

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS EM  
CANAIS COMPOSTOS EMPREGANDO SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS  
E MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

por

Carla Marques Xavier

Tese de Doutorado

Porto Alegre, 08 de abril de 2013.

ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS EM  
CANAIS COMPOSTOS EMPREGANDO SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS  
E MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

por

Carla Marques Xavier  
Mestre em Engenharia Mecânica

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sergio Viçosa Möller

Co-orientador: Prof<sup>ª</sup> Dra. Adriane Prisco Petry

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Leandro Franco de Souza – USP/São Carlos - SP

Prof. Dr. Luiz Augusto Magalhães Endres – IPH - UFRGS

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch – PPGEC - UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 08 de abril de 2013.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo experimental e numérico de escoamentos em canais compostos. Simulação de grandes escalas e método dos elementos finitos, em paralelo com medições utilizando anemômetros de fio quente em um canal aerodinâmico são realizadas.

Canais compostos estão presentes em muitas aplicações de engenharia. Dispositivos eletrônicos, trocadores de calor, reatores nucleares, canais de irrigação e planícies de inundação são alguns dos desafios enfrentados pela engenharia.

A combinação de simulação de grandes escalas e o método dos elementos finitos para a investigação de escoamentos turbulentos pode ser de grande importância para o estudo dos escoamentos na engenharia. No caso dos escoamentos através dos canais compostos, publicações neste tema são ainda raros.

Os principais objetivos deste trabalho são: analisar o escoamento de um fluido viscoso, incompressível e isotérmicas em um canal composto, empregando um código de computação tridimensional apresentado por Petry em 2002, que realiza simulação de grandes escalas com o método dos elementos finitos, para comparar os resultados numéricos com os resultados experimentais do escoamento turbulento em um canal composto cuja geometria é exactamente reproduzida pela malha numérica, para verificar a validade do método numérico e o comportamento de modelos em escala subgrade para reproduzir o fluxo no canal composto investigado; e comparar a eficácia dos esquemas Taylor-Galerkin e dois passos para analisar os resultados.

O canal investigado consiste em um canal principal com seção transversal retangular, conectado a uma fenda retangular estreita.

No código numérico, o modelo clássico de Smargorinsky é comparado com o modelo dinâmico de viscosidade turbulenta, inicialmente proposto por Germano et al. 1991. A segunda filtragem do processo dinâmico é feita através dos elementos finitos independentes propostos por Petry, 2002. Para a implementação do algoritmo, o método dos elementos finitos é usado, Taylor-Galerkin e esquemas dois passos são usados para a discretização no tempo e no espaço e de ligação das equações governantes. O domínio computacional é discretizadas por intermédio de elementos lineares hexaédricos.

Os resultados obtidos a partir simulações de grandes escalas, usando o modelo clássico de Smagorinsky e o modelo dinâmico de submalha; mostram o desenvolvimento de uma camada de cisalhamento na direção principal do escoamento com características dinâmicas regidas pelos perfis de velocidade média.

Os resultados da simulação mostraram boa concordância com os dados experimentais dos perfis de velocidade média, intensidade de turbulência e tensão de cisalhamento turbulenta. Em geral, o modelo dinâmico com o esquema de dois passos foi mais eficiente para reproduzir estruturas turbulentas, em comparação com o modelo Smagorinsky e o esquema Taylor-Galerkin particularmente ao longo da região da fenda do canal.

**Palavras chave:** *Escoamentos turbulentos, canais compostos, simulação de grandes escalas, anemometria de fio quente.*

# **EXPERIMENTAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF TURBULENT FLOWS IN COMPOUND CHANNELS EMPLOYING LARGE EDDY SIMULATION AND THE FINITE ELEMENT METHOD**

## **ABSTRACT**

This work presents an experimental and numerical study of turbulent flows in compound channels. Large eddy simulation and finite element method in parallel with hot wires measurements in an aerodynamic channel are employed.

Compound channels are present in many engineering applications like in electronic devices, heat exchangers, nuclear reactors and irrigation channels and flooding plains are some of the challenges faced by mechanical engineering.

The combination of large eddy simulation and the finite element method for the investigation of turbulent flows can be of great relevance to the study of engineering flows. In the case of flows through compound channels, publications in this subject are still rare.

The main objectives in this work are: to analyze the flow of viscous, incompressible and isothermal fluids in a compound channel; employing a three-dimensional computation code presented by Petry, 2002, which performs large eddy simulation with the finite element method; to compare the numerical results with experimental results of the turbulent flow in a compound channel whose geometry is exactly reproduced by the numerical mesh; to check the validity of the numerical method and the behavior of subgrid scale models to reproduce the flow in the compound channel investigated and compare the efficacy of the Taylor-Galerkin and Two-Steps schemes in analyzing the results.

The compound channel investigated consists of a rectangular channel connected to a rectangular shaped slot.

In the numerical code, Smargorinsky's classical model is compared to the dynamic model of turbulent viscosity, initially proposed by Germano et al. The second filtering of the dynamic process is made through the independent finite elements proposed by Petry, 2002. For the implementation of the algorithm, the finite element method is used, Taylor-Galerkin and Two-Steps schemes are used for discretization in time and space and to link governing equations. The computational domain is discretized by means of linear hexahedral elements.

The results obtained from large eddy simulations, using the classical model of Smagorinsky and the Dynamic subgrid scale model show the development of a shear layer in the main direction of flow with dynamic characteristics governed by the mean velocity profiles.

The simulation results showed good agreement compared to experimental data, and analysis of the profiles of mean velocity, turbulence intensities and turbulent shear stress. In general, dynamic model with the two-steps scheme was more able to reproduce turbulent structures in comparison with the Smagorinsky model with Taylor-Galerkin scheme, particularly along the channel slot.

**Keywords:** *Turbulent flows, compound channels, large eddy simulation, hot wires.*

## ÍNDICE

1. Introdução.....	1
1.1. Motivação.....	1
1.2. Objetivos, Metodologia e Organização.....	10
2. Revisão Bibliográfica.....	12
2.1. Turbulência.....	12
2.2. Modelagem da Turbulência.....	14
2.3. Descrição da Camada de Mistura.....	20
3. Formulação Matemática.....	23
3.1. Equações que governam o escoamento.....	23
3.2. Equações para Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos.....	27
3.3. Modelos de Turbulência Submalha.....	32
3.3.1. Modelo de Smagorinsky.....	34
3.3.2. Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta.....	35
3.4. Equações que governam o escoamento com Modelos Submalha de Smagorinsky e Dinâmico de Viscosidade Turbulenta.....	36
4. Modelagem Numérica e Aspectos Computacionais.....	38
4.1. Formulação de Elementos Finitos do Problema.....	38
4.1.1. Formulação de Resíduos Ponderados do Problema.....	40
4.1.2. Equações de Elementos Finitos do Problema.....	42
4.2. Esquema de Taylor-Galerkin.....	46
4.3. Esquema de Dois-Passos.....	48
4.4. Segunda Filtragem.....	51
5. Procedimento Experimental.....	56
6. Resultados.....	61
6.1. Resultados Experimentais.....	61
6.2. Resultados Numéricos Preliminares – $Re = 10000$ .....	63

6.3. Resultados Numéricos – $Re = 75600$ .....	70
7. Conclusões.....	79
8. Referências bibliográficas .....	82
Apêndices .....	97
A.1. Procedimento de calibração da sonda de fio quente.....	97
A.2. Análise de Incertezas.....	101
A.3. Publicações realizadas durante o trabalho de tese.....	105



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1.</b> Exemplos de canais compostos.....	2
<b>Figura 1.2</b> – Exemplo de escoamento em canal composto .....	3
<b>Figura 1.3</b> – Representação esquemática de um vórtice de eixo vertical na interface.....	3
<b>Figura 1.4</b> – Estrutura turbulenta de um canal composto.....	4
<b>Figura 1.5</b> – Proposta do modelo de escoamento de Möller, 1991. ....	6
<b>Figura 1.6</b> – Canais compostos onde foram observadas pulsações. ....	7
<b>Figura 1.7</b> – Elemento combustível de um reator de água pressurizada (PWR).....	10
<b>Figura 2.1</b> – Espectro de energia cinética turbulenta.....	17
<b>Figura 2.2</b> – Espectro de energia .....	19
<b>Figura 2.3</b> - Gradiente e perfil de velocidade.....	22
<b>Figura 3.1</b> Forma da função filtro tipo caixa.....	29
<b>Figura 4.1</b> – Malha de Elementos Finitos.. ....	39
<b>Figura 4.2</b> – Diferentes tipos de elementos finitos. ....	39
<b>Figura 4.3</b> – Elemento independente em malha tridimensional .....	52
<b>Figura 4.4</b> – Elemento hexaédrico de oito nós no espaço computacional e físico.. ....	53
<b>Figure 5.1</b> Vista esquemática da seção de testes. ....	57
<b>Figura 5.2</b> – Ilustrações esquemáticas:(a) canal aerodinâmico.;(b) carac. da sonda.....	58
<b>Figura 5.3</b> – Fotos da seção de testes utilizada.....	59
<b>Figura 6.1</b> – Espectros de frequência para as velocidades u (azul) e w (vermelho) .....	62
<b>Figura 6.2</b> - Contornos de velocidade axial média ( $x/L = 0.98$ ).....	63
<b>Figura 6.3</b> – Domínio computacional do problema.....	64
<b>Figura 6.4</b> - Contornos de velocidade axial média ( $x/L = 0.98$ ).....	66
<b>Figura 6.5</b> – u, w e P, Malha A – Smagorinsky - Dois Passos – Re = 10000.. ....	68
<b>Figura 6.6</b> – u, w e P, Malha A – Dinâmico - Dois Passos – Re = 10000. ....	68
<b>Figura 6.7</b> – vorticidade $\Omega_y$ . ( Malha A – Smagorinsky -D.P.– Re =10000.....	69
<b>Figura 6.8</b> – vorticidade $\Omega_y$ . ( Malha A – Dinâmico - D.P.– Re = 10000).....	69
<b>Figura 6.9</b> – u, w e P, Malha B – Smagorinsky - Dois Passos – Re = 10000.....	70
<b>Figura 6.10</b> – u, w e P, Malha B – Smagorinsky - Dois Passos – Re = 75600 .....	71
<b>Figura 6.11</b> – u, w e P, Malha A – Dinâmico - Dois Passos – Re = 75600.....	72

<b>Figura 6.12</b> – $u$ , $w$ e $P$ , Malha A – Smagorinsky - Galerkin – $Re = 75600$ .....	73
<b>Figura 6.13</b> - Perfil de Velocidade $U$ .....	74
<b>Figura 6.14</b> – Gradientes de Velocidade Axial.....	75
<b>Figura 6.15</b> - Contornos de velocidade axial média ( $x/L = 0.98$ ). ....	76
<b>Figura 6.16</b> – Movimento Lagrangiano de partículas para $Re = 75600$ , Dinâmico.....	77
<b>Figura 6.17</b> – Perfis de intensidade de turbulência.....	78
<b>Figura A.1</b> – (a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda reta de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade.....	98
<b>Figura A.2</b> – (a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda inclinada de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade.....	100
<b>Figura A.3</b> – (a) Relação típica entre inclinação e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda reta de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a inclinação .....	100

## LISTA DE SÍMBOLOS

⇒ **Caracteres Romanos** [unidades SI]

$C$	velocidade de propagação do som no meio [m/s]
$C_s$	constante de Smagorinsky
$C(\vec{x}, t)$	coeficiente do modelo Dinâmico
$C_f$	Coefficiente de fricção com base em $U_m$
$C_{fo}$	Coefficiente de fricção com base em $U_c$
$C_{ij}$	termos cruzados de velocidades
$d$	profundidade da fenda do canal composto [m]
$D_h$	diâmetro hidráulico do canal composto [m]
$f$	frequência [Hz]
$f_i$	componente das forças de campo na direção $i$ [ $N/m^3$ ]
$g$	largura da fenda do canal composto [m]
$k_{SM}$	energia cinética submalha [ $m^2/s^2$ ]
$L$	comprimento do canal composto [m]
$L_{ij}$	termos de Leonard
$n_j$	cosseno diretor do vetor normal ao contorno considerado
$p$	pressão [Pa]
$\bar{p}$	pressão, componente correspondente às grandes escalas [Pa]
$p^*$	função peso para a pressão
$\bar{p}$	vetor de valores nodais da pressão
$\tilde{P}^*$	vetor de valores nodais da função peso de pressão
$Re$	Número de Reynolds
$Re_c$	Número de Reynolds baseado na metade da altura do canal e na velocidade no eixo central
$Re_m$	Número de Reynolds baseado na velocidade volumétrica
$Re_\tau$	Número de Reynolds baseado na velocidade de fricção
$Str$	Número de Strouhal

$t$	tempo [s]
$T_i$	valores prescritos das forças de superfície no contorno indicado [ $\text{N/m}^2$ ]
$U$	Módulo do vetor velocidade adimensional
$U_c$	Velocidade no eixo central
$U_m$	Velocidade volumétrica
$U_\tau$	Velocidade de fricção
$u^+$	Escala de velocidade de fricção adimensional
$u$	Velocidade na direção $x$ [m/s]
$v$	Velocidade na direção $y$ [m/s]
$v_i$	componente da velocidade na direção $i$ [m/s]
$\hat{v}_i$	valores prescritos da componente $i$ da velocidade no contorno
$\bar{v}_i$	componente, correspondente às grandes escalas, do vetor de velocidade na direção
$v'_i$	componente, correspondente às escalas submalha, do vetor de velocidade na direção
$V_i^*$	função peso para a velocidade
$\bar{v}_i$	vetor de valores nodais da componente $i$ da velocidade
$v_{\sim i}^*$	vetor de valores nodais da componente $i$ da função peso de velocidade
$x_i$	coordenada na direção $i$ [m]
$y^+$	Distância adimensional à parede
$w$	Velocidade na direção $z$ [m/s]

⇒ **Caracteres Gregos** [unidades SI]

$\Delta p$	variação da pressão [Pa]
$\Delta t$	intervalo de tempo [s]
$\Delta \rho v_i$	variação de $\rho v_i$
$\bar{\Delta}$	escala associada com o filtro utilizado para definir o campo de grandes escalas
$\langle \bar{\Delta} \rangle$	comprimento característico do segundo filtro, sendo $\langle \bar{\Delta} \rangle > \bar{\Delta}$
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$\delta$	Metade da altura do canal
$\Phi$	densidade espectral para a velocidade [ $(\text{m/s})^2/\text{Hz}$ ]

$\Phi$	vetor de funções de interpolação para a velocidade
$\tilde{\phantom{\Phi}}$	
$\Gamma$	contorno do domínio
$\Gamma_e$	contorno do elemento
$\lambda$	coeficiente de viscosidade volumétrico do fluido [Pa.s]
$\mu$	coeficiente de viscosidade dinâmico do fluido [Pa.s]
$\eta$	componente do sistema de coordenadas naturais
$\Omega$	domínio do problema
$\Omega_e$	domínio do elemento
$\Psi$	Vetor de funções de interpolação para a pressão
$\tilde{\phantom{\Psi}}$	
$\rho$	Massa específica do fluido [ $\text{kg/m}^3$ ]
$\sigma_{ij}$	tensor de tensões [Pa]
$\sigma_{ij}^*$	Tensões de superfície (tangenciais e normais ao volume de controle)
$\xi$	Componente do sistema de coordenadas naturais
$\zeta$	Componente do sistema de coordenadas naturais
$\tau_w$	Tensão de cisalhamento na parede [Pa]
$\nu$	coeficiente de viscosidade cinemática [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$\nu_t$	viscosidade turbulenta (conceito proposto por Boussinesq, 1877) [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$\omega$	Vorticidade [ $\text{s}^{-1}$ ]

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 6.1</b> - Parâmetros computacionais usados nas simulações.....	67
<b>Tabela A.1</b> – Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade axial do fio reto da sonda.....	98
<b>Tabela A.2</b> – Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade transversal e do ângulo de desvio do fio inclinado da sonda.....	99
<b>Tabela A.3</b> – Principais resoluções das escalas dos instrumentos utilizados .....	102

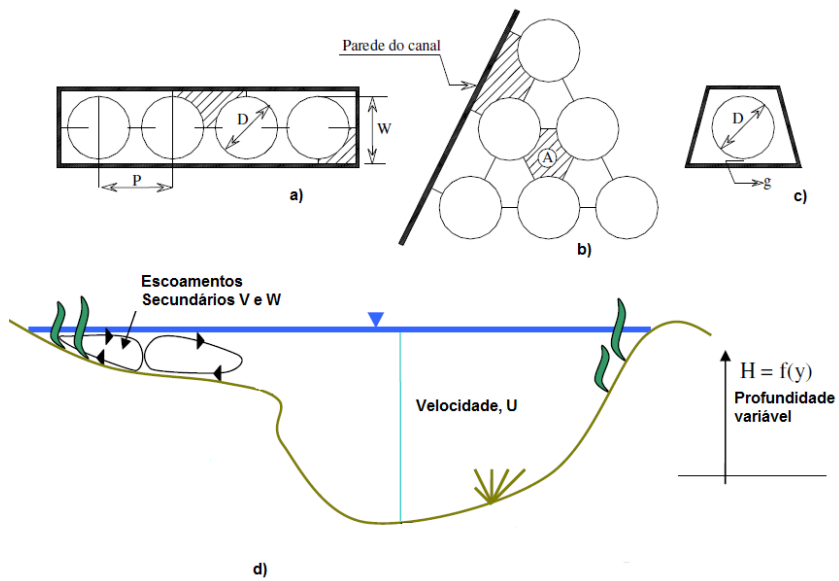
## 1. Introdução

### 1.1. Motivação

Canais compostos podem ser descritos como aqueles cuja seção transversal é caracterizada pela presença de canais adjacentes conectados por fendas (subcanais), nas quais e em sua maioria, o fluido escoia axialmente. Exemplos destes tipos de canais são os canais de irrigação e abastecimento de água, os feixes de barras no núcleo dos reatores nucleares e os canais aletados para resfriamento de dispositivos eletrônicos.

Escoamentos em canais compostos são caracterizados pela presença de uma estreita região conectando dois ou mais canais principais, os quais mostram importantes características na região da fenda. Talvez a principal característica do escoamento neste tipo de canal seja a presença de estruturas de grande escala com comportamento quase-periódico, sendo transportadas pelo escoamento principal. Tais estruturas são responsáveis pelo aumento das tensões turbulentas na região da fenda, sendo este fato sempre presente em toda literatura aberta sobre escoamentos turbulentos em canais compostos, tais como canais retangulares, conectados por um ou vários sub canais, escoamento em feixes de tubos (presente no interior de reatores nucleares e trocadores de calor), e até mesmo em alguns canais de abastecimento de água [Soldini *et al.*, 2004].

A figura 1.1 mostra diferentes tipos de canais compostos. A figura 1.1 (a) mostra, a seção usada por Rehme, 1978, a 1.1(b) mostra subcanais adjacentes à parede do canal ou subcanais centrais, marcada pela letra A. A figura 1.1 (c) mostra a seção trabalhada por Wu e Trupp, 1993, e a 1.1 (d) é um caso especial de canal composto, onde existem as mesmas características expostas no parágrafo anterior, entretanto trata-se de um canal composto aberto. As partes hachuradas, mostram as regiões estudadas pelos autores citados.



**Figura 1.1** – Exemplos de canais compostos.

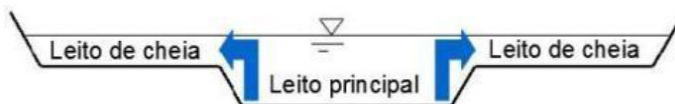
(Adaptada de Goulart, 2009).

Os rios são um importante recurso ambiental e usualmente um fator importante na fixação de populações. No entanto os escoamentos fluviais são frequentemente afetados tanto por fatores humanos como por fenômenos naturais. É necessário existir uma harmonia entre a intervenção humana e a natureza para garantir uma boa utilização deste valioso recurso.

Os rios são exemplos de canais compostos, pois apresentam, normalmente, uma seção transversal composta por um leito principal (LP), com um ou dois leitos de cheia (LC) adjacentes.

Em situações de cheia, o leito principal não é suficiente para escoar toda a vazão do afluente e a subida do nível da água provoca a inundação dos leitos de cheia ou planícies de inundação, como mostra a figura 1.2, alterando as características do escoamento.

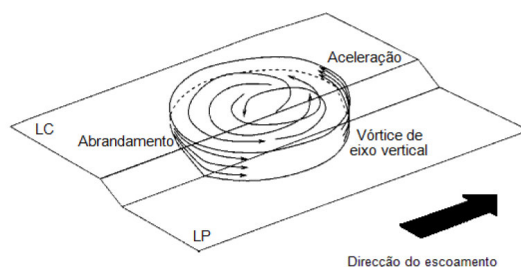




**Figura 1.2** – Exemplo de escoamento em seção transversal de canal composto.

(Adaptada de Nezu, 1994).

A figura 1.3 mostra que nos escoamentos em canais compostos desenvolvem-se mecanismos de transferência de quantidade de movimento, traduzidos pelos vórtices de eixo vertical, formados ao longo da interface de ligação entre o canal principal e as várzeas, dadas as diferenças de velocidades entre eles.

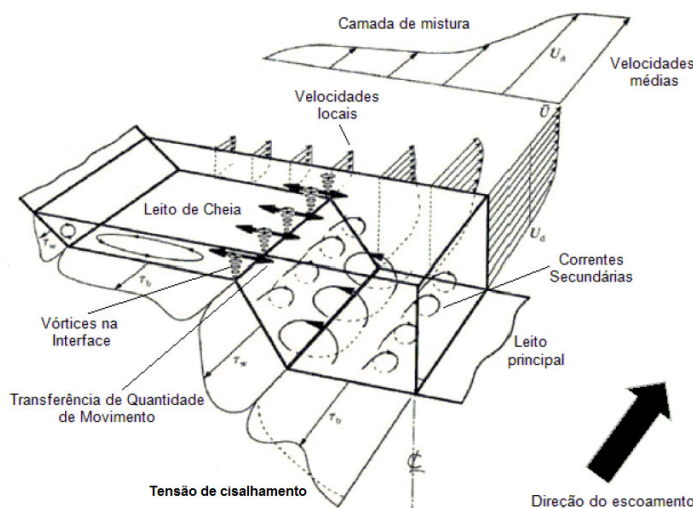


**Figura 1.3** – Representação esquemática de um vórtice de eixo vertical na interface.

(Adaptada de Prooijen *et al.*, 2005). LP – Leito principal. LC – Leito de cheia.

Na figura 1.4 apresenta-se, esquematicamente, a estrutura turbulenta do escoamento em canal composto proposta por Shiono e Knight, 1991. Nela destacam-se os vórtices de eixo vertical, gerados pelo diferencial de velocidades entre os leitos, que provocam uma transferência de quantidade de movimento e, conseqüentemente, alterações nas distribuições das velocidades nos leitos [Nezu e Nakagawa, 1993]. Verificam-se, ainda, a existência de vários vórtices, com geometria helicoidal e eixo horizontal, que se desenvolvem longitudinalmente e que são denominadas correntes secundárias. Estas correntes são o resultado da anisotropia da turbulência e de forças centrífugas geradas no escoamento, sendo,

na prática, estruturas difíceis de caracterizar, porque são complexas e variam com o tempo [Nezu, 1994].



**Figura 1.4**– Estrutura turbulenta de um canal composto.

(Adaptada de Shiono e Knight, 1991).

Reatores nucleares são utilizados para realizar uma reação nuclear de fissão com o objetivo de obter calor para alimentar uma termelétrica com ciclo a vapor. A energia gerada pela fissão nuclear é transmitida ao fluido de resfriamento do núcleo do reator. A maioria dos reatores nucleares utiliza barras cilíndricas agrupadas em feixes. As usinas nucleares são classificadas em função do fluido que resfria o reator.

Para um melhor entendimento do funcionamento dessas estruturas toma-se como exemplo o reator do tipo PWR, o combustível usado por ele é o dióxido de urânio ( $UO_2$ ) em tubos de liga de zircônio. O  $UO_2$  é compactado em pastilhas de 10 mm de diâmetro que têm a forma de um cilindro, acomodadas no interior de tubos de 4,40 m de comprimento e 10,76 mm de diâmetro de zircaloy, hermeticamente fechadas e que suportam temperaturas até 1.852 °C. Cada barra possui aproximadamente 2 kg de urânio. São necessárias 235 dessas barras para formar o elemento combustível.

A necessidade da predição da distribuição de temperatura entre os vários subcanais, formados pelo arranjo de barras, requer informações acerca dos processos de mistura dentro destas estruturas. Tais processos são responsáveis pelo aumento das características difusivas do escoamento turbulento. Nesse contexto se faz necessário o

conhecimento da interdependência existente entre parâmetros geométricos, o número de Reynolds (parâmetros do escoamento) e a capacidade difusiva do escoamento turbulento nessas seções.

Segundo Wu e Trupp, 1993, sob condições normais de operação e considerando um escoamento completamente desenvolvido, três diferentes mecanismos contribuem à totalidade do processo de mistura, são eles: difusão turbulenta, convecção por movimento médio e a convecção turbulenta.

A difusão turbulenta está relacionada à difusão causada, pelas pequenas escalas da turbulência, que são da ordem da viscosidade, enquanto que a convecção por movimento médio denota o transporte das quantidades turbulentas por escoamentos secundários.

A convecção turbulenta se origina das estruturas macroscópicas do escoamento. Essas estruturas de grande escala são responsáveis pela troca de massa, energia e quantidade de movimento entre os subcanais adjacentes. No entanto, Guellouz e Tavoularis, 2000, ressaltam que os mecanismos físicos que as governam ainda não são completamente entendidos.

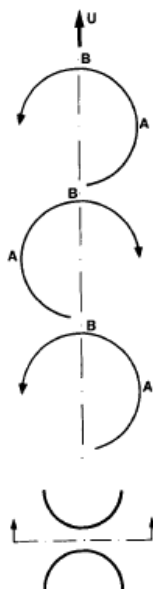
Rowe, 1973, foi o primeiro a estudar a influência da estrutura macroscópica do escoamento turbulento no processo de mistura em um canal composto, formado por uma matriz de barras dispostas paralelamente ao escoamento principal. Sua principal conclusão foi que as altas taxas de mistura encontradas neste tipo de canal eram originárias de processos macroscópicos do escoamento, caracterizadas pela periodicidade nos sinais de flutuação de velocidade.

Assim como a incomum distribuição das tensões de Reynolds em Hooper, 1980, a presença de estruturas de grande escala, chamadas de pulsações do escoamento, se confirmaram como agentes decisivos no aumento dos coeficientes de mistura nesses tipos de canais, sendo relatadas em uma série de trabalhos de diferentes pesquisadores como Hooper e Rehme, 1984, Rehme, 1987(a) e Rehme, 1987(b), Möller, 1991, entre outros.

Nos anos 90, iniciando pelo trabalho de Möller, 1991, foi dada uma especial atenção ao aspecto dinâmico destes escoamentos. O principal objetivo desses trabalhos publicados era obter correlações da frequência das pulsações do escoamento ao principal parâmetro geométrico das seções,  $P/D$ , com as escalas de velocidade e comprimento. A figura 1.5 mostra o modelo de escoamento, proposto por Möller, de uma esteira de vórtices em movimento no centro da fenda girando alternadamente, onde A e B representam o seguinte:

A: Distância a partir da fenda, correspondente ao máximo local da intensidade de turbulência axial, o espectro da componente axial e o componente azimutal da velocidade de flutuação ambos têm um pico a certa frequência.

B: Diretamente na fenda, que corresponde ao valor máximo da intensidade de turbulência azimutal, um só pico aparece no espectro do componente azimutal da velocidade flutuante.



**Figura 1.5** – Proposta do modelo de escoamento de Möller, 1991.

A presença de pulsações do escoamento em geometrias bastante simples é mostrada nos trabalhos de Wu e Trupp, 1993 e Meyer e Rehme, 1994 e 1995. As conclusões desses trabalhos apontaram para o fato de que estas instabilidades do escoamento poderiam surgir em qualquer canal onde existia pelo menos um subcanal principal ligado a uma fenda e que os mecanismos que dariam origem a elas poderiam ser os mesmos que originariam pulsações em feixes de barras.

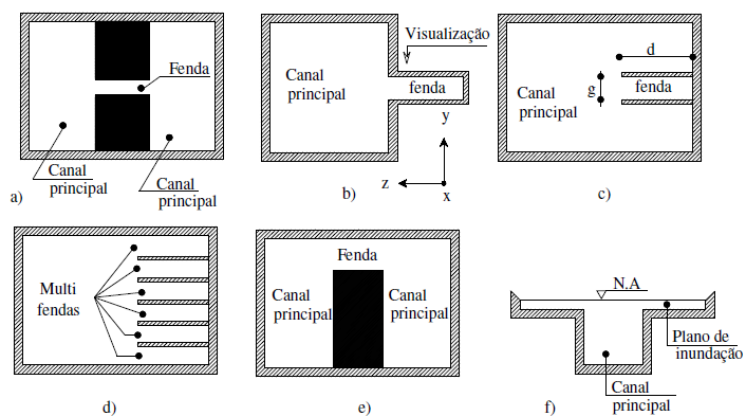
A formação da camada de mistura em canais compostos foi descrita por Shiono e Knight, 1991, quando esses autores fizeram medições em um canal aberto de irrigação.

Biemüller *et al.* (1996), investigaram numericamente as características do escoamento turbulento em dois canais retangulares conectados por uma fenda, junto à parede superior, usando Simulação de Grandes Escalas. A altura e largura do canal eram,

respectivamente, 180 mm e 331,6 mm e seu comprimento 504 mm. A fenda que conecta os dois canais principais possui altura  $g$  e largura  $d$ , de 10,20 mm e 40,6 mm, respectivamente, portanto uma relação  $d/g=4$ . No domínio computacional a seção transversal foi considerada infinita, com condições de contorno periódicas nesta direção. Também obteve condições de contorno periódicas na direção principal do escoamento. O número de Reynolds da simulação variou de 3300 a 580000. Os resultados mostraram picos de tensões de Reynolds junto às fendas e grandes vórtices carregados pelo escoamento médio girando em direções opostas, como modelado experimentalmente por Möller (1991).

Merzari *et al.* (2008), fizeram um estudo detalhado em Dinâmica dos Fluidos Computacional para capturar as pulsações do fluxo em canais compostos. Duas geometrias diferentes foram investigadas e a Simulação de Grandes Escalas foi usada para estudar o fluxo em um duto retangular conectado por uma fenda.

Quanto à origem das pulsações do escoamento, Guellouz e Tavoularis, 2000, afirmam que a formação destas estruturas coerentes em geometrias bastante simples, claramente demonstra que tais estruturas não são oriundas de assimetrias ou de outra peculiaridade qualquer em subcanais, mas um inevitável resultado de instabilidade do escoamento entre canais ligados por fendas estreitas. A presença destas estruturas de grande escala, com comportamento quase-periódico, também foi observada em outros tipos de canais compostos. A figura 1.6 mostra em (a) a seção de testes estudada por Meyer e Rehme, 1994, em (b), (c) e (d) as seções de Meyer e Rehme, 1995, em (e) a seção que Biemüller *et al.*, 1996, trabalharam. Em (f) mostra a seção de testes de Soldini *et al.*, 2004.



