

11910

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM
PONTO SINGULAR FICTÍCIO APLICADO À
ELASTICIDADE LINEAR TRIDIMENSIONAL

ÉDIMO CELSO RUDOLF

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Porto Alegre
Maio de 1984

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Paul William Partridge
Orientador



Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

AOS MEUS PAIS

WALDEMAR MINELVINA

MINHA ESPOSA

CLARISSE

E A MEUS IRMÃOS

EDSON ELEUZA ENEIDA

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Paul William Partridge, mestre e amigo, pela orientação e atenção constante recebida no transcurso deste trabalho.

Ao apoio e dedicação recebida do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS através de seu coordenador, professores e funcionários.

A FURB - Faculdades Unificadas da Região de Blumenau pelo apoio recebido.

Ao CNPq, CAPES e ASSOCIAÇÃO DOS AMIGOS DA FURB pelo apoio financeiro concedido.

Aos colegas Marco A.G.M. Wanrowsky, Luís Mário B. de Moraes, Carlos A. Borda, Jacinto P. Júnior, Vicente de P. Batista, Paulo E. Portella e Rômulo de F. Paixão - na temporada gaúcha -, pelo interesse, ambiente de trabalho e sobretudo pela grande amizade construída no decorrer deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho é a segunda dissertação sobre o tema "Método dos elementos de contorno aplicado à elasticidade linear" realizada no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, e, propõe-se a aprimorar os resultados obtidos anteriormente e também a expandir a aplicação do método na elasticidade tridimensional.

Assim, com este espírito:

Desenvolve-se a utilização do ponto singular fora da zona de integração e realiza-se um estudo comparativo com o ponto singular coincidindo com um nó do elemento integrado.

Faz-se a análise de um cilindro ôco de paredes espessas sujeito a forças de corpo do tipo rotação inercial.

Analisa-se os deslocamentos produzidos por uma carga concentrada no extremo livre de uma viga engastada e são comparados a resultados obtidos pelo método dos elementos finitos.

Implementam-se quatro tipos de elementos de contorno (quadriláteros linear e quadrático e triangulares de mesma ordem).

Acha-se também incluída neste trabalho a formulação teórica do método dos elementos de contorno para a elasticidade tridimensional, bem como a discussão de alguns tópicos computacionais empregados.

ABSTRACT

This is the second thesis to be presented on the theme of "Boundary Element Methods Applied to Linear Elasticity" on the post graduate course in Civil Engineering of UFRGS. Previous results are used as a starting point and the application is expanded.

The method is developed using the singular point outside the integration zone and a comparative study is done with results obtained with the singular points located at nodes.

An analysis of a thick cylinder subject to rotation is done. Also displacements produced by a concentrated load at the tip of a cantilevered beam are studied. Comparison is made with results obtained using finite element analysis.

Four different elements were implemented (linear and quadratic quadrilateral elements and linear and quadratic triangular elements).

The theoretical formulation of the method is also given together with a discussion of the computer program used.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. FORMULAÇÃO TEÓRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	3
2.1. <u>Introdução</u>	3
2.2. <u>Relações básicas da elasticidade linear iso trópica</u>	3
2.3. <u>Obtenção da equação integral do contorno</u>	5
2.3.1. <u>Identidade de Somigliana e as soluções fundamentais</u>	5
2.3.2. <u>Particularização da equação para o contorno</u>	8
2.4. <u>Transformação da integral de volume para superfície</u>	9
2.4.1. <u>Introdução</u>	9
2.4.2. <u>Rotação inercial</u>	10
2.4.3. <u>Transformação para uma integral de contorno</u>	11
2.5. <u>Obtenção de deslocamentos e tensões no interior</u>	14
2.5.1. <u>Cálculo dos deslocamentos no interior</u>	14
2.5.2. <u>Cálculo das tensões dos pontos no interior</u>	14
3. FORMULAÇÃO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL.....	16
3.1. <u>Discretização do contorno</u>	16
3.1.1. <u>Representação de geometria e funções</u>	17
3.1.2. <u>Elementos degenerados</u>	17
3.2. <u>Equação integral de contorno discretizada</u>	18
3.3. <u>Formulação matricial</u>	19
3.4. <u>Transformação de coordenadas</u>	21
3.5. <u>Integração numérica</u>	23
3.6. <u>Formação do sistema de equações</u>	23
3.7. <u>Cálculo dos deslocamentos e tensões no interior</u>	26
4. PONTO SINGULAR FICTÍCIO E PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	28
4.1. <u>Introdução</u>	28
4.2. <u>Determinação do ponto fictício</u>	29

4.2.1. <u>Caso de elementos planos</u>	29
4.2.2. <u>Caso de elementos cilíndricos</u>	30
4.3. <u>Programa computacional</u>	33
4.3.1. <u>Dados do programa</u>	33
4.3.2. <u>Resolução computacional do problema</u>	34
4.3.3. <u>Estruturação do programa - Fluxograma</u>	35
5. EXEMPLOS E AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS.....	36
5.1. <u>Introdução</u>	36
5.2. <u>Cubo unitário</u>	36
5.2.1. <u>Resultados comparados para os diferentes valores de "d"</u>	39
5.2.2. <u>Avaliação dos resultados</u>	39
5.2.3. <u>Resultados comparados para diferentes esquemas de integração</u>	46
5.3. <u>Viga engastada</u>	46
5.3.1. <u>Discretização</u>	50
5.3.2. <u>Resultados</u>	51
5.4. <u>Cilindro ôco de paredes espessas sujeito a força de rotação</u>	52
5.4.1. <u>Introdução</u>	52
5.4.2. <u>Dados numéricos</u>	52
5.4.3. <u>Discretização adotada</u>	54
5.4.4. <u>Resultados obtidos</u>	54
5.4.5. <u>Avaliação dos resultados</u>	54
6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	56
APÊNDICE A - Pontos de integração para quadratura Gaussiana.....	58
BIBLIOGRAFIA.....	59

1. INTRODUÇÃO

A resolução de problemas de engenharia nos últimos anos tem experimentado grandes progressos, e, os métodos numéricos sem dúvida alguma possuem uma grande participação nestes avanços. Com o desenvolvimento de sistemas computacionais de grande porte, os métodos numéricos evoluíram a tal ponto que conseguem resolver problemas os quais, até então, pareciam de soluções inalcançáveis.

O método dos elementos de contorno é um destes métodos numéricos, e, vem se afirmando como uma alternativa eficiente para a solução de problemas de engenharia. Ele combina a versatilidade das funções de interpolação do já consagrado método dos elementos finitos com a interessante redução das incógnitas do problema ao contorno, o que dá origem a redução de uma dimensão do problema. Isto leva a menores sistemas de equações e um menor número de dados se faz necessário para a resolução do problema. Contudo, convém ressaltar que para o uso do método é sempre conveniente ter uma solução fundamental da equação diferencial do problema, a qual nem sempre é fácil de ser encontrada, e, principalmente manipulada computacionalmente. Esta é, portanto, uma das maiores desvantagens do método dos elementos de contorno.

O primeiro trabalho utilizando o método na elasticidade tridimensional foi o apresentado por CRUSE⁽⁹⁾ em 1969.

Ainda CRUSE apresentou mais trabalhos de 1973 a 1974, sobre elasticidade em três dimensões^(7, 8).

Surgiu em 1975 o importante trabalho de LACHAT⁽¹³⁾, que deu ao método um grande respaldo teórico-prático.

Sobre a formulação do método há também o trabalho de BREBBIA⁽²⁾, que foi o primeiro a mostrar o método como uma técnica de resíduos ponderados.

Trabalhos de RIZZO, SHIPPY e STIPPES^(18,21) também sobre o assunto com consideração de forças de corpo e temperatu-

ra foram publicados em 1977.

ALARCON e PARIS⁽¹⁾ e CHAUDONNERET⁽⁶⁾ estudaram o problema de descontinuidades das soluções fundamentais (1979).

MELAMED⁽¹⁵⁾ estudou o método para problemas de campo em 1981 e SCHEER⁽¹⁹⁾ para problemas da elasticidade linear tri-dimensional em 1982, sendo os primeiros trabalhos com o tema feitos no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.

A característica principal do método é a de resolver problemas que envolvem o domínio do corpo, através da solução duma equação integral somente para o contorno do mesmo corpo. Os valores no interior são obtidos através dos resultados calculados para o contorno do corpo, e para isto utiliza-se a chamada identidade de Somigliana.

No presente trabalho apresenta-se a formulação teórica para o caso da elasticidade linear isotrópica tridimensional, desenvolvida a partir do teorema da reciprocidade de Betti e da aplicação da solução fundamental de Kelvin. Também a consideração de forças de corpo para o caso de inércia rotacional é apresentada. Todas estas formulações são mostradas no capítulo dois.

No capítulo três é apresentada a formulação numérica computacional. São ainda mostrados os elementos do tipo quadrilátero linear (primeira ordem) e quadrático (segunda ordem), bem como elementos triangulares de mesmas ordens, que foram usados neste trabalho.

A utilização do ponto singular (ponto de aplicação da carga unitária) fora da zona de integração é mostrada no capítulo quatro, juntamente com um breve comentário do programa utilizado e da apresentação dum fluxograma do mesmo.

No capítulo cinco são apresentados os exemplos realizados para demonstrar características e qualidades, bem como comparações e problemas encontrados na formulação.

As conclusões e sugestões encontram-se no último capítulo.

2. FORMULAÇÃO TEÓRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

2.1. Introdução

A formulação teórica do método dos elementos de contorno é mostrada por BREBBIA⁽²⁾ para o caso da elasticidade linear isotrópica tridimensional. Existem também as dissertações de mestrado de SCHEER⁽¹⁹⁾ e CUROTTO⁽¹⁰⁾ que abordam o mesmo tema.

Neste capítulo apresenta-se a formulação para a elasticidade linear isotrópica tridimensional, e, duas hipóteses da teoria elástica linear serão consideradas:

- O corpo sólido obedece a lei de Hooke generalizada, apresentando portanto relações tensão-deformação lineares e isotropas
- A mudança de orientação do corpo devido aos deslocamentos é negligenciável. Consideram-se as relações de deformação-deslocamento lineares e equações de equilíbrio referidas a configuração indeformada do corpo (caso das pequenas deformações).

2.2. Relações básicas da elasticidade linear isotrópica

Apresenta-se neste item as equações básicas da teoria da elasticidade.

Equações de equilíbrio (Navier):

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.a)$$

Equações constitutivas (Lei de Hooke generalizada):

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.2.b)$$

Relações de deformações deslocamentos:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2.c)$$

Condições de contorno:

$$S = S_1 + S_2 = (\text{contorno total})$$

- contorno com forças de superfície prescritas (S_1)

$$t = \bar{t}_i \text{ em } S_1 \quad (2.2.d)$$

- contorno com deslocamentos prescritos (S_2)

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } S_2 \quad (2.2.e)$$

sendo

$$i, j = 1, 2, 3$$

σ_{ij} = tensor de tensões

b_i = força de corpo (ou de volume) na direção i

ϵ_{ij} = tensor de deformações

δ_{ij} = delta de Kronecker

μ e λ = constantes de Lamé: $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

(ν = coeficiente de Poisson e, E = módulo de elasticidade longitudinal).

t_i = força de superfície: componente na direção i

= $\sigma_{ij} n_j$, com n_j sendo a componente da normal na direção j

\bar{t}_i = valor prescrito da força de superfície na direção i

u_i = deslocamento: componente da direção i

\bar{u}_i = valor prescrito do deslocamento na direção i .

2.3. Obtenção da equação integral do contorno

A equação integral do método obtém-se a partir do teorema da reciprocidade de Betti ou, através do princípio dos trabalhos virtuais e método dos resíduos ponderados⁽²⁾. A equação resultante é a identidade de Somigliana para deslocamentos no interior dum corpo⁽¹⁴⁾.

2.3.1. Identidade de Somigliana e as soluções fundamentais

Seja um corpo elástico linear submetido a um sistema de forças de volume b_j e de superfície t_j , as quais correspondem a uma solução de deslocamentos u_j ; e seja o mesmo corpo sob um outro sistema b_j^* , t_j^* de forças de volume e de superfície, cuja solução em deslocamentos é u_j^* . De acordo com o teorema da reciprocidade de Betti⁽¹⁹⁾ tem-se:

$$\int_V b_j u_j^* dV + \int_S t_j u_j^* dS = \int_V b_j^* u_j dV + \int_S t_j^* u_j dS \quad (2.3.1.a)$$

onde foram assumidas as hipóteses de aplicabilidade do teorema da unicidade de Kirchhoff.

Aplica-se agora o teorema de Betti a um corpo elástico infinito, estabelecendo para o segundo estado de cargas uma única força unitária, concentrada num ponto ℓ e atuante na direção do eixo x_i . A solução do equilíbrio elástico deste último problema é conhecida como solução fundamental de Kelvin.

Por constituir esta carga concentrada uma descontinuidade inadmissível na mecânica do contínuo, diversas técnicas matemáticas podem ser adotadas para contornar este inconveniente.

Por exemplo, pode-se empregar a representação da carga concentrada através das funções de singularidade, que permitem tratar estes casos como se a função fosse realmente contínua. Em forma explícita

$$b_{ij}^* = \delta_{ij} \Delta^\ell \quad (2.3.1.b)$$

onde Δ^ℓ é a função delta de Dirac com as propriedades seguintes:

- a) $\Delta^\ell = 0$; para qualquer $\ell' \neq \ell$
- b) $\int_V \Delta^\ell dV = 1$
- c) $\int_V A \Delta^\ell dV = A$; para $A = \text{constante}$
- d) $\int_V \Delta^\ell \psi(x_i) dV = \psi^\ell$; para $\psi^\ell = \text{função contínua}$ (2.3.1.c)

nas quais V é um domínio arbitrário que contém ℓ e, consequentemente com as propriedades acima, b_{ij}^* é agora uma distribuição de forças de volume, equivalente à carga concentrada atuante na direção x_i .

