos disponíveis no site de J. Fessler [16].

As simulações foram avaliadas sobre três casos diferentes, com a intenção de simular imagens ruidosas, a partir da adição de uma distribuição gaussiana com média zero e variância $\sigma = 0$ (sem ruído), $\sigma = 0,05$ e $\sigma = 0,005$.

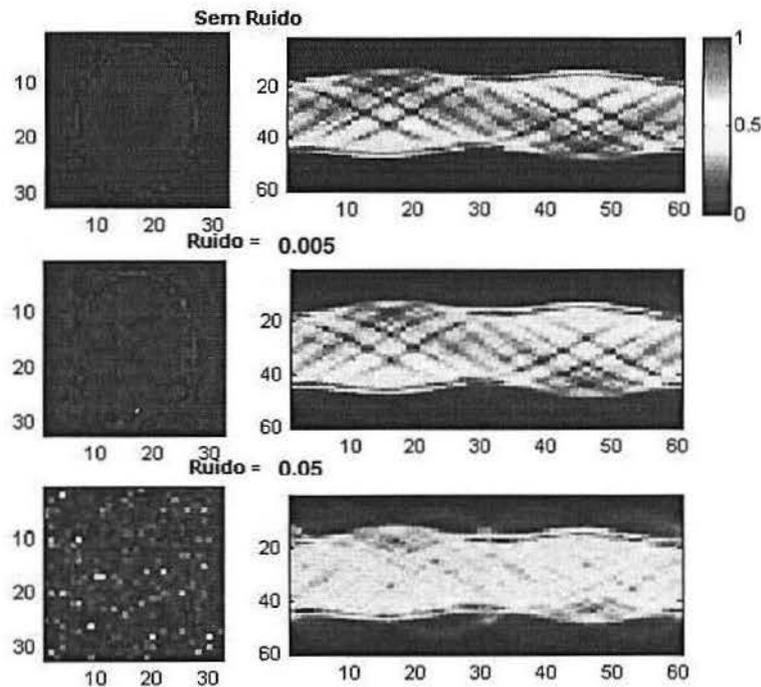


Figura 9: Fantom e sinograma para $\sigma = 0$ (sem ruído), $\sigma = 0,05$ e $\sigma = 0,005$.

O parâmetro β foi determinado supondo alguns valores (0.05, 0.5, 1.5, 5.0, 10.0) e obtendo o desvio padrão correspondente. Para cada valor de ruído foi reconstruída a imagem e analisada a partir da PSNR. O tempo de iteração e convergência de cada método foi comparado.

RESULTADOS

Após realizar 300 iterações variando o parâmetro β (0.05, 0.5, 1.5, 5.0, 10.0) no MAPEM, obtive o desvio padrão. Este parâmetro determina o grau de influência da informação a posteriori sobre o EM. Ficou claro que o aumento de

seu valor gera diminuição do desvio padrão, porém para os valores altos (5.0 e 10.0) ocorreu instabilidade a partir de aproximadamente 100 iterações. Dessa forma escolhi o valor $\beta = 1.5$ como ótimo e ele foi usado para as demais simulações.