**Figura 1.6** – Canais compostos onde foram observadas pulsações (Meyer e Rehme, 1994).

Goulart, 2009, estabeleceu uma correlação entre a teoria de camada de mistura e a distribuição das diferentes quantidades médias e flutuantes no escoamento turbulento em canais compostos.

Meyer, 2010, fez uma completa revisão sobre pulsações do escoamento em feixes de barras, incluindo o conhecimento obtido em muitos tipos de canais compostos. Ele concluiu que a origem desse fenômeno ainda é discutida e que existe uma analogia entre as pulsações do escoamento com a camada de mistura, como a formada por dois escoamentos, com diferentes velocidades, gerada por uma placa separadora.

No que diz respeito ao escoamento de água em canais compostos, “Desde há muitos séculos que as populações tendem a instalar-se em planícies aluviais, não só pelas suas disponibilidades hídricas, mas também pelo alargamento da rede de transportes por via marítima, com a conseqüente melhoria de qualidade de vida das populações” [Blanchon *et al.*, 1993].

No entanto, a ação do homem nem sempre propiciou um ambiente saudável entre a natureza e a população, não só pelas suas próprias ações como por fenômenos naturais, muitas vezes de difícil previsão temporal e de dimensão, pondo em risco vidas humanas e bens materiais [Allen *et al.*, 1978]. É, portanto fundamental compreender o funcionamento dos fenômenos naturais associados a riscos climático-meteorológicos e hidrológicos com vista à prevenção de catástrofes como é o caso das cheias em rios, das quais há ocorrências registradas por toda a história [Sebastiaan e Kelman, 2005].

Duas fases dos escoamentos de superfície livre podem ser frequentemente observadas nas enchentes dos rios e consistem dos escoamentos no canal principal e nas várzeas (planícies aluviais). O escoamento em canal composto aberto, que tem sido estudado intensivamente em ambientes de rios e engenharia hidráulica, provoca um ponto de inflexão e instabilidade próximo à região da junção entre o canal principal e as planícies aluviais bem como vórtices coerentes que são gerados a jusante [Sanjou e Nezu, 2009].

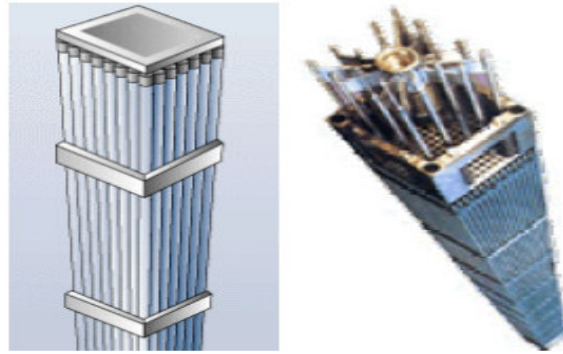
A representação dos escoamentos em rios com grande planície de inundação é fundamental para: avaliação de riscos; transporte de poluentes; transporte de sedimentos; estudos hidrogeológicos; previsão de vazões em tempo real; impacto de mudanças de uso e ocupação da terra na bacia contribuinte e impacto de modificações climáticas. A planície de inundação geralmente desempenha o papel de armazenar volume de água durante a

propagação do escoamento, com lentas trocas de água entre uma parte da planície e outra [Cunge *et al.*, 1980].

Considerando outro campo de estudos, para muitos países, a energia nuclear foi um caminho para garantir a segurança e a diversidade de seus suprimentos de energia. Nos anos 70, a preocupação com a falta do fornecimento de petróleo foi a causa mais importante da expansão da energia nuclear em países como a França e o Japão. Hoje, a França tem 78% de sua energia elétrica gerada por reatores nucleares e o Japão, 30%. Outro fator importante que tem direcionado o interesse na energia nuclear é o seu desempenho. A energia nuclear é uma tecnologia madura, com mais de meio século de experiência operacional. Nos últimos vinte anos, melhorias significativas foram introduzidas na confiabilidade das usinas nucleares, assim como na redução dos seus custos operacionais e no aumento da segurança. Muitos países, industrializados e em desenvolvimento, acreditam que um aumento na utilização da energia nuclear será atingido caso se tenha um suprimento confiável [Teixeira e Silva, 2008].

Desenvolvimentos tecnológicos orientados para a segurança e economia dos reatores nucleares tornar-se-ão progressivamente mais importantes e urgentes. No que tange a essas iniciativas, uma das considerações mais importantes do ponto de vista tecnológico, com enorme impacto sobre a segurança e economia, relaciona-se ao comportamento nuclear e termo-hidrodinâmico dos reatores nucleares. Especificamente, a análise em canais compostos de elementos combustíveis pode ser incluída como um dos itens que carecem ainda de muita pesquisa e desenvolvimento, bem como as simulações em Dinâmica dos Fluidos Computacional, que são de grande interesse, pois têm recentemente conseguido avanços consideráveis para o projeto desses reatores [Teixeira e Silva, 2008].

A figura 1.7 mostra os feixes de barras no núcleo de reatores nucleares do tipo PWR (reatores de água pressurizada), que é o mais comum de todos os tipos de reatores em uso no mundo, tanto para estações de energia comercial quanto para aplicações militares.



**Figura 1.7** – Elemento combustível de um reator de água pressurizada (PWR).

## 1.2 Objetivos, Metodologia e Organização

Este trabalho apresenta um estudo numérico e experimental da distribuição de velocidade e da estrutura da turbulência em um canal composto formado por um canal principal retangular e uma fenda em uma das paredes laterais.

Os objetivos desse trabalho, são:

- 1) Analisar experimentalmente o escoamento turbulento em um tipo de canal composto;
- 2) Empregar e aprimorar o desempenho para plataforma CESUP do código computacional tridimensional originalmente apresentado por Petry, 2002;
- 3) Analisar numericamente escoamentos de fluidos viscosos, incompressíveis e isotérmicos em canais compostos;
- 4) Verificar a validade do método numérico e o comportamento dos Modelos Submalha para reproduzir o escoamento em canais compostos;
- 5) Estudar e aplicar a simulação de grandes escalas no âmbito do método de elementos finitos.
- 6) Comparar a eficácia dos esquemas de Dois Passos e de Taylor-Galerkin, para a discretização no tempo e na posição, na análise dos resultados.

Para alcançar estes objetivos é utilizado um canal aerodinâmico e a técnica experimental utilizada para a medição de velocidades foi a anemometria de fio quente e para a análise numérica foi introduzida a metodologia de Simulação de Grandes Escalas com os modelos clássico de Smagorinsky e o modelo Dinâmico inicialmente proposto por Germano *et*



*al.*, 1991. Para o processo de segunda filtragem do modelo dinâmico emprega-se a filtragem por elementos finitos independentes [Petry, 2002].

No algoritmo emprega-se o Método dos Elementos Finitos e, para integrar as Equações governantes, adotam-se os esquemas de Dois Passos e de Taylor-Galerkin para a discretização no tempo e na posição. O elemento finito de discretização do domínio computacional é o hexaedro linear.

Para a análise da teoria da camada de mistura no escoamento turbulento, bem como do comportamento do modelo submalha de Smagorinsky e Dinâmico, são apresentados os resultados de aplicações do canal composto.

Finalizando, são apresentadas as conclusões relativas aos temas abordados na presente tese, bem como as referências bibliográficas que foram consultadas.

Nos apêndices são abordados os temas de análise de incertezas e procedimento de calibração da sonda de fio quente. Na sequência, são apresentadas as publicações realizadas até a defesa desta tese.

As simulações numéricas das aplicações foram processadas no supercomputador SunFire X2200, do Centro Nacional de Supercomputação da Região Sul, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CESUP-RS/UFRGS).



## 2. Revisão Bibliográfica

### 2.1. Turbulência

Na natureza, os escoamentos de fluidos, em sua maioria, são turbulentos. Eles estão presentes em nossas vidas, desde o sangue que escoo em nosso corpo até os escoamentos atmosféricos. Numerosos outros exemplos de escoamentos turbulentos encontram-se na Aeronáutica, Hidráulica, Engenharia Nuclear e Química, Oceanografia, Meteorologia, Astrofísica e Geofísica.

Silveira Neto, 2002, observa que desde Leonardo da Vinci (1510) os estudos têm acontecido. Ele fez interpretações muito importantes com base apenas em observações visuais: a esteira de vórtices gerada à jusante de um obstáculo é composta por uma larga quantidade de frequências e de formas diversas.

De acordo com Tennekes e Lumley, 1972, tudo o que se pode fazer no sentido de definir a turbulência é listar algumas das características principais dos escoamentos turbulentos, como: irregularidade, difusividade, associação a números de Reynolds elevados, tridimensionalidade das flutuações, dissipação, validade da hipótese do contínuo e ser caracterizada pelas propriedades do escoamento, não pelas propriedades físicas do fluido.

Um conceito mais atual trata da turbulência como um escoamento organizado com estruturas coerentes de várias escalas de comprimento. Lesieur, 1997, define uma estrutura coerente como uma região do espaço onde, para um dado tempo, tem o mesmo tipo de organização, com relação a alguma quantidade do escoamento (exemplos: velocidade, vorticidade, pressão, massa específica, temperatura). Vórtice coerente também é definido por ele como uma região do espaço, onde a concentração de vorticidade é suficiente para que as trajetórias de fluido girem ao redor dele mantendo sua forma característica por um período maior do que o tempo de rotação local. Neste sentido, um vórtice coerente é uma estrutura coerente. Detalhes adicionais podem ser encontrados também em Möller e Silvestrini, 2004.

Historicamente, a mecânica dos fluidos preocupou-se em estudar esses movimentos experimentalmente muito antes do que matematicamente [Fortuna, 2000], mesmo porque, a descrição matemática desses movimentos só foi possível a partir do século XIX com as Equações de Navier-Stokes.

A solução analítica de tais equações torna-se extremamente complexa quando sujeitas a regiões arbitrárias com condições de contorno gerais, pois tratam-se de equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares e os métodos matemáticos resolvem apenas formas

muito simples de equações, dentro de contornos triviais, apesar de essas equações terem sido formuladas há mais de um século, não foi descoberta ainda uma forma universal de solução analítica exata dos problemas de dinâmica dos fluidos a partir delas [Stull, 1988].

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (*CFD – Computational Fluid Dynamics*), que trata da análise numérica dos escoamentos surgiu como alternativa à análise matemática desses movimentos.

Löhner, 2001, cita diversas razões que levaram ao crescimento do interesse de cientistas e engenheiros a desenvolverem estudos nesta área:

- **necessidade de prever o comportamento de um determinado produto**, pois defeitos não visíveis podem causar falhas e ter um efeito devastador sobre o mesmo;
- **o custo de um experimento** pode ser muito alto, por exemplo, um teste subterrâneo de um artefato nuclear custaria, aproximadamente, US\$  $10^8$ ;
- **alguns experimentos podem ser proibitivos**, ou por não serem passíveis de reprodução em laboratório, ou por terem alto risco, como por exemplo, situações biomédicas;
- **a introspecção** é uma das grandes vantagens do CFD, pois simulações numéricas oferecem mais informações sobre o escoamento do que os experimentos. Além disso, uma malha com  $2 \times 10^7$  pontos é equivalente a um experimento com  $2 \times 10^7$  sensores ou instrumentos de medida;
- **o avanço computacional**, pois, segundo Löhner, por volta de 1983 um problema com cerca de 1000 elementos finitos era considerado excessivamente grande, na época desta referência, em 2001, um problema desta magnitude já podia ser facilmente resolvido, mesmo num computador pessoal, em poucos minutos.

Apesar de todas essas vantagens apresentadas pelos procedimentos numéricos não pode-se deixar de ressaltar a importância das análises teóricas (analítica) e dos métodos experimentais, pois têm crucial importância na validação e complementaridade de códigos numéricos.

Os principais métodos utilizados para simulação numérica de escoamentos de fluidos são: Métodos de Diferenças Finitas (FDM - *Finite Difference Method*); Método de Volumes Finitos (FVM - *Finite Volume Method*) e Métodos de Elementos Finitos (FEM - *Finite Element Method*).

O método de diferenças finitas tem sido usado para o cálculo de escoamentos de fluidos e transferência de calor, o que pode ser observado pela grande quantidade de trabalhos na literatura especializada, existindo muitos códigos computacionais baseados no mesmo. Vários autores afirmam que uma limitação deste método está na discretização de domínios com complexidade geométrica, problema este que pode ser parcialmente

solucionado pelo uso de malhas não-ortogonais. Alguns dos vários trabalhos destacados nessa área são: Roberts *et al.*, 1999, Sorensen e Nygreen, 2001, Bernudez *et al.*, 2002.

O método de volumes finitos (FVM - *Finite Volume Method*), apresentado por Patankar, 1980, constitui-se hoje em um dos principais métodos para análise numérica de escoamentos e transferência de calor. A característica principal deste método é a fácil interpretação física dos termos das equações em termos de fluxos, fontes e forças, devido ao fato de a formulação resultante ser de natureza conservativa, uma vez que tal formulação é obtida através dos princípios de conservação.

Devido às dificuldades em se utilizar o método das diferenças finitas em geometrias complexas, o método de elementos finitos, inicialmente desenvolvido para análise estrutural, começou a ser aplicado para o caso de escoamentos, devido à sua grande versatilidade na discretização de domínios geometricamente complexos. O método tornou-se amplamente aceito a partir dos anos 60, quando foram iniciadas pesquisas em várias partes do mundo. Na literatura que trata da aplicação do método de elementos finitos em escoamentos de fluidos, destaca-se: Hughes, 1987; Franca e Frey, 1992; Reddy e Gartling, 1994; Popiolek, *et al.*, 2006.

A aplicação de um método numérico também pode ser dividida em três etapas: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

Na etapa de pré-processamento, define-se a geometria ou domínio físico do problema; este domínio é discretizado por algum tipo de elemento, constituindo a malha de elementos finitos. Nesta etapa podem ser definidas as propriedades físicas do fluido e demais parâmetros (condições de contorno e iniciais) necessários para a solução do problema.

Na fase de processamento, aplica-se um código baseado no modelo numérico para obtenção das grandezas de interesse (velocidade e pressão) em pontos do domínio denominados de nós dos elementos.

Na etapa de pós-processamento os resultados são analisados para se verificar a validade do modelo numérico, comparando com resultados experimentais, ou para os propósitos para os quais se resolveu o problema. Técnicas de visualização gráfica, geralmente, são empregadas para análise dos resultados.

## **2.2 Modelagem da Turbulência**

Stull, 1988, observa que a utilização de simulações numéricas para a solução de problemas de escoamentos turbulentos tem uma dificuldade inerente, conhecida como *Problema de Fechamento*.

Esse problema decorre do fato de o número de incógnitas presentes no sistema que descreve os escoamentos turbulentos ser maior que o número de equações, estando associado à característica de não linearidade da turbulência e surge a partir do momento em que as equações de Navier-Stokes são decompostas, de forma a se expressar o comportamento médio do escoamento separadamente de suas flutuações.

As novas incógnitas que surgem estão relacionadas às flutuações e precisam de alguma forma, ser expressas em termos de variáveis, para as quais existam equações, de maneira a tornar o número de equações igual ao número de incógnitas. A este procedimento chama-se *Modelagem da Turbulência*.

A modelagem da turbulência é uma aproximação da natureza, na qual a equação que descreve o comportamento real de uma variável é substituída por uma aproximação, construída artificialmente. Na literatura clássica de Launder e Spalding, 1972 e 1974; Rodi, 1984 e Markatos, 1986, encontra-se referencial sobre esse tema.

De acordo com Wilcox, 2000, "um modelo ideal deve introduzir o mínimo em complexidade, enquanto captura a essência física relevante".

Por outro lado, como a turbulência é caracterizada como sendo um fenômeno inerentemente tridimensional e variável no tempo, uma enorme quantidade de informações é necessária para uma completa descrição de um escoamento turbulento. Assim, é esperado que quanto mais complexo seja o problema a ser resolvido, mais sofisticado deverá ser o método de solução a ser adotado. Logo, o requisito de simplicidade do modelo de turbulência será relativo à complexidade do problema a ser solucionado.

As primeiras intenções de usar modelos de turbulência foram de Boussinesq, 1877, que propõe que a tensão turbulenta seja representada por um modelo similar à tensão de origem molecular.

Prandtl, 1925, introduz o modelo de comprimento de mistura e uma maneira direta de se calcular a viscosidade turbulenta. Ele se tornou uma das referências em modelagem de turbulência, conhecido como modelo algébrico ou "zero" equação.

A turbulência em Prandtl, 1945 e em Kolmogorov, 1942, foi caracterizada pela intensidade (definida pela energia de turbulência), que foi calculada usando uma equação

diferencial, e a escala de turbulência (ou a frequência no caso de Kolmogorov, 1942). Os dois modelos fazem o uso do conceito de viscosidade turbulenta ("*eddy viscosity*").

Hoje, na modelagem da turbulência, três metodologias são mais usuais: *Simulação Numérica Direta* (DNS – Direct Numerical Simulation), *Equações Médias de Reynolds* (RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes) e *Simulação de Grandes Escalas* (LES – Large Eddy Simulation).

A modelagem DNS que começou com Orszag e Patterson, 1972, exige uma malha suficientemente fina para poder resolver todas as escalas, o que acarreta num custo computacional muito alto, por isso essa metodologia somente é usada para baixos números de Reynolds.

As observações de Leonardo da Vinci em 1510 podem ser vistas como precursoras da técnica para a aproximação RANS, que é baseada na separação do valor instantâneo de uma variável específica em seu valor médio e em um valor flutuante, com relação ao valor médio. As componentes das tensões de Reynolds são originadas pelas substituições dos valores médios, mais os flutuantes das componentes de velocidade nas equações do balanço da quantidade de movimento [Hinze, 1959, Schlichting, 1968 e Tennekes e Lumley, 1972].

As equações médias de Reynolds têm mais incógnitas do que equações e devido a isto é necessário usar um modelo de fechamento para definir as componentes das tensões de Reynolds.

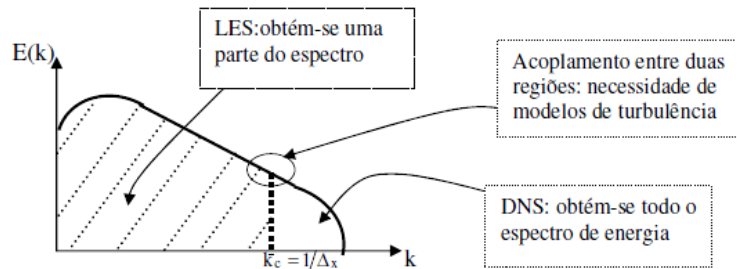
A metodologia RANS tem o custo computacional mais baixo do que a DNS, porém somente estruturas maiores são resolvidas e as condições de contorno não são tão simples de serem impostas.

A Simulação de Grandes Escalas (LES), inicialmente proposta por Smagorinsky, 1963, consiste em resolver diretamente as maiores estruturas turbulentas, que contêm a maior parte da energia e modelar apenas as menores estruturas.

A metodologia LES baseia-se na premissa de que os movimentos nas menores escalas tendem a ser mais homogêneos e isotrópicos, conseqüentemente, menos afetados pelas condições de contorno. Assim, de acordo com Silveira Neto, 2002, pode-se esperar que a modelagem dessas escalas tenha um caráter universal, ou seja, uma menor dependência do tipo de escoamento que está sendo simulado.

Entretanto, Silveira Neto, 2002, também observa que, mesmo a metodologia LES sendo mais eficiente do que a DNS do ponto de vista computacional, ela também necessita de malhas refinadas. Na Figura 2.1, ilustra-se o espectro de energia do escoamento

turbulento. Se todas as frequências forem capturadas, explicitamente fala-se de Simulação Numérica Direta (DNS), em contraste com a metodologia LES com a qual se resolve apenas uma parte do espectro.



**Figura 2.1** – Espectro de energia cinética turbulenta. [Fonte: Silveira Neto, 2002].

Devido à interação com o escoamento principal, o movimento turbulento de grandes escalas é altamente influenciado pelas condições de contorno do escoamento. O escoamento principal tem muitas vezes uma direção preferencial, que é imposta ao movimento turbulento de grande escala. Esta característica torna o fenômeno turbulento altamente anisotrópico, sendo a intensidade das flutuações e as escalas de comprimento associadas dependentes da direção. No processo de cascata de energia, a sensibilidade à direção é reduzida. As grandes escalas de turbulência se distanciam das pequenas escalas nos escoamentos em que o número de Reynolds é suficientemente elevado e a sensibilidade direcional é totalmente perdida nas pequenas escalas, tornando o movimento turbulento de menor escala isotrópico. Este fenômeno, denominado *isotropia local*, onde o movimento dos grandes vórtices da turbulência é anisotrópico e o movimento de pequenos vórtices é isotrópico, é um conceito muito importante na modelagem da turbulência [Silveira Neto, A., 2002].

A principal diferença entre as metodologias LES e DNS está no conceito de *Filtragem*, pela qual se obtém a separação de escalas. Uma variável submetida à filtragem será composta de duas partes: *a filtrada*, referente às grandes escalas, resolvida diretamente durante a simulação; e a denominada *submalha*, não resolvida pela malha, que necessita ser modelada.

No processo de filtragem das equações de Navier-Stokes surgem termos não lineares, que contêm grandezas para as quais não há equações explícitas e que necessitam, portanto, ser modelados. Entre esses termos há o chamado *Tensor de Tensões de Reynolds Submalha* ( $R_{ij}$ ).



A mais popular aproximação empregada como modelo submalha da LES tem sido o modelo proposto por Smagorinsky, 1963. Neste modelo as tensões de Reynolds submalha são aproximadas na forma de um processo de difusão por gradiente, fazendo analogia ao movimento molecular.

A representação da turbulência, nesse modelo, é feita por uma viscosidade turbulenta como uma propriedade local do fluido, sendo, no entanto, considerada uma propriedade do escoamento.

Assim, de acordo com Markatos, 1986, o comprimento de mistura das pequenas escalas da turbulência é tratado de forma análoga ao livre caminho médio molecular, da teoria cinética dos gases. Essa descrição tem proporcionado bons resultados em simulações de escoamentos turbulentos em várias áreas da Engenharia.

Zang *et al.*, 1993, observam que o modelo de Smagorinsky apresenta alguns inconvenientes como: a) necessita informar a constante  $C_s$  (constante de Smagorinsky), a qual é dependente do escoamento; b) prevê um incorreto comportamento assintótico próximo à parede; c) não permite a transferência de energia das pequenas escalas para as grandes escalas; d) assume que os eixos principais do tensor das tensões submalha são alinhados com os do tensor da taxa de deformação.

Silveira Neto, 2002, considera que as principais deficiências do modelo de Smagorinsky se manifestam na simulação de escoamentos em transição do regime laminar para o turbulento, e próximo às fronteiras sólidas, nos quais  $C_s$  sendo um valor constante, não produz bons resultados.

A literatura que trata da aplicação da metodologia LES com modelo de Smagorinsky, pode ser encontrada em Abrunhosa e Nieckele, 2005; Sampaio e Nieckele, 2006; Meyers e Sagaut, 2006; Leveque, *et al.*, 2007.

Devido à limitação da constante de Smagorinsky, várias alternativas foram propostas em Germano *et al.*, 1991; Lilly, 1992; Zang *et al.*, 1993; Vreman *et al.*, 1994; Ghosal *et al.*, 1995; Salvetti e Banerjee, 1995 e Meneveau *et al.*, 1996; entre outros autores.

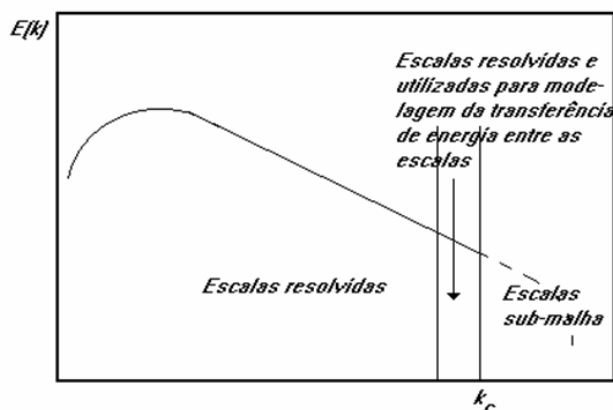
Uma importante proposta para superar essas dificuldades é a técnica de Modelagem Submalha Dinâmica, onde a constante  $C_s$  é uma função que varia no tempo e na posição.

Utilizando um modelo de viscosidade turbulenta para representar os tensores e uma identidade algébrica que os relaciona, Germano *et al.*, 1991, definem uma expressão para o coeficiente  $C$ , em função da posição e do tempo ( $C(\vec{x}, t)$ ).

Esse modelo é fundamentado em dois processos de filtragens, aplicados sucessivamente às equações de Navier-Stokes. O filtro ao nível de malha e o filtro teste geram, respectivamente, o tensor de escalas submalha e o tensor subteste, os quais são calculados explicitamente em função das grandes escalas (resolvidas com a metodologia LES).

Em sua análise sobre a técnica de modelagem submalha dinâmica, Wilcox, 2000, destaca que as suas principais deficiências se apresentam quando ocorrem situações onde a viscosidade turbulenta assume valores negativos, implicando em transferência de energia cinética das escalas submalha para as maiores escalas, como mostra a figura 2.2.

Essa situação, na qual existe uma cascata inversa, é observada na realidade, e é referenciada na literatura internacional como *Backscatter* (retroespalhamento). A consequência desse fenômeno no modelo em questão é uma instabilidade numérica que leva à perda completa de energia cinética na escala submalha, comprometendo a simulação.



**Figura 2.2** – Espectro de energia, ilustrando as duas escalas que definem os dois filtros utilizados e a banda de frequência que serve à modelagem do processo de interação entre as escalas resolvidas e as escalas submalha. [Fonte: Silveira Neto, 2002].

As características de instabilidade numérica do modelo dinâmico têm sido revisadas através de contribuições de outros pesquisadores.

Lilly, 1992, para obter o coeficiente  $C$  de forma consistente, aplica o Método dos Mínimos Quadrados em substituição à contração aplicada por Germano *et al.*, 1991. A partir de então, o modelo dinâmico de Germano *et al.*, 1991, passa a ser utilizado com a modificação proposta por Lilly, 1992.

Essa modificação exige que os eixos principais das tensões submalha devam ser alinhados com o tensor da taxa de deformação, pois no caso contrário, causa uma excessiva transferência de energia das pequenas escalas para as grandes escalas (C negativo).

Zang *et al.*, 1993, ameniza a instabilidade numérica que surge no modelo de Lilly, 1992, propondo um novo *Modelo Dinâmico Misto*, combinando linearmente o modelo dinâmico e o modelo de escalas de similaridade de Bardina (mostrado em Murakami, 1998).

O modelo dinâmico misto não requer o alinhamento dos eixos dos tensores de tensões turbulentas e de taxa de deformação.

As propostas de Sagaut *et al.*, 1994, Piomelli e Liu, 1995 e Nakayama e Vengadesan, 2002, que aplicam um filtro de corte, foram feitas com o objetivo de corrigir a dificuldade causada pelas grandes flutuações no coeficiente C que ocasionam instabilidades computacionais.

Alternativas ao modelo dinâmico de escalas submalha podem ser encontradas em: Ghosal *et al.*, 1995 – propõem um modelo dinâmico localizado; Salvetti e Banerjee, 1995 – apresentam um modelo dinâmico de dois parâmetros; Meneveau *et al.*, 1996 – apresentam um modelo dinâmico Lagrangiano; Horiuti, 1997 – propõe modelo dinâmico submalha misto de dois parâmetros (nova proposta à Salvetti e Banerjee); Krajnović e Davidson, 2001 – propõem um modelo submalha misto de uma equação; Tejada-Martinez e Jansen, 2006 – propõem modelo dinâmico submalha com parâmetro livre; e Yu *et al.*, 2006 – propõem modelo submalha de difusividade turbulenta.

### **2.3. Descrição da Camada de Mistura**

A existência de diferenças de velocidade no interior de um escoamento é responsável pelo desenvolvimento da camada de mistura. Essa camada é um modelo de escoamento extremamente importante para a compreensão do desenvolvimento da turbulência em escoamentos nos canais compostos.

O modelo de camada de mistura consiste em um escoamento formado por um ou mais fluidos que obrigatoriamente apresenta um ponto de inflexão em sua distribuição de velocidade. Esse modelo é útil para verificar como o fenômeno de transição à turbulência se processa no escoamento cisalhante através da amplificação de pequenas perturbações presentes no sistema.

De acordo com Bernard e Wallace, 1998, a espessura da camada cisalhante e a

variação de velocidades, são escalas de comprimento e velocidade que proverão as propriedades auto-preservantes em camadas de mistura. A relação funcional auto-preservante neste tipo de escoamento é dada por

$$\frac{\bar{u}_{(y)} - U_c}{\Delta U} = f(\eta) \quad (3.57)$$

onde  $U_c$  é a velocidade de convecção, ou seja, a média de velocidade da camada de mistura, definida pela equação (3.58) e  $\Delta U$  é a diferença entre a velocidade inferior da camada de mistura,  $U_1$  e a superior,  $U_2$ ;

$$U_c = \frac{U_2 + U_1}{2} \quad (3.58)$$

Prooijen and Uijttewaal, 2002, definiram o parâmetro  $\eta$  como variável de similaridade

$$\eta = 2 \frac{y - y_c}{\delta_{(x)}} \quad (3.59)$$

sendo  $y_c$  a coordenada do centro da camada de mistura e  $\delta(x)$  a espessura da camada cisalhante, definida por,

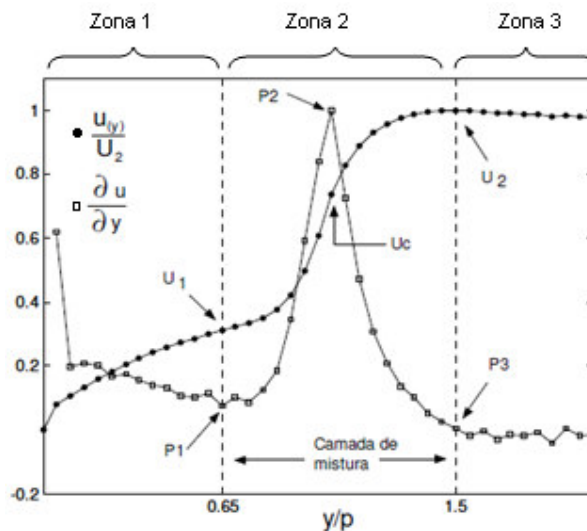
$$\delta_{(x)} = \frac{U_2 - U_1}{\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{\max.}} \quad (3.60)$$

De acordo com Lesieur, 1997, a solução analítica da equação diferencial que governa a distribuição de velocidades ao longo da camada de mistura, leva a um perfil de velocidades na forma de uma função de erro. No entanto, segundo o autor, a função tangente hiperbólica ( $\tanh$ ) é largamente utilizada como aproximação, nestes casos e, portanto, a equação (3.57) pode ser escrita da forma

$$\bar{u}(\eta) = U_c + \frac{\Delta U}{2} \tanh(\eta) \quad (3.61)$$

Goulart, 2009, descreve a forma típica de um perfil de velocidade axial, em um

canal composto, juntamente com o gradiente de velocidade, mostrado na figura 2.3. Salienta para a ocorrência de três diferentes zonas: nas zonas 1 e 3 a distribuição de velocidades é fortemente influenciada pela presença das paredes laterais do canal, levando a uma distribuição logarítmica de velocidades. Quanto à distribuição de velocidade na zona 2, a influência das paredes não é mais observada, sendo apresentada apenas em função das características geométricas da seção de testes.