O conjunto de equações de equilíbrio para a carga unitária aplicada independentemente nas três direções coordenadas, toma a forma

$$(\sigma_{jk,k}^*)_{,i} + \delta_{ij} \Delta^\ell = 0; \text{ para qualquer } \ell' \neq \ell \quad (2.3.1.d)$$

Substituindo (2.3.1.b) em (2.3.1.a) fica:

$$\int_V b_j u_{ij}^* dV + \int_S t_j u_{ij}^* dS = \int_V \delta_{ij} \Delta^\ell u_j dV + \int_S t_{ij}^* u_j dS \quad (2.3.1.e)$$

sendo agora u_{ij}^* e t_{ij}^* os deslocamentos e forças de superfície em equilíbrio compatível com as cargas $\delta_{ij} \Delta^\ell$, segundo a solução fundamental Kelvin.

Aplicando a propriedade d) das equações (2.3.1.c) à primeira integral do segundo membro de (2.3.1.e) tem-se:

$$\int_V \delta_{ij} \Delta^{\ell} u_j dV = \int_V \Delta^{\ell} u_i dV = u_i^{\ell} \quad (2.3.1.f)$$

Substituindo este resultado em (2.3.1.e) resulta finalmente:

$$u_i^{\ell} + \int_S u_j t_{ij}^* dS = \int_S t_j u_{ij}^* dS + \int_V b_j u_{ij}^* dV \quad (2.3.1.g)$$

a qual é conhecida como a identidade de Somigliana para deslocamentos no interior dum corpo, onde:

u_i^{ℓ} = deslocamento do ponto ℓ na direção i

u_j = deslocamento dum ponto de contorno na direção j

t_j = força de superfície dum ponto de contorno na direção j

u_{ij}^* = tensor de deslocamentos da solução fundamental de Kelvin: deslocamento na direção j devido a carga unitária concentrada num ponto do domínio do corpo na direção i (deslocamento no contorno ou interior)

t_{ij}^* = tensor das forças de superfície da solução Kelvin: força de superfície na direção j devido a carga unitária concentrada num ponto do domínio do corpo na direção i .

Para o caso elástico linear tridimensional as soluções fundamentais tem como expressão:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16 \pi G (1 - \nu) r} \{ (3 - 4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \}$$

$$t_{ij}^* = \frac{-1}{8 \pi (1 - \nu) r^2} \{ n_k r_{,k} [(1 - 2\nu) \delta_{ij} + 3 r_{,i} r_{,j}] -$$

$$+ (1 - 2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \} \quad (2.3.1.h)$$

sendo:

\vec{n} = normal a superfície do corpo

n_i = cossenos diretores (figura 2.3.1)

r = distância do ponto de aplicação da carga unitária ao ponto considerado

G = módulo de elasticidade transversal

ν = módulo de Poisson

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

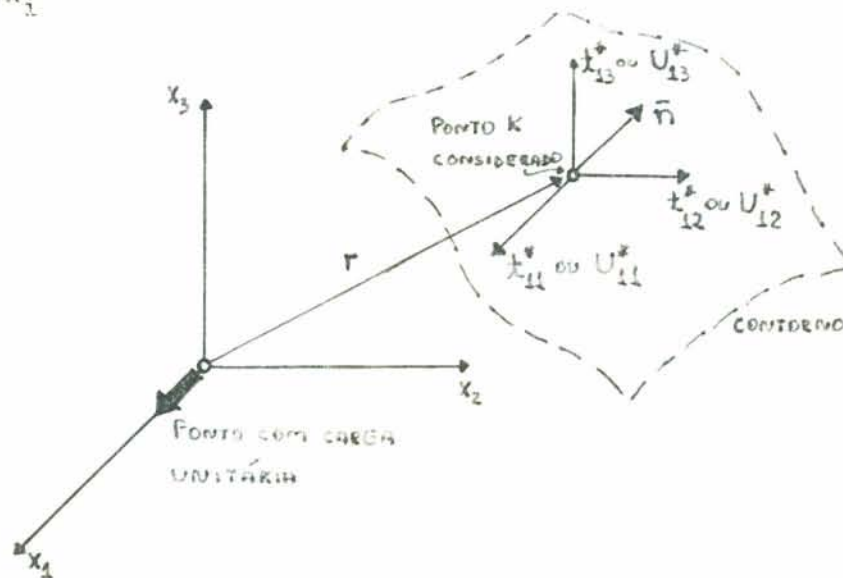


Figura 2.3.1 - Forças de superfície ou deslocamentos no ponto k e na direção 1,2,3 devido à carga unitária na direção $i = 1$.

2.3.2. Particularização da equação para o contorno

A equação (2.3.1.g) é válida para o interior (domínio). Para formular o problema como uma técnica de contorno é preciso restringir a equação somente para os pontos no contorno do sólido.

E, de acordo com BREBBIA⁽²⁾, a expressão para o método dos elementos de contorno para elasticidade linear isotrópica tridimensional é:

$$c^{\ell} u_i^{\ell} + \int_S u_j t_{ij}^* dS = \int_S t_j u_{ij}^* dS + \int_V b_j u_{ij}^* dV \quad (2.3.2.a)$$

Para a avaliação dos coeficientes c^{ℓ} considera-se a possibilidade de movimento de corpo rígido sem a ação de carga, ou seja: ($t_j = b_j = 0$), e tem-se que:

$$u_j = u_i^{\ell} = \text{constante} = K \quad (2.3.2.b)$$

e, substituindo-se a equação (2.3.2.b) em (2.3.2.a) resulta:

$$c^{\ell} K + K \int_S t_{ij}^* dS = 0 \quad (2.3.2.c)$$

E, conclui-se que:

$$c^{\ell} = c_{ij} = - \int_S t_{ij}^* dS \quad (2.3.2.d)$$

Está assim concluída a formulação do método dos elementos de contorno para a elasticidade linear isotrópica tridimensional.

Resta ainda na equação (2.3.1.a) uma integral de volume referente às forças de corpo. A seguir desenvolve-se um processo para reduzir a integral de domínio para uma integral de contorno, num caso particular de forças de corpo.

2.4. Transformação da integral de volume para superfície

2.4.1. Introdução

A avaliação da integral de volume requer que o domínio do corpo em estudo seja dividido em células de integração. Para muitos problemas, tem-se conseqüentemente que integrar numericamente sobre todo o domínio do corpo. SCHEER⁽¹⁹⁾ utiliza-se deste processo; contudo, nota-se um grande aumento na preparação dos dados necessários, no tempo de execução, e o método dos elementos de contorno torna-se menos competitivo

com relação aos outros métodos.

Entretanto, DANSON⁽¹¹⁾ mostra que para certos tipos de forças de corpo a integral de domínio pode ser transformada para uma integral de contorno, ou integrais de contorno, as quais, podem ser calculadas ao mesmo tempo que as integrais de contorno, envolvendo os deslocamentos e forças de superfície.

CUROTTO⁽¹⁰⁾ aplica este raciocínio para o caso de consideração de efeitos de temperatura. Na seção seguinte, desenvolve-se a formulação para o caso de rotação inercial.

2.4.2. Rotação inercial

Considera-se um corpo de densidade de massa uniforme (ρ) girando sobre um eixo com velocidade angular ω_i . Pode-se considerar, sem perda de generalidade, o eixo de rotação passando através da origem de nosso sistema de coordenadas. Assim a aceleração num ponto de coordenadas y_i é dada numa notação vetorial como sendo:

$$\underline{f} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y}) \quad (2.4.2.a)$$

onde \times indica o produto vetorial.

Pelo princípio de D'Alembert pode-se considerar o problema dinâmico como estático com uma força de volume \underline{b} igual ao produto da aceleração pela massa específica.

$$\underline{b} = -\rho \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{y}) \quad (2.4.2.b)$$

e, em notação indicial tem-se:

$$b_i(y) = -\rho c_{ijk} \omega_j c_{klm} \omega_l y_m \quad (2.4.2.c)$$

onde c_{klm} é o tensor de permutação = $c_{123} = c_{312} = c_{231} = 1$
 $c_{132} = c_{213} = c_{321} = -1$
 resto = 0

Definindo:

$$M_{im} = -\rho c_{ijk} \omega_j c_{klm} \omega_l \quad (2.4.2.d)$$

Mostra-se facilmente que ⁽¹¹⁾:

$$|M_{ij}| = \rho \begin{vmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & -\omega_1 \omega_2 & -\omega_3 \omega_1 \\ -\omega_1 \omega_2 & \omega_3^2 + \omega_1^2 & -\omega_2 \omega_3 \\ -\omega_3 \omega_1 & -\omega_2 \omega_3 & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{vmatrix} \quad (2.4.2.e)$$

e, a equação (2.4.2.c) torna-se:

$$b_i(y) = M_{ij} y_j \quad (2.4.2.f)$$

É importante observar que para o caso em que se tem somente velocidade angular atuando em um dos eixos, a expressão (2.4.2.e) reduz-se significativamente.

2.4.3. Transformação para uma integral de contorno

Adotando-se uma notação mais conveniente pode-se escrever a identidade de Somigliana (equação (2.3.1.g)) novamente da seguinte forma:

$$u_k(x) = \int_S u_{ki}^*(x,y) t_i(y) dS_y - \int_S t_{ki}^*(x,y) u_i(y) dS_y + \\ + \int_V u_{ki}^*(x,y) b_i(y) dV_y \quad (2.4.3.a)$$

onde:

$u_k(x)$ = deslocamento num ponto interno x na direção k

$u_{ki}^*(x,y)$ = deslocamento na direção i em y devido a uma carga concentrada unitária na direção k em x

$t_{ki}^*(x,y)$ = força de superfície na direção i em y devido a uma carga concentrada unitária na direção k em x

$t_i(y)$ = força de superfície em y

$u_i(y)$ = deslocamento em y

$b_i (y)$ = intensidade de força em y
 S = representa o contorno do corpo
 V = representa o volume do corpo

O subíndice y sobre dS_y e dV_y serve para indicar que as coordenadas y_j e não x_j são as variáveis integrais.

Define-se a integral de domínio em (2.4.3.a) como sendo:

$$B_k (x,y) = \int_V u_{ki}^* (x,y) b_i (y) dV_y \quad (2.4.3.b)$$

e, o nosso objetivo passa a ser o de expressar $B_k (x,y)$ como integral de contorno, ao invés duma integral de volume.

Substituindo a equação (2.4.2.f) em (2.4.3.b) obtêm-se:

$$B_k (x,y) = \int_V u_{ki}^* (x,y) M_{ij} y_j dV_y \quad (2.4.3.c)$$

mas, sabe-se que a solução fundamental é:

$$u_{ki}^* (x,y) = \frac{1 + \nu}{8 \pi E (1-\nu) r} \{ (3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \} \quad (2.4.3.d)$$

onde r é a distância entre o ponto x e o ponto y .

Substituindo-se a equação (2.4.3.d) em (2.4.3.c) tem-se:

$$B_k (x,y) = \frac{1 + \nu}{8 \pi E (1-\nu)} M_{ij} \int_V \left\{ \frac{(3-4\nu) \delta_{ki}}{r} + \frac{r_{,k} r_{,i}}{r} \right\} y_j dV_y \quad (2.4.3.e)$$

mas, sabe-se que⁽¹⁰⁾:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (r_{,k}) = \frac{(\delta_{ki} - r_{,k} r_{,i})}{r} \quad (2.4.3.f)$$

e, a equação (2.4.3.e) pode ser escrita como:

$$B_k(x,y) = \frac{1+\nu}{8\mu E(1-\nu)} M_{ij} \int_V \left\{ \frac{4(1-\nu)}{r} \delta_{ki} - \frac{\partial r_{,k}}{\partial y_i} \right\} y_j dV \quad (2.4.3.g)$$

contudo⁽¹⁰⁾:

$$r_{,ii} = \frac{2}{r} \quad (2.4.3.h)$$

e, a equação (2.4.3.g) torna-se:

$$B_k(x,y) = \frac{1+\nu}{4\mu E} M_{ij} \int_V \left\{ \delta_{ki} r_{,ii} - \frac{r_{,ki}}{2(1-\nu)} \right\} y_j dV \quad (2.4.3.i)$$

Fazendo-se um artifício matemático pode-se escrever a equação (2.4.3.i) na seguinte forma:

$$B_k(x,y) = \frac{1+\nu}{4\mu E} M_{ij} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} (y_j r_{,i}) - r_{,i} y_{j,i} - \frac{1}{2(1-\nu)} \right.$$

$$\left. \left| \frac{\partial}{\partial y_i} (y_j r_{,k}) - r_{,k} y_{j,i} \right| \right\} dV \quad (2.4.3.j)$$

a qual utilizando o teorema de Gauss e aproveitando a simetria de M_{ij} torna-se:

$$B_k(x,y) = \frac{1+\nu}{4\mu E} \int_S \left\{ n_m r_{,m} M_{kj} y_j - r M_{km} n_m + \frac{1}{2(1-\nu)} \right.$$

$$\left. \left(M_{mm} r n_k - n_m M_{ms} y_s r_{,k} \right) \right\} dS \quad (2.4.3.k)$$

e numa forma mais interessante seria:

$$B_k(x,y) = \int_S B_k dS \quad (2.4.3.l)$$

esta é a requerida equação integral de contorno para o caso de forças de corpo de inércia rotacional.