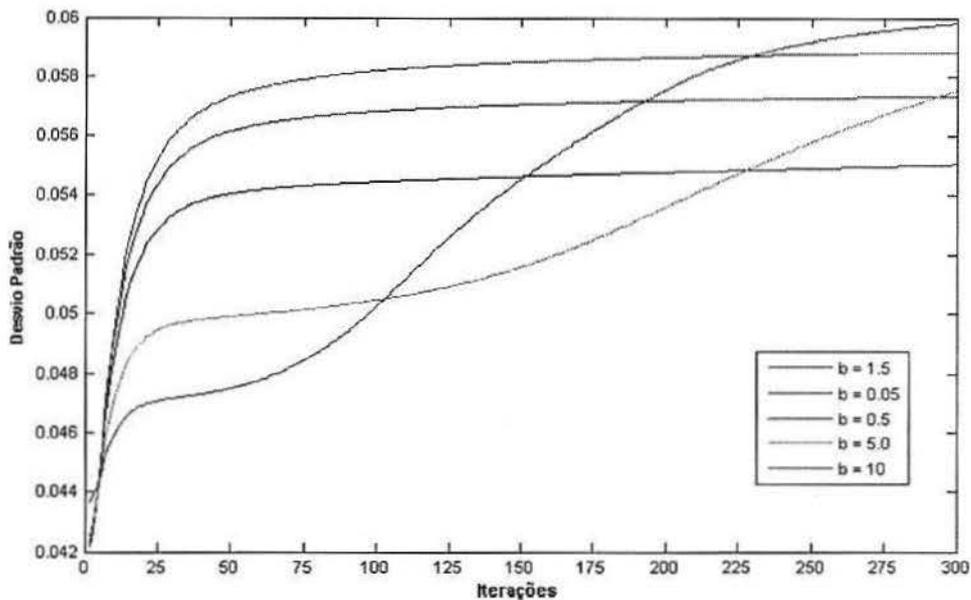


Figura 10: Comparação entre valores de β

Para ter uma boa idéia do comportamento dos métodos simulados foram realizadas 1500 iterações. É esperada convergência antes disso, valores típicos sugeridos estão entre 50 e 200 iterações. Plotando o número de iterações com a relação pico sinal ruído, é notável que para todos os casos FBP obteve resposta inferior logo após um número baixo de iterações, como era esperado devido ao aumento de ruído inerente ao processo de filtragem. OSEM acompanhou a convergência obtida pelo MLEM oscilando em torno de seu valor sendo até superior no caso de maior ruído. O método MAPEM necessita mais iterações para atingir o nível de PSNR do MLEM e do OSEM, porém segue aumentando o PSNR enquanto os demais convergem a um valor, atingindo assim seu objetivo de permitir mais iterações, isto é, maior proximidade com a imagem real sem grande aumento de ruído. Diferente do esperado os valores de convergência do PSNR aumentam com o aumento do

ruído (0, 0.005, 0.05) o que é uma consequência de não ter normalizado todas as reconstruções obtidas.

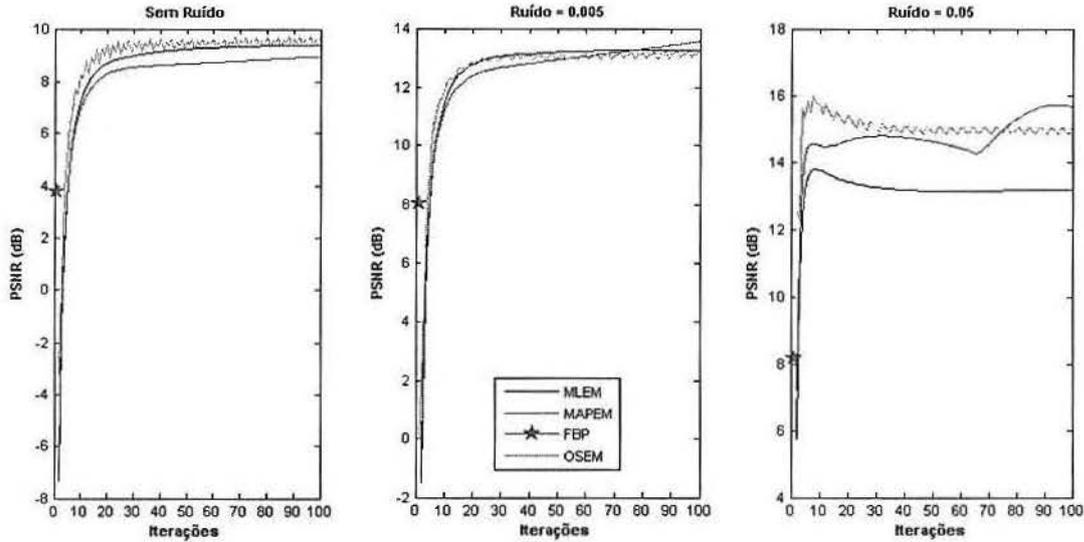


Figura 11: Comparação MLEM, MAPEM, OSEM e FBP.