**Figura 2.3** - Gradiente e perfil de velocidade. [Fonte: Goulart, 2009]

O ponto de inflexão P1, mostra o término da zona 1, onde as tensões viscosas são dominantes e responsáveis pela distribuição logarítmica do perfil de velocidade. Ele marca o início da camada de mistura.

O segundo ponto de inflexão, P2, marca o centro da camada de mistura, nele ocorre a velocidade do centro da camada, denominada velocidade de convecção  $U_c$ .

Quanto ao ponto de inflexão P3, este mostra o ponto onde a função é máxima, nele acontece a velocidade máxima dentro da camada de mistura.

### 3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

#### 3.1 Equações que Governam o Escoamento

Os escoamentos laminares e turbulentos são modelados matematicamente pelas Equações de Navier-Stokes.

Hughes, 1987, observa que a forma de resolução direta das equações que governam o problema físico e suas condições de contorno define a formulação forte do problema, que tem domínio chamado de  $\Omega$  e a fronteira do sistema de  $\Gamma_v$ , onde ocorrem as condições de contorno de valor prescrito chamadas de essenciais ou de 1ª espécie (de Dirichlet) na equação (3.3) e as condições de contorno naturais ou de 2ª espécie (de Neumann) na equação (3.4).

Considerando-se as hipóteses de escoamento tridimensional, transiente e isotérmico, as equações que governam o problema são:

Equação de Balanço de Quantidade de Movimento:

$$\frac{D\rho v_i}{Dt} - \frac{\partial(\sigma_{ij}^* - p\delta_{ij})}{\partial x_j} = f_i \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

Equação de Conservação de Massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.2)$$

Com as condições de contorno:

$$v_i = \hat{v}_i \quad \text{em } \Gamma_v \quad (3.3)$$

$$(\sigma_{ij}^* - p\delta_{ij})n_j = T_i \quad \text{em } \Gamma_v \quad (3.4)$$

e condições iniciais:

$$v_i = \hat{v}_{i0} \quad \text{em } t = 0, \Omega \quad (3.5)$$

$$p = \hat{p}_0 \quad \text{em } t = 0, \Omega \quad (3.6)$$

Para um fluido newtoniano, é válida a seguinte equação constitutiva:

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (3.7)$$

Onde:

$\rho$  → massa específica do fluido

$v_i$  → componente da velocidade na direção  $i$

$x_i$  → coordenada na direção  $i$

$p$  – pressão

$f_i$  - componente das forças de campo na direção  $i$

$\delta_{ij}$  - delta de Kronecker

$\hat{v}_i$  - valores prescritos da velocidade  $i$  no contorno indicado

$n_j$  - cosseno diretor do vetor normal ao contorno

$T_i$  - valores prescritos das forças de superfície no contorno

$\sigma_{ij}^*$  - tensões de superfície (tangenciais e normais ao volume de controle)

$\mu$  - coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido

$\lambda$  - coeficiente de viscosidade volumétrica do fluido

$\hat{v}_{i0}$  - valores prescritos da velocidade  $i$  no domínio indicado, para tempo inicial

$\hat{p}_0$  - valores prescritos da pressão no domínio indicado, para tempo inicial

Reescrevendo as equações (3.1) e (3.2), substituindo a equação constitutiva (3.7) e expandindo a derivada total, estas passam a ser:

Equação de Balanço de Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (3.8)

Equação de Conservação de Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.9)$$

Adicionando as condições de contorno (3.3) e (3.4) e as condições iniciais (3.5) e (3.6) às equações acima e considerando a equação (3.7) reescreve-se a condição de contorno (3.4):

$$\left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left[ \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + p \right] \delta_{ij} \right\} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.10)$$

Considerando a equação (3.9), pode-se reescrever a equação (3.8) como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (3.11)

Os escoamentos a serem analisados neste trabalho são escoamentos incompressíveis. Nesses escoamentos verifica-se que a massa específica pode ser extraída dos termos derivados, visto que a mesma possui uma variação muito pouco significativa e, portanto, considerada nula [Fox e MacDonald, 1995].

Observa-se também que a hipótese de incompressibilidade é válida para escoamentos com baixos números de Mach ( $Ma \leq 0,3$ ), ou seja, velocidades nos escoamentos inferiores à velocidade de propagação do som no fluido.

Considerando, então, a massa específica constante, as equações 3.9 e 3.11, para o escoamento incompressível podem ser escritas como:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.12)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (3.13)

As equações anteriores são empregadas para a análise de escoamentos incompressíveis, entretanto para a análise numérica desses escoamentos é necessário adotar algum esquema para superar complicações devidas a incompressibilidade, tais como o



surgimento de modos espúrios de pressão, dificuldades de convergência e a ausência da pressão na equação de conservação de massa (divergente nulo do campo de velocidades), resultando no aparecimento de zeros na diagonal principal da matriz de massa [Petry, 2002].

Neste trabalho considera-se um fluido quase-incompressível [Kawahara e Hirano, 1983], semelhante ao método de pseudo-compressibilidade [Chorin, 1980].

O uso da formulação de quase-incompressibilidade é bastante conveniente para a aplicação no método de elementos finitos, pois evita problemas de aparecimento de zeros na diagonal principal do sistema linear devido ao termo de derivada temporal da pressão, na equação da continuidade.

Para deduzir a equação de conservação de massa de um escoamento quase-incompressível utiliza-se a equação da conservação de massa (3.9), considerando-se também a pressão como função da massa específica do fluido [Schlichting, 1979]:

$$p = p(\rho) \quad (3.14)$$

logo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.15)$$

Sendo a velocidade do som definida por:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = C^2 \quad (3.16)$$

Tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{C^2} \quad (3.17)$$

Substituindo (3.17) em (3.9) e multiplicando por  $C^2$ , obtém-se a equação de conservação de massa para escoamentos quase-incompressíveis na sua forma final:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.18)$$

Considerando-se a massa específica constante, multiplicando e dividindo a equação (3.11) pela massa específica, a equação de balanço da quantidade de movimento pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_j) \right) + \frac{\lambda}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (3.19)

onde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , é a viscosidade cinemática do fluido.

A condição de contorno (3.10) também pode ser rerepresentada como:

$$\left\{ -p + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) \right\} \delta_{ij} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_j) \right] n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.20)$$

As equações (3.18) e (3.19), juntamente com as condições de contorno (3.3) e (3.20) e condições iniciais (3.5) e (3.6), descrevem o escoamento de fluidos viscosos transientes, tridimensionais, quase-incompressíveis e isotérmicos.

Essas equações poderiam ser empregadas para análise de escoamentos turbulentos via metodologia DNS (Simulação Numérica Direta), entretanto, como já foi discutido anteriormente, a discretização espacial e temporal necessária para a análise de problemas práticos de engenharia por simulação direta ainda é superior à discretização possível nos computadores atuais. Conforme foi apresentado no capítulo 2, as alternativas à Simulação Direta para análise de um escoamento turbulento são o emprego das metodologias RANS (Equações Médias de Reynolds) ou LES (Simulação de Grandes Escalas).

Neste trabalho emprega-se a metodologia LES (Simulação de Grandes Escalas), tendo sido implementados dois modelos para representar os efeitos das escalas inferiores à resolução da malha, o Modelo de Smagorinsky e o modelo Dinâmico [Germano *et al.*, 1991; Lilly, 1992]. As equações empregadas serão apresentadas a seguir.

### 3.2 Equações para Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos

Uma das propriedades mais marcantes da turbulência nos fluidos é a multiplicidade de escalas de comprimento e de tempo que a caracteriza. O primeiro passo para a aplicação da metodologia de Simulação de Grandes Escalas consiste exatamente na

separação destas escalas, através de um processo de filtragem. Neste contexto, uma variável  $f$  limitada pode ser decomposta em uma componente representativa das grandes escalas  $\bar{f}$  e uma componente submalha  $f'$ , como segue:

$$f = \bar{f} + f' \quad (3.21)$$

A operação de filtragem serve para diminuir escalas na ordem da largura do filtro, denotada por  $\Delta$ . A largura é uma característica do comprimento do filtro [Tejada-Martinez, 2002].

As variáveis de interesse ficam filtradas da seguinte forma:

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (3.22)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (3.23)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (3.24)$$

Ao assumir a hipótese de que a massa específica é constante, tem-se  $\rho' = 0$  e, portanto:

$$\rho = \bar{\rho} \quad (3.25)$$

Apesar da semelhança na notação, o processo de filtragem realizado em LES (Simulação de Grandes Escalas) é diferente da filtragem realizada na hipótese da média temporal de Reynolds.

Silvestrini, 2000, destaca que o filtro é definido pelo método numérico usado na resolução das equações governantes. Se, por exemplo, o método de elementos finitos for usado, a opção mais natural é adotar o filtro caixa ou “*top hat*”, que é adotado neste trabalho. Este filtro apresenta uma função com um valor constante dentro do raio característico do filtro, como dado pela equação (3.27) e mostrado na figura 3.1. Outros filtros frequentemente utilizados são o filtro gaussiano e o filtro passa-alta (filtro de corte) no espaço de Fourier (em números de onda) [Leonard, 1974; Silveira Neto *et al.*, 1993; Piomelli, 1999]. Outros filtros são descritos nos artigos de Leonard, 1974 e Findikakis e Street, 1982.

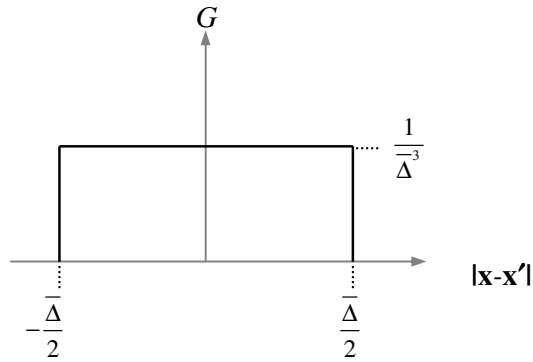
A operação de filtragem é definida como uma convolução entre a variável de campo e a função filtro [Leonard, 1974]. Os valores filtrados são obtidos a partir do operador mostrados na equação que segue:

$$\bar{f}(x) = \int G(x-x')f(x')dx' \quad (3.26)$$

Sendo G uma função filtro, a função filtro caixa é definida como:

$$G(x-x') = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i}, & \text{para } |x_i - x'_i| < \frac{\Delta_i}{2} \\ 0, & \text{para } |x_i - x'_i| > \frac{\Delta_i}{2} \end{cases} \quad (3.27)$$

onde  $\Delta_i$  é a dimensão do filtro na direção i, e  $n$  corresponde ao número de dimensões.



**Figura 3.1** Forma da função filtro tipo caixa [Fonte: Oliveira Júnior, J.A.A., 2006];

A operação de filtragem possui as seguintes propriedades:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} \quad (3.29)$$

$$\overline{g'f'} \neq \bar{g}'\bar{f}' \quad (3.30)$$

$$\overline{gf} \neq \bar{g}\bar{f} \quad (3.31)$$

$$\overline{gf'} \neq 0 \quad (3.32)$$

Procedendo a filtragem das equações (3.18) e (3.19) e considerando (3.22), (3.23) e (3.28) à (3.32) obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{v_i v_j}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] + \frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho (L_{ij} + C_{ij} + \overline{v'_i v'_j}) \right\} - f_i = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.34) \end{aligned}$$

Sendo:

$\bar{v}_i \rightarrow$  componente, correspondente às grandes escalas, do vetor de velocidade na direção  $x_i$ .

$\bar{p} \rightarrow$  pressão, componente correspondente às grandes escalas.

$v'_i \rightarrow$  componente, correspondente às escalas submalha, do vetor de velocidade na direção  $x_i$ .

$L_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}} - \bar{v}_i \bar{v}_j \rightarrow$  termos de Leonard.

$C_{ij} = \overline{\overline{v_i v'_j}} + \overline{\overline{v'_i v_j}} \rightarrow$  termos cruzados.

$\overline{v'_i v'_j} \rightarrow$  tensor de Reynolds submalha.

Observa-se que os termos não-lineares, após a aplicação da operação de filtro, podem ser escritos como:

$$\overline{v_i v_j} = \overline{\overline{v_i v_j}} + \overline{\overline{v_i v'_j}} + \overline{\overline{v'_i v_j}} + \overline{\overline{v'_i v'_j}} \quad (3.35)$$

Os termos cruzados e de Leonard podem ser modelados seguindo a idéia de Clark *et al.*, 1979, que sugerem expressar a soma desses termos como uma expansão em série de Taylor do campo de velocidade filtrado.

Conseqüentemente, os valores filtrados dos termos não-lineares podem ser aproximados por:

$$\overline{v_i v_j} \approx \bar{v}_i \bar{v}_j + L_{ij} + C_{ij} + \overline{v'_i v'_j} \quad (3.36)$$

sendo:

$$C_{ij} + L_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{2\gamma} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \quad (3.37)$$

Segundo Findikakis e Street, 1982 e comprovado por Petry e Awruch, 2006, os termos  $L_{ij}$  e  $C_{ij}$  podem ser desprezados. Então as equações (3.34) e (3.20), ficam respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] - \left[ -\frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + \overline{v'_i v'_j} \right] \right\} - \bar{f}_i = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (3.38)$$

$$\left\{ \left[ -\bar{p} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + v \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_v \quad (3.39)$$

As equações (3.33) e (3.38) juntamente com as condições de contorno (3.3) e (3.39) e condições iniciais (3.5) e (3.6), governam o escoamento turbulento, isotérmico e quase-incompressível de um fluido newtoniano. O termo acima, na equação (3.38), com o tensor de Reynolds submalha  $\overline{v'_i v'_j}$  é resultado do movimento das escalas inferiores à resolução de malha e deve ser modelado.

### 3.3 Modelos de Turbulência Submalha

Os modelos submalha são utilizados para representar a influência das escalas não-resolvidas (movimentos submalha) sobre as escalas resolvidas.

Piomelli, 1999, observa que a elaboração de um modelo submalha ideal ainda é um desafio para os estudiosos de turbulência e, principalmente, para os numericistas que desenvolvem a simulação de grandes escalas. As características desejadas para tal modelo são que ele seja capaz de prever corretamente a dissipação geral de energia no escoamento, que seja capaz de se anular em escoamentos laminares, que dependa fortemente das menores escalas resolvidas (mais do que do espectro completo de movimentos) e que preveja precisamente a troca local de energia entre as escalas resolvidas e as modeladas.

A modelagem clássica da turbulência apóia-se nas equações médias de Reynolds. Uma das primeiras tentativas de modelar as tensões de Reynolds é atribuída ao matemático francês Boussinesq, 1877, que, analisando um escoamento tridimensional cisalhante, estabeleceu uma analogia entre as tensões de Reynolds e as tensões viscosas:

$$\tau_{xy} = \overline{u'v'} = -\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.40)$$

Ao termo  $\mu_t$  denominou-se *viscosidade turbulenta*. É interessante ressaltar que, neste caso, enquanto a viscosidade dinâmica ou absoluta  $\mu$  é uma propriedade do fluido, a viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ , é uma propriedade do escoamento, pois depende fortemente do estado da turbulência, ou seja,  $\mu_t$  pode variar significativamente de um ponto a outro no interior do escoamento.

Embora a modelagem submalha não seja fundamentada necessariamente no conceito de viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq), esta aproximação tem sido utilizada na maior parte dos estudos já realizados, os quais expressam o tensor de Reynolds submalha, em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, como segue

$$-\overline{v_i'v_j'} = 2\nu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} k_{sm} \delta_{ij} \quad (3.41)$$

sendo que  $\overline{S_{ij}}$  depende das escalas resolvidas explicitamente e é definido por:

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.42)$$

Logo:

$$-\overline{v_i' v_j'} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k_{sm} \delta_{ij} \quad (3.43)$$

onde  $k_{sm}$  é a energia cinética turbulenta submalha e  $k_{sm} = \frac{1}{2} \overline{v_i' v_i'}$  e  $\nu_t$  é a viscosidade turbulenta, calculada de acordo com o modelo, conforme será descrito a seguir.

De acordo com a expressão original de Boussinesq (3.40), o desenvolvimento das equações fica como segue:

$$-\overline{v_i' v_j'} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.44)$$

O termo contendo energia cinética submalha foi introduzido para compatibilizar o modelo com a equação de conservação de massa dos escoamentos incompressíveis [Hinze, 1975], empregando a equação (3.44), obtém-se a seguinte expressão:

$$-\overline{v_i' v_i'} = 2\nu_t \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} \quad (3.45)$$

Na equação acima o termo do lado direito é nulo para um escoamento incompressível (equação (3.12)), enquanto o lado esquerdo somente será nulo caso não existam escalas submalha, pois representa o dobro da energia cinética submalha  $k_{sm}$ . Para compatibilizar o modelo com a condição de incompressibilidade foi incluída na equação (3.44) o termo que inclui  $k_{sm}$ , resultando na equação (3.41).



### 3.3.1 Modelo de Smagorinsky

Um dos mais importantes modelos para o cálculo das tensões de Reynolds submalha é o modelo de Smagorinsky, 1963, proposto pelo próprio meteorologista para calcular as grandes estruturas encontradas em escoamentos atmosféricos. Em sua essência, este modelo baseia-se na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, por intermédio do qual a produção de tensões turbulentas submalha,  $\Pi$ , é considerada igual à taxa de dissipação,  $\epsilon$ , isto é:

$$\Pi = \epsilon \quad (3.46)$$

Assume-se ainda que a viscosidade turbulenta para as escalas submalha é definida como:

$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \quad (3.47)$$

onde  $\bar{\Delta}$  é uma escala associada com o filtro utilizado para definir o campo de grandes escalas e neste trabalho calculada por:

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 \Delta x_i} \quad (3.48)$$

$C_s$  é a constante de Smagorinsky assumindo valores entre 0,1 e 0,22 e  $|\bar{S}|$  é o módulo do tensor taxa de cisalhamento calculado por

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3.49)$$

Apesar das desvantagens apontadas na secção 2.2, o modelo de Smagorinsky tornou-se o modelo mais popular em simulação de grandes escalas (Rodi *et al.*, 1997) e tem sido aplicado a muitas situações, talvez pela sua simplicidade, por ser robusto numericamente e ser livre de instabilidades numéricas.

### 3.3.2 Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta

A modelagem submalha convencional envolve uma constante de proporcionalidade *ad-hoc* imposta. O que impõe uma limitação no que diz respeito à análise de escoamentos em transição e nas regiões próximas às paredes. A determinação dinâmica de uma função de proporcionalidade no cálculo de viscosidade turbulenta pode representar avanços importantes.

Neste trabalho é implementado o modelo dinâmico de viscosidade turbulenta proposto por Germano *et al.*, 1991 e modificado por Lilly, 1992. O tensor de Reynolds submalha também é aproximado pela equação (3.44), contudo a viscosidade turbulenta é definida como:

$$\nu_t = C(\bar{x}, t) \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (3.50)$$

onde  $C(\bar{x}, t)$  é o coeficiente dinâmico que varia em função das condições locais do escoamento. O cálculo de  $C(\bar{x}, t)$  é definido pela seguinte expressão:

$$C(\bar{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (3.51)$$

onde os termos  $L_{ij}$ ,  $M_{ij}$  são definidos como:

$$L_{ij} = \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_j \rangle \quad \text{e} \quad M_{ij} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S}_{ij} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle \bar{\Delta}^2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle \quad (3.52)$$

onde:

$$\langle \bar{S}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle \bar{v}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{v}_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \langle \bar{S} \rangle = \sqrt{2 \langle \bar{S}_{ij} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle} \quad (3.53)$$

O modelo baseia-se na aplicação de dois filtros com tamanhos diferentes. O primeiro filtro utiliza as dimensões da malha para calcular o comprimento característico (filtro

em nível de malha), já o segundo utiliza um múltiplo das dimensões da malha para calcular o comprimento característico (filtro teste). Utilizando as informações contidas nas menores escalas resolvidas, na região entre os dois filtros, pode-se modelar a transferência de energia entre as escalas resolvidas e não resolvidas.

O comprimento característico do segundo filtro  $\langle \bar{\Delta} \rangle$  é maior que o comprimento característico do filtro ao nível de malha  $\bar{\Delta}$  ( $\langle \bar{\Delta} \rangle > \bar{\Delta}$ ).

Nas equações acima (3.50 a 3.53) a barra sobreposta indica o primeiro processo de filtragem (filtro ao nível de malha) e o símbolo  $\langle \rangle$  refere-se ao segundo processo de filtragem, ou seja, o filtro teste. Mais adiante será discutido o processo de segunda filtragem onde se utiliza o processo proposto por Petry, 2002.

### 3.4 Equações que Governam o Escoamento Turbulento empregando Modelo Submalha de Smagorinsky e Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta

As equações que governam o problema são escritas em sua forma final nesta secção. A equação de conservação de massa, apenas repetindo a equação (3.33), escreve-se como:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega$$

A equação de balanço de quantidade de movimento (3.38) substituindo as tensões de Reynolds submalha pela equação (3.44), pode ser expressa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{array}{l} (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \\ - \frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} \end{array} \right\} - \bar{f}_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (3.54)

Com as condições de contorno (3.3) e (3.39), esta última considerando também a equação (3.44), pode ser expressa como:

$$\left\{ \left[ -\bar{p} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + (v + v_i) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.55)$$

e as condições iniciais estão definidas pelas equações (3.5) e (3.6).

Por ter empregado a equação (3.44), adequada à formulação de escoamentos quase-incompressíveis, em lugar da expressão usual para escoamentos incompressíveis, equação (3.43), a pressão nessas equações não é a pressão modificada. Apenas quando a equação (3.43) é empregada o termo da pressão na equação de balanço da quantidade de movimento é modificado e passa a incluir a energia cinética submalha.

O fechamento deste sistema de equações é feito através do Modelo de Smagorinsky, conforme a equação (3.47) ou do Modelo Dinâmico descrito pelas equações (3.50) a (3.53).

O próximo capítulo apresenta as equações acima discretizadas no tempo e na posição, através dos esquemas de Taylor-Galerkin e de Dois Passos. Descrevem-se, ainda, alguns aspectos relevantes do processo computacional, assim como a metodologia proposta e empregada para o processo da segunda filtragem do modelo dinâmico submalha.

## 4. MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

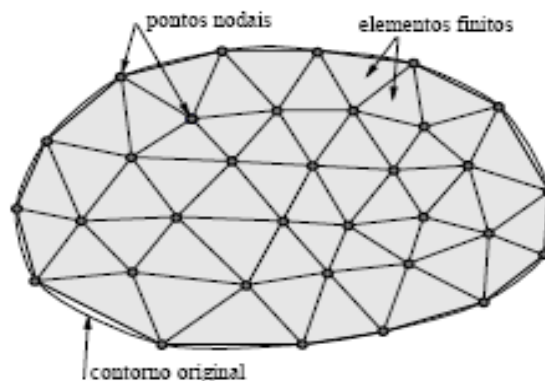
O método empregado para a solução do sistema de equações apresentado no capítulo 3 é o Método de Elementos Finitos. Para obter o sistema de equações algébricas a ser resolvido, procede-se a discretização das derivadas temporais através da expansão destas em série de Taylor, incluindo os termos de segunda ordem. Para a discretização espacial aplica-se o Método de Galerkin Clássico [Reddy e Gartling, 1994]. Objetivando reduzir o tempo de processamento, adota-se a integração reduzida das matrizes de elementos, utilizando expressões analíticas das funções de interpolação do elemento hexaédrico trilinear [Burbridge, 1999; Gresho *et al.*, 1984]. Este esquema é conhecido como Taylor-Galerkin [Donea, 1984; Yoon *et al.*, 1998; Azevedo, 1999; Zienkiewicz e Taylor, 2000; Petry e Awruch, 2006; Popiolek, Awruch e Teixeira, 2006].

### 4.1 Formulação de Elementos Finitos do Problema

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em um método numérico aproximado para análise de diversos fenômenos físicos que ocorrem em meios contínuos, e que são descritos através de equações diferenciais parciais, com determinadas condições de contorno (Problemas de Valor de Contorno), e possivelmente com condições iniciais (para problemas variáveis no tempo). O MEF é um método bastante genérico, e pode ser aplicado na solução de inúmeros problemas da engenharia.

A idéia principal do Método dos Elementos Finitos consiste em dividir-se o domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões de geometria simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico), conforme ilustra esquematicamente a Figura 4.1.

Esta idéia é bastante utilizada na engenharia, onde usualmente tenta-se resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples. Logo, trata-se de um procedimento intuitivo para os engenheiros.

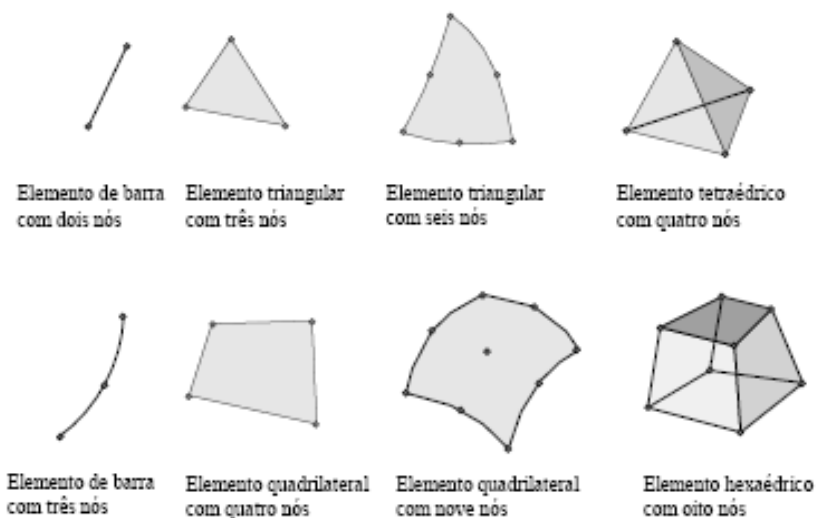


**Figura 4.1** – Malha de Elementos Finitos (para problema plano),[Souza R. M., 2003].

Devido ao fato das sub-regiões apresentarem dimensões finitas, estas sub-regiões são chamadas “elementos finitos”.

Os elementos finitos utilizados na discretização (subdivisão) do domínio do problema são conectados entre si através de determinados pontos, denominados nós ou pontos nodais, conforme indica a Figura 4.1. Ao conjunto de elementos finitos e pontos nodais, dá-se, usualmente o nome de malha de elementos finitos.

Diversos tipos de elementos finitos já foram desenvolvidos. Estes apresentam formas geométricas diversas (por exemplo, triangular, quadrilateral, cúbico) em função do tipo e da dimensão do problema (uni, bi, ou tridimensional). A Figura 4.2 apresenta a geometria de vários tipos de elementos finitos.



**Figura 4.2** – Diferentes tipos de elementos finitos, [ Souza R. M., 2003].

Brenner e Scott, 2008, destacam que a precisão do método depende da quantidade de nós e elementos, e do tamanho e tipo dos elementos presentes na malha. Um dos aspectos mais importantes do MEF diz respeito a sua convergência. Mesmo sendo um método aproximado, pode-se demonstrar que em uma malha consistente, à medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero, e conseqüentemente, a quantidade de nós tende a infinito, a solução obtida converge para a solução exata do problema. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número de elementos em uma determinada malha, mais precisos serão os resultados da análise.

Os passos principais da análise por elementos finitos de um problema são resumidos por, como:

1 – Pré-Processamento: Discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos, geração da malha de elementos finitos (definir as coordenadas dos nós que compõem a malha e as conectividades que definem os elementos, não podendo haver sobreposição dos domínios dos elementos).

2 – Formulação de Resíduos Ponderados ou Forma Fraca das equações diferenciais a serem analisadas.

3 – Desenvolvimento das equações de elementos finitos do problema a partir da formulação de resíduos ponderados ou forma fraca do problema.

4 – Montagem das equações em termos de elemento para obter o sistema global de equações algébricas (sobre todo o domínio).

5 – Imposição das condições de contorno.

6 – Solução das equações.

7 – Pós-Processamento dos resultados.

Os próximos parágrafos apresentam a dedução do modelo de elementos finitos do problema, itens 2 e 3 acima, partindo da formulação matemática definida pelas equações governantes (3.54) e (3.55); condições de contorno (3.3) e (3.56) e condições iniciais (3.5) e (3.6), com fechamento através dos modelos submalha de Smagorinsky (3.47) e dinâmico (3.50).

#### **4.1.1 Formulação de Resíduos Ponderados do Problema**

As equações de elementos finitos são deduzidas a partir de uma formulação variacional ou de resíduos ponderados do problema. A formulação de resíduos ponderados do

escoamento quase-incompressível, isotérmico, turbulento, transiente, pode ser obtida, partindo das equações governantes (3.54) e (3.55), multiplicando pelas funções peso de velocidade e de pressão e integrando sobre o domínio de um elemento, resultando nas equações (4.1) e (4.2).

→ Conservação de Massa:

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} p^* C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j) d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

→ Balanço de Quantidade de Movimento:

$$\int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{array}{l} (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \\ - \frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} \end{array} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \bar{f}_i d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

onde:

$V_i^*$  → Função peso para a velocidade, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno;

$p^*$  → Função peso para a pressão, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno.

Para reduzir a exigência de diferenciação das funções de aproximação (também referidas como funções de interpolação) faz-se a integração por partes do termo viscoso:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} v_i^* (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$



Integrando por partes também o termo em  $\lambda$  e o termo do gradiente de pressão, chega-se à forma fraca das equações para o escoamento quase-incompressível (4.4).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] d\Omega + \\
& + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \delta_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} \bar{p} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \bar{f}_i d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} v_i^* \left\{ \bar{p} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial (\rho \bar{v}_k)}{\partial x_k} + (v + v_t) \left[ \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} n_j d\Gamma \quad (4.4)
\end{aligned}$$

#### 4.1.2 Equações de Elementos Finitos do Problema

Para obter a equação de elementos finitos emprega-se a técnica clássica de Galerkin [Reddy e Gartling, 1994; Hughes, 1987] às equações (4.1) e (4.4), que representam a formulação de resíduos ponderados do problema. O método de Galerkin consiste em utilizar as mesmas funções de aproximação para a função peso e para as variáveis do problema.