Substituindo a equação (2.4.3.l) na integral de volume da equação (2.3.2.a) e, adotando-se a notação mais conveniente, obtém-se a equação do método dos elementos de contorno, com somente integrais de contorno, a qual é:

$$c^l u_i^l + \int_S u_j t_{ij}^* dS = \int_S t_j u_{ij}^* + \int_S B_k dS \quad (2.4.3.m)$$

2.5. Obtenção de deslocamentos e tensões no interior

Tendo-se obtido os resultados das incógnitas no contorno, é possível através da identidade de Somigliana (2.4.2.a), calcular-se os deslocamentos de pontos pertencentes ao interior do sólido e, em seguida as tensões nestes pontos.

2.5.1. Cálculo dos deslocamentos no interior

Os deslocamentos dum ponto l no interior são dados pela seguinte expressão:

$$u_i^l = - \int_S u_j t_{ij}^* dS + \int_S t_j u_{ij}^* dS + B_k(x,y) \quad (2.5.1.a)$$

sendo que $B_k(x,y)$ está definido na equação (2.4.3.l) para o caso particular de inércia rotacional. Observe-se que na equação (2.5.1.a) o ponto de aplicação da carga concentrada unitária (ponto l) pertence ao interior do corpo.

2.5.2. Cálculo das tensões dos pontos no interior

A partir das equações constitutivas (2.2.b) e das

relações de formações-deslocamentos (2.2.c) obtêm-se:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}^{\ell} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j}^{\ell} + u_{j,i}^{\ell}) \quad (2.5.2.a)$$

onde o superíndice ℓ indica o ponto ℓ no interior do corpo. Diferenciando a equação (2.5.1.a) e substituindo-se na equação (2.5.2.a), tem-se as tensões num ponto interior ℓ , dadas por:

$$\sigma_{ij}^{\ell} = - \int_S u_k S_{ijk} dS + \int_S t_k D_{ijk} dS + \int_S S_{ij}^*(x,y) dSy \quad (2.5.2.b)$$

onde:

$$D_{ijk} = \frac{1}{8 \pi (1-\nu) r^2} \{ (1-2\nu) (r_{,i} \delta_{jk} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,k} \delta_{ij}) + 3 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \quad (2.5.2.c)$$

$$S_{ijk} = \frac{1}{4 \pi (1-\nu) r^3} \{ 3n_m r_{,m} [(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (r_{,i} \delta_{jk} + r_{,j} \delta_{ik}) - 5 r_{,i} r_{,j} r_{,k}] + 3 \nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (3 n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \} \quad (2.5.2.d)$$

$$S_{ij}^* = \frac{1}{4 \pi} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \left\{ n_m r_{,m} \left(r_{,s} M_{sq} \frac{y_q}{r} - \frac{M_{ss}}{2(1-\nu)} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} n_m M_{ms} \frac{y_s}{r} + r_{,s} M_{sm} n_m \right\} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left\{ n_m r_{,m} \left(r_{,i} M_{jm} n_m + r_{,j} M_{im} n_m + \frac{1}{1-\nu} (n_m M_{ms} \frac{y_s}{r} |\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}| + - \frac{1}{2} M_{mm} |n_i r_{,j} + n_j r_{,i}|) \right) \right\} \right\} \quad (2.5.2.e)$$

Observe-se que:

- o produto $n_m r_{,m} = \partial r / \partial n$ é a derivada direcional;
- $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$;
- n_i = componente da normal na direção i (cosseno diretor).

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

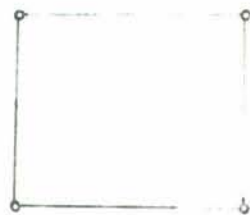
3.1. Discretização do contorno

A representação do contorno do corpo sólido em estudo é feita com a utilização dos chamados elementos de contorno.

CUROTTO⁽¹⁰⁾ usa os elementos isoparamétricos triangulares planos de variação linear em seu trabalho. SCHEER⁽¹⁹⁾ faz uso dos elementos quadriláteros planos de variação linear.

No presente trabalho utiliza-se quatro tipos de elementos de contorno, sendo:

- dois de quatro lados (quadrilátero) e,



- dois de três lados (triangular)



Observe-se em ambos os casos a utilização de variação linear (primeira ordem) e quadrática (segunda ordem). Esta variação das funções de interpolação (que representam as

funções de deslocamento e força de superfície) caracterizam o elemento utilizado.

Note-se que para utilizar os elementos de contorno, é necessário a passagem do sistema de referência de coordenadas globais tridimensional para um sistema de coordenadas de duas dimensões, sobre a superfície do elemento em si (coordenadas intrínsecas adimensionais), o que caracteriza a redução duma dimensão do problema em estudo.

3.1.1. Representação de geometria e funções

As funções de interpolação ou de forma utilizadas⁽⁴⁾ para representar a geometria e as funções que se fazem presentes no problema em estudo, são no caso dos elementos retangulares as mesmas da família Serendipity utilizadas no método dos elementos finitos.

Para os elementos triangulares faz-se uma explanação no parágrafo seguinte.

3.1.2. Elementos degenerados

Estes elementos⁽²²⁾ utiliza-se na representação de superfícies mais complicadas. São definidos de maneira que os nós dum de seus lados sejam coincidentes, conforme mostra a figura 3.1.2.

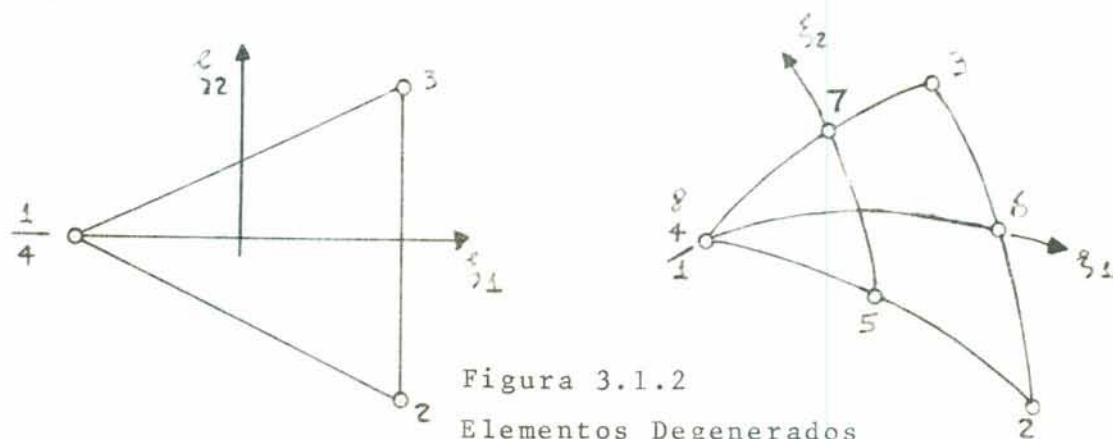


Figura 3.1.2
Elementos Degenerados

Salienta-se que nenhuma programação especial é necessária para se tratar de elementos triangulares; as funções de interpolação, pontos de integração, etc., continuam sendo os

mesmos, necessitando-se apenas observar que:

- para elemento linear, os nós 1 e 4 possuem as mesmas coordenadas globais;
- para o caso de elemento quadrático, os nós 1, 4 e 8 é que as tem iguais.

3.2. Equação integral de contorno discretizada

Reescrevendo a equação do método dos elementos de contorno (equação (2.4.3.m)) tem-se:

$$c^{\ell} u_i^{\ell} + \int_S u_j t_{ij}^* dS = \int_S t_j u_{ij}^* dS + \int_S B_k dS \quad (3.2.a)$$

Considerando o contorno do sólido discretizado em elementos, para uma carga concentrada unitária atuando no ponto n e na direção i , tem-se para a expressão (3.2.a)

$$c_{ij}^n u_i^n + \sum_{\ell=1}^m \int_{S_{\ell}} u_j t_{ij}^* dS = \sum_{\ell=1}^m \int_{S_{\ell}} t_j u_{ij}^* dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S_{\ell}} B_k dS \quad (3.2.b)$$

onde:

$\ell = 1$, número de elementos (m)

S_{ℓ} = área do elemento

É possível tomar a equação (3.2.b) e representar as funções (deslocamentos e forças de superfícies) através de funções de interpolação, obtendo-se a equação de contorno discretizada para o corpo

$$c_{ij}^n u_i^n + \sum_{\ell=1}^m \int_{S_{\ell}} u_j^N \phi^N t_{ij}^* dS = \sum_{\ell=1}^m \int_{S_{\ell}} t_j^N \phi^N u_{ij}^* dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S_{\ell}} B_k dS \quad (3.2.c)$$

Os índices na equação acima possuem a seguinte variação:

$i, j, k = 1, 2, 3$ (espaço tridimensional)

$N = 1$, número de pontos nodais do elemento ℓ

$\ell = 1$, número de elementos (total = m)

$n = 1$, número de nós do contorno

Com o índice n percorrendo todos os pontos nodais do corpo, teremos então para cada direção i dum ponto nodal uma equação dada por (3.2.c). Há portanto a formação dum sistema de equações lineares simultâneas.

3.3. Formulação matricial

As equações do método dos elementos de contorno podem ser representadas matricialmente. Adotando-se as seguintes definições:

$$\tilde{u}^n = \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{Bmatrix} = \text{vetor de deslocamentos do ponto } n \text{ com componentes nas direções } x_1, x_2, x_3.$$

c^n = matriz dos coeficientes c_{ij} dos deslocamentos para o ponto n .

\tilde{u} = vetor deslocamentos em ponto arbitrário do contorno S .

$$\tilde{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \text{forças de superfície em ponto arbitrário do contorno } S.$$

$$\underline{\underline{b}} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \text{forças de corpo em um ponto arbitrário do contorno } S.$$

$$\underline{\underline{t}}^* = \begin{Bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* & t_{13}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* & t_{23}^* \\ t_{31}^* & t_{32}^* & t_{33}^* \end{Bmatrix} = \text{matriz da solução fundamental de Kelvin em forças de superfície}$$

$$\underline{\underline{u}}^* = \begin{Bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{Bmatrix} = \text{matriz da solução fundamental de Kelvin em deslocamentos}$$

(3.3.a)

tem-se a equação (3.2.a) na forma matricial seguinte:

$$\underline{\underline{c}}^n \underline{\underline{u}}^n + \int_S \underline{\underline{t}}^* \underline{\underline{u}} \, dS = \int_S \underline{\underline{u}}^* \underline{\underline{t}} \, dS + \int_S \underline{\underline{b}} \, dS \quad (3.3.b)$$

Com a superfície de corpo discretizada em elementos de contorno pode-se montar a equação (3.2.b) matricialmente:

$$\underline{\underline{c}}^n \underline{\underline{u}}^n + \sum_{\ell=1}^m \int_{S_\ell} \underline{\underline{t}}^* \underline{\underline{u}} \, dS = \sum_{\ell=1}^m \int_{S_\ell} \underline{\underline{u}}^* \underline{\underline{t}} \, dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S_\ell} \underline{\underline{b}} \, dS \quad (3.3.c)$$

Definindo-se um vetor de funções de interpolação

$$\underline{\underline{\phi}}^T = \left| \phi^1 \quad \phi^2 \quad \dots \quad \phi^N \right| = \text{vetor linha das funções de interpolação nos nós dum elemento}$$

e os vetores

$$\underline{\underline{U}}^N \text{ e } \underline{\underline{T}}^N = \text{deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais do elemento considerado (são incógnitas)}$$

Finalmente obtêm-se a equação integral do contorno discretizado na forma matricial:

$$\tilde{c}^n \tilde{u}^n + \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} \tilde{t}^* |\tilde{\phi}^T \tilde{U}^N| dS = \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} \tilde{u}^* |\tilde{\phi}^T \tilde{T}^N| dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} \tilde{b} dS \quad (3.3.d)$$

3.4. Transformação de coordenadas

As funções de interpolação expressas em termos de coordenadas intrínsecas (ξ_i), necessitam duma transformação do sistema intrínseco original para um sistema de eixos globais de referência (x_i) para que se possa resolver numericamente as integrais.

Define-se na figura 3.4 os sistemas, e, então para a transformação do sistema x_i para um intrínseco implica:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = |J| \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \quad (3.4.a)$$

onde $|J|$ é o Jacobiano da transformação.

Necessita-se da relação inversa que é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = |J|^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (3.4.b)$$

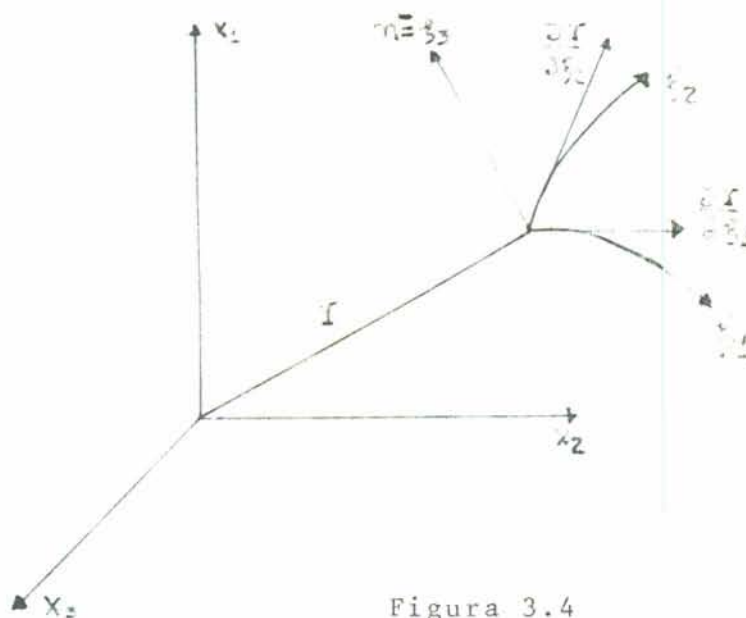


Figura 3.4

Definidas as relações e tomando r no lugar de u , tem-se:

$$dS = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.4.c)$$

onde:

$$|G| = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2} \quad (3.4.d)$$

e:

$$g_1 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right)$$

$$g_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \quad (3.4.e)$$

$$g_3 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right)$$

Estas relações obtidas são utilizadas na avaliação numérica das integrais envolvidas na equação integral de contorno.

