

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Simulação Numérica de Ondas Aquáticas Não-Lineares Permanentes

por

Sebastião Romero Franco

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Leandro Farina
Orientador

Porto Alegre, Dezembro de 2006.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Franco, Sebastião Romero

Simulação Numérica de Ondas Aquáticas Não-Lineares
Permanentes / Sebastião Romero Franco.—Porto Alegre:
PPGMAp da UFRGS, 2006.

70 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática
Aplicada, Porto Alegre, 2006.

Orientador: Farina, Leandro

Dissertação: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica
de Fluidos

Ondas em água, empinamento de ondas, método espectral.

Simulação Numérica de Ondas Aquáticas Não-Lineares Permanentes

por

Sebastião Romero Franco

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Leandro Farina

Banca examinadora:

Prof.Dr. Eloi Melo Filho
UFSC

Prof^a. Dr^a. Nara Maria Luzzi Rosauero
IPH/UFRGS

Prof. Dr. Leonardo Fernandes Guidi
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
08 de Dezembro de 2006.

Prof^a. Dr^a. Mária Cristina Varrialle
Coordenadora

À meus pais, Rosonir e Olinda Franco.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde e paz.

A minha família pelo incentivo que recebi.

A minha namorada Carine, pela paciência e compreensão.

Aos meus tios, Alceu e Cecília, com quem morei durante o período de graduação.

Ao meu orientador Leandro Farina pelos ensinamentos, orientação e amizade.

Ao professor Rudnei Dias da Cunha e Núbia Cadete Pedrosa pelo auxílio computacional.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada pela oportunidade.

Conteúdo

LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
RESUMO	xiii
ABSTRACT	xiv
1 INTRODUÇÃO	1
2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR	3
2.1 Equações Governantes	3
2.2 Condições de Contorno	6
2.2.1 Condições de Contorno Cinemáticas	6
2.2.2 Condição de Contorno Dinâmica	7
2.3 Esquematização do Problema	8
3 TEORIA LINEAR	10
3.1 Formulação do Problema Linear	10
3.2 Soluções	11
3.3 Relação de Dispersão e Velocidade de Fase	13
3.4 Classificação das Ondas em Relação à Profundidade	14
3.5 Velocidade de Grupo	19
4 O PROBLEMA FRACAMENTE NÃO-LINEAR	22
4.1 Aproximação Para o Problema de Segunda Ordem	23
4.2 Solução Para o Problema de Segunda Ordem	28
5 ONDAS NÃO-LINEARES PERMANENTES	30

5.1	Aproximação de Ondas Completamente Não-Lineares Permanentes	31
6	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	37
6.1	Solução das Equações Pelo Método de Newton	37
6.2	Verificação do Código Fortran	39
6.3	Empinamento de Ondas	42
6.3.1	Modelagem	43
6.3.1.1	Mudanças das Profundidades na Zona de Empinamento das Ondas	45
6.4	Resultados	47
6.4.1	Resultados Adicionais	54
6.4.1.1	Perfil das Ondas e seus Ângulos de Quebra	57
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	63
	APÊNDICE A MÉTODO DE NEWTON	65
A.1	Método de Newton em Dimensões Mais Altas	66
	BIBLIOGRAFIA	69

Lista de Figuras

Figura 2.1	Geometria das ondas em águas: Observe onde aplica-se as condições de contorno cinemáticas e dinâmica na superfície e no fundo da água.	9
Figura 3.1	A velocidade de onda c para ondas de comprimento variável λ em águas com profundidade uniforme h . Note o comportamento assintótico da velocidade da onda $c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ para águas profundas e $c = (gh)^{\frac{1}{2}}$ para ondas longas. De Lighthill [10].	17
Figura 3.2	Velocidade de grupo: Observe que a linha contínua é uma linha imaginária que envolve um grupo de ondas dado pelos pontilhados. A velocidade com que essa envoltória se desloca é chamada de velocidade de grupo.	19
Figura 6.1	Perfil das ondas: Na figura (a), foi graficado a linha (a) da tabela 6.1 para o caso $N = 32$, enquanto que na figura (b) e (c) foram graficados as linhas (e) e (h) da tabela 6.1, respectivamente.	41
Figura 6.2	Empinamento de uma onda quando a profundidade da água começa a diminuir	43
Figura 6.3	Procedimento numérico: Esta figura indica como modelamos a diminuição e a troca das profundidades na zona de empinamento de ondas.	45
Figura 6.4	Comparação dos resultados: Na figura (a), mostramos a altura da onda em função da profundidade da água. Enquanto que na figura (b), mostramos a velocidade da onda em função desta profundidade. A altura inicial da onda foi de $H_0^* = 93$ mm e seu período inicial foi $\tau_0^* = 1,0$ s. A linha sólida indica os dados obtidos a partir das simulações numéricas e os pontos indicam os dados obtidos experimentalmente.	48
Figura 6.5	Comparação dos resultados: Altura da onda em função da profundidade da água com $H_0^* = 39$ mm e $\tau_0^* = 1,67$ s.	50
Figura 6.6	Comparação dos resultados: Altura da onda em função da profundidade da água com $H_0^* = 42$ mm e $\tau_0^* = 3,33$ s.	51
Figura 6.7	Coefficiente de empinamento da onda em função da profundidade relativa da água. São mostradas sete figuras, referentes aos valores experimentais dados por Eagleson [5]. Os valores iniciais para as simulações, encontram-se na tabela 6.2.	54
Figura 6.8	A evolução do parâmetro $H^*/\bar{\eta}^*$ e a altura de quebra de onda computacional, $\left(\frac{H^*}{\bar{\eta}^*}\right)_b$ em função da profundidade relativa da água. Na figura (a), mostramos os resultados referentes à figura 6.4, na figura (b), referentes à figura 6.5 e na figura (c), referentes à figura 6.6	56