O algoritmo FBP demonstrou realmente ter velocidade de convergência muito superior, supondo que os iterativos convergiram em 25 iterações. Porém, possivelmente devido ao método pelo qual foi implementado, o OSEM foi o que teve maior tempo de iteração, perdendo assim sua principal característica. Acredito que esse defeito se deva ao fato de a matriz de projeção ter sido separada em uma matriz tridimensional, ou cúbica, contendo todos os subgrupos, o que pode ter gerado maior custo computacional. O MAPEM teve tempo pouco superior ao MLEM.

	MLEM	MAPEM	OSEM	FBP
1500 iterações	21,45 s	24,49 s	63,05 s	-
1 iteração	0,014s	0,016s	0,042s	-
Convergência (25)	0,35 s	0,40 s	1,05 s	0,043 s

Tabela 2: Comparação do tempo de iteração

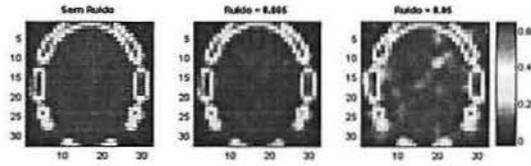


Figura 12: Retro-Projeção Filtrada (FBP)

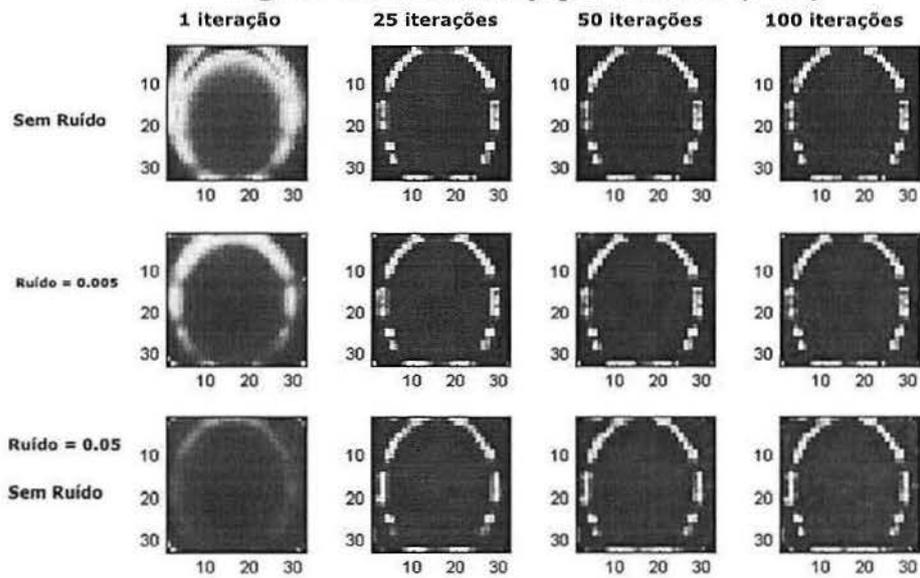


Figura 13: MLEM

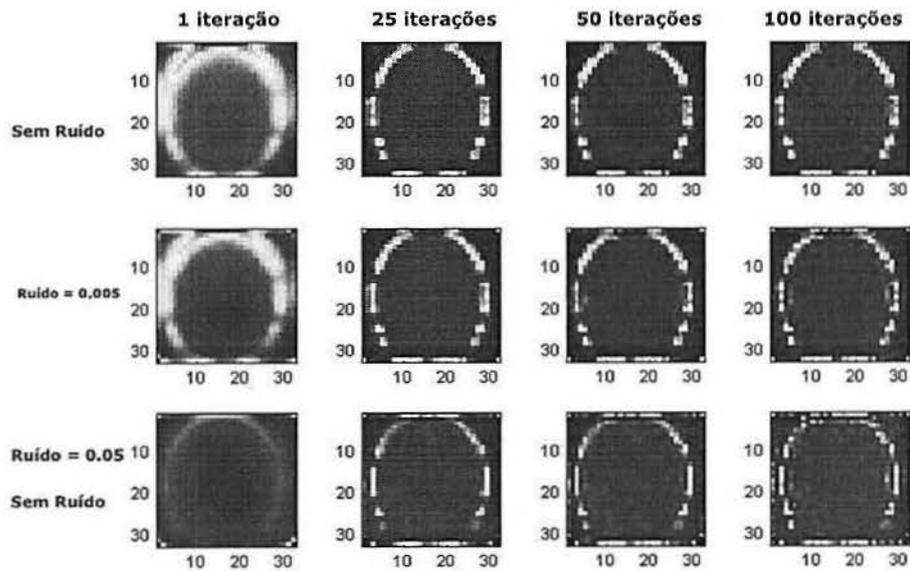


Figura 14: MAPEM

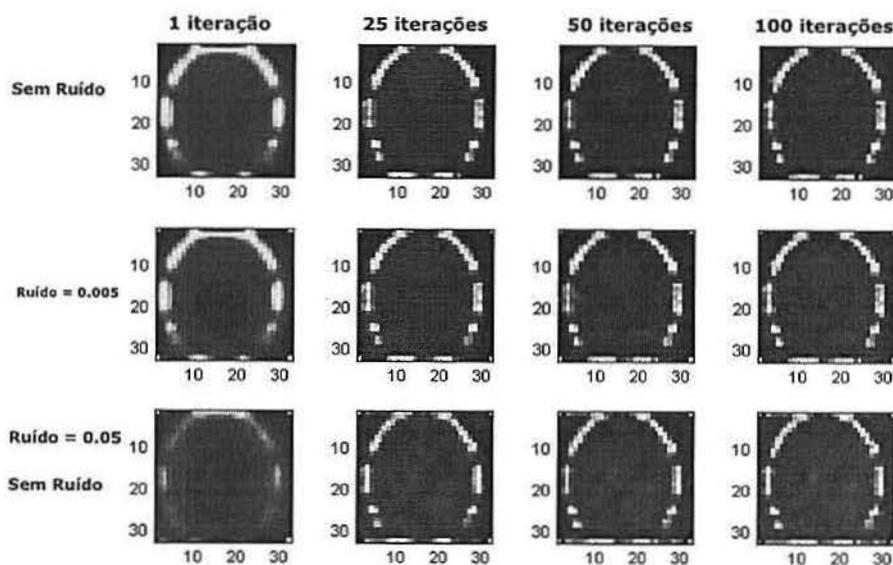


Figura 15: OSEM

CONCLUSÕES

A aquisição de imagens em câmaras de cintilografia gera, a partir de elementos radiativos, imagens muito ruidosas. Os métodos FBP, MAPEM, MLEM e OSEM foram implementados e comparados para a reconstrução tomográfica de imagens ruidosas, como as que são obtidas nesse tipo de câmara.