3.5. Integração numérica

Aplicando a integração numérica de Gauss (quadratura-gaussiana - Apêndice A) as equações (3.3.d) ficam:

$$\tilde{c}^n \tilde{u}^n + \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^p |G| w_k (\tilde{t}^* \tilde{\phi}^T)_k \tilde{U}^N = \quad (3.5.a)$$

$$= \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^p |G| w_k (\tilde{u}^* \tilde{\phi}^T)_k \tilde{T}^N + \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^p |G| w_k \tilde{b}$$

onde:

$k = 1$ até número de pontos de integração (total = p)

w_k = fator peso

$(\tilde{u}^* \tilde{\phi}^T)_k, (\tilde{t}^* \tilde{\phi}^T)_k$ = valores nos pontos de integração

Os termos integrados numericamente para o nó n (equação (3.5.a)), relacionam-no com os demais nós do elemento sobre o qual a integração é feita, e no desenrolar do processo com todos os elementos de contorno.

3.6. Formação do sistema de equações

Como visto no item 3.3, para cada direção num ponto nodal onde há aplicação da carga concentrada unitária, obtém-se uma equação. É, pois, formado um sistema com um número de equações igual a três vezes o número de nós do contorno.

Assim, com (3.5.a) pode-se obter um conjunto de três equações para cada nó, que podem ser escritas como:

$$\tilde{c}^n \tilde{u}^n + \begin{vmatrix} \hat{h}_{n1} & \hat{h}_{n2} & \cdots & \hat{h}_{nn} & \cdots & \hat{h}_{nN} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ \vdots \\ \tilde{u}^N \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{g}_{n1} & \tilde{g}_{n2} & \cdots & \tilde{g}_{nn} & \cdots & \tilde{g}_{nT} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}^1 \\ \tilde{t}^2 \\ \vdots \\ \tilde{t}^T \end{bmatrix} + \tilde{b}^n \quad (3.6.a)$$

onde:

\tilde{u}^j e \tilde{t}^j são os deslocamentos e forças de superfície incôgnitas ou prescritos nos nós do corpo.

\tilde{b}^n a contribuição das forças de corpo no nó n

\hat{h}_{ij} e \tilde{g}_{ij} os coeficientes de interação que relacionam os deslocamentos e forças de superfície do nó com todos os outros nós do contorno

N é o número total de nós do contorno

T é o número total de forças de superfície aplicadas

Fazendo as submatrizes diagonais formadas por:

$$\tilde{h}_{nn} = \hat{h}_{nn} + \tilde{c}^n \quad (3.6.b)$$

pode-se escrever o sistema matricial completo (mas não ordenado) de equações formado como segue:

$$\begin{vmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} & \cdots & \tilde{h}_{1N} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} & \cdots & \tilde{h}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{h}_{N1} & \tilde{h}_{N2} & \cdots & \tilde{h}_{NN} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ \vdots \\ \tilde{u}^N \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \cdots & \tilde{g}_{1T} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \cdots & \tilde{g}_{2T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{g}_{N1} & \tilde{g}_{N2} & \cdots & \tilde{g}_{NT} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}^1 \\ \tilde{t}^2 \\ \vdots \\ \tilde{t}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}^1 \\ \tilde{b}^2 \\ \vdots \\ \tilde{b}^N \end{bmatrix} \quad (3.6.c)$$

ou, compactamente,

$$h_{ij} u_j = g_{ik} t_k + b_i, \text{ com } i, j = 1 \text{ a } 3 \text{ N} \\ k = 1 \text{ a } 3 \text{ T}$$

O conjunto pode ser expresso como:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{T} + \underline{B} \quad (3.6.d)$$

onde:

\underline{U} e \underline{T} são os vetores dos deslocamentos e das forças de superfície respectivamente (dimensões: $3N \times 1$ e $3T \times 1$)

\underline{B} vetor dos valores das contribuições das forças de corpo (dimensão: $3N \times 1$)

\underline{H} matriz dos coeficientes de deslocamentos (dimensões: $3N \times 3N$)

\underline{G} matriz dos coeficientes de forças de superfície (dimensões: $3N \times 3T$).

O cálculo dos coeficientes constantes c_{ij} (matriz \underline{c}^n), que são os coeficientes das matrizes-diagonais da matriz \underline{H} , é realizado indiretamente, como exposto em 2.3.3, pela consideração de movimento de corpo rígido. A equação matricial (3.6.d) resulta:

$$\underline{H} \underline{I} = \underline{O} \quad (3.6.e)$$

onde:

\underline{I} = vetor unidade

\underline{O} = vetor nulo

Assim, os termos das matrizes-diagonais de \underline{H} serão a soma dos termos de \underline{H} não pertencentes as matrizes-diagonais com o sinal contrário, como segue:

$$h_{ij} u_j = 0 \rightarrow h_{ii} = - \sum_{i \neq j} h_{ij} \quad (3.6.f)$$

De acordo com a formulação teórica do método, segundo as condições de contorno em S_1 e S_2 , para cada direção em um nó haverá um valor incógnito (deslocamento ou força de superfície) e um valor conhecido (deslocamento ou força de superfície).

Deve, pois, ser feita uma reordenação nas matrizes de maneira que as incógnitas se situem somente do lado esquerdo e os valores conhecidos passem a formar o vetor dos termos independentes do sistema ($A_{ij} X_j = C_i$).

Desta forma a equação matricial do contorno (3.6.d) torna-se:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{C} \quad (3.6.g)$$

sendo:

\underline{X} = vetor das incógnitas do sistema (dimensão $3N \times 1$)

\underline{A} = matriz quadrada cheia, não-simétrica, cujos valores dos coeficientes são h_{ij} ou g_{ij} correspondentes as incógnitas u_i ou t_i de cada uma das direções dos nós (dimensão: $3N \times 3N$)

\underline{C} = vetor que contém os valores prescritos de deslocamentos, u_i , ou de forças de superfície, t_i , multiplicados por h_{ij} ou g_{ij} respectivamente, mais a contribuição das forças de corpo.

A solução do sistema é pelo método de eliminação de Gauss e conduz aos $3N$ valores incógnitos de deslocamentos e forças de superfície.

3.7. Cálculo dos deslocamentos e tensões no interior

Após serem obtidos os valores das incógnitas do contorno, podem-se calcular valores internos de deslocamentos e tensões. Para isto são utilizadas as equações (2.5.1.a) e

(2.5.2.b), que para integração sobre elementos assumem as formas :

$$u^n = \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} \underline{t}^* (\underline{\phi}^T \underline{U}^N) dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} u^* (\underline{\phi}^T \underline{T}^N) dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} \underline{\phi}^T \underline{b} dS \quad (3.7.a)$$

$$\sigma_{ij} = - \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} (\underline{\phi}^T \underline{U}^N) S_{ijk} dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} (\underline{\phi}^T \underline{T}^N) D_{ijk} dS + \sum_{\ell=1}^m \int_{S\ell} \underline{\phi}^T S_{ij}^* dS \quad (3.7.b)$$

sendo que os termos D_{ijk} , S_{ijk} e S_{ij}^* foram definidos nas equações (2.5.2c, d, e) respectivamente.

A obtenção do valor no interior é feita avaliando as integrais sobre todos os elementos do contorno e somando a integral proveniente as forças de corpo ao resultado.

4. PONTO SINGULAR FICTÍCIO E PROGRAMA COMPUTACIONAL

4.1. Introdução

A formulação do método dos elementos de contorno para a elasticidade, envolve como foi visto na seção (2.3.1) uma solução fundamental que é expressa pelas equações (2.3.1.h).

Observa-se nestas equações a presença do termo:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_p}{r} \quad (4.1.a)$$

onde x_p é a coordenada do ponto singular (ponto de aplicação da carga unitária) na direção i e, x_i é a coordenada do ponto de integração na mesma direção i .

A introdução de (4.1.a) na equação (2.3.2.a) que é a equação do método dos elementos de contorno para elasticidade linear tridimensional, provoca o surgimento do termo $1/r^5$, o qual origina um erro quando $r \ll 1$, apesar de que, quando se utiliza integração numérica com quadratura Gaussiana r nunca assume valor zero.

Assim, procedimentos especiais são usados para realizar a integração quando o ponto singular coincide com um nó do elemento que está sendo integrado.

CUROTTO⁽¹⁰⁾ utiliza a integração exata para o caso do elemento triângulo linear e SCHEER⁽¹⁹⁾ desenvolve a formulação exata para o elemento quadrilátero linear, sendo ambos os trabalhos realizados para o caso tridimensional.

Contudo observam-se problemas fundamentais como:

- o desenvolvimento da integração exata depende da forma do elemento e exige considerações matemáticas complicadas mesmo para os casos simples apresentados.

- a dificuldade da utilização do processo para elementos ou com geometria curva e/ou orientação arbitrária no espaço.

PATTERSON e SHEIKH⁽¹⁷⁾ apresentam uma fórmula para o cálculo da posição dum ponto singular fictício (ponto singular fora da zona de integração) para o caso de elementos lineares e constantes em problemas bi-dimensionais.

PARTRIDGE⁽¹⁶⁾ apresenta uma formulação para determinar o ponto singular fictício para o caso de problemas tridimensionais.

4.2. Determinação do ponto fictício

O ponto singular fora da zona de integração, de tal modo que não coincida com um nó do elemento que está sendo integrado, é chamado de ponto fictício.

Considere-se que num determinado ponto "l" se encontram um certo número de elementos, tem-se então dois casos a considerar.

4.2.1. Caso de elementos planos

Cada elemento terá sua normal definida pelos 3 cossenos diretores.

Definindo:

$$\begin{aligned} a &= \sum \cos (n_i, x_1) \\ b &= \sum \cos (n_i, x_2) \\ c &= \sum \cos (n_i, x_3) \end{aligned} \tag{4.2.1.a}$$

como sendo a soma feita sobre os "i" elementos que encontram-se no ponto l, e escrevendo:

$$S = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{4.2.1.b}$$

a coordenada do ponto singular fictício ℓ' (x_1' , x_2' , x_3') será dada por:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + d \cdot \frac{a}{S} \\x_2' &= x_2 + d \cdot \frac{b}{S} \\x_3' &= x_3 + d \cdot \frac{c}{S}\end{aligned}\tag{4.2.1.c}$$

onde (x_1, x_2, x_3) são as coordenadas do ponto ℓ .

4.2.2. Caso de elementos cilíndricos

Suponha-se o ponto "L" dum certo elemento, que em coordenadas intrínsecas será definido como $L(\xi, \eta)$. A partir disto, podem-se determinar outros dois pontos que pertençam a este mesmo plano, os quais podem ser: $P(0, \eta)$ e $M(-\xi, \eta)$.

Em termos de coordenadas globais estes pontos podem ser obtidos com a expressão:

$$x_i = \sum_{N=1}^{NN} \phi^N x_i^N\tag{4.2.2.a}$$

onde:

x_i = coordenada na direção i dum ponto arbitrário no elemento

x_i^N = coordenada na direção i do ponto nodal N

ϕ^N = função de interpolação para geometria avaliada no ponto arbitrário

NN = número de nós do elemento

A partir de (4.2.2.a) tem-se as coordenadas globais que são definidas por:

$$M (x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$P (x''_1, x''_2, x''_3)$$

$$L (x'''_1, x'''_2, x'''_3)$$

A figura 4.2.2 mostra o caso geral dum elemento cilíndrico no espaço.

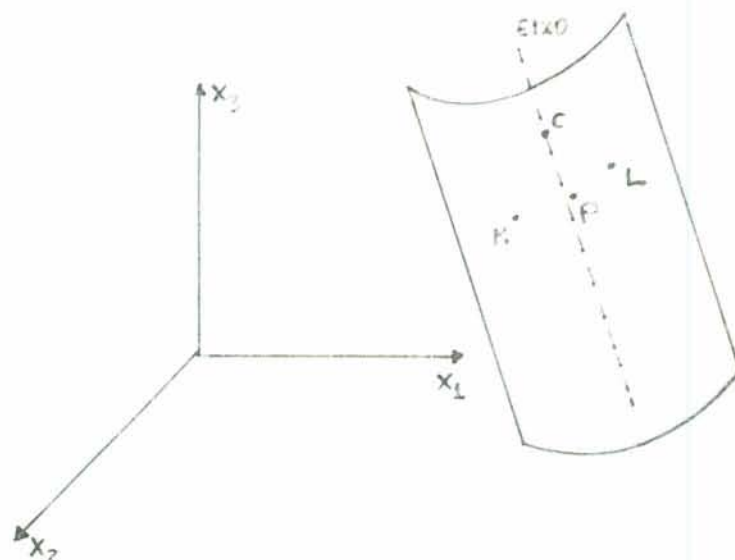


Figura 4.2.2 - Cilindro no espaço

O ponto "c" é o centro do cilindro e pertence ao mesmo plano dos pontos M, P e L. Suas coordenadas podem ser determinadas através do seguinte sistema de equações:

$$(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2 = R^2$$

$$(x''_1 - x_1)^2 + (x''_2 - x_2)^2 + (x''_3 - x_3)^2 = R^2 \quad (4.2.2.b)$$

$$(x'''_1 - x_1)^2 + (x'''_2 - x_2)^2 + (x'''_3 - x_3)^2 = R^2$$

onde R é o raio do cilindro e, (x_1, x_2, x_3) são as coordenadas do ponto "c". Observe-se que por construção o ponto "c" necessariamente pertencerá a reta que forma o eixo do cilindro.