Considerando o domínio do elemento, substituem-se as variáveis e as funções peso por aproximações, combinações lineares das funções de interpolação do elemento multiplicadas por parâmetros (valores nodais das funções a serem aproximadas):

$$\begin{aligned}
\rho \bar{v}_i(x, y) &= \phi(x, y) \rho \bar{v}_{-i} \\
v_i^*(x, y) &= \phi(x, y) v_{-i}^* \\
\bar{p}(x, y) &= \psi(x, y) \bar{p} \\
p^*(x, y) &= \psi(x, y) p^*
\end{aligned} \quad \text{em } \Omega_e \quad (4.5)$$

Sendo:

$\phi$  → vetor de funções de interpolação para a velocidade;

$\bar{v}_{-i}$  → vetor de valores nodais da componente i da velocidade;

$\underline{v}_i^*$  → vetor de valores nodais da componente i da função peso de velocidade;

$\underline{\psi}$  → vetor de funções de interpolação para a pressão;

$\underline{\bar{p}}$  → vetor de valores nodais da pressão;

$\underline{p}^*$  → vetor de valores nodais da função peso de pressão;

$\Omega_e$  → domínio do elemento;

Obtêm-se as equações ao nível de elemento:

$$\int_{\Omega_e} \underline{\psi}^T \underline{p}^* \frac{\partial(\underline{\psi} \underline{p})}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_e} \underline{\psi}^T \underline{p}^* C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-j}) d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \underline{\phi}^T \underline{v}_{-i}^* \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-i}) d\Omega + \int_{\Omega_e} \underline{\phi}^T \underline{v}_{-i}^* \underline{\phi}_{-j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\underline{\phi}^T \rho \underline{v}_{-i}) d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \underline{\phi}^T \underline{v}_{-i}^*}{\partial x_j} (\underline{v} + \underline{v}_t) \frac{\partial}{\partial x_j} (\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-i}) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \underline{\phi}^T \underline{v}_{-i}^*}{\partial x_j} (\underline{v} + \underline{v}_t) \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-j}) d\Omega + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \underline{\phi}^T \underline{v}_{-i}^*}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} (\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-k}) \delta_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \underline{\phi}^T \underline{v}_{-i}^*}{\partial x_i} \underline{\psi} \underline{p} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega_e} \underline{\phi}^T \underline{v}_{-i}^* \underline{f}_i d\Omega = \int_{\Gamma_e} \underline{\phi} \underline{v}_{-i}^* S_i d\Gamma \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde:

$$\int_{\Gamma_e} \underline{\phi} \underline{v}_{-i}^* \left\{ \underline{\psi} \underline{p} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial(\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-k})}{\partial x_k} + (\underline{v} + \underline{v}_t) \left[ \frac{\partial(\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\underline{\phi} \rho \underline{v}_{-j})}{\partial x_i} \right] \right\} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \underline{\phi} \underline{v}_{-i}^* S_i d\Gamma$$

$\Gamma_e$  → contorno do elemento.

Isolando as funções peso, obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} (\underline{\psi}^T \underline{\psi}) d\Omega \underline{\bar{p}} + C^2 \int_{\Omega_e} \underline{\psi}^T \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x_j} d\Omega \rho \underline{\bar{v}}_{-j} = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \bar{\phi}^T \bar{\phi} d\Omega \left( \rho \dot{\bar{v}}_i \right) + \int_{\Omega_e} \bar{\phi}^T \bar{\phi} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} d\Omega \left( \rho \bar{v}_i \right) + \left[ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_j} d\Omega \right] (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \left( \rho \bar{v}_i \right) + \\
& + \left[ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_i} d\Omega \right] (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \left( \rho \bar{v}_j \right) + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_k} d\Omega \left( \rho \bar{v}_k \right) \delta_{ij} + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_i} \bar{\psi} d\Omega \rho - \\
& - \int_{\Omega_e} \bar{\phi}^T d\Omega \bar{f}_i = \int_{\Gamma_e} \bar{\phi} \bar{S}_i d\Gamma
\end{aligned}$$

(4.9)

sendo que o ponto de cima da variável indica derivada em relação ao tempo.

A equação (4.9) pode escrever-se como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} \bar{\phi}^T \bar{\phi} d\Omega \left( \rho \dot{\bar{v}}_i \right) + \int_{\Omega_e} \bar{\phi}^T \bar{\phi} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} d\Omega \left( \rho \bar{v}_i \right) + \mathbf{v} \left[ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_j} d\Omega \rho \bar{v}_i + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_i} d\Omega \rho \bar{v}_j \right] + \\
& + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_k} d\Omega \left( \rho \bar{v}_k \right) \delta_{ij} + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_i} \bar{\psi} d\Omega \rho - \int_{\Omega_e} \bar{\phi}^T d\Omega \bar{f}_i + \\
& + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} (\mathbf{v}_t) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_j} d\Omega \rho \bar{v}_i + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_j} (\mathbf{v}_t) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}_i} d\Omega \rho \bar{v}_j = \int_{\Gamma_e} \bar{\phi} \bar{S}_i d\Gamma
\end{aligned}$$

Empregando as aproximações dadas em (4.5), obtemos a expressão de  $\bar{S}$ , para cálculo da viscosidade turbulenta, em termos das variáveis nodais:

$$\bar{S} = \left\{ 2 \left[ \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_1} \left( \rho \bar{v}_{-1} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_2} \left( \rho \bar{v}_{-2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_3} \left( \rho \bar{v}_{-3} \right) \right]^2 \right] + \right. \\
+ 2 \left[ \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_2} \left( \rho \bar{v}_{-1} \right) \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_1} \left( \rho \bar{v}_{-2} \right) \right] + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_3} \left( \rho \bar{v}_{-1} \right) \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_1} \left( \rho \bar{v}_{-3} \right) \right] + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_2} \left( \rho \bar{v}_{-3} \right) \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_3} \left( \rho \bar{v}_{-2} \right) \right] \right] + \\
\left. + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_2} \left( \rho \bar{v}_{-1} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_1} \left( \rho \bar{v}_{-2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_3} \left( \rho \bar{v}_{-1} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_1} \left( \rho \bar{v}_{-3} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_3} \left( \rho \bar{v}_{-2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}_2} \left( \rho \bar{v}_{-3} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(4.11)

Escrevem-se as equações (4.8) e (4.10) de forma compacta:

$$\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{p}}} \dot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{G}}_j^T (\underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{v}}_{\underline{\underline{j}}}) = 0 \quad (4.12)$$

$$\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{\rho}} \dot{\underline{\underline{v}}}_i \right) + \underline{\underline{A}}_j (\underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{v}}_{\underline{\underline{i}}}) + \underline{\underline{D}}_{ij} (\underline{\underline{\rho}} \underline{\underline{v}}_{\underline{\underline{j}}}) - \underline{\underline{G}}_i \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{F}}_i \quad (4.13)$$

onde as matrizes de elementos são:

$$\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{p}}} = \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{\Psi}} d\Omega \quad ; \quad \underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{v}}} = \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\Phi}} d\Omega \quad ; \quad \underline{\underline{A}}_j = \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\nabla}}_j \underline{\underline{\Phi}} \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}}{\partial x_j} d\Omega$$

$$\underline{\underline{G}}_i = \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}^T}{\partial x_i} \underline{\underline{\Psi}} d\Omega \quad ; \quad \underline{\underline{G}}_j^T = C^2 \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \underline{\underline{\Psi}}^T \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}}{\partial x_j} d\Omega \quad ; \quad \underline{\underline{F}}_i = \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \underline{\underline{\Phi}}^T f_i d\Omega + \int_{\underline{\underline{\Gamma}}_e} \underline{\underline{\Phi}}^T s_i d\Gamma$$

$$\underline{\underline{D}}_{ii} = \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \left( 2(\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}}_t) + \frac{\lambda}{\rho} \right) \left( \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} (\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}}_t) \left( \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}}{\partial x_k} \right) d\Omega$$

para  $i=1, k=2,3$ ; para  $i=2, k=3,1$ ; para  $i=3, k=1,2$

$$\underline{\underline{D}}_{ij} = \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} (\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}}_t) \left( \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\underline{\underline{\Omega}}_e} \left( \frac{\lambda}{\rho} \right) \left( \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \underline{\underline{\Phi}}}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad ; \quad \text{para } i \neq j$$

(4.14)

As funções  $\underline{\underline{\Phi}}$  e  $\underline{\underline{\Psi}}$  são funções de interpolação, sendo usualmente  $\underline{\underline{\Psi}}$  de ordem inferior a  $\underline{\underline{\Phi}}$ . No caso dos hexaedros trilineares,  $\underline{\underline{\Phi}}$  é função linear e  $\underline{\underline{\Psi}}$  é constante no domínio do elemento.

## 4.2 Esquema de Taylor-Galerkin

Para obter as equações discretizadas também no tempo, faz-se a expansão em série de Taylor das derivadas temporais das equações de elementos finitos que governam o problema (4.12) e (4.13), até os termos de segunda ordem. Este esquema foi empregado por Donea, 1984. Deduções mais detalhadas da discretização temporal por série de Taylor podem ser encontradas em Gonzalez, 1993; Yoon *et al.*, 1998; Azevedo, 1999 e Zienkiewicz e Taylor, 2000, Burbridge e Awruch, 2000, Petry e Awruch, 2006.

Expandindo-se a  $\bar{p}$  em série de Taylor, tem-se:

$$\Delta \bar{p}_{\tilde{k}} = \bar{p}_{\tilde{k}}^{-n+1} - \bar{p}_{\tilde{k}}^{-n} = \Delta t \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} \right) + \dots \quad (4.15)$$

Considerando (4.12) e (4.15), é possível obter a expressão:

$$\mathbf{M}_{\tilde{Dp}} \Delta \bar{p}_{\tilde{k+1}}^{-n+1} = -\Delta t \left\{ \left[ \mathbf{G}_j^T \left( \rho \bar{v}_{\tilde{j}} \right)^n \right] + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{G}_j^T \left( \Delta \rho \bar{v}_{\tilde{j}_k} \right)^{n+1} \right] \right\} - \left( \mathbf{M}_{\tilde{p}} - \mathbf{M}_{\tilde{Dp}} \right) \Delta \bar{p}_{\tilde{k}}^{-n+1} \quad (4.16)$$

A matriz  $\mathbf{M}_{\tilde{Dp}}$  é a matriz de massa da pressão discreta, ou diagonalizada, empregada para evitar a inversão de uma matriz consistente. No caso de hexaedros trilineares, com  $\Psi$  constante no elemento, as matrizes de massa de pressão consistente e discreta são idênticas e se transformam no volume do elemento. Neste caso o último termo da equação (4.16) se anula.

O mesmo processo de expansão de  $\rho \bar{v}_{\tilde{i}}$  em série de Taylor e considerando a equação (4.13), conduz a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_D \Delta(\rho \bar{v})_{k+1}^{n+1} = & -\Delta t \left\{ \left[ A_j(\rho \bar{v})_{\tilde{i}} + D_{ij}(\rho \bar{v})_{\tilde{j}} - G_i \bar{p} \right]^n - \frac{1}{2} \left( F_{\tilde{i}}^n + F_{\tilde{i}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\} - \\ & - \frac{\Delta t}{2} \left\{ A_j(\Delta \rho \bar{v})_{\tilde{i}} + D_{ij}(\Delta \rho \bar{v})_{\tilde{j}} - G_i \Delta \bar{p} + \frac{2}{\Delta t} (\tilde{M}_v - \tilde{M}_D) \Delta \rho \bar{v}_{\tilde{i}} \right\}_k^{n+1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde  $\tilde{M}_D$  é a matriz de massa de velocidade,  $\tilde{M}_v$ , diagonalizada.

Nas expressões (4.15) a (4.17), o índice  $n$  refere-se ao passo de tempo, enquanto  $k$  está relacionado ao número da iteração,  $\Delta p$  é a variação da pressão e  $\Delta \rho v_i$  é a variação de  $\rho v_i$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Desta forma tem-se:

$$[\Delta(\rho v_i)]_{k+1}^{n+1} = -\Delta t \tilde{M}_D^{-1} \left\{ S_{\tilde{i}}^n + \frac{1}{2} R_{\tilde{k}}^{n+1} \right\} \quad (4.18)$$

$$[\Delta p]_{k+1}^{n+1} = -\frac{\Delta t C^2}{\text{volume}} \left\{ T^n + \frac{1}{2} Q_k^{n+1} \right\} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (4.19)$$

sendo:

$$S_{\tilde{i}}^n = \left[ A_j(\rho \bar{v})_{\tilde{i}} + D_{ij}(\rho \bar{v})_{\tilde{j}} - G_j \bar{p} \right]^n \quad (4.20)$$

$$R_{\tilde{k}}^{n+1} = \left[ A_j(\Delta \rho \bar{v})_{\tilde{i}} + D_{ij}(\Delta \rho \bar{v})_{\tilde{j}} - G_i \Delta \bar{p} - (\tilde{M}_D - \tilde{M}_v) (\Delta \rho \bar{v})_{\tilde{i}} \right]_k^{n+1} \quad (4.21)$$

$$T_{\tilde{i}}^n = G_j^T (\rho \bar{v})_{\tilde{j}}^n \quad (4.22)$$

$$Q_{\tilde{k}}^{n+1} = G_j^T (\Delta \rho \bar{v})_{\tilde{j}}_k^{n+1} \quad (4.23)$$

O campo de velocidades e pressões atualizadas é então obtido calculando-se:

$$(\rho v_i)_{n+1} = (\rho v_i)_n + \Delta(\rho v_i)_{n+1}^{k+1} \quad (4.24)$$

$$P_{n+1} = P_n + \Delta P_{n+1}^{k+1} \quad (4.25)$$

para cada nó da malha de elementos finitos.

O esquema é condicionalmente estável e o intervalo de tempo de integração deve respeitar a seguinte restrição:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_i(\min)}{C + V} \quad (4.26)$$

sendo  $\Delta x_i(\min)$  a menor dimensão de elementos da malha,  $C$  é a velocidade de propagação do som no meio e  $V$  uma velocidade de referência.

### 4.3 Esquema de Dois Passos

O esquema explícito de Dois Passos, apresentado por [Kawahara e Hirano, 1983], assim como o esquema de Taylor-Galerkin, é oriundo da expansão em série de Taylor de uma variável genérica  $\theta$  [Yoon et al., 1998], a qual pode ser verificada a partir da seguinte expressão:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (4.27)$$

Desta maneira, a partir da equação (4.27), dois passos são avaliados até os termos de primeira ordem.

$$\theta^{n+1/2} = \theta^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^n \quad (4.28)$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^{n+1/2} \quad (4.29)$$

As variáveis primárias do escoamento são obtidas através da devida substituição das mesmas nas equações (4.27), (4.28) e (4.29).

Substituindo os termos de velocidade e pressão tanto na equação (4.28) como na equação (4.29), expressões destinadas ao cálculo do primeiro e segundo passo, obtêm-se a formulação do esquema temporal explícito de Dois Passos para a equação de conservação de massa e quantidade de movimento. Desta maneira, tem-se que:

1° Passo:

$$M_{DP} \left( \bar{p} \right)^{n+1/2} = M_S \left( \bar{p} \right)^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ G_j^T \left( \bar{v}_j \right)^n \right] \quad (4.30)$$

$$M_{DV} \left( \bar{v}_i \right)^{n+1/2} = M_{DV} \left( \bar{v}_i \right)^n - \frac{\Delta t}{2} \left[ A_j \left( \bar{v}_i \right)^n + D_{ij} \left( \bar{v}_i \right)^n - G_i \bar{p}^n - (F_i)^n \right] \quad (4.31)$$

2° Passo:

$$M_{DP} \left( \bar{p} \right)^{n+1} = M_S \left( \bar{p} \right)^n - \Delta t \left[ G_j^T \left( \bar{v}_j \right)^{n+1/2} \right] \quad (4.32)$$

$$M_{DV} \left( \bar{v}_i \right)^{n+1} = M_{DV} \left( \bar{v}_i \right)^n - \Delta t \left[ A_j \left( \bar{v}_i \right)^{n+1/2} + D_{ij} \left( \bar{v}_i \right)^n - G_i \left( \bar{p} \right)^{n+1/2} - (F_i)^n \right] \quad (4.33)$$

Onde  $M_S$  é a matriz de massa seletiva e pode ser escrita da seguinte maneira:



$$M_s = eM_D + (1-e)M_C \quad (4.33)$$

Isolando as variáveis primárias em ambos os passos e reescrevendo as equações de forma mais compacta, temos:

1º Passo:

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{pmatrix}^{n+1/2} = \frac{M_s}{M_{DP}} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{pmatrix}^n - \frac{\Delta t}{2} (M_{DP})^{-1} \left[ (TP)^n \right] \quad (4.34)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}_i \end{pmatrix}^{n+1/2} = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}_i \end{pmatrix}^n - \frac{\Delta t}{2} (M_{DV})^{-1} \left[ (SP_i)^n + (RP_i)^n \right] \quad (4.35)$$

2º Passo:

$$\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{pmatrix}^{n+1} = \frac{M_s}{M_{DP}} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{pmatrix}^n - \Delta t (M_{DP})^{-1} \left[ (TP)^{n+1/2} \right] \quad (4.36)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}_i \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}_i \end{pmatrix}^n - \Delta t (M_{DV})^{-1} \left[ (SP_i)^{n+1/2} + (RP_i)^n \right] \quad (4.37)$$

Onde:

$$(TP) = \left[ G_j^T \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}_j \end{pmatrix} \right] \quad (4.38)$$

$$(SP_i) = \left[ A_j \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} - G_i \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \right] \quad (4.39)$$

$$(RP_i) = \left[ D_{ij} \begin{pmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}_j \end{pmatrix} - F_i \right] \quad (4.40)$$

A matriz de massa seletiva está relacionada à matriz discreta  $M_D$ , a matriz consistente  $M_C$  e ao parâmetro de diagonalização seletiva  $e$ . Este parâmetro controla o amortecimento e a estabilidade numérica e sua utilização é amplamente investigada em [Kawahara et al., 1982]. Quando  $e$  é igual à unidade, a matriz seletiva passa a ser apenas a matriz diagonalizada, apresentando um comportamento mais instável, enquanto a utilização de um parâmetro seletivo nulo faz com que  $M_S = M_C$  e, conseqüentemente, um comportamento mais amortecido seja observado.

#### 4.4 Segunda Filtragem

O modelo de viscosidade turbulenta submalha de Smagorinsky apresenta como maior limitação a dificuldade de representar corretamente, com uma constante única, diferentes campos de escoamento turbulento, tais como recirculação, recolamento e escoamento próximo à parede.

Uma alternativa ao modelo de Smagorinsky é o modelo dinâmico de viscosidade turbulenta, proposto por Germano *et al.*, 1991 e modificado por Lilly, 1992. Nesse modelo o coeficiente é calculado de acordo com a evolução do escoamento, sendo uma função do tempo e da posição.

A equação (3.51) define o coeficiente dinâmico  $C(\bar{x}, t)$ , que depende do uso de dois filtros de diferentes comprimentos característicos. A primeira filtragem é considerada aplicada quando se realiza a discretização das equações. O primeiro filtro (filtro ao nível de malha) tem dimensão característica relacionada às dimensões dos elementos da malha.

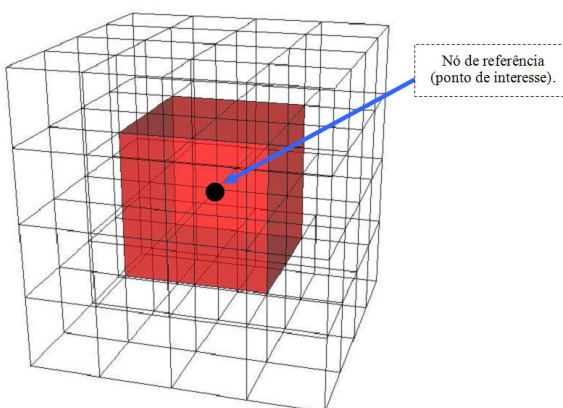
Para o segundo processo de filtragem (filtro teste) emprega-se um filtro com dimensão característica maior que o primeiro filtro. Baseado nestes dois níveis de escala, os modelos dinâmicos usam informações das menores escalas resolvidas (situadas entre os dois filtros) para calcular o coeficiente dinâmico.

Para o processo de segunda filtragem destacam-se as propostas de Findikakis e Street, 1982 e Oshima, *et al.*, 1996, que apresentam uma expansão em série de Taylor, bem como Padilla e Silveira Neto, 2003, que analisam a influência de diferentes tipos de filtros.

A proposta para a segunda filtragem apresentada neste trabalho é referida como *segunda filtragem por elementos finitos independentes*, que foi apresentada por Petry, 2002.

Um exemplo de elemento independente em malha tridimensional é o apresentado na figura 4.3 (elemento vermelho).

O processo consiste em construir elementos em torno de cada nó da malha, definido por nós vizinhos ao nó de interesse e empregar as funções de interpolação lineares do elemento para efetuar o processo de segunda filtragem. Desta forma, emprega-se uma interpolação linear dos valores calculados nos pontos vizinhos da malha, para obter o valor filtrado no ponto de interesse.



**Figura 4.3** – Elemento independente em malha tridimensional, [Petry, 2002].

Para gerar esse conjunto de elementos independentes foi utilizado o algoritmo apresentado por Petry, 2002.

Considerando o elemento hexaédrico de oito nós, representado no espaço físico  $(x_1, x_2, x_3)$  e no espaço computacional  $(\xi, \eta, \zeta)$  na figura 4.4, com funções de interpolação lineares dadas por:

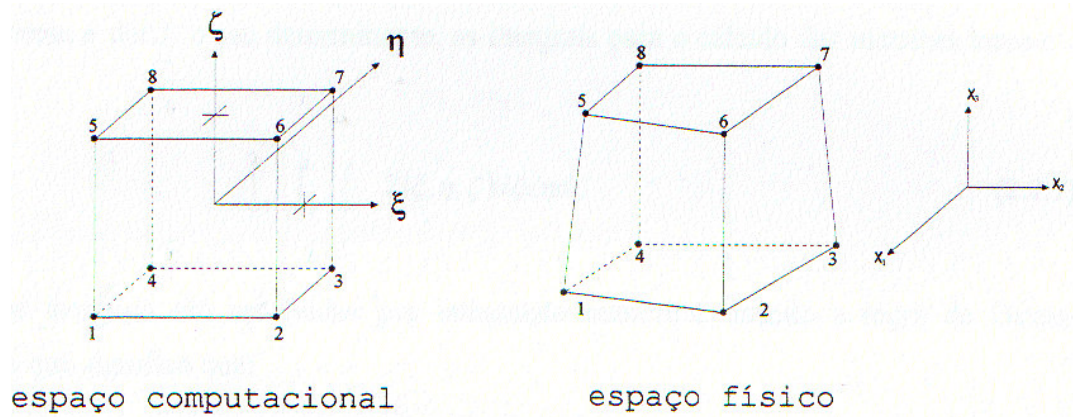
$$\phi_{\alpha}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_{\alpha} \xi)(1 + \eta_{\alpha} \eta)(1 + \zeta_{\alpha} \zeta) \quad (\alpha=1, \dots, 8) \quad (4.41)$$

onde  $\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, \zeta_{\alpha}$  são as coordenadas do nó  $\alpha$  do elemento no sistema de eixos referencial  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ , dadas por:

$$\underline{\xi}^T = \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\} \quad (4.42)$$

$$\underline{\eta}^T = \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\} \quad (4.43)$$

$$\underline{\zeta}^T = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\} \quad (4.44)$$



**Figura 4.4** – Elemento hexaédrico de oito nós no espaço computacional e físico, [Petry, 2002].

As coordenadas de um ponto I qualquer no interior do elemento podem ser calculadas pela seguinte transformação de coordenadas:

$$(x_i)_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) x_{i\alpha} \quad (4.45)$$

onde:

$(x_i)_I \rightarrow$  coordenada de um ponto I qualquer no interior do elemento ( $i=1,2,3$ )

$x_{i\alpha} \rightarrow$  coordenada i do nó  $\alpha$  que define o elemento ( $\alpha=1,2,3,4,5,6,7,8$ )

$\phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \rightarrow$  função de interpolação do nó  $\alpha$ , avaliada no ponto I, com coordenadas naturais  $(\xi_I, \eta_I, \zeta_I)$ .

Esta é a transformação usual empregada em elementos finitos.

Dessa forma, dispõem-se das conectividades dos elementos independentes e das coordenadas naturais de todos os nós da malha, relativas ao seu elemento independente.

A etapa incluída no algoritmo principal de solução consiste em avaliar as quantidades:

$$\langle \bar{v}_i \rangle, \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle \text{ e } \langle \bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} \rangle$$

utilizando as funções de interpolação do elemento e as coordenadas naturais de cada nó no interior do elemento independente associado a ele da seguinte forma

$$\langle \bar{v}_i \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \bar{v}_{i\alpha} \quad (4.46)$$

$$\langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \bar{v}_i \bar{v}_{j\alpha} \quad (4.47)$$

$$\langle \bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_{\alpha}(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) (\bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} )_{\alpha} \quad (4.48)$$

Empregando esta interpolação os valores dos nós vizinhos são ponderados, através de uma interpolação linear, na obtenção do valor filtrado de acordo com a distância dos mesmos ao nó I.

Torna-se necessário calcular os valores de  $\bar{v}_i \bar{v}_j$  e  $\bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij}$  para os nós que compõem o elemento independente. No programa implementado, estes valores são calculados para todos os nós da malha e armazenados para utilização na solução das equações (3.51) e (3.53).

A dimensão característica do primeiro filtro é avaliada como a raiz cúbica dos volumes dos elementos da malha:

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\text{Vol}_e} \quad (4.49)$$

A dimensão característica do segundo filtro é calculada analogamente como sendo a raiz cúbica dos elementos independentes:

$$\langle \bar{\Delta} \rangle_t = \sqrt[3]{\text{Volume}(E_t)} \quad (4.50)$$

Avaliadas as expressões relativas ao segundo processo de filtragem, finalmente pode-se calcular  $C(\bar{x}, t)$  segundo a equação (3.51), para cada nó da malha.

Este coeficiente será empregado para o cálculo da viscosidade turbulenta, segundo a equação (3.50), sendo a viscosidade turbulenta avaliada ao nível de elemento, e os valores do coeficiente dinâmico definidos para os nós da malha, o valor empregado para cada elemento é a média dos valores de  $C(\bar{x}, t)$  para os nós que compõem os elementos da malha original. Isto equivale a uma interpolação dos valores de  $C$  para o centro do elemento. Este procedimento está de acordo com o adotado por outros autores como Oshima *et al.*, 1996, Zang *et al.*, 1993, Breuer e Rodi, 1994, que empregam médias do coeficiente dinâmico para evitar que as variações bruscas, tanto espaciais como temporais, sejam fontes de instabilidades na solução.

Neste trabalho adotou-se um limite, também adotado por Zang *et al.*, 1993, para a viscosidade turbulenta negativa [Maubach K. e Rehme K., 1971], como sendo:

$$v + v_t \geq 0 \quad (4.51)$$

Outra verificação que teve de ser adotada foi que, quando o denominador da expressão para cálculo de  $C(\bar{x}, t)$  se anula, assume-se  $C(\bar{x}, t) = 0$  (lembrando que esse valor é relacionado ao nó e que o valor empregado para cálculo da viscosidade turbulenta é a média dos valores nodais do elemento).

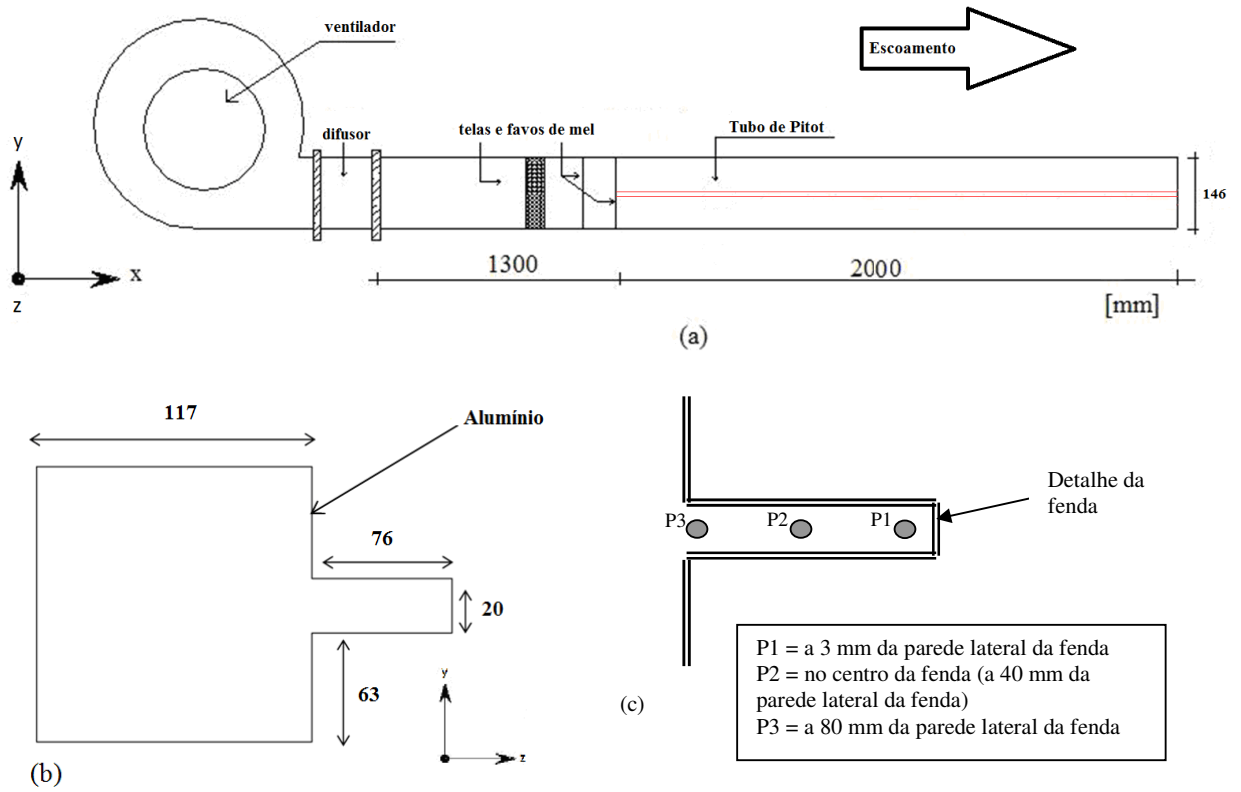
## 5. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Para um estudo quantitativo das características do escoamento no canal composto foi utilizado nas medições de velocidade média e flutuações de velocidade do ar o canal aerodinâmico ilustrado nas Figuras 5.1 e 5.2.

O canal, de circuito aberto, possui uma seção de testes retangular com dimensões internas de 193 mm de largura por 146 mm de altura, confeccionada com perfis de alumínio e com paredes de acrílico. O ar, que é impelido por um ventilador centrífugo de 0,75 kW, passa por um difusor e em seguida por dispositivos homogeneizadores de fluxo do tipo grade, colméia e tela, até atingir a seção de testes. A montante desta, a 180 mm de distância, estão fixados um tubo de Pitot e um sensor de temperatura. O tubo de Pitot, com o auxílio de um manômetro eletrônico, permite a medição da velocidade de referência do escoamento não perturbado. Os experimentos são realizados em um ambiente climatizado, com temperatura constante de 24 °C. A jusante da seção de testes, fora do canal aerodinâmico, é montado um sistema de posicionamento tridimensional, que permite um alinhamento milimétrico do suporte da sonda. O comprimento total do canal, após os dispositivos uniformizadores de fluxo, é de 2 m. As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram as dimensões do canal aerodinâmico utilizado nas medições. A seção de testes do canal utilizada, na qual os experimentos são realizados, apresenta um perfil de velocidades uniforme e uma intensidade de turbulência máxima inferior a 1%.