Os métodos iterativos mostraram uma melhora na qualidade de imagem necessitando, porém, grande tempo de processamento quando comparados ao analítico mais conhecido FBP, além de possibilitar a incorporação (correção) de efeitos de interação da radiação da matéria e outros. Baseados nos defeitos do MLEM foram implementados MAPEM e OSEM como possível forma de solução. MAPEM, apesar de ter formas mais complexas sendo estudadas, teve bons resultados trazendo diminuição do ruído e permitindo mais iterações antes de convergir, mostrando seu grande potencial. Uma variada gama de características da reconstrução pode ser explorada com métodos mais robustos de utilização da informação a posteriori correndo o risco, contudo, de aumento do tempo de processamento. O método OSEM, inversamente, não atingiu o objetivo esperado de diminuir o tempo de convergência. Estando

amplamente difundida e comprovada, a maior velocidade de convergência quando comparado aos demais métodos iterativos [18] não se verificou, o que pode ser uma falha de implementação que suponho devida à matriz de projeções. Ao invés de formar matrizes quadradas menores com os subgrupos gerados da matriz de projeções $m \times n$ (m projeções e n pixels), foi gerada uma matriz cúbica $a \times n \times p$ (a projeções com $a < m$, n pixels e p subgrupos) que na verdade é a matriz inicial rearranjada, logo com mesmo tamanho. Como a cada iteração é chamado um elemento p dela foram realizadas muito mais iterações, contudo sem a vantagem de diminuição da matriz.

Este trabalho é apenas uma introdução aos métodos de reconstrução tomográfica, e pode ser expandido para outras formas de aquisição de imagem bidimensional ou tridimensional e se considerarmos a grande diferença entre as reconstruções feitas em sistemas de aquisição simulados e sistemas de aquisição reais.

BIBLIOGRAFIA

1. Knoll, F. Glenn, "Radiation detection and measurement". 2nd ed.;
2. S.J. Lee, A. Rangarajan, G. Gindi, "Bayesian Image Reconstruction in SPECT Using Higher Order Mechanical Models as Priors";
3. A.T.J. Berrocal, J. Sevillano, J.A.C. Salinas, "Sistema de Adquisición de Imágenes Biomédicas Utilizando uma Câmera Gamma";
4. A.V. Oppenheim, "Discrete-time signal processing", 2nd ed.;
5. A.R. Neto, "Estudo Comparativo entre os Algoritmos de Reconstrução Tomográfica por Retro-projeção Filtrada e Iterativos em SPECTs";
6. J.A. Siegel, A.R. Benedetto, R.J. Jaszczak, J.L. Lancaster, M.T. Madsen, W.W. Wooten, R.E. Zimmerman, "Rotating Scintillation Camera SPECT acceptance Testing and Quality Control", AAPM Report nº22;
7. A.C. Kak, M. Slaney, "Principles of Computerized Tomographic Imaging", IEEE Press, 1988;
8. P. Razifar, M. Sandström, H. Schnieder2, B. Långström, E. Maripuu, E. Bengtsson and M. Bergström, "Noise correlation in PET, CT, SPECT and

- PET/CT data evaluated using autocorrelation function: a phantom study on data, reconstructed using FBP and OSEM", BMC Medical Imaging 2005, 5:5;
9. G. Demoment, "Image reconstruction and restoration: Overview of common estimation structures and problems";
 10. L. Tawata, I.P.A. Salati, R. Di Prinzio, A.R. Di Prinzio, "Radioproteção e Dosimetria: Fundamentos, Instituto de Radioproteção e Dosimetria";
 11. X. Sun, T. Ma, Y. Jin, "SVD reconstruction algorithm in 3D SPECT imaging";
 12. C.E. Floyd Jr., R.J. Jaszczak, K.L. Greer, R.E. Coleman, "Inverse Monte Carlo as a Unified Reconstruction Algorithm for ECT";
 13. A. Dempster, "Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm";
 14. A.R. De Pierro, F. Crepaldi, "A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization";
 15. P.J. Green, "Bayesian reconstructions from emission tomography data using a modified EM algorithm";
 16. J.A. Stamos, W.L. Rogers, N.H. Clinthorne, K.F. Koral, "Spatial resolution properties of penalized-likelihood image reconstruction: Space-invariant tomographs";
 17. L.A. Shepp, Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography";
 18. J. Qi, R.M. Leahy, "Iterative reconstruction techniques in emission computed tomography";
 19. M. Hudson, R.S. Larkin, "Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data";
 20. A.C.C. Magalhães, H.H. Decker, A.C. Junior, G.Y. Fujikawa, R. Dimenstein, P.S. Duarte, L.R.F. Martins, G. Alonso, "Influência da Espessura do Cristal da Câmara de Cintilação na Qualidade das Imagens", Ver. Imagem 2004; 26(1):43-46;
 21. A.J. Rockmore, A. Macovski, "A maximum likelihood approach to emission image reconstruction from projections";