Definindo-se:

$$R = \sqrt{(x'''_1 - x_1)^2 + (x'''_2 - x_2)^2 + (x'''_3 - x_3)^2} \quad (4.2.2.c)$$

pode-se determinar os cossenos diretores do ponto "L" através da seguinte formulação:

$$\begin{aligned} C_1 &= \pm \frac{(x'''_1 - x_1)}{R} \\ C_2 &= \pm \frac{(x'''_2 - x_2)}{R} \\ C_3 &= \pm \frac{(x'''_3 - x_3)}{R} \end{aligned} \quad (4.2.2.d)$$

sendo:

C_1 = cosseno diretor na direção x_1

C_2 = cosseno diretor na direção x_2

C_3 = cosseno diretor na direção x_3

O sinal positivo ou negativo refere-se ao fato de que na face a qual o elemento se encontra, a direção correspondente é positiva ou negativa em relação ao sistema de coordenadas pré-fixados.

Agora, supondo um ponto L onde concorrem i elementos e sejam:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^i C_{1j} \\ B &= \sum_{j=1}^i C_{2j} \\ C &= \sum_{j=1}^i C_{3j} \end{aligned} \quad (4.2.2.e)$$

Pode ser definido:

$$T = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (4.2.2.f)$$

e portanto a coordenada do ponto singular será dada por:

$$\begin{aligned} x_1^* &= x'''_1 + d \cdot \frac{A}{T} \\ x_2^* &= x'''_2 + d \cdot \frac{B}{T} \\ x_3^* &= x'''_3 + d \cdot \frac{C}{T} \end{aligned} \quad (4.2.2.g)$$

Em ambos os casos, note-se que evidentemente "d" não deve ser pequeno em relação aos lados dos elementos que possuem o nó L em comum. Um estudo prático sobre este valor é mostrado no capítulo cinco deste trabalho.

4.3. Programa computacional

Neste item faz-se uma descrição breve do programa computacional utilizado, bem como a apresentação dum fluxograma do mesmo.

O programa em si contém a formulação para elementos de contorno em elasticidade linear isotrópica tridimensional, com utilização de elementos quadriláteros de primeira e segunda ordem, bem como elementos triangulares de mesmas ordens.

4.3.1. Dados do programa

Como dados do programa são introduzidos os valores do número de nós e elementos, bem como o número de nós do elemento utilizado na discretização do corpo em estudo (tipo de elemento).

Grandezas físicas como o módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson são fornecidos juntamente com o número de pontos no interior e número de pontos de integração desejados para cada direção.

A seguir introduz-se as coordenadas globais dos nós

e pontos no interior e as conectividades dos elementos.

Os dados relativos as condições de contorno são os seguintes, obedecendo a uma chave:

- deslocamentos nodais prescritos (0), ou
- forças de superfícies prescritas (1).

As forças de superfície são fornecidas por elemento, o que facilita a entrada de dados do contorno.

4.3.2. Resolução computacional do problema

A resolução se inicia com uma rotina que determina os cossenos diretores de todos os elementos e também as coordenadas globais dos pontos fictícios.

A seguir uma nova rotina com o auxílio duma segunda rotina, realiza o cálculo da solução fundamental, integração numérica e a montagem do sistema de equações. Nesta etapa, os coeficientes de deslocamentos são multiplicados pela maior distância entre nós e os de força de superfície pelo valor do módulo de elasticidade, de maneira a se obter grandezas equivalentes entre os coeficientes e o vetor de termos independentes⁽¹⁴⁾.

Note-se que ao vetor que contém os valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície multiplicados pelos coeficientes, soma-se a respectiva contribuição de forças de corpo, as quais são determinadas nesta mesma rotina.

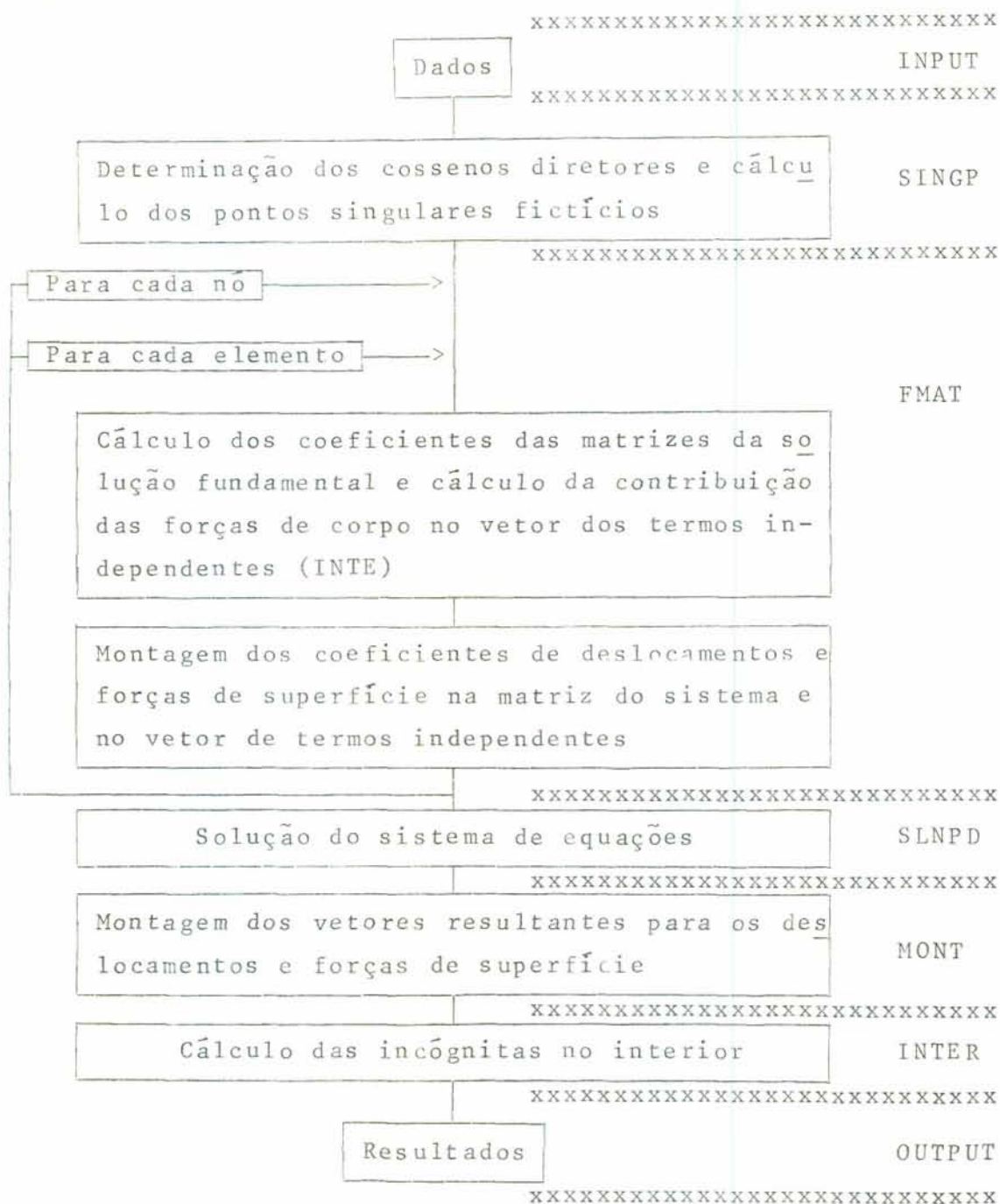
A matriz resultante como visto é cheia e não simétrica e, a solução do sistema de equações lineares obtida é feita por uma rotina de eliminação de Gauss comum.

Segue-se então uma rotina que calcula as incógnitas no interior, a qual consome grande parte do tempo computacional perdendo somente para a montagem e resolução do sistema de equações.

Os resultados são portanto: deslocamentos dos nós do contorno, forças de superfície reagentes por nó ou por elemento e deslocamentos e tensões nos pontos do interior do corpo.

4.3.3. Estruturação do programa - Fluxograma

A figura que se segue mostra o fluxograma do programa utilizado, a qual, fornece uma noção sobre a implementação efetuada neste trabalho.



5. EXEMPLOS E AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

5.1. Introdução

O método dos elementos de contorno tem sido muito aplicado no estudo dos problemas relativos a elasticidade linear isotrópica tridimensional.

SCHEER⁽¹⁹⁾ apresenta resultados obtidos com o uso de elemento quadrilátero linear para três diferentes problemas.

PARTRIDGE⁽¹⁶⁾ mostra resultados conseguidos utilizando a técnica do ponto singular fictício em problemas também da elasticidade linear tridimensional.

No presente trabalho analisa-se três exemplos da elasticidade linear tridimensional, com diferentes malhas e com quatro tipos de elementos de contorno. Utiliza-se também diversos esquemas de integração.

5.2. Cubo unitário

Para encontrar uma posição ideal do ponto singular fictício fez-se o estudo dum exemplo simples da elasticidade linear tridimensional.

Tomou-se um sólido paralelepédico de arestas unitárias, submetido a uma carga de tração também unitária e distribuída aplicada na direção x sobre uma das faces.

Alguns aspectos de precisão dos resultados obtidos com a formulação do método dos elementos de contorno também são estudados.

O cubo teve os deslocamentos das faces de normal negativa (ou seja aquelas faces formadas pelos eixos do sistema de referência) restringidos na direção das normais a estas mesmas faces (figura 5.2.a).

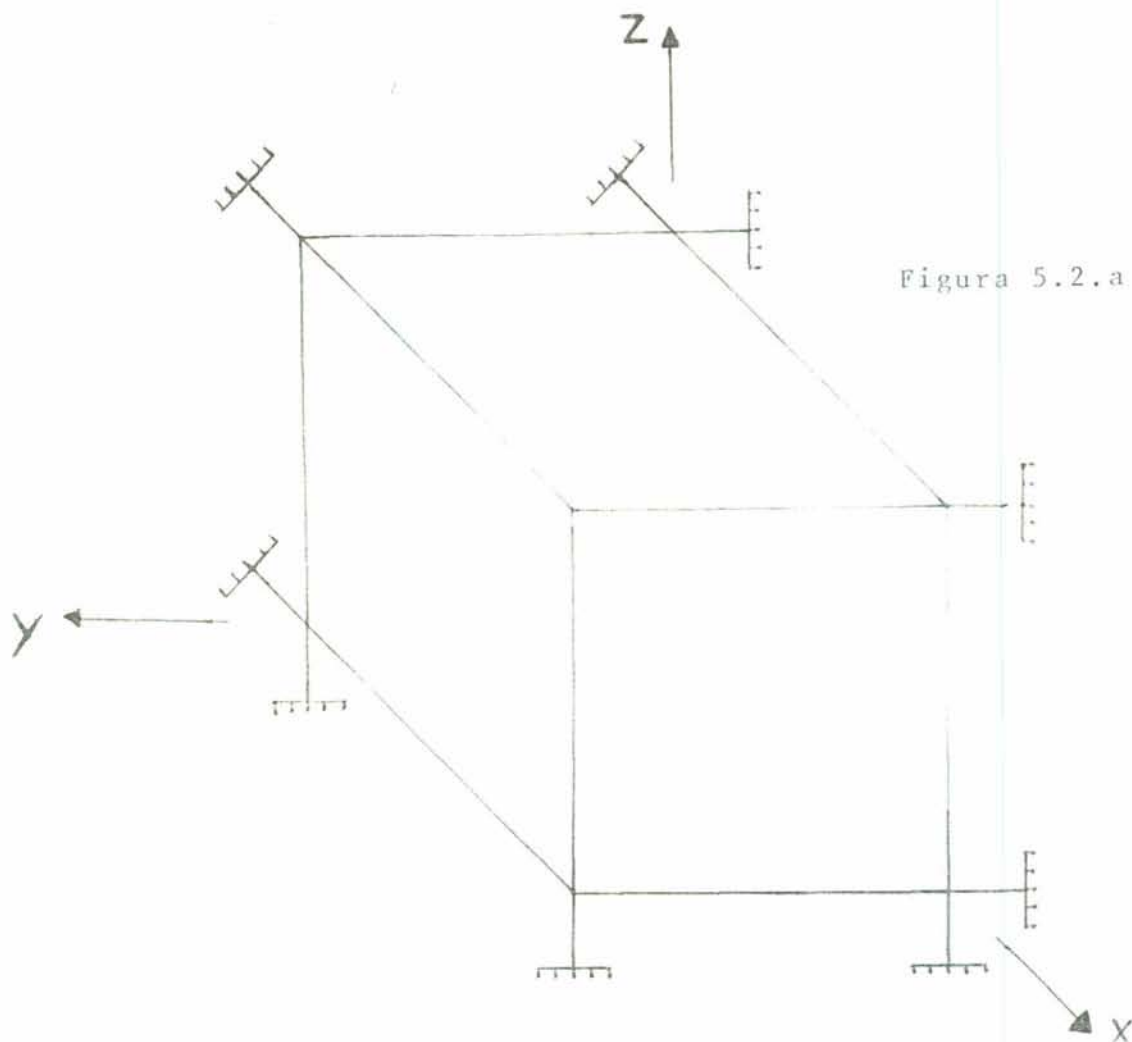


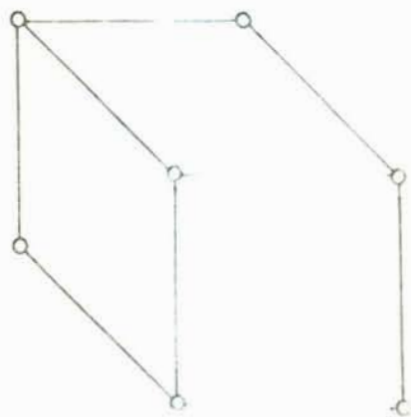
Figura 5.2.a

A discretização do contorno do sólido foi elaborada com elementos:

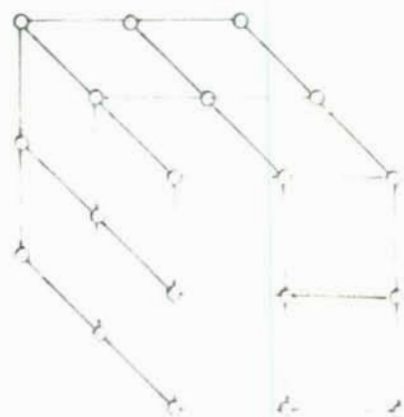
- quadriláteros lineares (malhas de 6 e 24 elementos)
- quadriláteros quadráticos (malha de 6 elementos)
- triangulares lineares (malhas de 12 e 24 elementos)
- triangulares quadráticos (malha com 12 elementos)

Para todas as malhas adotou-se esquemas de integração iguais (de 4x4, 6x6 e 8x8 pontos de integração), bem como a distância "d" (empregada no cálculo da posição do ponto fictício) com valores 0,0, 0,5, 5,0 e 50,0.