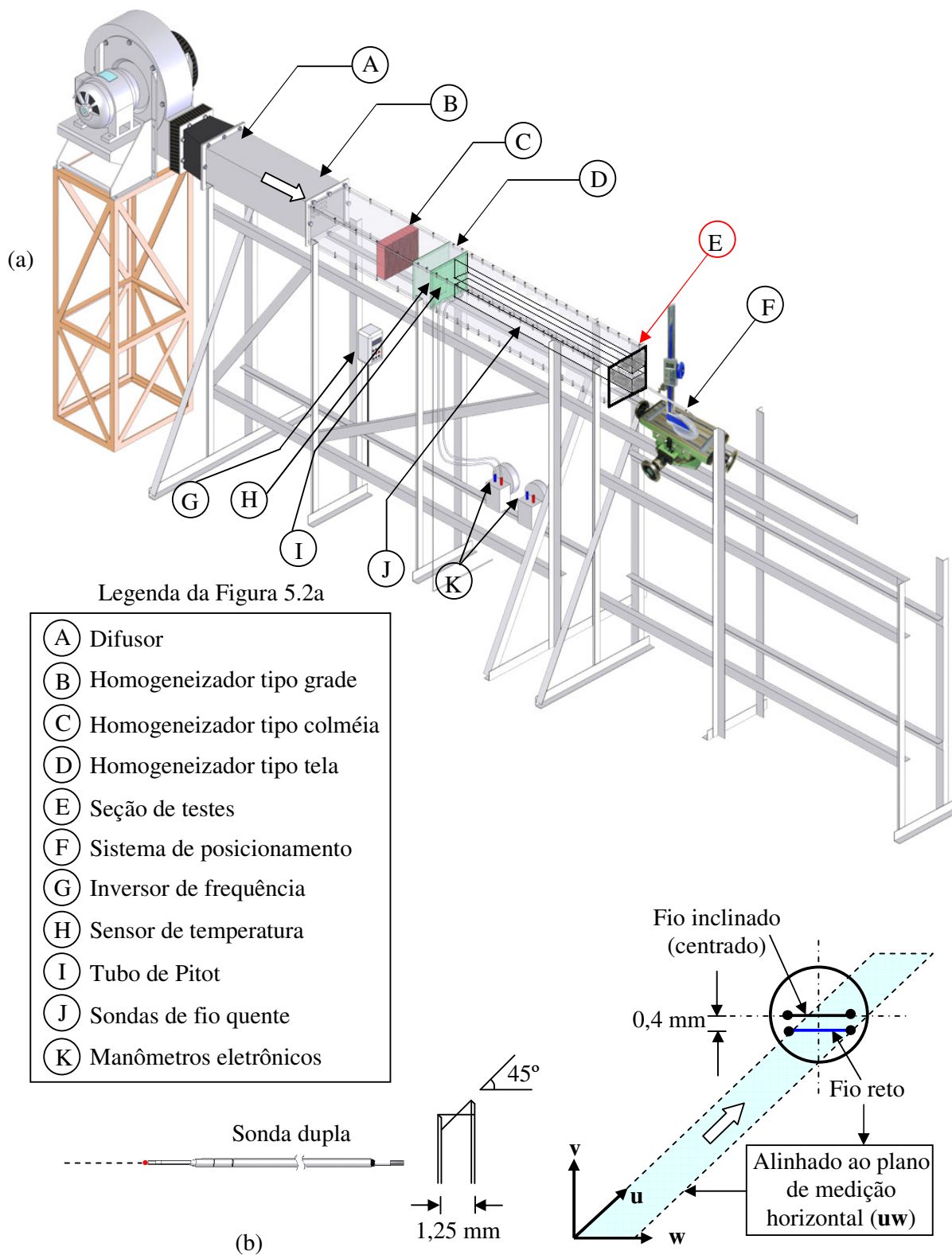
A velocidade do ar no interior do canal é controlada por intermédio de um inversor de frequência, que varia a rotação do motor elétrico do ventilador centrífugo, variando com o canal livre de 0 até 15 m/s.

As flutuações de velocidade do escoamento são medidas através da técnica de anemometria de fio quente a temperatura constante (CTA, *Constant Temperature Anemometry*), por intermédio de um equipamento DANTEC *StreamLine* 90N10. Uma sonda dupla de fios reto/inclinado, modelo DANTEC 55P71 *Special*, foi utilizada nos experimentos, que são realizados com o fio reto posicionado na horizontal, conforme apresentado na Fig. 5.2b.



**Figure 5.1** Vista esquemática da seção de testes. (a) vista lateral do canal; (b) vista frontal do canal; (c) localização dos pontos de medição com a sonda.

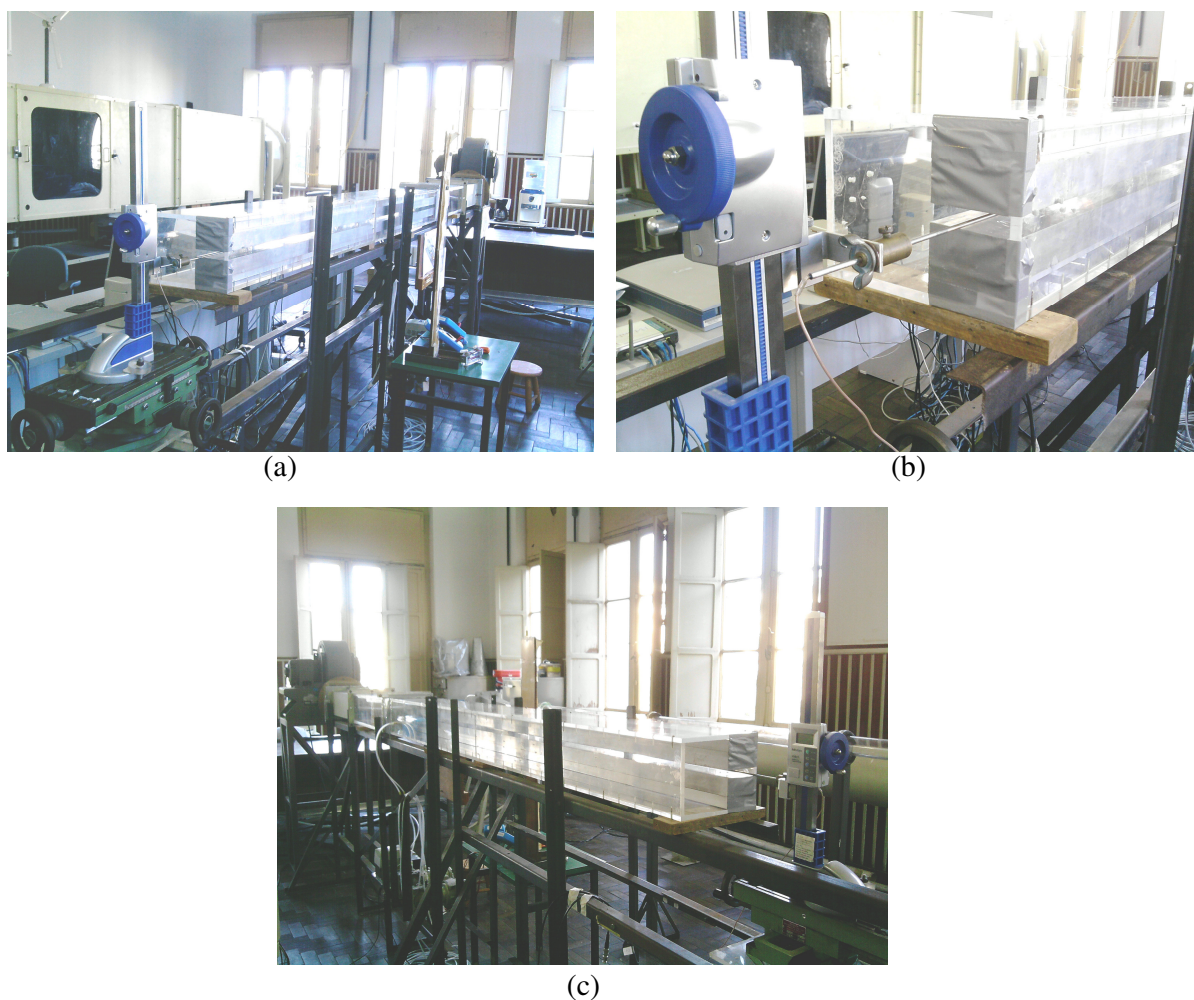




**Figura 5.2** – Ilustrações esquemáticas:  
 (a) canal aerodinâmico; (b) características da sonda.

As séries de dados de velocidade são adquiridas por intermédio de uma placa conversora analógico/digital (A/D), modelo NATIONAL INSTRUMENTS 9215, com interface USB e 4 canais simultâneos de entrada analógica, com resolução de 16 bits ( $2^{16} = 65536$  níveis) e operando na faixa de tensão de  $\pm 10$  V, controlada por um microcomputador. O software utilizado para ajuste e configuração dos parâmetros das sondas e para a aquisição dos dados é o *StreamWare*, versão 3.4, próprio da DANTEC.

Na figura 5.3 a seção de testes utilizada é mostrada em fotos com detalhes que enfatizam a localização dos pontos de medição com a sonda de velocidade, bem como o uso dos perfis de alumínio para a confecção da seção.



**Figura 5.3** – Fotos da seção de testes utilizada.

A calibração da sonda de fio quente é realizada no interior do canal aerodinâmico, com o emprego de um dispositivo que reduz gradualmente a seção transversal do canal. Para informações mais detalhadas acerca da calibração da sonda de fio quente em canal aerodinâmico sugere-se consultar o Apêndice A.2.

As séries temporais são obtidas com uma frequência de aquisição ( $f_s$ ) de 1 kHz, com tempo de duração dos registros ( $T_r$ ) de 131,72 segundos, o que fornece um número total de pontos de dados ( $N$ ) de 131072. É utilizado um filtro passa baixa para atender ao critério de Nyquist, evitando o fenômeno de dobramento ou *aliasing* [Möller, S. V., 2003]. A frequência de corte escolhida é de 300 Hz, que é escolhida em função da característica a ser identificada no escoamento e que deve combinar com a disponibilidade de filtros de corte. Deste modo, busca-se obter uniformidade e repetibilidade dos resultados, além de uma melhor definição das curvas e funções estatísticas que visam permitir a interpretação física do fenômeno estudado. Os tempos de aquisição estão relacionados à frequência de aquisição através do número de elementos da amostra, que são escolhidos em função da característica procurada. Os tamanhos de amostras permitidos pelo sistema próprio de aquisição da DANTEC são apresentados em séries diádicas.

## 6. RESULTADOS

### 6.1 Resultados Experimentais

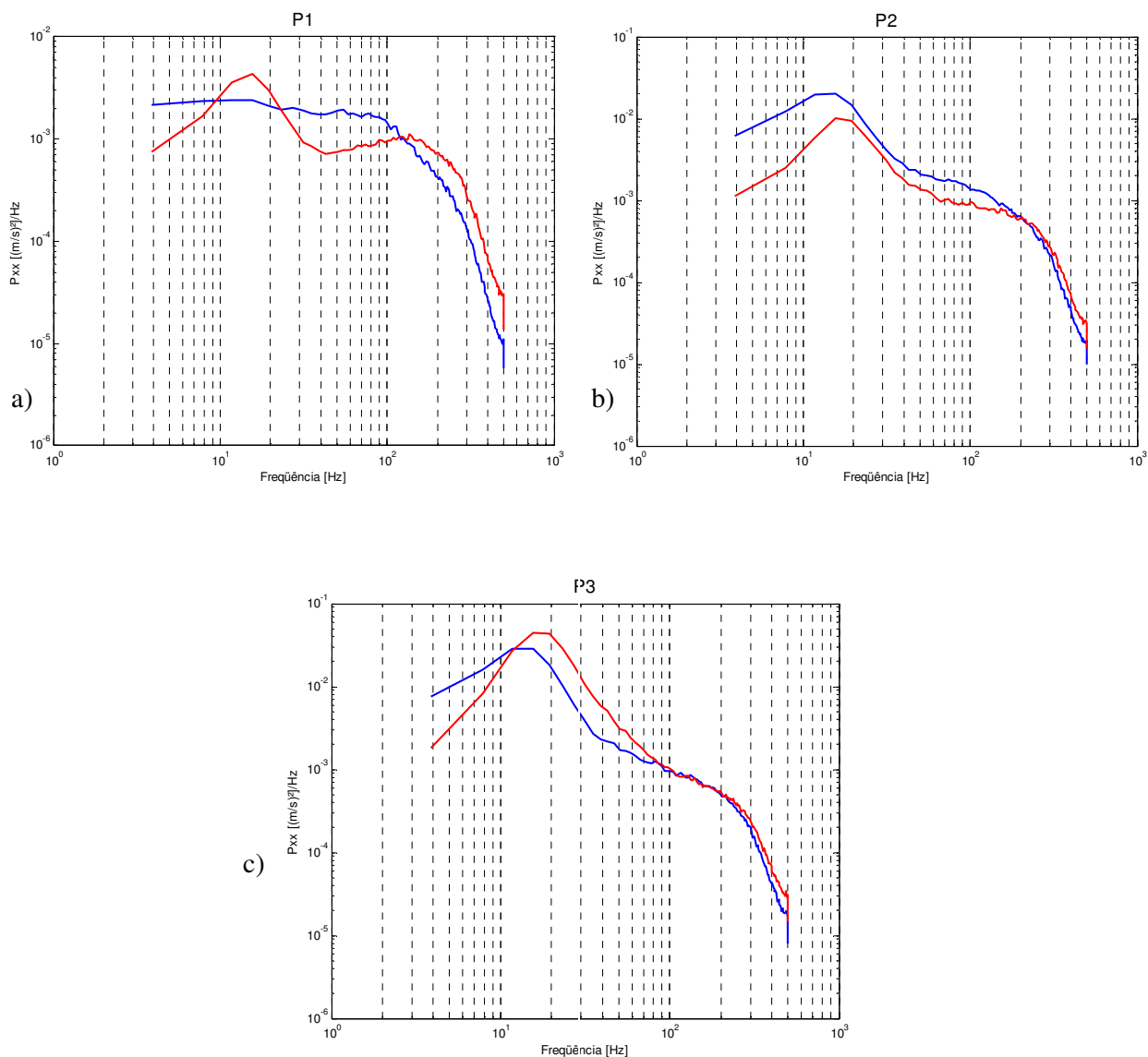
Os resultados dos espectros de frequência para as velocidades  $u$  e  $w$ , calculados de acordo com os procedimentos descritos por Möller, 2003, são apresentados na Figura 6.1. A presença de estruturas coerentes é observada pelo aparecimento de picos no espectro de flutuações de velocidades axial e transversal na fenda. A definição do número de Strouhal proposta por Meyer e Rehme, 1995, é dada por

$$Str = \frac{f}{U_c} \sqrt{g \cdot d} \quad (6.1)$$

Com  $Str = 0,066$ , a frequência obtida para o número de Reynolds investigado é  $f = 16,5$  Hz. A Figura 6.1 mostra os valores máximos do espectro em torno desse valor, mas na mesma ordem de magnitude. Esta pequena diferença pode ser atribuída ao fato de que o escoamento não está plenamente desenvolvido na saída do canal estudado, enquanto na seção utilizada por Meyer e Rehme, 1995, que tinha 7 m de comprimento, o escoamento estava completamente desenvolvido.

Na Figura 6.1(c) nota-se a presença de um pico maior de frequência para a velocidade  $w$ , como já abordado em Goulart, 2009, devendo-se também ao fato do escoamento não estar plenamente desenvolvido na saída do canal estudado.

A dependência linear da frequência sobre a velocidade do escoamento permite a comparação entre as frequências calculada e a obtida na simulação numérica.

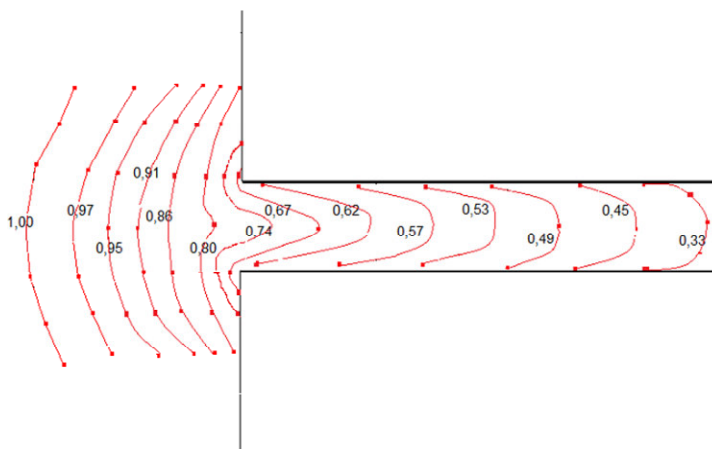


**Figura 6.1** – Espectros de frequência para as velocidades  $u$  (azul) e  $w$  (vermelho).

a) P1; b) P2; c) P3. (Locais mostrados na Fig. 5.1-c.) –  $Re = 75600$

A Figura 6.2 mostra os contornos de velocidade axial obtidos com um tubo de Pitot na região da fenda da seção, 50 mm a montante da saída do canal. Observa-se uma região de máxima velocidade que ocorre no canal principal e um nível de velocidade praticamente constante na região da fenda. A deflexão excessiva de linhas de isovelocidade

indica a influência dos escoamentos secundários; de acordo com os resultados experimentais de Meyer e Rehme, 1995 e simulações de Home, *et al.*, 2009.



**Figura 6.2-** Contornos de velocidade axial média ( $x/L = 0.98$ ).

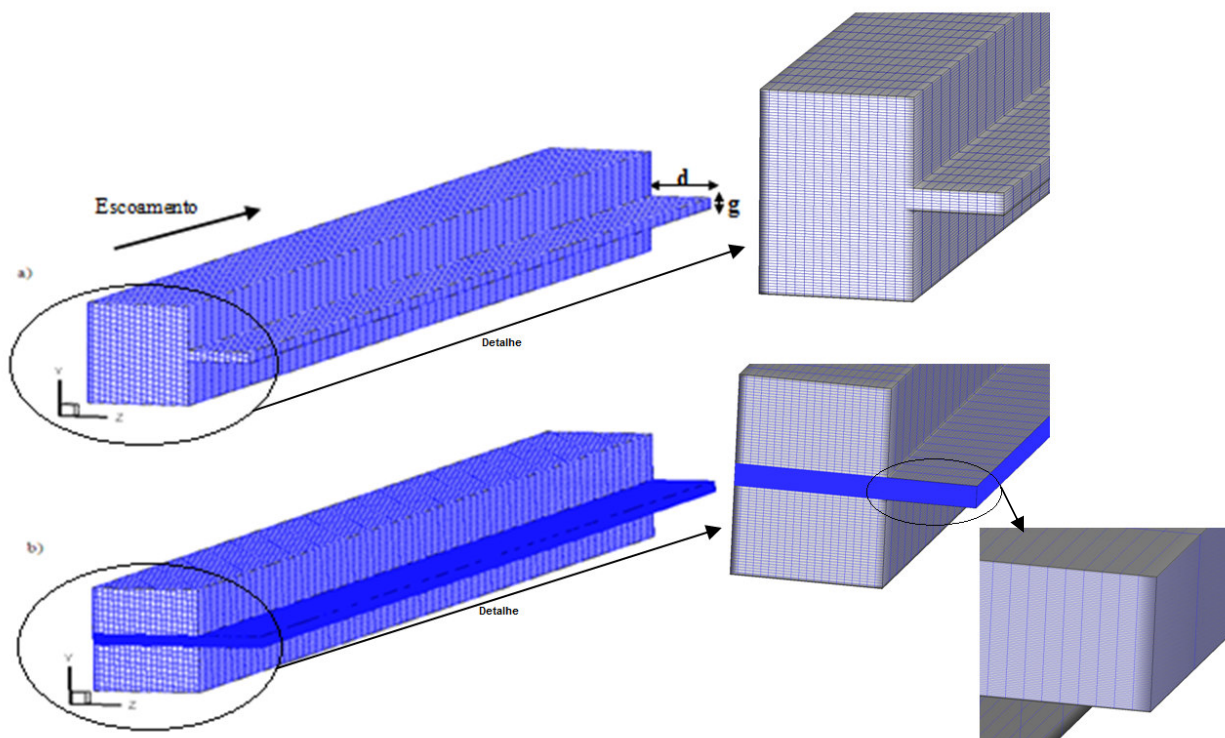
( $Re = 75600$  – Experimental)

Os resultados das tensões de Reynolds na linha média do canal estudado serão apresentados no item 6.3 em comparação aos resultados numéricos.

## 6.2 Resultados Numéricos Preliminares – $Re = 10000$

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos para  $Re = 10000$  e uma avaliação qualitativa baseada no comportamento dos modelos e algoritmos empregados, tendo em vista o tempo computacional reduzido quando comparando com o número de Reynolds dos experimentos.

O problema a ser resolvido é o escoamento turbulento, incompressível, homogêneo, empregando modelagem apresentada no item 3 em um canal composto que é apresentado primeiramente em duas malhas A (85644 nós) e B (388725 nós, com refinamento na região da fenda), como mostra a fig. 6.3.



**Figura 6.3** – Domínio computacional do problema.

(a) Malha A; (b) Malha B.

O domínio computacional foi discretizado com duas malhas uniformes contendo a malha A, 85644 nós e 78240 elementos hexaédricos e a malha B, que teve a região da fenda, refinada para melhor resolução dos efeitos principais do escoamento turbulento, contendo 388725 nós e 369600 elementos hexaédricos.

Como condição de contorno na entrada adotou-se um perfil médio turbulento de velocidade, completamente desenvolvido ( $v_1=V(x)$ ,  $v_2=0$ ) e condição de não-deslizamento ( $v_1=v_2=v_3=0$ ) prescrita nas paredes superior e inferior. Na saída do canal existem condições de contorno naturais ( $t_1=t_2=t_3=0$ ) (equação 2.56). As condições iniciais usadas são  $v_1=U_{ref}$  (velocidade de referência, constante),  $v_2=v_3=p=0$ . Estas condições são dadas pelo canal e simplificadas, ou seja, o efeito das paredes na entrada não é considerado.

O número de Reynolds, na equação (6.2), pode ser avaliado da maneira mais usual, como em Meyer e Rehme, 1994. Em se tratando de escoamentos em canais compostos, é a composição do número de Reynolds por meio da velocidade de referência, diâmetro-hidráulico do canal ( $D_h$ ), em metros, negligenciando a fenda, e a viscosidade cinemática do fluido ( $\nu$ ).

$$\text{Re} = \frac{2}{3} \cdot U_{\text{ref}} \cdot D_h \cdot \nu \quad (6.2)$$

Kim *et al.*, 1987, definem os números de Reynolds e outras relações, que também são usadas neste trabalho, para caracterizar o escoamento como sendo:

$$\begin{aligned} \text{Re}_c &= \frac{U \cdot \delta}{\nu}, & \text{Re}_m &= \frac{2 \cdot \delta \cdot U_m}{\nu}, & \text{Re}_\tau &= \frac{U_\tau \cdot \delta}{\nu}, \\ U_m &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \bar{u} \, dy, & U_\tau &= \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ y^+ &= \frac{y \cdot U_\tau}{\nu}, & u^+ &= \frac{U}{U_\tau}, & \nu &= \frac{\mu}{\rho}, \\ C_f &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_m^2}, & C_{fo} &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_c^2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde:

$\text{Re}_c$  – Número de Reynolds baseado na metade da altura do canal e na velocidade no eixo central

$\text{Re}_m$  – Número de Reynolds baseado na velocidade volumétrica

$\text{Re}_\tau$  – Número de Reynolds baseado na velocidade de fricção

$U$  – Módulo do vetor velocidade adimensional

$U_c$  – Velocidade no eixo central

$U_m$  – Velocidade volumétrica

$U_\tau$  – Velocidade de fricção

$\delta$  – Metade da altura do canal

$y^+$  – Distância adimensional à parede

$u^+$  – Escala de velocidade de fricção adimensional

$\tau_w$  – Tensão de cisalhamento na parede

$\mu$  – Coeficiente de viscosidade absoluto

$C_f$  – Coeficiente de fricção com base em  $U_m$

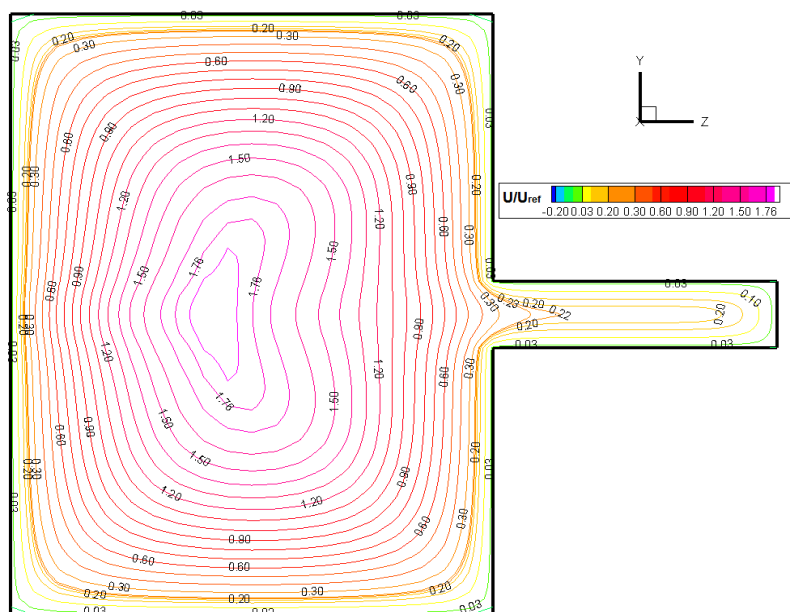
$C_{fo}$  – Coeficiente de fricção com base em  $U_c$

Para avaliar o nível de resolução da malha na região próxima à superfície,



utiliza-se a escala de comprimento adimensional da camada limite  $y^+$  e a escala de velocidade de fricção adimensional  $u^+$ . Nestas simulações o valor adimensionalizado para a malha A é  $y^+ = 2,31$  e para malha B é  $y^+ = 0,05$ . Segundo Wilcox, 1998, para valores de  $y^+$  até 5, o ponto em questão encontra-se na subcamada viscosa. Assim sendo, valores de  $y^+$ , para o primeiro ponto acima da fronteira sólida, menores que o referido limite, indicam que a subcamada viscosa está definida de forma satisfatória. Uma das características da subcamada viscosa é o fato das grandezas  $y^+$  e  $u^+$  terem o mesmo valor, desse modo, uma malha com resolução próxima à superfície sólida que forneça valores de  $y^+$  e  $u^+$  iguais, possui resolução suficiente para capturar a camada limite sem perda de quantidade de movimento porque a condição  $u^+ = y^+$ , na subcamada viscosa, é uma reta.

A Figura 6.4 mostra os contornos de velocidade axial, 50 mm à montante da saída do canal. Observa-se uma região de máxima velocidade que ocorre no canal principal e um nível de velocidade mais uniforme na região da fenda, a isto decorre a deflexão de linhas de isovelocidade indica a influência dos escoamentos secundários; de acordo com os resultados experimentais de Meyer e Rehme, 1995 e simulações de Home, *et al.*, 2009.



a)

**Figura 6.4** - Contornos de velocidade axial média ( $x/L = 0.98$ ).

Re = 10000 – Modelo Smagorinsky - Dois Passos;

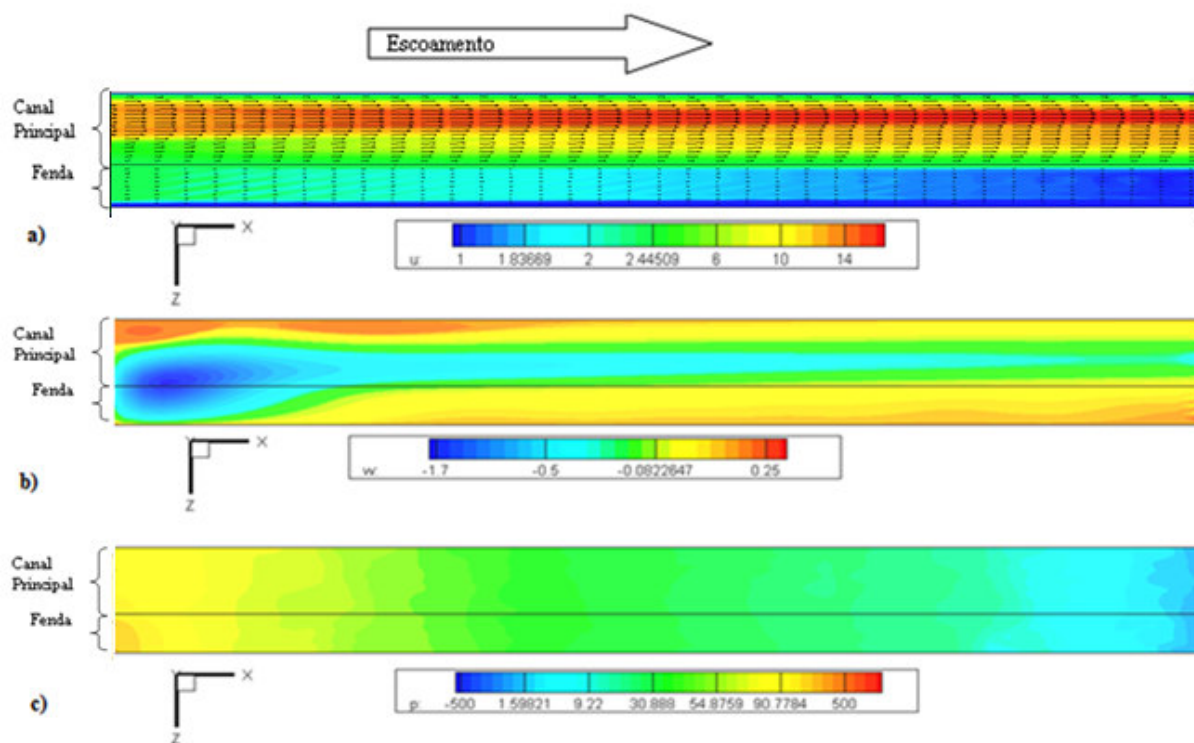
Na tabela 6.1 são apresentados os parâmetros de configuração utilizados nas

presentes simulações.

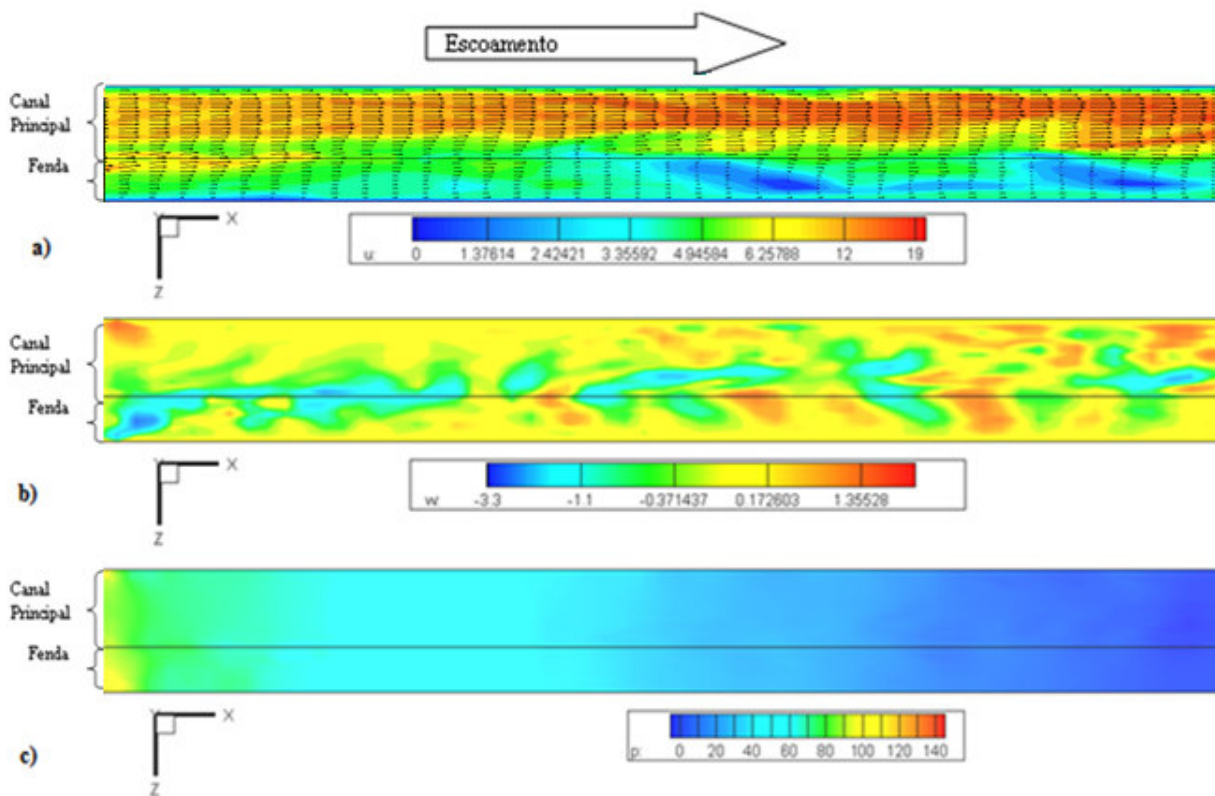
**Tabela 6.1** - Parâmetros computacionais usados nas simulações.