22. C.A. Bouman, K. Sauer, "A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization";
23. D. Lalush, B. Tsui, "Improving convergence of iterative filtered backprojection algorithm";
24. D.R. Gilland, R.J. Jaszczak, T.A. Riauka, and R.E. Coleman, "Approximate 3D iterative reconstruction for SPECT", *Medical Physics*, Vol. 24, No. 9, September 1997;
25. E.S. Chornoboy, C.J. Chen, M.I. Miller, T.R. Miller, D.L. Snyder, "An evaluation of maximum likelihood reconstruction for SPECT";
26. E.U. Mumcuoglu, R. Leahy, S.R. Cherry, Z. Zhenyu, "Fast gradient-based methods for Bayesian reconstruction of transmission and emission PET images";
27. F.J. Beekman, E.T. P. Slijpen, H.W.A.M. de Jong, and M. A. Viergever, "Estimation of the depth-dependent component of the point spread function of SPECT", *Medical Physics*, Vol. 26, No. 11, November 1999;
28. F.J. Beekman, C. Kamphuis, M.A. King, P.P. van Rijk, M.A. Viergever, "Improvement of image resolution and quantitative accuracy in clinical Single Photon Emission Computed Tomography", *Computerized Medical Imaging and Graphics* 25 (2001) 135-146;
29. G. Kontaxakis, "Maximum Likelihood Algorithms for Image Reconstruction in Positron Emission Tomography";
30. G. Kontaxakis, L.G. Strauss, "An efficient implementation of the iterative ML-EM image reconstruction algorithm for PET on a Pentium PC platform";
31. G. Zeng, Gullberg, "Unmatched projector/backprojector pairs in an iterative reconstruction algorithm";
32. J. Fessler, "<http://www.eecs.umich.edu/~fessler/irt/irt>";
33. J. Sheng, D. Liu, "An Improved Maximum Likelihood Approach to Image Reconstruction Using Ordered Subsets and Data Subdivisions";
34. K. Chidlow, T. Möller, "Rapid emission tomography reconstruction";
35. K. Ogawa, "Image distortion and correction in single photon emission CT", *Annals of Nuclear Medicine* Vol. 18, No. 3, 171–185, 2004;

36. L. Bouwens, R. V. de Walle, J. Nuyts, M. Koole, Y. D'Asseler, S. Vandenberghe, I. Lemahieu, R.A. Dierckx, "Image-correction techniques in SPECT", *Computerized Medical Imaging and Graphics* 25 (2001) 117-126;
37. L. Kaufman, "Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for PET";
38. M. Bertero, P. Boccacci, "Introduction to Inverse Problems in Imaging";
39. P.P. Bruyant, "Analytic and Iterative Reconstruction Algorithms in SPECT";
40. R.M. Lewitt, "Overview of Methods for Image Reconstruction From Projections in Emission Computed Tomography";
41. S. Ahn, "Convergent Algorithms for Statistical Image Reconstruction in Emission Tomography";
42. S.R. Cherry, J.A. Sorenson, M.E. Phelps. "Physics in nuclear medicine". 3rd ed. Filadélfia: WB Saunders;
43. S. W. Smith, "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing", California Technical P;
44. T. Mark, Madsen, "A method for quantifying SPECT uniformity", *Medical Physics*, Vol. 24, No. 11, November 1997;