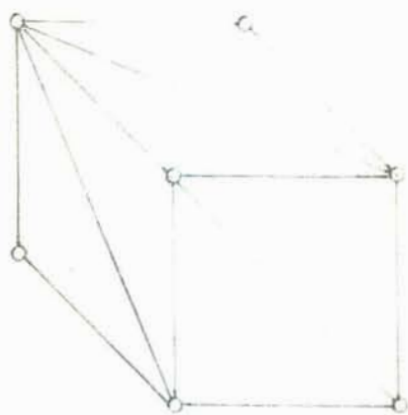
No método dos elementos de contorno, não existe uma regra fixa para determinar quantos pontos de integração são necessários; neste caso deve-se examinar a convergência por comparações de resultados com crescentes números de pontos de integração.



8 n\u00f3s e 6 elementos



26 n\u00f3s e 24 elementos

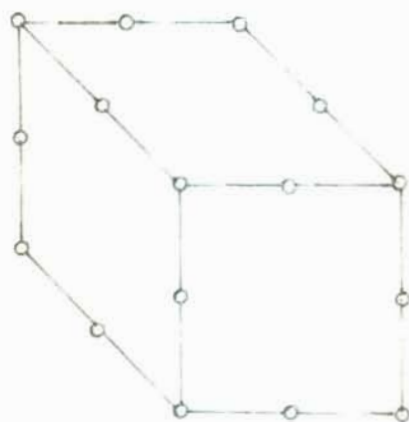


8 n\u00f3s e 12 elementos

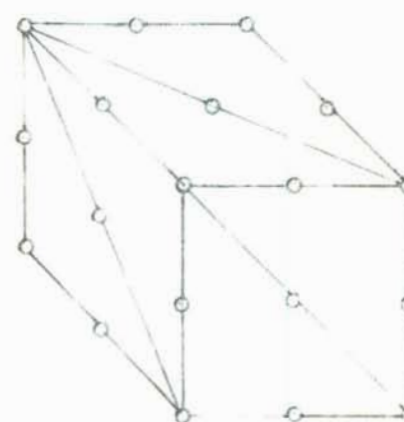


14 n\u00f3s e 24 elementos

Figura 5.2.b - Malhas dos elementos lineares



20 n\u00f3s e 6 elementos



26 n\u00f3s e 12 elementos

Figura 5.2.c - Malhas dos elementos quadr\u00e1ticos

5.2.1. Resultados comparados para os diferentes valores de "d"

Foram comparados resultados para diversos valores de "d" com 4x4, 6x6 e 8x8 pontos de integração por elemento nos quatro tipos de elementos utilizados.

As tabelas 5.2.1.a até 5.2.1.f mostram os resultados obtidos, sendo que:

- D.M. é o deslocamento máximo
- D.P.C. é o deslocamento do ponto central
- N.P. é o número dos pontos de integração utilizados

A solução exata do cubo unitário sujeito a uma carga de tração também unitária, distribuída e aplicada na direção x_1 sobre uma das faces é:

Definindo $E = 1$ e $\nu = 0,3$, temos:

- Em $x(1, 1, 1) \rightarrow u = + 1$
 $v = - 0,3$
 $w = - 0,3$
- Em $x(0,5; 0,5; 0,5) \rightarrow u = 0,5$
 $v = - 0,15$
 $w = - 0,15$
- Em $x(0,5; 0,5; 0,5) \rightarrow \sigma_{xx} = 1,0$
 $\sigma_{xy}, \text{ etc} = 0$

5.2.2. Avaliação dos resultados

Para o elemento quadrilátero linear os valores ótimos de "d", variam no intervalo fechado $|0,5; 5|$. Observa-se que no caso de uma discretização com 24 elementos e $d = 50$ obtém-se resultados pouco precisos.

No caso do elemento triangular linear o valor ótimo "d" varia também no $|0,5; 5|$, sendo que a discretização com 12 ele

ELEMENTO QUADRILÁTERO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM b ELEMENTOS

TABELA 5.2.1.a

N.P.	INCÓGNITAS	DIREÇÕES	d = 0	d = 0,5	d = 5	d = 50	SOLUÇÃO EXATA
4	D.M.	x	0,9695	1,0002	1,0000	0,9999	1,0000
		y	-0,2964	-0,3001	-0,3000	-0,2999	-0,3000
		z	-0,2964	-0,3001	-0,3000	-0,3000	-0,3000
	D.P.C.	x	0,4828	0,4981	0,4980	0,4980	0,5000
		y	-0,1476	-0,1494	-0,1494	-0,1494	-0,1500
		z	-0,1476	-0,1494	-0,1494	-0,1494	-0,1500
	TENSÃO	x	0,9132	0,9261	0,9261	0,9261	1,0000
		y	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		z	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	D.M.	x	0,9861	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
		y	-0,2983	-0,2999	-0,3000	-0,3000	-0,3000
		z	-0,2983	-0,2999	-0,3000	-0,3000	-0,3000
	D.P.C.	x	0,4929	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000
		y	-0,1491	-0,1499	-0,1499	-0,1499	-0,1500
		z	-0,1491	-0,1499	-0,1499	-0,1499	-0,1500
	TENSÃO	x	0,9881	0,9952	0,9952	0,9952	1,0000
		y	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		z	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	D.M.	x	0,9920	0,9999	1,0000	0,9999	1,0000
		y	-0,2990	-0,3000	-0,3000	-0,3000	-0,3000
		z	-0,2990	-0,3000	-0,3000	-0,2999	-0,3000
	D.P.C.	x	0,4960	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000
		y	-0,1495	-0,1499	-0,1499	-0,1499	-0,1500
		z	-0,1495	-0,1499	-0,1499	-0,1400	-0,1500
	TENSÃO	x	0,9959	0,9997	0,9997	0,9997	1,0000
		y	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		z	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ELEMENTO QUADRILÁTERO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM 24 ELEMENTOS

TABELA 5.2.1.b

N.P.	INCÓGNITAS	DIREÇÕES	d = 0	d = 0,5	d = 5	d = 50	SOLUÇÃO EXATA
4	D.M.	x	0,9843	0,9999	1,0000	0,6774	1,0000
		y	-0,2987	-0,2999	-0,2999	-0,0278	-0,3000
		z	-0,2987	-0,2999	-0,2999	-0,0545	-0,3000
	D.P.C.	x	0,4901	0,5000	0,5000	0,6185	0,5000
		y	-0,1495	-0,1500	-0,1499	-0,0140	-0,1500
		z	-0,1495	-0,1500	-0,1499	-0,2389	-0,1500
	TENSÃO	x	0,9917	1,0000	1,0000	1,0604	1,0000
		y	0,0001	0,0000	0,0000	0,0255	0,0000
		z	0,0025	0,0000	0,0000	0,0283	0,0000
6	D.M.	x	0,9928	1,0000	1,0000		1,0000
		y	-0,2994	-0,3000	-0,3000		-0,3000
		z	-0,2994	-0,3000	-0,2999		-0,3000
	D.P.C.	x	0,4955	0,5000	0,4999		0,5000
		y	-0,1497	-0,1500	-0,1500		-0,1500
		z	-0,1498	-0,1500	-0,1499		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9962	1,0000	0,9999		1,0000
		y	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000
		z	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000
8	D.M.	x	0,9952	1,0000	1,0000		1,0000
		y	-0,2996	-0,3000	-0,3000		-0,3000
		z	-0,2996	-0,3000	-0,3000		-0,3000
	D.P.C.	x	0,4974	0,5000	0,5000		0,5000
		y	-0,1498	-0,1500	-0,1500		-0,1500
		z	-0,1498	-0,1500	-0,1500		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9946	1,0000	1,0000		1,0000
		y	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000
		z	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000

ELEMENTO TRIÂNGULO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM 12 ELEMENTOS

TABELA 5.2.1.c

N.P.	INCÓGNITAS	DIREÇÕES	d = 0	d = 0,5	d = 5	d = 50	SOLUÇÃO EXATA
4	D.M.	x	0,9664	1,0000	1,0000		1,0000
		y	-0,2983	-0,2999	-0,3000		-0,3000
		z	-0,2956	-0,3004	-0,3000		-0,3000
	D.P.C.	x	0,5672	0,5945	0,6347		0,5000
		y	-0,1119	-0,1244	-0,1249		-0,1500
		z	-0,2013	-0,1883	-0,1864		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9478	0,9657	0,9640		1,0000
		y	0,0047	0,0513	0,0492		0,0000
		z	0,0220	0,0289	0,0334		0,0000
6	D.M.	x	0,9845	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000
		y	-0,2997	-0,2999	-0,3000	-0,2999	-0,3000
		z	-0,2977	-0,3000	-0,3000	-0,2999	-0,3000
	D.P.C.	x	0,5821	0,5950	0,6356	0,5950	0,5000
		y	-0,1203	-0,1265	-0,1265	-0,1265	-0,1500
		z	-0,2023	-0,1958	-0,1957	-0,1958	-0,1500
	TENSÃO	x	0,9889	0,9975	0,9973	0,9975	1,0000
		y	0,0050	0,0063	0,0060	0,0063	0,0000
		z	0,0011	0,0036	0,0041	0,0022	0,0000
8	D.M.	x	0,9911	0,9999	1,0000		1,0000
		y	-0,3000	-0,3000	-0,3000		-0,3000
		z	-0,2986	-0,2999	-0,3000		-0,3000
	D.P.C.	x	0,5874	0,5950	0,6356		0,5000
		y	-0,1230	-0,1266	-0,1266		-0,1500
		z	-0,2000	-0,1965	-0,1965		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9948	0,9998	0,9998		1,0000
		y	0,0000	0,0006	0,0006		0,0000
		z	0,0000	0,0003	0,0004		0,0000

ELEMENTO TRIÂNGULO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM 24 ELEMENTOS

TABELA 5.2.1.d

N.P.	INCÓGNITAS	DIREÇÕES	d = 0	d = 0,5	d = 5	d = 50	SOLUÇÃO EXATA
4	D.M.	x	0,9395	0,9999	0,9999		1,0000
		y	-0,2877	-0,2999	-0,2999		-0,3000
		z	-0,2877	-0,2999	-0,2999		-0,3000
	D.P.C.	x	0,5239	0,5000	0,5000		0,5000
		y	-0,1496	-0,1500	-0,1499		-0,1500
		z	-0,1497	-0,1500	-0,1500		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9774	0,9996	0,9996		1,0000
		y	0,0010	0,0000	0,0000		0,0000
		z	0,0010	0,0000	0,0000		0,0000
6	D.M.	x	0,9708	1,0000	0,9999	1,0374	1,0000
		y	-0,2940	-0,3000	-0,3000	-0,3152	-0,3000
		z	-0,2940	-0,3000	-0,2999	-0,3273	-0,3000
	D.P.C.	x	0,5117	0,4999	0,4999	0,6194	0,5000
		y	-0,1497	-0,1499	-0,1500	-0,2000	-0,1500
		z	-0,1498	-0,1499	-0,1499	-0,2396	-0,1500
	TENSÃO	x	0,9892	0,9999	0,9999	0,9402	1,0000
		y	0,0005	0,0000	0,0000	0,0010	0,0000
		z	0,0005	0,0000	0,0000	0,0215	0,0000
8	D.M.	x	0,9829	1,0000	1,0000		1,0000
		y	-0,2965	-0,3000	-0,2999		-0,3000
		z	-0,2965	-0,3000	-0,3000		-0,3000
	D.P.C.	x	0,5069	0,5000	0,5000		0,5000
		y	-0,1498	-0,1500	-0,1499		-0,1500
		z	-0,1499	-0,1500	-0,1499		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9937	1,0000	1,0000		1,0000
		y	0,0002	0,0000	0,0000		0,0000
		z	0,0002	0,0000	0,0000		0,0000