		Malha A		Malha B
Malha (x, y, z) - Uniforme		61 x 73 x 28		71 x 145 x 51
Domínio Computacional (L <sub>x</sub> , L <sub>y</sub> , L <sub>z</sub> )		2 m – 0.180 m – 0.216 m		
Número total de nós da malha		85644		388725
Número total de elementos da malha		78240		369600
$\rho$		1,19 kg/m <sup>3</sup>		
$\mu$		0,00123 kg/m.s	0,00016 kg/m.s	0,00123 kg/m.s
Re <sub>c</sub>		10000	75600	10000
U <sub>c</sub> (U <sub>ref</sub> )		10 m/s		
C		340 m/s		1000 m/s
Modelo de Smagorinsky C <sub>s</sub> = 0,22	Passo de Tempo(s)	1,0x10 <sup>-5</sup> s	8,0x10 <sup>-6</sup> s	1,0x10 <sup>-6</sup> s
	Nº iterações	2900	3000	1500
	Tempo de CPU (h)	315	525	355
Modelo Dinâmico	Passo de Tempo(s)	1,0x10 <sup>-6</sup> s	8,0x10 <sup>-6</sup> s	-
	Tempo de CPU (h)	343	175	
	Nº iterações	2000	3000	
	Número de elementos com viscosidade turbulenta negativa limitada (Equação 4.37)	0		
	Número de nós em que o denominador da expressão de C(x,t) se anula	10649 (12%)		

Na Figura 6.5 são apresentados os campos de velocidade  $u$  e  $w$  e o campo de pressão para o problema resolvido com o modelo de Smagorinsky e na Figura 6.6 com o modelo Dinâmico, ambas as figuras com a malha A. A Figura 6.6 do campo de velocidade  $w$  mostra claramente um padrão alternado de estruturas de grande escala, com seus centros posicionados dentro da fenda, tornando assim, os resultados com o modelo Dinâmico com uma imagem dentro do esperado, segundo os resultados de outros autores, do campo de escoamento simulado.



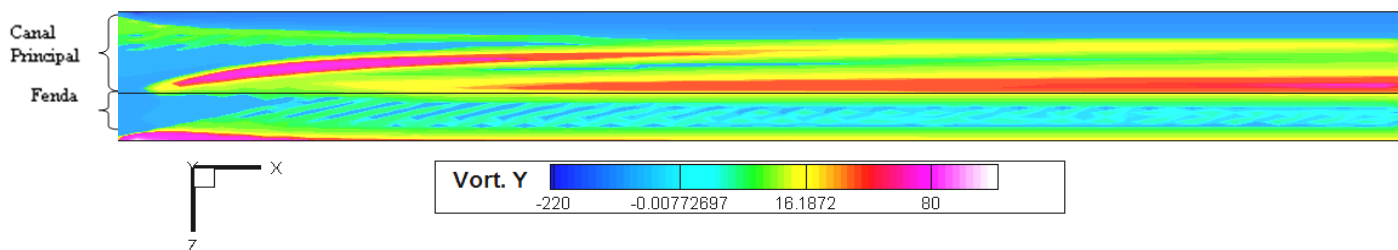
**Figura 6.5** – a) Campo de velocidade  $u$ ; b) campo de velocidade  $w$ ; c) campo de pressão (Malha A – Modelo de Smagorinsky – Dois Passos –  $Re = 10000$ ).



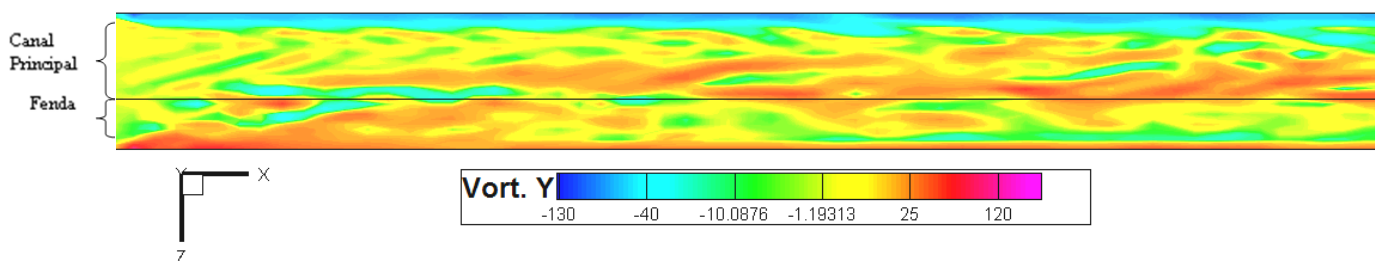
**Figura 6.6**– a) Campo de velocidade  $u$ ; b) campo de velocidade  $w$ ; c) campo de pressão (Malha A – Modelo Dinâmico – Dois Passos -  $Re = 10000$ )

As figuras 6.7 e 6.8 mostram os mapas de isovorticidade no plano médio da fenda. São evidenciadas regiões de maior vorticidade na fronteira entre o canal principal e a fenda. A vorticidade no plano XZ é dada pela Equação (6.4).

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (6.4)$$

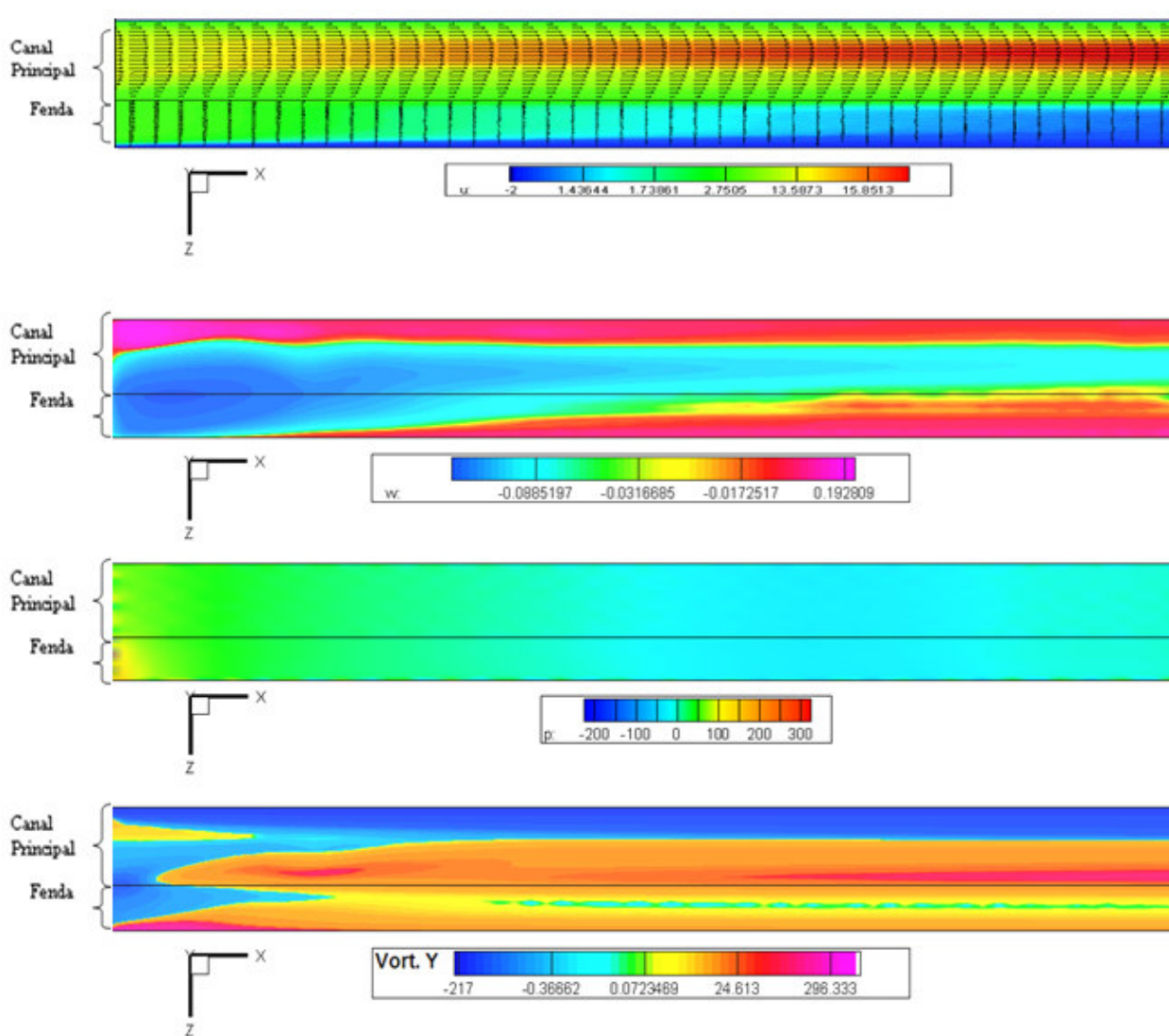


**Figura 6.7** – Campo de vorticidade  $\Omega_y$ .  
(Malha A – Modelo Smagorinsky – Dois Passos – Re = 10000).



**Figura 6.8** – Campo de vorticidade  $\Omega_y$ .  
(Malha A – Modelo Dinâmico – Dois Passos – Re = 10000).

Na Figura 6.9 são mostrados os campos de velocidade  $u$  e  $w$ , campo de pressão e mapas de isovorticidade para malha B, com Re = 10000. Nota-se nesses resultados uma melhor visualização devido à malha ser mais refinada e com isso conseguir captar melhor os efeitos do escoamento.

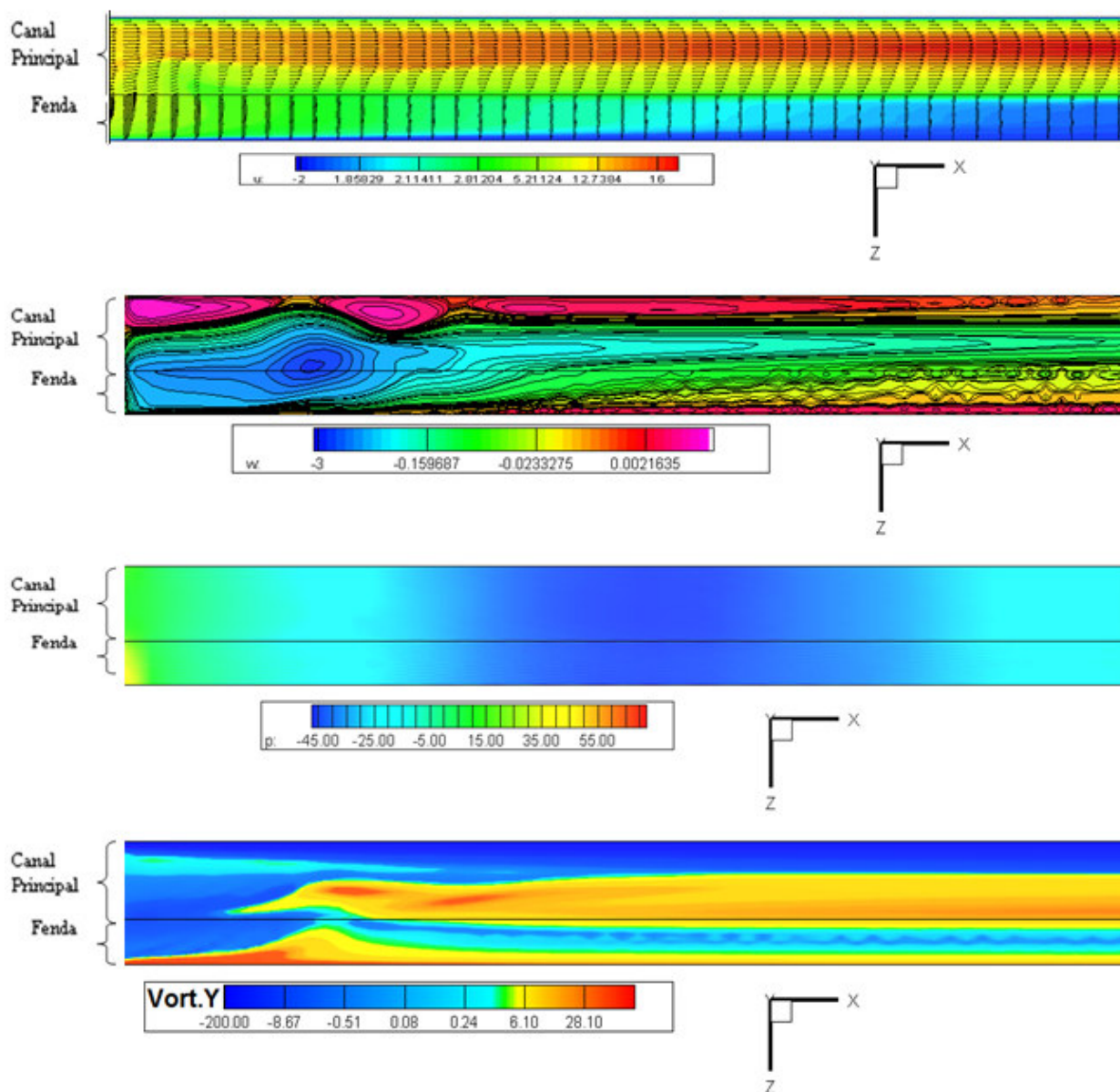


**Figura 6.9** – Respectivamente: Campo de velocidade  $u$ , campo de velocidade  $w$ ,  
 Campo de pressão e Campo de vorticidade  $\Omega_y$ .  
 (Malha B – Modelo Smagorinsky - Dois Passos –  $Re = 10000$ )

### 6.3 Resultados Numéricos – $Re = 75600$

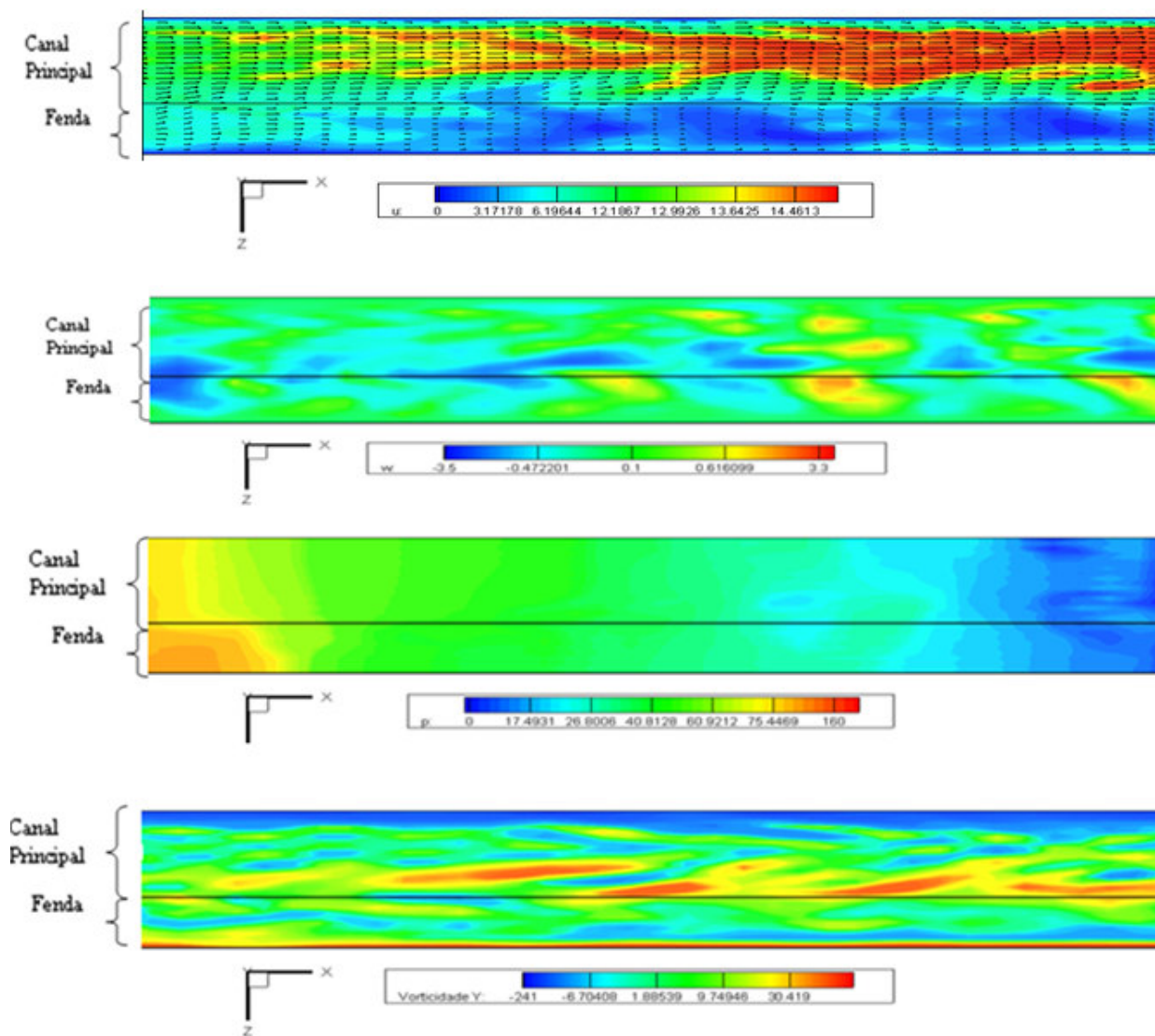
Nesta seção são apresentados os resultados numéricos obtidos para  $Re = 75600$  e uma avaliação qualitativa baseada no comportamento dos modelos e algoritmos empregados. Na Figura 6.10 são mostrados os campos de velocidade  $u$  e  $w$ , campo de pressão e mapas de isovorticidade para malha B, com  $Re = 75600$ . Nota-se nesses

resultados uma melhor visualização devido à malha ser mais refinada e com isso conseguir captar melhor os efeitos do escoamento.

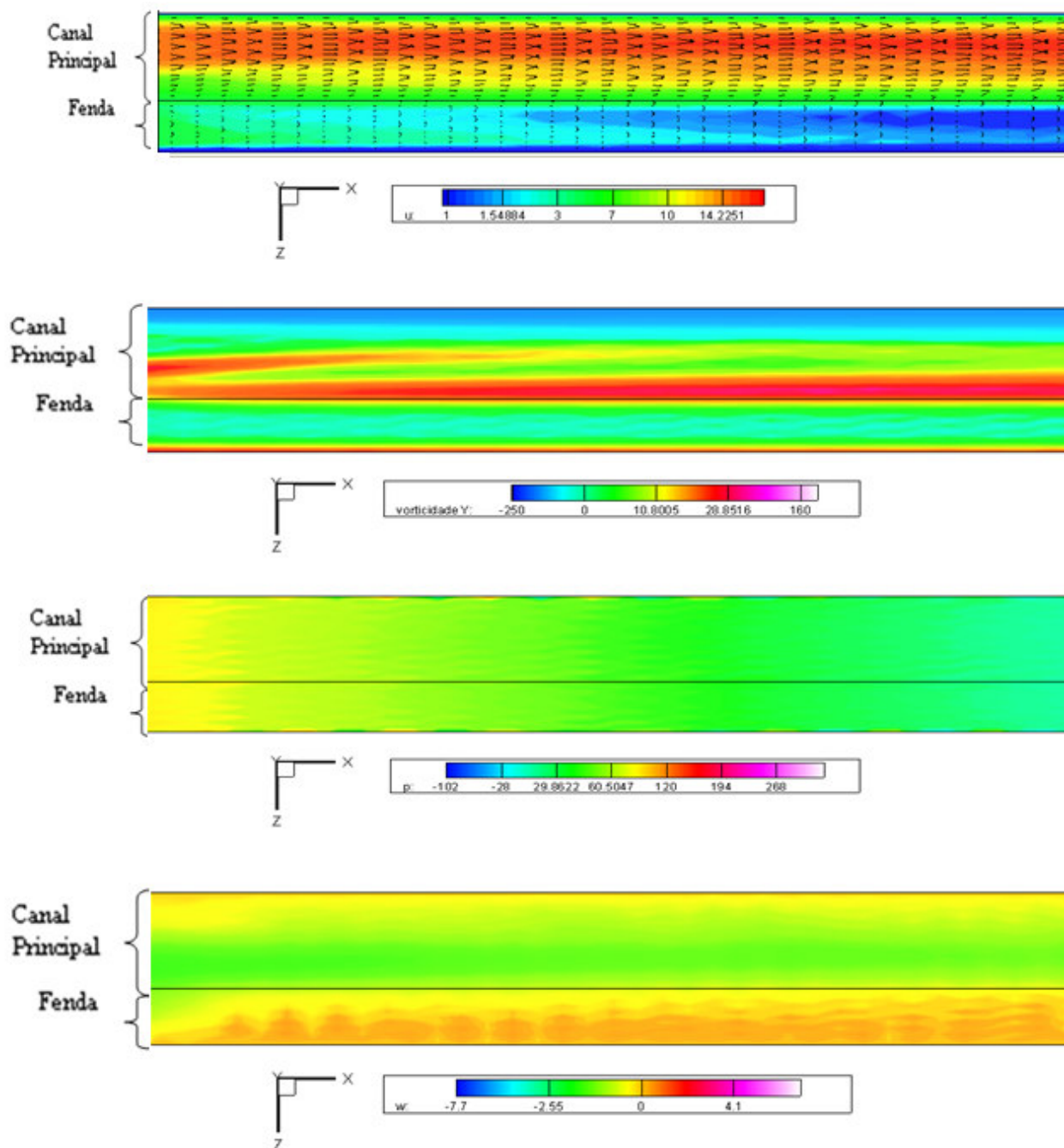


**Figura 6.10** – Respectivamente: Campo de velocidade  $u$ , campo de velocidade  $w$ ,  
 Campo de pressão e Campo de vorticidade  $\Omega_y$ ,  
 (Malha B – Modelo Smagorinsky – Dois Passos –  $Re = 75600$ ).

Nas Figuras 6.11 e 6.12 são mostrados os campos de velocidade  $u$  e  $w$ , campo de pressão e mapas de isovorticidade para malha A, com  $Re = 75600$ . Na Figura 6.11, no campo de vorticidade  $Y$  e no campo de velocidade  $w$ , percebe-se a presença de Pulsações do Escoamento na linha entre a fenda e o canal principal. Na Figura 6.12 percebe-se a diferença entre os modelos de Smagorinsky e Dinâmico em relação a qualidade dos resultados.



**Figura 6.11** – Respectivamente: Campo de velocidade  $u$ , campo de velocidade  $w$ ,  
 Campo de pressão e Campo de vorticidade  $\Omega_y$ ,  
 (Malha A – Modelo Dinâmico Dois Passos –  $Re = 75600$ ).



**Figura 6.12** – Respectivamente: Campo de velocidade  $u$ , Campo de vorticidade  $\Omega_y$ , Campo de pressão  $p$  e campo de velocidade  $w$ .  
(Malha A – Modelo Smagorinsky - Galerkin –  $Re = 75600$ ).

Na Figura 6.13 são comparados os perfis de velocidade média preditos nas simulações com os resultados experimentais. Observa-se que os resultados da simulação com modelo de Smagorinsky próximos à parede ( $0 < z/d < 0,2$ ), estão mais afastados dos



resultados dos dados simulados com o modelo Dinâmico em relação aos dados experimentais. A investigação dos perfis de velocidade axial revelou que estes podem ser divididos em três diferentes zonas, confirmando os resultados de Goulart, 2009. Nas zonas laterais do canal os perfis de velocidade são governados pelas tensões de cisalhamento na parede. Quanto à parte central, os dados mostraram que a redistribuição de massa entre o canal principal e a fenda leva à formação de uma camada de mistura. A forma desigual com que a massa se distribui entre o canal principal e a fenda deve-se aos efeitos viscosos que são maiores na fenda, devido ao menor espaço físico. Nas regiões mais estreitas o escoamento é desacelerado levando a um consequente aumento da velocidade na região do canal principal. Essa redistribuição do escoamento dá origem a componentes transversais de velocidade que atravessam a fenda gerando aumento da intensidade de turbulência naquela direção.

Os resultados apresentados neste trabalho apontam para a formação de uma camada de mistura associada a picos de vorticidade na região da fronteira entre a fenda e o canal principal.

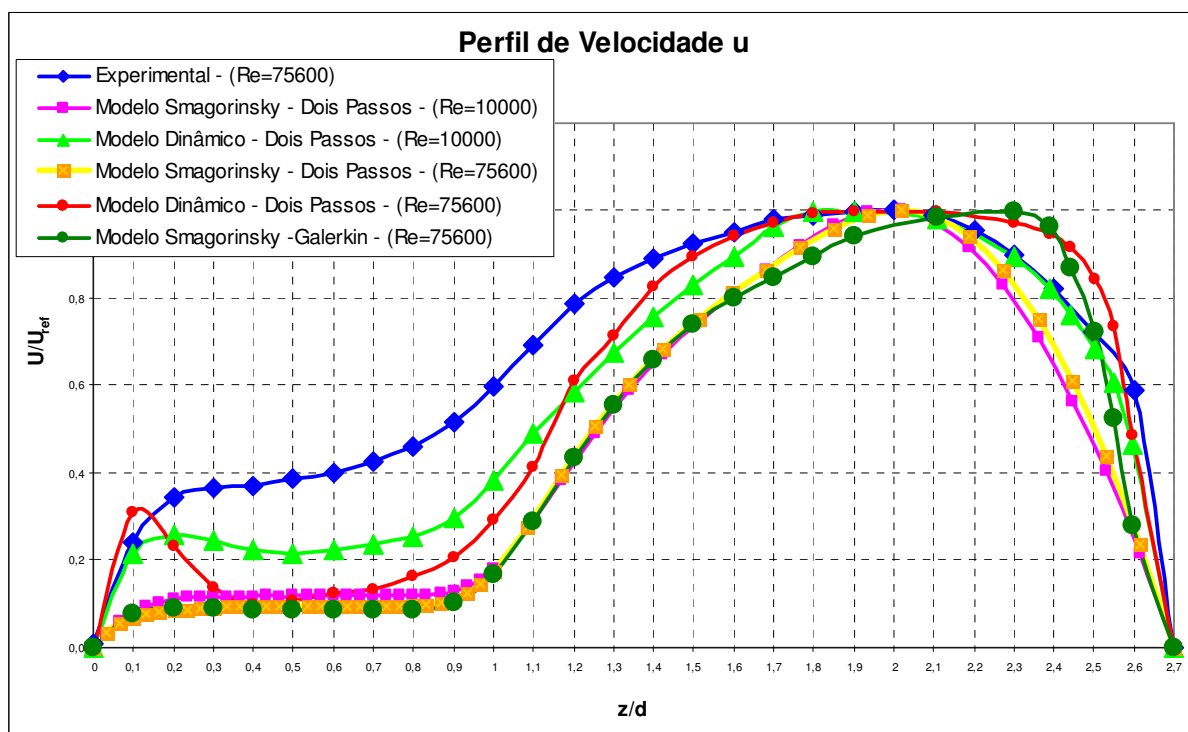
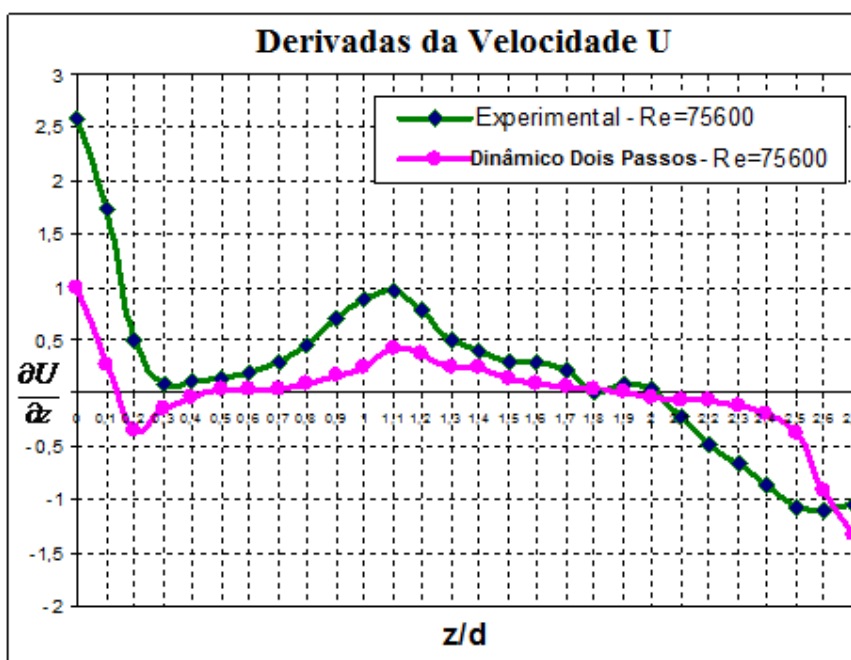


Figura 6.13 – Perfil de velocidade u.