ELEMENTO QUADRILÁTERO QUADRÁTICO - DISCRETIZAÇÃO COM 6 ELEMENTOS

TABELA 5.2.1.e

N.P.	INCÓGNITAS	DIREÇÕES	d = 0	d = 0,5	d = 5	d = 50	SOLUÇÃO EXATA
4	D.M.	x	1,0857	1,0230	0,9999	0,9698	1,0000
		y	-0,3856	-0,3119	-0,2999	-0,1684	-3,0000
		z	-0,3856	-0,3119	-0,3000	-0,4046	-0,3000
	D.P.C.	x	0,3196	0,4874	0,4980	0,4929	0,5000
		y	-0,1221	-0,1441	-0,1494	-0,1116	-0,1500
		z	-0,1206	-0,1439	-0,1494	-0,1941	-0,1500
	TENSÃO	x	0,8043	0,9232	0,9261	0,9282	1,0000
		y	0,0049	0,0002	0,0000	0,0050	0,0000
		z	0,0049	0,0002	0,0000	0,0017	0,0000
6	D.M.	x	1,0707	1,0000	1,0000		1,0000
		y	-0,3645	-0,3000	-0,2999		-0,3000
		z	-0,3645	-0,3000	-0,3000		-0,3000
	D.P.C.	x	0,3750	0,4999	0,4999		0,5000
		y	-0,1321	-0,1499	-0,1499		-0,1500
		z	-0,1310	-0,1499	-0,1499		-0,1500
	TENSÃO	x	0,8937	0,9952	0,9952		1,0000
		y	0,0038	0,0000	0,0000		0,0000
		z	0,0038	0,0000	0,0000		0,0000
8	D.M.	x	1,0571	1,0000	1,0000		1,0000
		y	-0,3506	-0,3000	-0,2999		-0,3000
		z	-0,3506	-0,3000	-0,3000		-0,3000
	D.P.C.	x	0,4037	0,4999	0,4999		0,5000
		y	-0,1366	-0,1499	-0,1499		-0,1500
		z	-0,1357	-0,1499	-0,1499		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9204	0,9997	0,9997		1,0000
		y	0,0030	0,0000	0,0000		0,0000
		z	0,0030	0,0000	0,0000		0,0000

ELEMENTO TRIÂNGULO QUADRÁTICO - DISCRETIZAÇÃO COM 12 ELEMENTOS

TABELA 5.2.1.f

N.T.	INCÓGNITAS	DIREÇÕES	d = 0	d = 0,5	d = 5	d = 50	SOLUÇÃO EXATA
4	D.M.	x	1,0386	1,7357	0,9999		1,0000
		y	-0,3471	-0,0012	-0,2998		-0,3000
		z	-0,3673	-0,7180	-0,3000		-0,3000
	D.P.C.	x	0,3259	0,1183	0,5120		0,5000
		y	-0,1134	-0,8190	-0,1055		-0,1500
		z	-0,1395	-0,7488	-0,1902		-0,1500
	TENSÃO	x	0,8625	1,1524	0,9662		1,0000
		y	0,0432	0,0278	0,0455		0,0000
		z	0,0310	0,0043	0,0438		0,0000
6	D.M.	x	1,0385	1,0201	0,9998	3,3890	1,0000
		y	-0,3420	-0,2946	-0,2999	-7,1237	-0,3000
		z	-0,3481	-0,3141	-0,2999	-2,0158	-0,3000
	D.P.C.	x	0,3849	0,5297	0,5129	0,8658	0,5000
		y	-0,1074	-0,1060	-0,1054	-0,9233	-0,1500
		z	-0,1606	-0,2049	-0,1929	-1,0026	-0,1500
	TENSÃO	x	0,9186	1,0040	0,9977	3,6121	1,0000
		y	0,0090	0,0043	0,0060	0,2087	0,0000
		z	0,0009	0,0004	0,0033	0,2283	0,0000
8	D.M.	x	1,0331	1,0017	1,0004		1,0000
		y	-0,3379	-0,2995	-0,3002		-0,3000
		z	-0,3379	-0,3012	-0,2999		-0,3000
	D.P.C.	x	0,4153	0,5144	0,5129		0,5000
		y	-0,1065	-0,1053	-0,1054		-0,1500
		z	-0,1686	-0,1942	-0,1931		-0,1500
	TENSÃO	x	0,9391	1,0004	0,9998		1,0000
		y	0,0034	0,0005	0,0006		0,0000
		z	0,0035	0,0004	0,0005		0,0000

mentos não apresenta bons resultados no cálculo do deslocamento do ponto central, e "d" = 50 apresenta também resultados pouco precisos neste caso.

É importante notar que no caso de se ter uma malha com mais elementos (tabelas 5.2.1.b e 5.2.1.d), o valor de "d" ótimo tende a se tornar menor. Isto deve ocorrer porque no caso de malhas mais densas os elementos passam a ter suas dimensões reduzidas.

Os elementos quadráticos apresentam bons resultados com $d = 5,0$ e, no caso de quadrilátero quadrático obteve-se praticamente os mesmos resultados dos quadriláteros lineares com 6 elementos.

5.2.3. Resultados comparados para diferentes esquemas de integração

Comparam-se os resultados obtidos para diferentes números de pontos de integração ($n \times n$ pontos de integração com $n = 4, 6$ e 8) para cada uma das seis malhas adotadas. Toma-se $d = 0$ e $d = \text{ótimo}$, para salientar a importância do ponto singular fictício.

A introdução do ponto singular fictício possibilita a obtenção da solução exata, como por exemplo; no caso do elemento quadrilátero linear com uma malha de 24 elementos e com 6×6 pontos de integração.

Os resultados apresentados para diferentes malhas mostram um bom comportamento para todos os elementos no que se refere ao cálculo dos deslocamentos máximos e tensão no interior.

O elemento triângulo quadrático não apresentou os resultados esperados no cálculo dos deslocamentos do ponto no interior. Isto talvez tenha ocorrido devido a pequena densidade da malha utilizada.

5.3. Viga engastada

Procurou-se executar um problema de ordem prática e,

ELEMENTO QUADRILÁTERO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM 6 ELEMENTOS

TABELA 5.2.3.a

INCÓGNITAS	PONTOS DE INTEGRAÇÃO											
	4 x 4				6 x 6				8 x 8			
	d = 0	Erro %	d = 5	Erro %	d = 0	Erro %	d = 5	Erro %	d = 0	Erro %	d = 5	Erro %
D.M. em x	0,9695	3,05	1,0000	0	0,9861	1,39	1,0000	0	0,9920	0,80	1,0000	0
D.P.C. em x	0,4828	3,44	0,4980	0,40	0,4929	1,42	0,4999	0,02	0,4960	0,80	0,4999	0,02
TENSÃO em x	0,9132	8,68	0,9261	7,39	0,9885	1,15	0,9952	0,48	0,9959	0,41	0,9997	0,03

ELEMENTO QUADRILÁTERO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM 24 ELEMENTOS

TABELA 5.2.3.b

INCÓGNITAS NA DIREÇÃO x	PONTOS DE INTEGRAÇÃO											
	4 x 4				6 x 6				8 x 8			
	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %
D.M.	0,9843	1,57	0,9999	0,01	0,9928	0,72	1,0000	0	0,9952	0,48	1,0000	0
D.P.C.	0,4901	1,98	0,5000	0	0,4955	0,90	0,5000	0	0,4974	0,52	0,5000	0
TENSÃO	0,9917	0,83	1,0000	0	0,9962	0,38	1,0000	0	0,9946	0,54	1,0000	0

ELEMENTO TRIÂNGULO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM 12 ELEMENTOS

TABELA 5.2.3.c

INCÓGNITAS NA DIREÇÃO x	PONTOS DE INTEGRAÇÃO											
	4 x 4				6 x 6				8 x 8			
	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %
D.M.	0,9664	3,36	1,0000	0	0,9845	1,55	1,0000	0	0,9911	0,89	0,9999	0,01
D.P.C.	0,5672	13,44	0,5945	18,9	0,5821	16,42	0,5950	19,0	0,5874	17,48	0,5950	19,0
TENSÃO	0,9478	5,22	0,9657	3,43	0,9889	1,11	0,9973	0,27	0,9948	0,52	0,9998	0,02

ELEMENTO TRIÂNGULO LINEAR - DISCRETIZAÇÃO COM 24 ELEMENTOS

TABELA 5.2.3.d

INCÓGNITAS NA DIREÇÃO x	PONTOS DE INTEGRAÇÃO											
	4 x 4				6 x 6				8 x 8			
	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %	d = 0	Erro %	d=0,5	Erro %
D.M.	0,9395	6,05	0,9999	0,01	0,9708	2,92	1,0000	0	0,9829	1,71	1,0000	0
D.P.C.	0,5239	4,78	0,5000	0	0,5117	2,34	0,4999	0,02	0,5069	1,38	0,5000	0
TENSÃO	0,9774	2,26	0,9996	0,04	0,9892	1,08	0,9999	0,01	0,9937	0,63	1,0000	0

ELEMENTO QUADRILÁTERO QUADRÁTICO - DISCRETIZAÇÃO COM 6 ELEMENTOS

TABELA 5.2.3.e

INCÓGNITAS NA DIREÇÃO x	PONTOS DE INTEGRAÇÃO											
	4 x 4				6 x 6				8 x 8			
	d = 0	Erro %	d=5,0	Erro %	d = 0	Erro %	d=5,0	Erro %	d = 0	Erro %	d=5,0	Erro %
D.M.	1,0857	8,57	0,9999	0,01	1,0707	7,07	1,0000	0	1,0571	5,71	1,0000	0
D.P.C.	0,3196	36,08	0,4980	0,40	0,3750	25,0	0,4999	0,02	0,4037	19,26	0,4999	0,02
TENSÃO	0,8043	19,57	0,9261	3,39	0,8937	10,63	0,9952	0,48	0,9204	7,96	0,9997	0,03

ELEMENTO TRIÂNGULO QUADRÁTICO - DISCRETIZAÇÃO COM 12 ELEMENTOS

TABELA 5.2.3.f

INCÓGNITAS NA DIREÇÃO x	PONTOS DE INTEGRAÇÃO											
	4 x 4				6 x 6				8 x 8			
	d = 0	Erro %	d=5,0	Erro %	d = 0	Erro %	d=5,0	Erro %	d = 0	Erro %	d=5,0	Erro %
D.M.	1,0386	3,86	0,9999	0,01	1,0385	3,85	0,9998	0,02	1,0331	3,31	1,0004	0,04
D.P.C.	0,3259	34,82	0,5120	2,40	0,3849	23,02	0,5129	2,58	0,4153	16,94	0,5129	2,58
TENSÃO	0,8627	13,73	0,9662	3,38	0,9186	8,14	0,9977	0,23	0,9391	6,09	0,9998	0,02

para tanto adotou-se valores reais.

Uma viga engastada foi discretizada com uma malha de 18 elementos quadráticos e submetida a uma carga concentrada no seu extremo livre.

Os resultados foram tabelados e comparados com a solução analítica da teoria da resistência dos materiais e também com o método dos elementos finitos.

5.3.1. Discretização

A malha adotada está mostrada na figura 5.3.1.a e os valores adotados são:

$$E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$P = 84 \text{ kN}$$

$$\nu = 0,3$$

Da resistência dos materiais sabe-se que a expressão:

$$y = \frac{P}{24 EI} (x^4 - 4 \ell^3 x + 3 \ell^4) \quad (5.3.1.a)$$

fornece as deflexões para vigas engastadas sujeitas a uma carga concentrada em seu extremo livre.

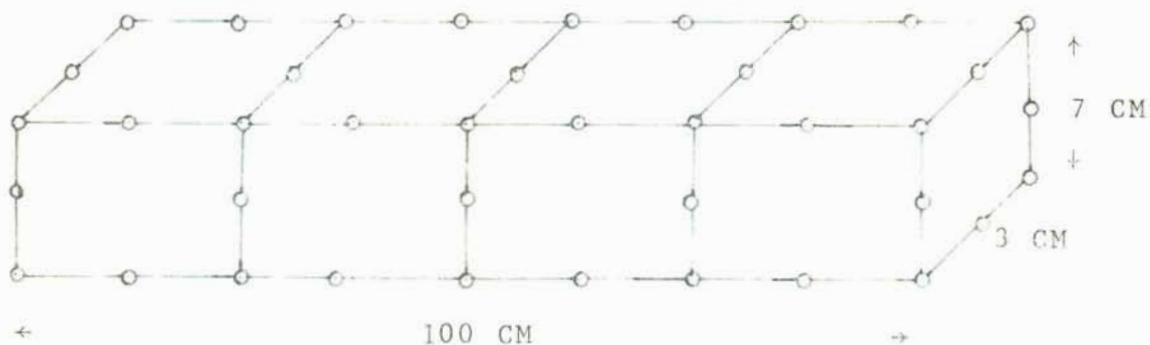


Figura 5.3.1.a - Malha com 18 elementos quadráticos e 56 nós

A figura 5.3.1.b define as variáveis encontradas na expressão (5.3.1.a).



Figura 5.3.1.b - Viga engastada sujeita a uma carga concentrada em seu extremo livre

Para o cálculo através do método dos elementos finitos utilizou-se para discretizar a viga quatro elementos tridimensionais quadráticos.

5.3.2. Resultados

A tabela 5.3.2 fornece os resultados obtidos para 6x6 pontos de integração no método dos elementos de contorno (M.E.C.), para o método dos elementos finitos (M.E.F.) e a solução analítica (S.A.).

TABELA 5.3.2 - Deflexões em centímetros

x (CM)	S.A.	M.E.C.	ERRO (%)	M.E.F.	ERRO (%)
75	0,0171	0,0187	9,3	0,0156	8,8
50	0,0625	0,0659	5,4	0,0572	8,5
25	0,1265	0,1322	4,5	0,1175	7,2
0	0,2000	0,2082	4,1	0,1875	6,3

A observação dos resultados acima mostra valores mais corretos próximos ao extremo livre em ambos os métodos.

Mesmo com o método dos elementos finitos, para se obter bons resultados necessita-se duma malha mais densa. No caso de malhas compatíveis o método dos elementos de contorno apresenta melhores resultados.

5.4. Cilindro ôco de paredes espessas sujeito a força de rotação

5.4.1. Introdução

O cilindro ôco de paredes espessas é um problema simples da elasticidade linear tridimensional, sendo de grande utilidade para avaliação de novos métodos.

BREBBIA⁽²⁾ apresenta resultados para o problema do cilindro ôco, de paredes espessas e sujeito a pressão interna.

PARTRIDGE⁽¹⁶⁾ analisa o mesmo problema do cilindro ôco apresentando resultados com a utilização do ponto singular fictício.

Neste trabalho analisa-se o cilindro ôco de paredes espessas sob a ação duma rotação inercial uniforme, a partir da utilização do método proposto por DANSON⁽¹¹⁾ para representar integrais de volume com integrais de superfície.

Devido a simetria do problema, discretizou-se somente um quarto duma faixa do cilindro, obedecendo, então, as condições de contorno para um estado plano de deformações, ou seja; foram impedidos os deslocamentos longitudinais no topo do quarto do cilindro discretizado e os deslocamentos circunferenciais nas faces dos planos de simetria.

Executou-se uma malha com 6x6 pontos de integração, e com elementos quadráticos

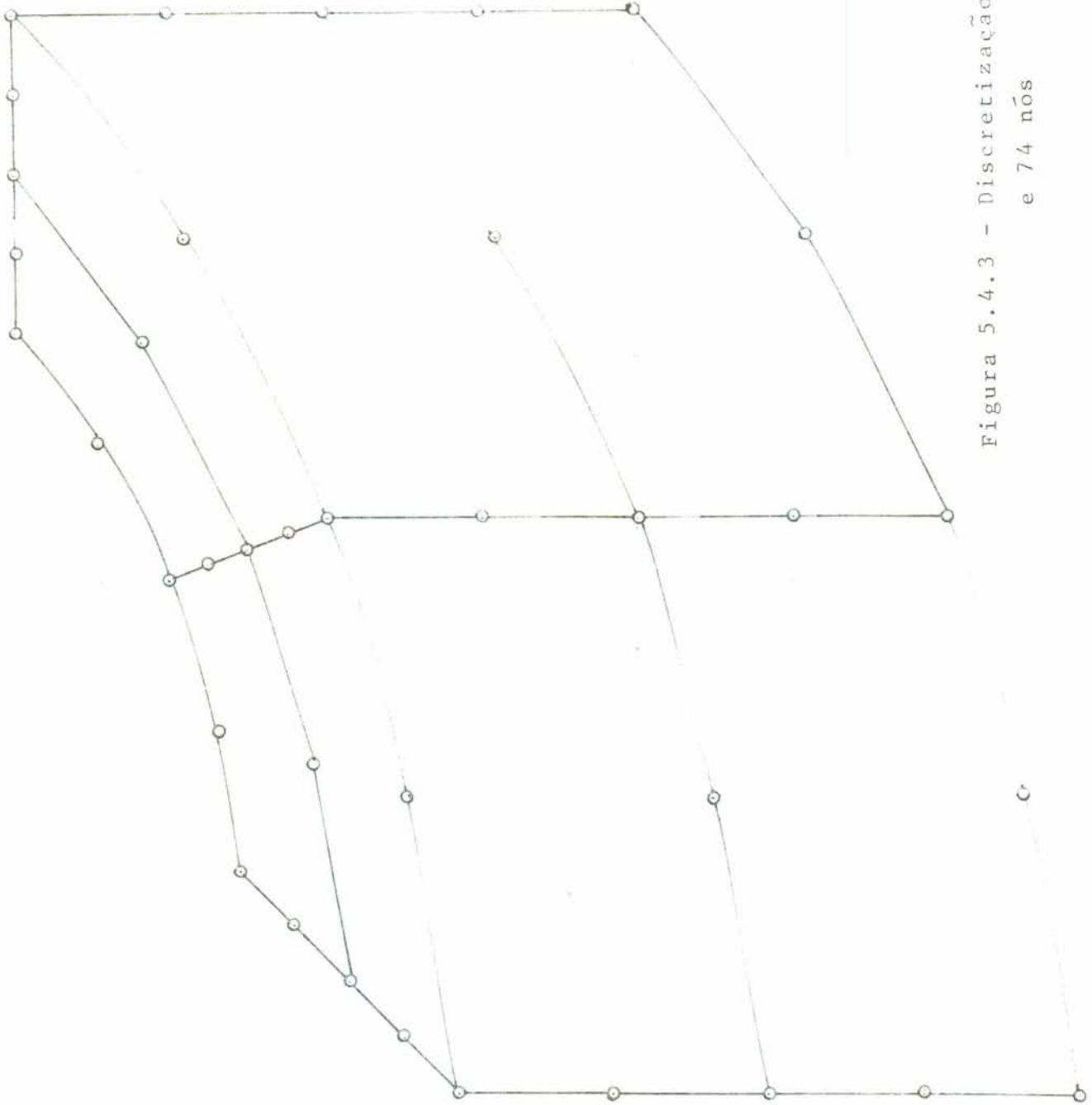
Os resultados são comparados com a solução analítica⁽²⁰⁾.

5.4.2. Dados numéricos

Os dados numéricos pertinentes a este problema são fornecidos a seguir:

Geometria - $R = 20,0$ cm (raio externo)
 $r = 10,0$ cm (raio interno)
 $h = 20,0$ cm (altura)

Figura 5.4.3 - Discretização com 24 elementos
e 74 nós



Constantes físicas - $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ (módulo de elasticidade)
 $\nu = 0,3$ (módulo de Poisson)

Forças de corpo - $\rho \omega^2 = 80 \frac{\text{Kg} \cdot \text{rad}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}}$

5.4.3. Discretização adotada

Para uma melhor aproximação da geometria, se faz uso dos elementos curvos juntamente com os planos. A figura 5.4.3 mostra a discretização adotada.

5.4.4. Resultados obtidos

TABELA 5.4.4.a - Deslocamentos radiais (cm)

Raio (cm)	Solução exata	Valor Obtido	Erro (%)
10,	1,5048	1,4517	3,52
12,5	1,2566	1,2642	0,60
15,	1,2235	1,2620	3,15
17,5	1,1972	1,2023	0,43
20,	1,1619	1,1653	0,29

TABELA 5.4.4.b - Tensões (kN/m^2)

Raio (cm)	Solução exata	Valor Obtido	Erro (%)
10,	31600,	31830	0,72
12,5	21979,	25486	15,96
15,	18091,	17697	2,17
17,5	14991,	14864	0,85
20,	12200,	11270	7,62

5.4.5. Avaliação dos resultados

Os resultados para deslocamentos radiais são bastante satisfatórios, bem como para tensões. Pode-se concluir que a utilização desta malha fornece bons resultados e o

método dos elementos de contorno foi aplicado de forma satisfatória.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O método dos elementos de contorno foi aplicado a problemas da elasticidade linear tridimensional. Foram utilizados os elementos quadriláteros lineares e quadráticos, bem como os triangulares lineares e quadráticos, dependendo do problema.

De uma maneira geral todos os elementos apresentaram bons resultados.

No que diz respeito a eficiência do método em si, algumas observações finais podem ser feitas:

1. A utilização do ponto singular fictício melhora consideravelmente os resultados e mostrou ser de fácil implementação. O uso deste processo elimina de vez a inconveniente tentativa de utilização de soluções analíticas na elasticidade tridimensional. Conforme mostra em seu trabalho SCHEER⁽¹⁹⁾, o uso da solução analítica tem uma série de inconvenientes no caso tridimensional.
2. Pode-se dizer que os resultados obtidos são satisfatórios, pois com malhas relativamente grosseiras consegue-se boas soluções.
3. A possibilidade de utilização de pontos no interior em quantidades pré-estabelecidas traz vantagens importantes, pois eles proporcionam bons resultados e suas incógnitas são calculadas posteriormente a obter-se a solução no contorno. Deste modo, podem-se obter resultados adicionais sobre regiões de alta concentração de tensões ou grande variação de deslocamentos colocando o número necessário de pontos nessas regiões.
4. Usou-se o mesmo esquema de integração numérica do método dos elementos finitos, o qual pode ser um ponto de estudo. A integração numérica é a parte mais problemática, pois da ava-

liação das integrais é que se obtêm os coeficientes das matrizes do sistema de equações, e também os valores no interior.

5. Uma outra vantagem é que prováveis modificações são facilmente implementadas, isto porque somente o contorno da região precisa ser definido. Também a redução dum dimensão traz a vantagem dum menor número de dados a serem fornecidos.

Assim, visando-se melhorar a utilização do método, sugere-se:

1. Desenvolvimento de estudos para aplicação do método dos elementos de contorno em problemas com não linearidade de material, tais como, problemas de plasticidade, viscoplasticidade e fluência.
2. A continuação do desenvolvimento do método em outros tópicos, tais como problemas da mecânica dos solos e de domínios infinitos em geral.
3. A utilização conjunta do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos, aproveitando assim as características de ambos os métodos, parece ser um bom caminho a ser seguido em futuras pesquisas^(12, 5).

Deste modo, conclui-se este trabalho com uma firme idéia; de que o método dos elementos de contorno em um prazo não muito longo poderá tornar-se uma ferramenta tão poderosa quanto o já consagrado método dos elementos finitos na resolução de problemas da engenharia.

APÊNDICE A

TABELA DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO PARA QUADRATURA GAUSSIANA

	Pontos de base			Pesos		
	$\pm z_i$			w_i		
4	0.86113	63115	95053	0.34785	48451	37454
	0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
6	0.93246	95142	03152	0.17132	44923	79170
	0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
	0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691
8	0.96028	98564	97536	0.10122	85362	90376
	0.79666	64774	13627	0.22238	10344	53374
	0.52553	24099	16329	0.31370	66458	77887
	0.18343	46424	95650	0.36268	37833	78362

Fórmula de integração numérica utilizada com os pontos de base e pesos dados pela tabela acima:

$$\int_{-1}^{+1} F(z) dz \cong \sum_{i=0}^n \omega_i F(z_i)$$

BIBLIOGRAFIA

1. ALARCON, E.; MARTIN, A.; PARIS, F. Boundary elements in potential and elasticity theory. Computers and Structures, Oxford, 10(1/2):351-62, Apr. 1979.
2. BREBBIA, C.A. The boundary element method for engineers. London, Pentech Press, 1978.
3. BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. Computational methods for the solution of engineering problems. London, Pentech Press, 1978.
4. _____. The finite element technique. Porto Alegre, UFRGS, 1975.
5. BREBBIA, C.A. & WALKER, S. Boundary element techniques in engineering. London, Newnes-Butterworths, 1980.
6. CHAUDONNET, M. On the discontinuity of the stress vector in the boundary integral equation method for elastic analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF VARIATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Southampton, 1979. p.185-94.
7. CRUSE, T.A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. Computers and Structures, Oxford, 4(4):741-54, Aug. 1974.
8. _____. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. Computers and Structures, Oxford, 3(3):509-27, May 1973.
9. _____. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. International Journal of Solids and

- Structures, Oxford, 5(12):1259-74, 1969.
10. CUROTTO, C.L. Método dos elementos de contorno para elasticidade tridimensional. Rio de Janeiro, Universidade Federal, COPPE, 1981. Diss. maestr.
 11. DANSON, D.J. A boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON BOUNDARY ELEMENT METHODS, 3., Irvine, 1981. Proceedings. Berlin, Springer, 1981.
 12. INTERNATIONAL SEMINAR ON RECENT ADVANCES IN BOUNDARY ELEMENT METHODS, 2., Southampton, 1980. New developments in boundary element methods. London, Butterworths, 1980.
 13. LACHAT, J.C. A further development of the boundary integral techniques for elastostatics. University of Southampton, Faculty of Engineering and Applied Science, 1975. PhD Thesis.
 14. LOVE, A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4.ed. New York, Dover, 1944.
 15. MELAMED, S.S. O método dos elementos de contorno para problemas de campo. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1981. Diss. maestr. engenharia civil.
 16. PARTRIDGE, P.W. Comparison of boundary element results with singular point located both on and outside the integration zone. In: CONGRESO LATINOAMERICANO SOBRE METODOS COMPUTACIONALES PARA INGENIERIA, 4., Santiago, Chile, 7-11 nov. 1983.
 17. PATTERSON, C. & SHEIKH, M.A. Regular boundary integral equations for stress analysis. In: BREBBIA, C.A., ed.

- Boundary element methods. New York, Springer Verlag, 1981.
18. RIZZO, F.J. & SHIPPY, D.J. An advanced boundary integral equation method for the three-dimensional thermoelasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 11(11):1753-68, 1977.
19. SCHEER, S. Método dos elementos de contorno aplicado à elasticidade tridimensional. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1982. Diss. maestr. engenharia civil.
20. SECHLER, Ernest E. Elasticity in engineering. New York, John Wiley, 1952.
21. STIPPES, M. & RIZZO, R.J. A note on the body force integral of classical elastostatics. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, Basel, 28(2):339-42, Mar. 1977.
22. WATSON, J.O. Advanced implementation of the boundary element method for two and three dimensional elastostatics. In: BANERJEE, P.K. & BUTTERFIELD, R. Developments in boundary element methods. London, Applied Science, 1979.