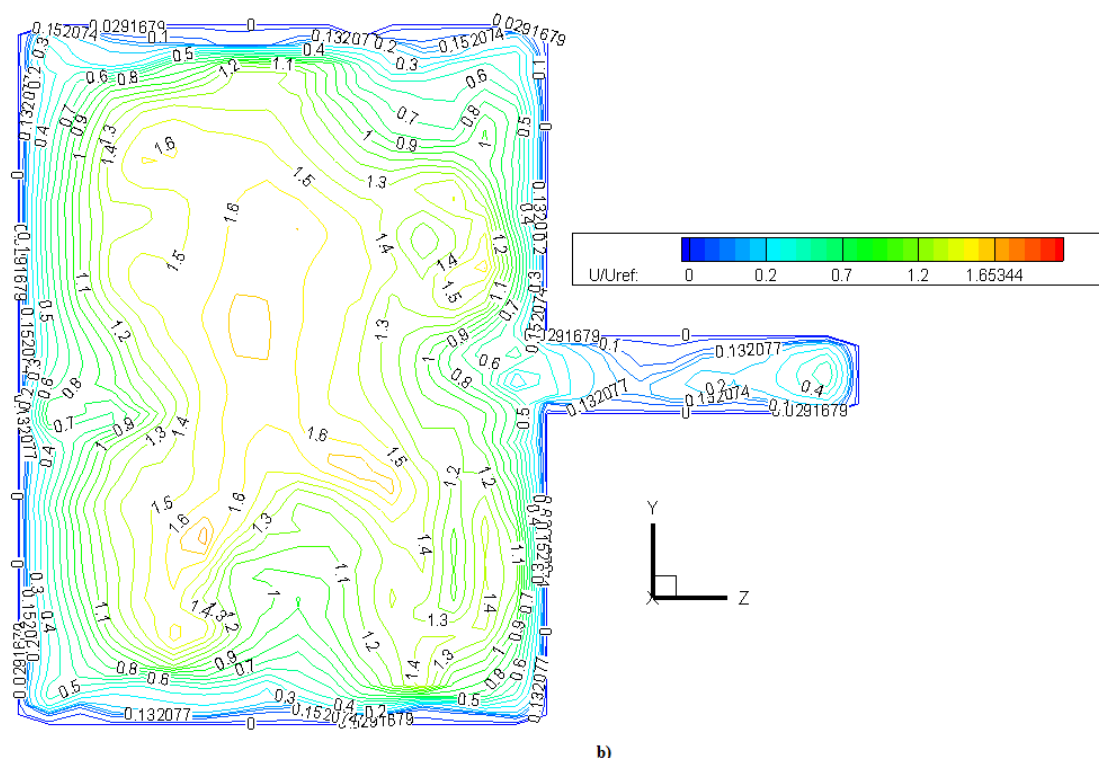
Meneveau & Katz, 2000, observam que o modelo submalha de Smagorinsky possui algumas limitações. Por exemplo, o modelo superestima a tensão cisalhante submalha na região da parede. Nessa região, a tensão cisalhante submalha deveria ir para zero como  $y^2$ , contudo a tensão obtida por esse modelo, com uma constante  $C_s$ , permanece finita na parede, devido ao cisalhamento. O modelo é, assim, muito dissipativo e requer funções empíricas de amortecimento na parede.

A Figura 6.14 mostra a localização do ponto de inflexão dos perfis de velocidade mostrados anteriormente. A largura da zona central é a espessura  $\delta$  da camada de mistura, como discutido por Goulart, 2009. Resultados de derivada com o modelo Dinâmico apresentaram melhor concordância com os resultados experimentais. Os resultados obtidos com Simulação de Grandes Escalas, no modelo clássico de Smagorinsky e no modelo Dinâmico, mostram o desenvolvimento de uma camada de mistura na direção principal do escoamento, com características dinâmicas reguladas pelos perfis médios de velocidade. Os resultados obtidos nas simulações tiveram boa concordância em relação aos dados experimentais, bem como a análise dos perfis de velocidade média, de intensidades de turbulência e tensão cisalhante turbulenta, que mostrou o modelo Dinâmico tendo melhor desempenho, principalmente junto à parede da fenda do canal composto.



**Figura 6.14** – Gradientes de velocidade axial.  $\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$  ao longo da linha de simetria

A Figura 6.15 mostra os contornos de velocidade axial, 50 mm à montante da saída do canal. Observa-se uma região de máxima velocidade que ocorre no canal principal e um nível de velocidade mais uniforme na região da fenda, a isto decorre a deflexão de linhas de isovelocidade indica a influência dos escoamentos secundários; de acordo com os resultados experimentais de Meyer e Rehme, 1995 e simulações de Home, *et al.*, 2009.



**Figura 6.15** - Contornos de velocidade axial média ( $x/L = 0.98$ ).

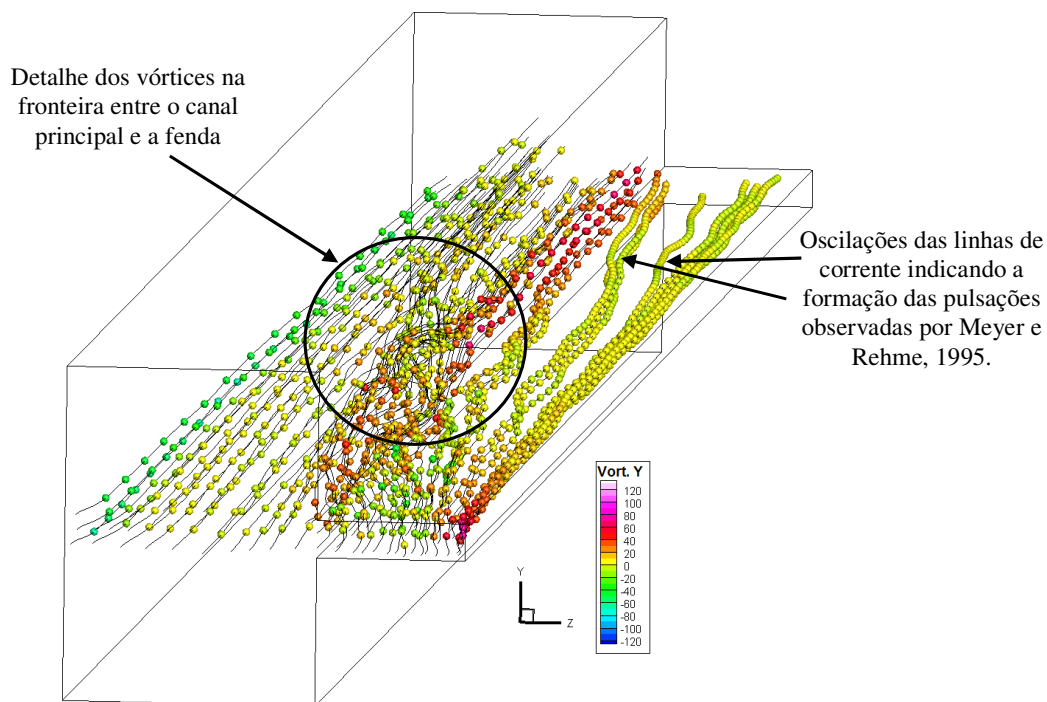
$Re = 75600$  – Modelo Dinâmico - Dois Passos.

O movimento Lagrangiano de partículas posicionadas próximas ao plano da parede, na vizinhança com a fenda do canal composto, em simulação com o modelo Dinâmico,  $Re = 75600$ , é observado na Figura 6.16.

Williams e Baker, 1997, observam que esta representação gráfica revela um retrato fascinante de estruturas de escoamento tridimensionais muito complexas e mostra o efeito de parede sobre o movimento do fluido. As partículas têm movimento tridimensional segundo uma espiral irregular e em direção à face de simetria.

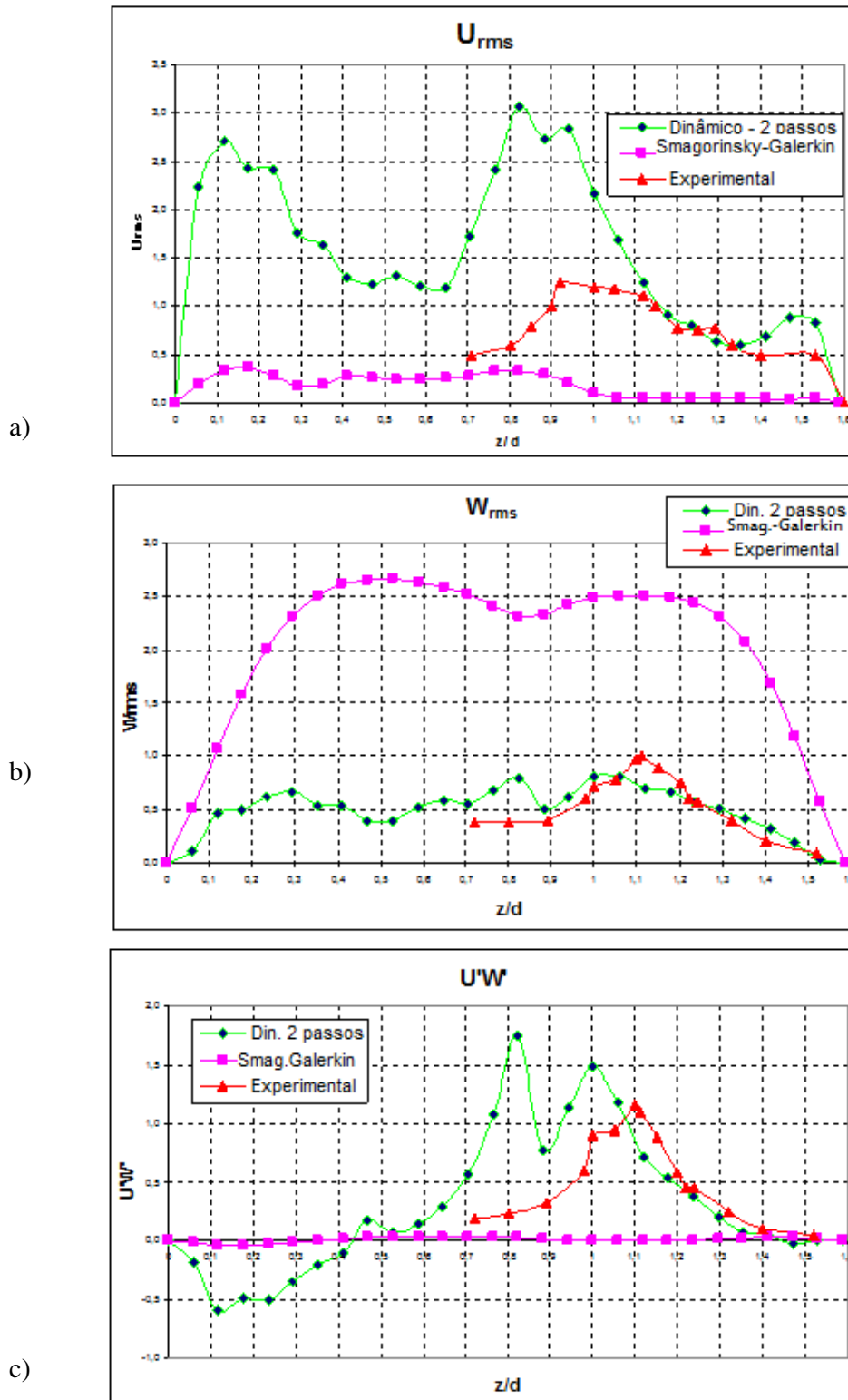
Esse movimento é produzido pela presença da parede e gera a

tridimensionalidade do escoamento, sendo, como se observa, mais forte e complexo na vizinhança entre o canal principal e a fenda. Mostra a acomodação do escoamento na entrada da fenda, deslocando grandes quantidades de massa em direção ao canal principal.



**Figura 6.16** – Movimento Lagrangiano de partículas para  $Re = 75600$ ,  
Modelo Dinâmico –Dois Passos - Malha A.

Os perfis de intensidade de turbulência longitudinais, verticais e transversais  $(\sqrt{u'^2}$  e  $\sqrt{w'^2})$  e o perfil de tensão cisalhante turbulenta  $(\overline{U'W'})$  resultante das simulações com  $Re = 75600$  são apresentados na Figura 6.17.



**Figura 6.17** – Perfis de intensidade de turbulência  $U_{rms}$  ;  $W_{rms}$  e tensão cisalhante turbulenta ;  $\overline{U'W'}$ , para  $Re = 75600$ .

a)  $U_{rms}$  ; b)  $W_{rms}$  ; c)  $\overline{U'W'}$  ;

Na figura 6.17 observa-se que os dois modelos predizem perfis de intensidade de turbulência com grandes diferenças. Os dois modelos concordaram melhor entre si apenas na tensão cisalhante turbulenta  $(\overline{U'W'})$ . Nos três casos analisados, o modelo Dinâmico – Dois Passos foi o que melhor reproduziu os resultados experimentais.

A tensão normal  $W_{rms}$  e  $U'W'$  apresentam um pico máximo a  $z/d = 1,1$ , caracterizando a presença de pulsações como apresentado na literatura. Este máximo aparece no modelo Dinâmico pouco pronunciado em  $W_{rms}$ ; já no caso de  $U'W'$ , ele se encontra levemente deslocado para a posição  $z/d = 1$ . No entanto, a presença de um segundo pico de maior intensidade em  $z/d = 0,81$  prejudica a concordância e indica que o modelo apesar de captar a presença de pulsações, aparentemente introduz uma região com vorticidade elevada espelhando a região das pulsações.

## 7. CONCLUSÕES

Os objetivos desse trabalho foram: analisar experimentalmente o escoamento turbulento em um canal composto; analisar escoamentos de fluidos viscosos, incompressíveis e isotérmicos no canal experimental; empregar um código computacional tridimensional originalmente apresentado por Petry, 2002; verificar a validade do método numérico e o comportamento dos Modelos Submalha para reproduzir o escoamento no canal composto estudado experimentalmente; estudar e aplicar a simulação de grandes escalas no âmbito do método de elementos finitos; comparar a eficácia dos esquemas de Dois Passos e de Taylor-Galerkin, para a discretização no tempo e na posição, na análise dos resultados.

Para alcançar estes objetivos foi utilizado um canal aerodinâmico e a técnica experimental utilizada foi a anemometria de fio quente, enquanto que, para a análise numérica foi introduzida a metodologia de Simulação de Grandes Escalas com os modelos clássico de Smagorinsky e o modelo Dinâmico inicialmente proposto por Germano *et al.*, 1991. Para o processo de segunda filtragem do modelo dinâmico foi empregada a filtragem por elementos finitos independentes [Petry, 2002].

No algoritmo foi utilizado o Método dos Elementos Finitos e, para integrar as Equações governantes, os esquemas de Dois Passos e de Taylor-Galerkin para a discretização no tempo e na posição. O elemento utilizado para a discretização do domínio computacional foi o hexaedro linear de oito nós e a hipótese de quase-incompressibilidade foi

assumida com o objetivo de aproximar mais o modelo da realidade física, onde velocidades de propagação do som infinitas não são encontradas.

Para a análise da teoria da camada de mistura no escoamento turbulento, bem como do comportamento dos modelos submalha de Smagorinsky e Dinâmico, são apresentados os resultados de aplicações do canal composto.

Os resultados obtidos com Simulação de Grandes Escalas, no modelo clássico de Smagorinsky e no modelo Dinâmico, mostram o desenvolvimento de uma camada de mistura na direção principal do escoamento, com características dinâmicas reguladas pelos perfis médios de velocidade. Os resultados obtidos nas simulações tiveram boa concordância em relação aos dados experimentais, bem como a análise dos perfis de velocidade média, de intensidades de turbulência e tensão cisalhante turbulenta, que mostrou o modelo Dinâmico tendo melhor desempenho, principalmente junto à parede da fenda do canal composto.

A investigação dos perfis de velocidade axial revelou que estes podem ser divididos em três diferentes zonas, confirmando os resultados de Goulart, 2009. Nas zonas laterais do canal os perfis de velocidade são governados pelas tensões de cisalhamento na parede. Quanto à parte central, os dados mostraram que a redistribuição de massa entre o canal principal e a fenda leva à formação de uma camada de mistura. A forma desigual com que a massa se distribui entre o canal principal e a fenda deve-se aos efeitos viscosos que são maiores na fenda, devido ao menor espaço físico. Nas regiões mais estreitas o escoamento é desacelerado levando a um conseqüente aumento da velocidade na região do canal principal. Essa redistribuição do escoamento dá origem a componentes transversais de velocidade que atravessam a fenda gerando aumento da intensidade de turbulência naquela direção.

Os resultados apresentados neste trabalho apontam para a formação de uma camada de mistura associada a picos de vorticidade na região da fronteira entre a fenda e o canal principal.

As discrepâncias no cálculo da frequência para a pulsação usando a correlação dada pelo número de Strouhal e a frequência experimental obtida são atribuídas ao fato de o escoamento não estar plenamente desenvolvido na saída da seção de testes. Esta diferença pode ser atribuída ao fato de que o escoamento não está plenamente desenvolvido na saída do canal estudado, enquanto na seção utilizada por Meyer e Rehme, 1995, que tinha 7 m de comprimento, o escoamento estava completamente desenvolvido.

A observação do movimento Lagrangiano de partículas posicionadas na entrada do canal composto, na metade da sua altura, mostrou a tridimensionalidade da turbulência, bem como, a maior vorticidade na fronteira entre o canal principal e a fenda,

confirmando coerência com os dados numéricos e experimentais consultados.

O uso de um código numérico aplicado ao problema estudado mostrou a habilidade desta metodologia em simular escoamentos turbulentos complexos sem limitações em alocação de memória e destacou que um modelo de turbulência, além de ser numericamente eficaz, descreve a realidade física dos fenômenos envolvidos, confirmando os bons resultados obtidos nas simulações com o canal composto. Entretanto, a grande redução no passo de tempo de integração à medida que o número de Reynolds aumentava acarretou em grandes tempos de processamento e inviabilizou a construção de uma malha mais refinada que traria melhorias na análise desses escoamentos, principalmente na região da fenda.

Em futuros trabalhos as simulações de casos com maior complexidade geométrica com malhas mais complexas e maiores níveis de refinamento, acoplamento de um gerador de malhas no código surgem como aprofundamento ao estudo iniciado aqui.

A comparação entre os esquemas de Dois Passos e de Taylor-Galerkin mostrou que os resultados das simulações com o esquema de Dois Passos com o Modelo Dinâmico ficaram em maior concordância com os resultados experimentais.



## 8. Referências Bibliográficas

- Abba, A., Cercignami, C., Valdetaro, L., 2003. "Analysis of subgrid scale models". **J. Comp. Math. Appl.** 46, 521–535.
- Abrunhosa, J.D.M., 2003. "**Simulação de escoamento turbulento complexo com modelagem clássica e de grandes escalas**". Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.
- Abrunhosa, J.D.M., Nieckele, A. O., 2005. "Simulação do Problema do Degrau com RANS e LES. **Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica**", Madri, v. 9, n. 2, p. 57-66.
- Allen, D.; Amos, W.; Chartrand, M.; Gibson, H.; Lees, R.; Leutscher, A., 1978. "Ao encontro da Natureza". 1ª Edição, Selecções Reader's Digest. Lisboa.
- Antonia, R.A., Teitel, M., Kim, J., Browse, L. W. B., 1992. "Low-Reynolds-number effects in a fully developed turbulent channel flow", **J. Fluid mech.**, vol. 236, pp. 579-605;
- Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., Schönung, B., 1983. "Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow", **Journal of Fluid Mechanics**, v. 127, pp. 473-496.
- Azevedo, R. L. 1999. "**Análise de Problemas de Interação Fluido-Estrutura usando o Método de Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico**". Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Bardina, J., 1989. "Toward a General Turbulence Model", **AIAA 20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference**, p 1-10, Buffalo, NY.
- Bardina, J. , Ferziger, J., H., Reynolds, W., C., 1980, "Improved subgrid models for large eddy simulation", **American Institute of Aeronautics and Astronautics, Fluid and Plasma Dynamics Conference**, 13th, Snowmass, Colo, AIAA paper 80-1357;

- Bermudez, L., Velazquez A. and Matesanz A., 2002. “Viscous-inviscid method for the simulation of turbulent unsteady wind turbine airfoil flow”. **J. Wind Eng. Ind. Aerodynamics**, 90: 643-661.
- Bernard, P.S., Wallace, J.M., 1998. **Turbulent Flows**. Encyclopedia of Applied Physics, v.22, pp. 399-430.
- Biemüller, M., Meyer, L., Rehme, K., 1996. “Large eddy simulation and measurement of the structure of turbulence in two rectangular channels connected by the gap”, **Engineering Turbulence Modeling and Experiments** 3, Editors: Rodi, W. and Bergeles, G., 249-258.
- Blanchon, F.; Cluzan, S.; Demoule, J-P.; Glassner, J-J.; Koenig, V.; Miniou, J-P.; Picard, M.; Vander, J., *et al.*, 1993. “L’histoire du monde. Premières civilisations. Des origines à 970 avant J-C ” . Larousse, Paris.
- Boussinesq, J., 1877. “Theory de L’écoulement Tourbillant”. **Mem. Pres. Par Div. Savants a L.acad. Sci.**, Paris, 23, 46-50.
- Brenner, S. C., Scott, L. R., 2008. “**The Mathematical Theory of Finite Element Methods**”, 3rd Edition. Springer-Verlag.
- Breuer, M., Rodi, W., 1994. “Large Eddy Simulation of Turbulent Flow through a Straight Square Duct and 180° Bend”, **Direct and Large Eddy Simulation I**, p.273-285, P.R. Voke *et al.* (eds.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Burbridge, H. P., 1999. “**O esquema explícito de Taylor-Galerkin na simulação numérica de escoamentos compressíveis tridimensionais utilizando elementos finitos hexaédricos de oito nós**”. Tese de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Burbridge, H.P. e Awruch, A.M, 2000. “A Finite Element Taylor-Galerkin Scheme for Three-Dimensional Numerical Simulation of High Compressible Flows with Analytical

- Evaluation of Element Matrices”. **Hybrid Methods in Engineering**, N.Y. USA, v. 2, n. 4, p. 485-506.
- Chorin, A.J., 1967. “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”. **J. Comput. Phys.** 2,12-26.
- Clark, R.A.; Ferziger, J.H.; Reynolds, W.C., 1979. “Evaluation of Sub-Grid Scale Turbulence Models Using an Accurately Simulated Turbulent Flow”, **Journal of Fluid Mechanics**, V 91, n1, p 1-16.
- Cunge, J.A. *et al.*, 1980. “Practical aspects of computational river hydraulics”. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 420 p.
- Dean, R.B., 1978. “Reynolds Number Dependence of Skin Friction and Other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow”, **Journal of Fluids Eng. Trans. ASME**, v. 100, pp. 215-223.
- Deardorff, J., W., 1970. “A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers”. **J. Fluid Mech.**, vol. 41, 453-480
- Donea, J, 1984. “A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v 20, pp 101-119.
- Findikakis, A.N., Street, R.L., 1982. "Mathematical Description of Turbulent Flows", **Journal of Hydraulics Division, ASCE**, V108, N<sup>o</sup>.HY8, paper 17265, p887-903.
- Fortuna, A. O., 2002. “**Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos básicos e aplicações**” . Editora da Universidade de São Paulo - Edusp, São Paulo-SP.
- Fox, R.W., McDonald, A.T., 2001. “Introdução à Mecânica dos Fluidos”, LTC Editora, Rio de Janeiro.

- Franca, L., Frey, S. L., 1992. "Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations". **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 99, pp. 209-233.
- Friedrich, R., Arnal, M., 1990. "Analysing turbulent backward-facing step flow with the lowpass-Filtered Navier-Stokes equations". **J. Wind Engng Indust. Aerodyn**, 35, 101-128.
- Gavrilakis, S., 1992, "Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct", **J. Fluid Mech.**, vol. 244, pp. 101-129.
- Germano, M. Piomelli, U., Moin, P. Cabot, W.H., 1991. "A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model", **Physics of Fluids**, A3 (7), 1760-1765.
- Ghosal, S., 1996. "An analysis of numerical errors in large eddy simulations of turbulence", **Journal of Computational Physics**, 125, pp. 187-206;
- Ghosal, S., Moin, P., 1995. "The basic equations for the large eddy simulations of turbulent flows in complex geometry". **Journal of Computational Physics**, 118, pp. 24-37;
- Ghosal S, Lund TS, Moin P, Akselvoll K., 1995. "A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows". **Journal of Fluid Mechanics**, 286:229.
- González, L.A.S., 1993. "**Análise de escoamentos de fluidos quase-incompressíveis e de vibrações induzidas em objetos imersos**", Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Goulart, J.N.V., 2009. "**Análise Experimental de escoamentos cisalhantes em canais compostos fechados**". Dr. Tese, PROMEC., Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil. Disponível em <http://hdl.handle.net/10183/16204>.
- Gresho, P. M., Chan, S. T., Lee, R. L., Upson G. D., 1984. "A Modified Finite Element Method for Solving the Time Dependent, Incompressible Navier - Stokes Equations". Part I : Theory. **Int.. J. for Num. Meth. in Fluids**, V. 4, pp 557-598.

- Guellouz, M.S., Tavoularis, S., “The structure of the turbulent flow in a rectangular channel containing a single rod – Part 1: Reynolds-Average measurements”, **Exp. Thermal and Fluid Sci.**, **23**, 59-73, 2000.
- Härtel, C., Kleiser, L., 1998, “Analysis and modeling of subgrid-scale motions in near-wall turbulence”, **J Fluid Mech.**, vol. 356, pp. 327-352.
- Hinze, J.O., 1975. "**Turbulence**", McGraw-Hill, New York.
- Horiuti K., 1997. “A new dynamic two-parameter mixed model for large-eddy simulation”. **Physics of Fluids**, 9, 3443.
- Hooper, J.D., 1980. “Developed single-phase turbulent flow through a square-pitch rod cluster”. **Nucl. Eng. Des.** 60, 365–379.
- Hooper, J.D., Rehme, K., 1984. “Large-scale structural effects in developed turbulent flow through closely-spaced rod arrays”. **J. Fluid Mech.** 145, 305–337.
- Hughes, T. J. R., 1987. “The Finite Element Method”, Prentice-Hall, New Jersey.
- Hughes, T.J.R., Oberai, A.A., Mazzei, L., 2001. “Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows by the Variational Multiscale Method”, **Physics of Fluids**, v. 13, n. 6, pp. 1784-1799.
- Indrusiak, M. L. S. **Caracterização de escoamentos turbulentos transientes usando a transformada de ondaletas**, Tese de Doutorado, PROMEC-UFRGS, Porto Alegre, RS. 2004.
- Jovic, S., Driver, D., 1994. “Backward-facing step measurement at low Reynolds number”. **NASA Tech. Mem.** 108870.

- Kawahara, M., Hirano, H., 1983. "A Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow Using Two Step Explicit Scheme". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, V.3, pp.137-163.
- Kawahara, M., Hirano, H., Tsubota, K. e Kazuo, I., 1982. "Selective Lumping Finite-Element Method for Shallow-Water Flow". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, V.2(1), pp.89-112.
- Kim, J., Kline, S. J., Johnston, J. P., 1978. "Investigation of Separation and Reattachment of a Turbulent Shear Layer: Flow over a Backward-Facing Step". **Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University**, Rept. MD-37.
- Kim, J., Kline, S.J., Johnston, J. P., 1980. "Investigation of a reattaching shear layer: flow over a backward facing step", **ASME J. Fluids Eng.**, Vol. 102, pp. 302-308.
- Kim, J., Moin, P., Moser, R., 1987. "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", **J. Fluid Mech.**, vol. 177, pp. 133-166.
- Kolmogorov, A.N., 1942. "Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid", **Akad. Nauk. USSR, Ser. Phys.**, v. 6, pp. 56-58.
- Krajnovic, S., Davidson, L., 2001. "A Mixed One-Equation Subgrid Model for Large-Eddy Simulation", **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Vol. 23, No. 4, pp. 413-425.
- Kravchenko, A., G., Moin, P., 1997. "On the effects of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows", **Journal of Computational physics**, 131, pp. 310-322.
- Launder, B.E., Spalding, D.B., 1972. "**Lectures in Mathematical Models of Turbulence**", Academic Press, Londres.
- Launder, B.E., Spalding, D.B., 1974. "The Numerical Computation of Turbulent Flows", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.3, p.269-289.

- Le, H., Moin, P., Kim, J., 1997. "Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward facing step", **J. Fluid Mech.**, vol. 330, pp.349-374.
- Leonard, A., 1974. "Energy Cascade in Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows", **Advances in Geophysics**, 18A, p.237-248.
- Lesieur, M., Métais, O., 1996. "New trends in large eddy simulations of turbulence", **Annual Rev. Fluid Mech.**, 28, pp. 45-82.
- Lesieur, M., 1997. "**Turbulence in Fluids**", Third Edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Leveque E., Toschi F., Shao L., Bertoglio J.P., 2007. "Shear-Improved Smagorinsky Model for Large-Eddy Simulation of Wall-Bounded Turbulent Flows", **Journal Fluid Mechanics** v.570 , 491.
- Lilly, D.K., 1992. "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", **Physics of Fluids**, A4 (3), 633-635.
- Lima, R.C., 2005. "**Simulação de grandes escalas de escoamentos incompressíveis com transferência de calor e massa por um método de elementos finitos de subdomínio**". Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.
- Löhner, R., 2001. "**Applied computational fluid dynamics techniques - An introduction based on finite element methods**". School of Computational Sciences, George Mason University Fairfax, Virginia, USA.
- Markatos, N.C., 1986. "The Mathematical Modelling of Turbulent Flows", **Applied Math. Modelling**, v 10, p 190- 220.

- Marsden, A., L., Vasilyev, O., V., Moin, P., 2002. "Construction of commutative filters for LES on unstructured meshes", **Journal of Computational Physics**, 175, pp. 584-603.
- Maubach, K., Rehme, K., 1971. "Negative Eddy Diffusivities for Asymmetric Turbulent Velocity Profiles?", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 15, pp. 425-432.
- Meneveau, C., Katz, J., 2000. "Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation", **Annual Rev. Fluid Mech.**, 32, pp. 1-32.
- Meneveau, C., Lund, T.; Cabot, W. H., 1996. "A lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence". **Journal Fluid Mechanics**, vol.319, p.353-385.
- Merzari, E., Ninokata, H., Baglietto, E., 2008. "Numerical simulation of flows in tight-lattice fuel bundles". **Nucl. Eng. Des.** 238, 1703–1719.
- Meyer, L., Rehme, K., 1994. "Large-scale turbulence phenomena in compound rectangular channels", **Exp. Thermal Fluid Sci.**, 8, 286-304.
- Meyer, L., Rehme, K., 1995. "Periodic vortices in flow through channels with longitudinal slots or fins", **10th Symposium on turbulent shear flows**, The Pennsylvania State University, University Park, August 14-16.
- Meyer, L., 2010, "From discovery to recognition of periodic large scale vortices in rod bundles as source of natural mixing between sub-channels - A review", **Nuclear Engineering and Design**, Vol.240, Issue 6, Pages 1575-1588.
- Meyers J, Sagaut P., 2006. "On the model coefficients for the standard and the variational multi-scale Smagorinsky model" , **Journal of Fluid Mechanics**, v.569, 287-319
- Moffat, R. J., 1988. "Describing the uncertainties in experimental results", **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 1, p. 3-17.



- Moin, P., 2002. "Advances in large eddy simulation methodology for complex flows", **International Journal Heat and Fluid Flow** 23, pp. 710-720.
- Möller, S. V., 1991. "On Phenomena of Turbulent Flow through Rod Bundles", **Exp. Thermal Fluid Sci.** 4, 25-35.
- Möller, S. V., 2003 . "Experimentação em Turbulência". In: Aristeu da Silveira Neto; Sérgio Said Mansur. (Org.). **Turbulência**. Rio de Janeiro: ABCM, , v. 2, p. 207-243.
- Möller, S. V., Silvestrini, J. H., 2004. "Turbulência: fundamentos", In: S. V. Möller; J. H. Silvestrini. (Org.). **Turbulência**. Rio de Janeiro: ABCM, v. 4, p. 1-32.
- Murakami, S., 1998. "Overview of turbulence models applied in CWE-1997", **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol.74-76, p.1-24, Elsevier Science Publishers.
- Nakayama A., Vengadesan, S. N., 2002. "On the influence of numerical schemes and subgrid-stress models on large eddy simulation of turbulent flow past a square cylinder". **Int. J. Numer. Methods Fluids** 38:227–253.
- Nezu, I., Nakagawa, H., 1993. "Turbulence in Open-Channel Flows". IAHR Monograph, A. A. Balkema Publishers , Rotterdam.
- Nezu, I., 1994. "Compound Open-Channel Turbulence and its Role in River Environment". Department of Civil and Global Environment Engineering, Kyoto University, Japan.
- Nikuradse, J., 1933. "**Stromungsgesetze in Rauhen Rohren**", V. D. I. Forschungsheft, N° 361.
- Nishino, K., Kasagi, N., 1989. "Turbulence statistics measurement in a two-dimensional channel flow using a three-dimensional particle tracking velocimeter", in: **Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows, Stanford University**, August 21-23.

- Olinto, C. R., Indrusiak, M. L. S., Endres, L. A. M., Möller, S. V., 2009. “Experimental study of the characteristics of the flow in the first rows of tube banks”, **Nuclear Engineering and Design**, v. 239, p. 2022-2034.
- Oliveira Júnior, J.A.A., 2006. “**Desenvolvimento de um sistema de dinâmica de fluido computacional empregando o método dos elementos finitos e técnicas de alto desempenho**”. Tese de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Orszag, S., A., Patterson, G., S., 1972. “Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence”, **Physics Fluids Letter** 28, pp. 76-79.
- Oshima, M., Kobayashi, T., Taniguchi, N., Tsubokura, M., 1996. “Development of Filtering Operation for Dynamic SGS Model Using Finite Element Method”. **The Second ERCOFTAC Workshop on Direct and Large Eddy Simulation**. Setembro 16-19, Grenoble, França.
- Padilla, E. L. M., Silveira Neto, A., 2003. “Influência de diferentes tipos de filtros para modelagem dinâmica em Simulação de Grandes Escalas”. In: **XXXIV Inberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, Ouro Preto. UFOP, v. 1. p. 1-10.
- Perry, A.E., Schofield, W.H., Joubert, P.N., 1969. "Rough-Wall Turbulent Boundary Layers", *J. Fluid Mech.*, Vol. 37, pp. 383-413.
- Petry, A.P., 2002. “Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método de Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas”, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Petry, A.P. e Awruch, A.M., 2006. “Large eddy simulation of three-dimensional turbulent flows by the finite element method”. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.*, vol.28, no.2, p.224-232. ISSN 1678-5878.

- Piomelli, U., 1999. "Large-Eddy Simulation: Achievements and Challenges", Progress in Aerospace Sciences, vol. 35, pp. 335-362.
- Piomelli, U.; Liu, J., 1995. "Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model". Phys. Fluids 7 (4) 839-848.
- Popiolek, T. L., *et al.*, 2006. "Finite element analysis of laminar and turbulent flows using LES and sub-grid scale models", Applied Mathematical Modelling, v. 30, pp 177-199.
- Popiolek, T.L. ; Awruch, A.M.; Teixeira, P.R.F., 2006. "Finite Element Analysis of Laminar and Turbulent Flows Using LES and Subgrid-Scale Models". **Applied Mathematical Modelling**, Editora Elsevier, v. 30, n. 2, p. 177-199, 2006.
- Prandtl, L., 1925. "Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz". ZAMM., 5:136–139.
- Prandtl, L., 1945. "Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz", **Nacr. Akad. Wiss. Gottingen, Math-Phys. Kl.**, pp. 6-19.
- Prooijen, B. C., Uijttewaal, W. S. J., 2002. "A linear approach for the evolution of coherent structures in shallow mixing layers". **Physics of Fluids**, 14, 4105-4114.
- Prooijen, B. C., Battjes, J., Uijttewaal, W. S. J., 2005. "Momentum Exchange in straight uniform compound channel flow". **Journal of Hydraulic Engineering**, Volume 131, págs. 175-183.
- Roberts T.W., Swanson R.C., Sidilkover D., 1999. "An algorithm for ideal multigrid convergence for the steady Euler equations". **Computers and Fluids**, 28 (4-5), pp. 427-442.
- Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. "The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics", CRC Press.

- Rehme, K., 1978. "The structure of turbulent flow through a wall subchannel of a rod bundle". **Nucl. Eng. Des.** 45, 311–323.
- Rehme, K., 1987 (a). "The structure of turbulent flow through rod bundles". **Nucl. Eng. Des.** 99, 141–154.
- Rehme, K., 1987 (b). "On the development of turbulent flow in wall subchannels of rod bundles", **Nucl. Technol.** 77, 331-342 (1987). 55.
- Rodi, W., 1980. "**Turbulence Model and their Application in Hydraulics - A State of Art Review**" - Institute für Hydromechanik and Sonderforschungsbereich 80, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Federal Republic of Germany.
- Rodi, W., Ferziger, J, Breuer, M, Pourquié, M., 1997, "Status of large eddy simulation: results of a workshop", **Journal of Fluids Engineering**, vol. 119, pp. 248-262.
- Rowe, D.S., 1973, "Measurement of Turbulent Velocity, Intensity and Scale in Rod Bundle Flow Channels," BNWL-1736, Battelle Pacific Northwest Laboratories, Richland, Washington.
- Sagaut, P., Troff, B., Lê, T.H., Loc, T.P., 1994. "Two-dimensional simulations with subgrid-scale models for separated flow", **Direct and Large-Eddy Simulation 1**, P. Voke and L. Kleiser and J-P Chollet eds., Kluwer Academic Publishers, pp. 109-121.
- Salvetti MV, Banerjee S., 1995. "A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulation". **Physics and Fluids**, 7:2831.
- Sampaio, L. E. B. ; Nieckele, A. O., 2006. "Large Eddy Simulations of the Long Recirculation Bubbles Formed in Thin Flat Plates at Shallow Incidence". In: **Escola de Primavera de Transição e Turbulência**, 2006, Rio de Janeiro. ABCM.
- Sanjou, M., Nezu, I., 2009. "Turbulence structure and coherent motion in meandering compound open-channel flows". *Journal of Hydraulic Research*, 47: 598-610.

Schlichting, H., 1968. "**Boundary Layer Theory**", McGraw-Hill, New York.

Sebastiaan, N.; Kelman, I., 2005. "An analysis of the causes and circumstances of flood disaster deaths". *Disasters*, Volume 29, n.º 1, págs. 75-97.

Shiono, K., Knight, D. W., 1991. "Turbulent Open-Channel Flows with Variable Depth across the Channel", *J. Fluid Mech.* 222, 617-646.

Silveira Neto, A., 2002. "Fundamentos da turbulência nos fluidos", In: UFSC. (Org.). *Anais da III Escola de Primavera Transição e Turbulência*. 1 ed. Florianópolis: UFSC, v. 1, p. 1-52.

Silveira Neto, A., Grand, D., Métais, O., Lesieur, M., 1993. "A Numerical Investigation of the Coherent Vortices in Turbulence Behind a Backward-Facing Step", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 256, pp. 1-25.

Silvestrini, J., H., 2000. "Simulação numérica direta e de grandes escalas de escoamentos transicionais e turbulentos", *Segunda escola de turbulência*, Uberlândia, MG, Brasil, pp. 148-219.

Smagorinsky, J., 1963. "General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment", *Monthly Weather Reviews*, v. 91, pp. 99-164.

Soldini, L., Piattella, A., *et al.*, 2004. "Macrovortices-induced horizontal mixing in compound channels". *Ocean Dynamics* 54, 333–339.

Souza, R. M., 2003. "O Método de Elementos Finitos aplicado ao Problema de Condução de Calor", NiCAE, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Pará, Belém.

Sørensen, J.N., Nygreen, P.J., 2001. "Unsteady vorticity-stream function algorithm for external flows". *Computer & Fluids*, 30: 69-87.

- Stull, R. B., 1988. **“An Introduction to Boundary Layer Meteorology”**. The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Teixeira e Silva, A., 2008. “O Futuro da Energia Nuclear”. **Revista USP**, n° 76.
- Tejada-Martínez, A. E., 2002. **“Dynamic subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of turbulent flows with a stabilized finite element method”**. *PhD Thesis*, Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA, 158 p.
- Tejada-Martínez A.E., Jansen, K.E., 2006. “A parameter-free dynamic subgrid-scale model for large-eddy simulation of turbulent flows”, **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, 195:2919-2938.
- Tenekes, H. Lumley, J.L., 1972. **“A First Course in Turbulence”**, MIT Press.
- Vasilyev, O., V., Lund, T., S., Moin, P., 1998. “A general class of commutative filters for LES in complex geometries”, **Journal Computational Physics** 146, pp. 82-104.
- Vreman B., Geurts B., Kuerten H., 1994. “On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model”. **Physics of Fluids**, vol.6, p.4057-4059.
- Wilcox, D. C., 2000. **“Turbulence Modeling for CFD”**, DCW Industries, California.
- Williams, P.T., Baker, A.J., 1997. “Numerical Simulations of Laminar Flow over a 3D Backward-Facing Step”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.24, pp. 1159-1183.
- Wu, X., Trupp, A.C., 1993, "Experimental Study on the Unusual Turbulence Intensity Distributions in Rod-to-Wall Gap Regions," **Exp. Thermal and Fluid Sci.**, 6(4), pp. 360-370.
- Yoon, K.T., Moon S.Y., Garcia S.A., Heard G.W., Chung T.J., 1998. “Flowfield-dependent mixed explicit implicit (FDMEI) methods for high and low speed and compressible and incompressible flows”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**: 151, 75-104.

Yu G., Chun-Xiao X., Guixiang C., Zhaoshun Z., Liang S., 2007. "Large eddy simulation of scalar turbulence using a new subgrid eddy diffusivity model", **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Volume 28, Issue 2, Pages 268-274.

Zang, Y., Street, R. L., Koseff, J. R., 1993. "A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and its Application to Turbulent Recirculating Flows". **Physics of Fluids**, A, v. 5, n. 12, pp. 3186-3196.

Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L., 2000. "**The Finite Element Method**", 5<sup>th</sup> Edition, Butterworth-Heinemann, Woburn, Massachusetts, USA.

## APÊNDICES

### A.1 – Procedimento de calibração da sonda de fio quente

A calibração da sonda de anemometria de fio quente é realizada no interior do canal aerodinâmico, com um dispositivo que restringe gradualmente o fluxo do escoamento (bocal convergente), aumentando sua velocidade. Na mesma seção onde é posicionada a sondas de fio quente, modelo DANTEC 55P71, está instalado um tubo de Pitot, que é responsável pela medição da pressão. Este valor é anotado juntamente com os valores de tensão apresentados pelas sondas, e as relações entre tensão e velocidade e tensão e ângulo de incidência são determinadas. Geralmente as curvas de calibração são obtidas a partir de 10 a 12 pontos de medição, distribuídos em um intervalo conveniente. Para a velocidade os valores vão de zero até acima da velocidade máxima esperada para o experimento. Para o ângulo de incidência da sonda estes valores variam de  $-30$  a  $30^\circ$ .

São utilizados três equipamentos para a medição da pressão no interior do canal, em função de faixa de medição: um micromanômetro de coluna inclinada, um manômetro eletrônico e um manômetro de coluna d'água.

Para cada novo experimento é realizada uma nova calibração. Porém, como as sondas permanecem no interior do canal até a realização do experimento, sem a necessidade da desmontagem do conjunto sonda/suporte/cabo/CTA, os valores absolutos das medições de velocidade não são afetados.

Um esquema de decomposição do vetor velocidade e a determinação das componentes em axial e transversal, bem como o ângulo de desvio do escoamento da sonda dupla de fio quente são apresentados em maiores detalhes por Indrusiak, 2004.

A Tab. A.1 mostra o registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade axial do fio reto da sonda, e a Fig. A.1 ilustra a curva de velocidade *versus* tensão e os erros envolvidos no processo de calibração desta variável.

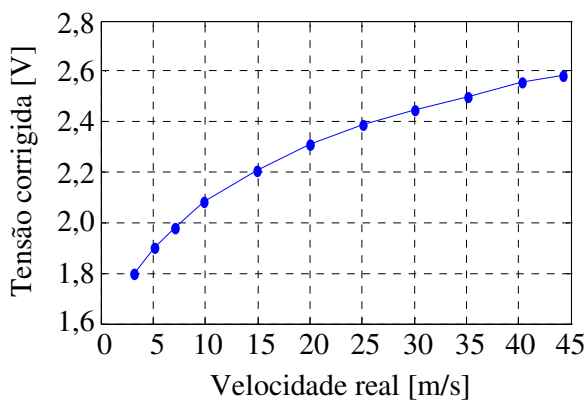
A Tab. A.2 mostra o registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade transversal e do ângulo de desvio do fio inclinado da sonda, e a Fig. A.2 ilustra a curva de velocidade transversal *versus* tensão e os erros envolvidos no processo de calibração



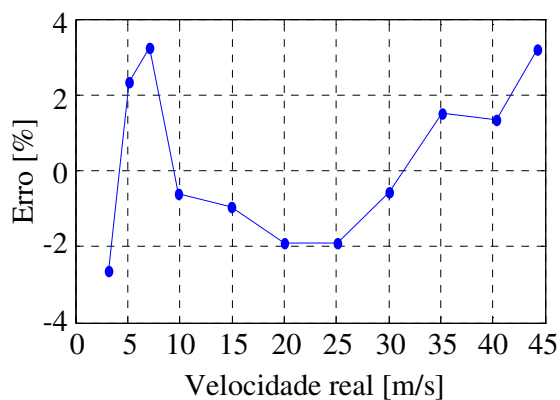
desta variável. A Fig. A.3 ilustra a curva de ângulo de desvio *versus* tensão e os erros envolvidos no processo de calibração desta variável.

Tabela A.1 – Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade axial do fio reto da sonda. (ver equação A.7)

$E_0$ [V]	1,100	Coeficientes de calibração:		$B_x$	1,2855	
$E_{0corr}$ [V]	1,100			$n_x$	0,3853	
$U_{real}$ [m/s]	$E_{corr}$ [V]	$\ln(E_{corr}^2 - E_0^2)$	$\ln(U_{real})$	$U_{calculada}$ [m/s]	Erro [%]	
1	3,167	1,799	0,705	1,153	3,251	-2,631
2	5,172	1,900	0,875	1,643	5,051	2,348
3	7,082	1,977	0,993	1,958	6,854	3,229
4	9,907	2,080	1,137	2,293	9,969	-0,625
5	14,968	2,207	1,297	2,706	15,110	-0,948
6	20,072	2,307	1,414	2,999	20,453	-1,898
7	25,055	2,385	1,500	3,221	25,535	-1,913
8	30,048	2,447	1,564	3,403	30,222	-0,581
9	35,175	2,500	1,617	3,560	34,641	1,517
10	40,272	2,554	1,670	3,696	39,739	1,321
11	44,229	2,584	1,699	3,789	42,811	3,205



(a)



(b)

Figura A.1 – (a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda reta de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade.

Tabela A.2 – Registro de uma calibração típica para obtenção da velocidade transversal e do ângulo de desvio do fio inclinado da sonda. (ver equação A.7)

$E_0$ [V]		1,290		Coeficientes de calibração:		$B_\alpha$	0,9460
$E_{0corr}$ [V]		1,290				$n_\alpha$	0,4618
						$m_\alpha$	0,4298
	$U_{real}$ [m/s]	$E_{corr}$ [V]	$\ln(E_{corr}^2 - E_0^2)$	$\ln(U_{real})$	$U_{calc}$ [m/s]	Erro [%]	
1	3,167	1,744	0,139	0,501	3,121	1,461	
2	5,172	1,840	0,236	0,714	5,040	2,550	
3	7,082	1,915	0,302	0,850	7,006	1,083	
4	9,907	2,013	0,378	0,996	10,263	-3,588	
5	14,968	2,134	0,461	1,175	15,479	-3,409	
6	20,072	2,229	0,519	1,303	20,712	-3,190	
7	25,055	2,303	0,561	1,399	25,552	-1,980	
8	30,048	2,363	0,593	1,478	30,014	0,113	
9	35,175	2,413	0,619	1,546	34,127	2,978	
10	40,272	2,466	0,645	1,605	38,809	3,631	
11	44,229	2,503	0,663	1,646	42,405	4,123	

Velocidade alvo [m/s]		15,00		Ângulo $\alpha$ [°]		45	
Ângulo $\delta$ [°]	$E_{\delta corr}$ [V]	$\ln(E_{\delta corr}^2 - E_0^2)$	$\cos(\alpha - \delta)$	$\ln(\cos(\alpha - \delta))$	$U_{calc}$ [m/s]	Erro [%]	
1	30	2,233	0,564	0,966	-0,015	15,512	-3,413
2	25	2,223	0,559	0,940	-0,027	15,442	-2,943
3	20	2,212	0,553	0,906	-0,043	15,445	-2,965
4	15	2,199	0,546	0,866	-0,062	15,482	-3,214
5	10	2,181	0,536	0,819	-0,087	15,417	-2,783
6	5	2,158	0,523	0,766	-0,116	15,259	-1,724
7	0	2,136	0,510	0,707	-0,151	15,315	-2,098
8	-5	2,106	0,493	0,643	-0,192	15,212	-1,413
9	-10	2,078	0,477	0,574	-0,241	15,389	-2,591

10	-15	2,042	0,455	0,500	-0,301	15,430	-2,865
11	-20	2,000	0,428	0,423	-0,374	15,507	-3,382
12	-25	1,948	0,393	0,342	-0,466	15,512	-3,417
13	-30	1,881	0,345	0,259	-0,587	15,348	-2,318

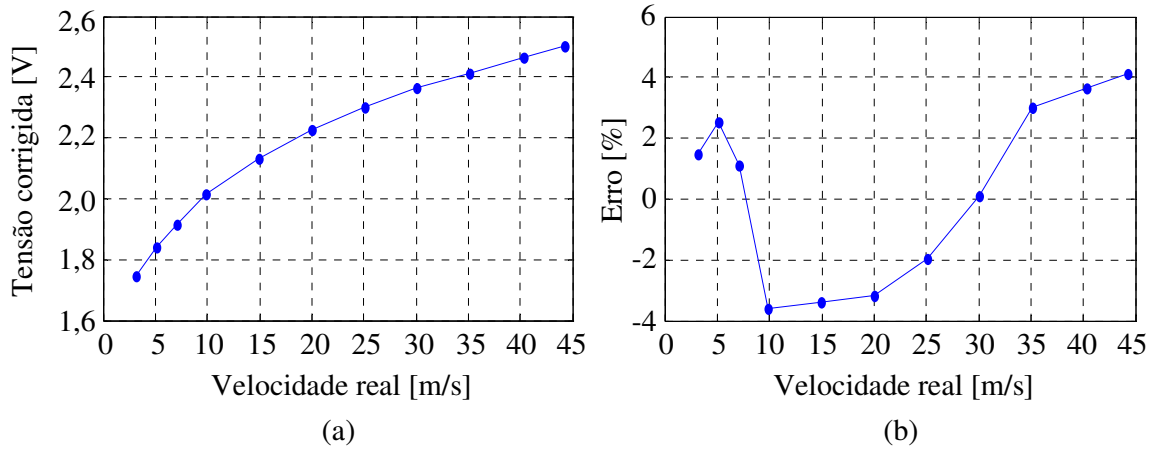


Figura A.2 – (a) Relação típica entre velocidade real medida e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda inclinada de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a velocidade

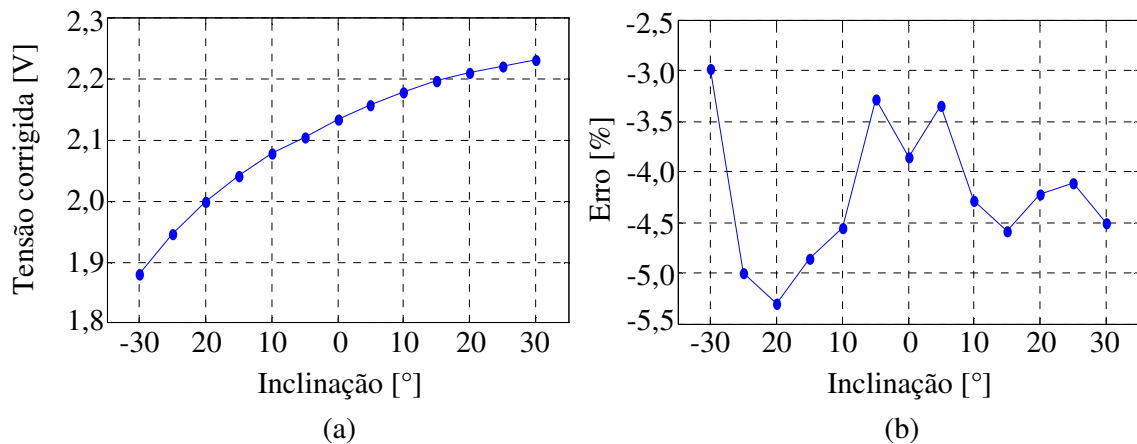


Figura A.3 – (a) Relação típica entre inclinação e tensão corrigida resultante do processo de calibração da sonda reta de fio quente. (b) Variação do erro da calibração com a inclinação.

## A.2 –Análise de incertezas

O erro em uma medição é dado pela diferença entre o valor real e o medido. Neste trabalho serão analisadas as incertezas de medição, que são os valores possíveis dos erros, pois os valores reais não são previamente conhecidos. É de fundamental importância nos estudos experimentais a estimativa dos efeitos das incertezas das medições nos resultados finais, o que possibilita avaliar eventuais erros.

De acordo com Moffat, 1988, a incerteza de um resultado pode ser calculada combinando-se as incertezas das variáveis envolvidas, e dada por:

$$\delta R = \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

em que  $R = R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é o resultado em análise e  $\delta x_i$  é a incerteza da variável  $x_i$ .

O coeficiente de sensibilidade do resultado  $R$  com respeito à medição de  $x_i$  é dado pela derivada parcial de  $R$  em relação a  $x_i$ .

Aplicando-se a Equação (A.1) à Equação (1.1), pode-se calcular a incerteza na determinação do número de Reynolds

$$\delta Re = Re \left[ \left( \frac{\delta U}{U} \right)^2 + \left( \frac{\delta d}{d} \right)^2 + \left( \frac{\delta v}{v} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

A incerteza na leitura dos valores medidos é dada pela resolução da escala de medição. Deste modo, a Tab. A.3 apresenta as principais resoluções das escalas dos instrumentos utilizados neste trabalho.

A incerteza na determinação do diâmetro dos tubos é estimada em  $\pm 0,0001$  m. A incerteza no posicionamento da sonda é estimada em  $\pm 0,0001$  m. A aproximação da sonda em relação aos tubos é realizada com um sistema de posicionamento tridimensional, que permite um alinhamento milimétrico do suporte da mesma. Após a aproximação aos tubos, um ajuste é realizado por meio de um paquímetro, cuja incerteza de medição corresponde a  $\pm 0,00005$  m.

Tabela A.3 – Principais resoluções das escalas dos instrumentos utilizados neste trabalho.

Instrumento	Resolução da escala
Termômetro	$\pm 0,5^\circ \text{ C}$
Barômetro	$\pm 0,5 \text{ mmHg}$
Micromanômetro de coluna inclinada	$\pm 0,02 \text{ mmH}_2\text{O}$
Manômetro eletrônico*	1% da leitura
Manômetro de coluna d'água	$\pm 1 \text{ mmH}_2\text{O}$

A incerteza na leitura de velocidade depende da equação utilizada para conversão dos valores de tensão obtidos pelo anemômetro de fio quente. Para sonda de fio reto, a equação é dada por:

$$U_x = \left( \frac{E_x^2 - E_{0x}^2}{B_x} \right)^{1/nx}, \quad (\text{A.3})$$

em que  $E_{0x}$  é a tensão à velocidade zero e  $B_x$  e  $nx$  são os coeficientes obtidos da calibração da sonda de fio reto (Indrusiak, 2004).

Aplicando-se a Equação (A.1) à Equação (A.3), obtém-se:

$$\delta U_x = \frac{U_x}{nx} \left[ (\ln U_x \delta nx)^2 + \left( \frac{1}{B_x} \delta B_x \right)^2 + \left( \frac{2E_{0x}}{E_x^2 - E_{0x}^2} \delta E_{0x} \right)^2 + \left( \frac{2E_x}{E_x^2 - E_{0x}^2} \delta E_x \right)^2 \right]^{1/2} \quad ((\text{A.4}))$$

Para o cálculo da componente transversal da velocidade ( $W$ ), utilizando-se a sonda dupla reto-inclinado, a equação de conversão é dada por:

\* As leituras típicas deste equipamento variam de 4 a 20 mA.

$$W = U_x \tan \beta, \quad (\text{A.5})$$

em que  $\beta$  é o ângulo do fio inclinado em relação ao escoamento principal.

Aplicando-se a Equação (A.1) à Equação (A.5), a incerteza na leitura de  $W$  é dada por:

$$\delta W = W \left[ \left( \frac{\delta U_x}{U_x} \right)^2 + \left( \frac{\delta(\tan \beta)}{\tan \beta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

A calibração da sonda de fio inclinado é dada por:

$$E_\alpha^2 = E_{0\alpha}^2 + B_\alpha U_{\text{real}}^{n\alpha} \cos^{m\alpha}(\alpha - \beta), \quad (\text{A.7})$$

em que  $E_{0\alpha}$  é a tensão à velocidade zero no fio inclinado e  $B_\alpha$ ,  $n\alpha$  e  $m\alpha$  são os coeficientes obtidos da calibração da sonda de fio inclinado. O valor real de  $\alpha$ , que é o ângulo da sonda inclinada, é de  $45^\circ$ . A velocidade real  $U_{\text{real}}$  é a soma vetorial de uma componente paralela ao fio inclinado e outra perpendicular ao mesmo. Esta componente perpendicular será responsável pelo resfriamento e conseqüente variação da tensão na ponte. (Indrusiak, 2004).

Na solução do ângulo de incidência as Equações (A.3) e (A.7) devem ser resolvidas em conjunto. Deste modo, o erro na leitura do valor de  $\tan \beta$  é expresso por:

$$\begin{aligned} \delta \tan \beta = & \frac{\tan \beta - 1}{m\alpha} \left[ (\ln \tan \beta \delta m\alpha)^2 + \left( \frac{1}{B_\alpha} \delta B_\alpha \right)^2 + \left( \frac{2E_{0\alpha}}{E_\alpha^2 - E_{0\alpha}^2} \delta E_{0\alpha} \right)^2 + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left( \frac{2E_\alpha}{E_\alpha^2 - E_{0\alpha}^2} \delta E_\alpha \right)^2 + \left( \frac{n\alpha}{U_x} \delta U_x \right)^2 + (\ln U_x \delta n\alpha)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

O erro na leitura dos valores de tensão  $E_x$ ,  $E_{0x}$ ,  $E_\alpha$  e  $E_{0\alpha}$  com o anemômetro de fio quente é calculado a partir dos dados do fabricante, do seguinte modo:

$$\delta E = \left( \frac{OS}{1000} + 0,0005 \right) \text{mV} \quad (\text{A.9})$$

em que OS é o fator de compensação ou *offset*, ajustado para cada medição.

Os valores  $B_x$ ,  $n_x$ ,  $B_\alpha$ ,  $m_\alpha$  e  $n_\alpha$ , são obtidos por meio de regressão numérica dos dados de calibração, e os erros na leitura destes valores pode ser calculado de acordo com o descrito por Moffat, 1988, da seguinte forma:

1. Calcula-se o resultado  $R_0$  a partir dos dados obtidos da calibração;
2. Para cada variável  $x_i$  (pontos de calibração) envolvida, calcula-se o valor de  $R_{i+}$  e  $R_{i-}$ , respectivamente, aumentando-se e subtraindo-se a incerteza de medição na variável correspondente;
3. Calcula-se o valor da incerteza atribuída a cada variável, através de:

$$\delta x_i = (|R_{i+} - R_0| + |R_{i-} - R_0|) / 2 \quad (\text{A.10})$$

4. Calcula-se o valor da incerteza de R, que é dada por:

$$\delta R = \left[ \sum_{i=1}^N (\delta x_i)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

As incertezas na leitura dos valores de tensão durante a calibração são calculadas a partir da Equação (A.11), e os resultados para o fio reto são de  $\delta n_x = 0,025$  e  $\delta B_x = 0,021$ . Para o fio inclinado, as incertezas na leitura dos valores de tensão são de  $\delta n_\alpha = 0,005$ ,  $\delta m_\alpha = 0,009$  e  $\delta B_\alpha = 0,030$ .

A faixa da incerteza das medições de velocidade com a sonda de fio duplo reto-inclinado situa-se entre 3,1 e 9,8%. Estes valores dependem da curva de calibração utilizada e da região da curva em que a leitura está situada.

### A.3 – Formação Acadêmica e Publicações realizadas durante o trabalho de tese

- 2009            **Doutorado em andamento em Engenharia Mecânica** (Conceito CAPES 6) .  
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Brasil.  
 Título: SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE ESCOAMENTOS  
 TURBULENTOS EM CANAIS COMPOSTOS COM MÉTODO DE  
 ELEMENTOS FINITOS  
 Orientadores: SERGIO VIÇOSA MÖLLER E ADRIANE PRISCO PETRY.  
 Bolsista do(a): Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior .
- 2005 - 2008    **Mestrado em Engenharia Mecânica** (Conceito CAPES 6) .  
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Brasil.  
 Título: ANÁLISE DE MODELOS SUBMALHA EM ELEMENTOS FINITOS,  
 Ano de Obtenção: 2008.  
 Orientador: ADRIANE PRISCO PETRY.
- 1997 - 2005    **Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA.**  
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Brasil.  
 Título Trabalho de Conclusão de Curso: CONTROLE ESTATÍSTICO EM  
 ROLAMENTOS.  
 Orientador: SILVIA SOUZA.
- 1992 - 1996    **Graduação em MATEMÁTICA .**  
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Brasil.  
 Título: ESTÁGIO OBRIGATÓRIO DE DOCÊNCIA.  
 Orientador: MARCUS BASSO.
- XAVIER, C.M., MÖLLER, S.V. E PETRY, A.P., 2011. “LARGE EDDY SIMULATION OF TURBULENT FLOWS IN COMPOUND CHANNELS WITH A FINITE ELEMENT CODE”, The 14th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-14), Toronto, Canadá. 2011.
  - XAVIER, C.M., MÖLLER, S.V. E PETRY, A.P., 2011. “LARGE EDDY SIMULATION OF TURBULENT FLOWS IN COMPOUND CHANNELS”, 21st International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2011), Natal, RN.



- SANTOS, E. D. ; XAVIER, C. ; PETRY, A. P. . Estudio Numérico de Flujos Turbulentos Isotérmicos en Canales y Flujos Laminares con Convección Mixta en Cavidades. Información Tecnológica (Impresa) **JCR**, v. 22, p. 71-82, 2011.
  
- XAVIER, C. M. ; MÖLLER, S. V. ; PETRY, A. P. . ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE ESCOAMENTOS TURBULENTOS EM CANAIS COMPOSTOS. In: VII Escola de Primavera de Transição e Turbulência, 2010, Ilha Solteira. Anais da EPTT 2010 VII Escola de Primavera de Transição e Turbulência. Rio de Janeiro : ABCM, 2010.
  
- XAVIER, C. e PETRY, A. P. . Análise de modelos submalha em elementos finitos. In: Escola de Primavera de Transição e Turbulência 2008, 2008, São Carlos. Anais da Escola de Primavera de Transição e Turbulência, 2008.
  
- SANTOS, E. D. ; XAVIER, C. ; PETRY, A. P. . Simulação de grandes escalas de escoamentos turbulentos, incompressíveis e tridimensionais em cavidades não-isotérmicas e canais.. In: Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, 2007, Lima. Simulação de grandes escalas, 2007.