Figura 6.9	A evolução do parâmetro $H^*/\bar{\eta}^*$ e a altura de quebra de onda computacional, $\left(\frac{H^*}{\bar{\eta}^*}\right)_b$ em função da profundidade relativa da água referente aos dados iniciais contidos na tabela 6.2 e mostrados também na figura 6.7.	57
Figura 6.10	Perfil das ondas: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial, com $\bar{\eta}_0^* = 300$ mm, $H_0^* = 93$ mm e $\tau_0^* = 1,0$ s. A figura (II) mostra o perfil da onda no momento em que ela está prestes a quebrar, neste caso, a profundidade da água, indicada pela linha reta é $\bar{\eta}^* = 168,421$ mm.	58
Figura 6.11	Perfil das ondas: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial, com $\bar{\eta}_0^* = 300$ mm, $H_0^* = 39$ mm e $\tau_0^* = 1,67$ s. A figura (II) mostra o perfil da onda no momento em que ela está prestes a quebrar, nesse momento, a profundidade da água, indicada pela linha reta é $\bar{\eta}^* = 93,75$ mm.	59
Figura 6.12	Perfil das ondas: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial, com $\bar{\eta}_0^* = 300$ mm, $H_0^* = 42$ mm e $\tau_0^* = 3,33$ s. A figura (II) mostra o perfil da onda no momento em que ela está prestes a quebrar. Nesse momento, a profundidade da água, indicada pela linha reta é $\bar{\eta}^* = 106,25$ mm.	60
Figura 6.13	Perfil das ondas referentes ao caso (d) da tabela 6.3: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial e a figura (II) mostra o perfil da onda no momento de sua quebra.	62
Figura A.1	Método iterativo de Newton para problemas bi-dimensionais. Observe a rápida convergência da seqüência $\{x_0, x_1, \dots\}$, para a raiz z	66

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Comportamento assintótico das funções hiperbólicas	15
Tabela 3.2	Erros devido as aproximações feitas nas funções hiperbólicas contidas na fórmula da velocidade de fase da onda, segundo Kinsman [9]. Observe que c_p indica a velocidade de fase em águas profundas, enquanto que c_r e c em águas rasas e intermediárias, respectivamente.	18
Tabela 6.1	Comparação dos resultados para o quadrado da velocidade da onda quando $e^{-kQ/c} = 0,5$. Na coluna "Calc" mostramos os resultados obtidos pelo nosso código, enquanto que na coluna "ref[13]" são expostos os resultados apresentados no trabalho de Rienecker & Fenton [13].	40
Tabela 6.2	Valores iniciais da profundidade da água, da altura, período e da inclinação da onda. Estes dados serão usados para a construção da figura 6.7.	53
Tabela 6.3	Dados referentes ao perfil das ondas: Nesta tabela mostramos os valores das alturas e períodos iniciais das ondas assim como as profundidades da água e os ângulos formados nas cristas das ondas no momento em que elas quebram.	61

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{u}	vetor velocidade
P	pressão
P_a	pressão atmosférica
ρ	densidade da água
g	aceleração da gravidade
ν	viscosidade
t	tempo
ϕ	potencial de velocidades
η	elevação da superfície livre da água
h	profundidade da água
a	amplitude da onda
H	altura da onda
ω	freqüência angular da onda
τ	período da onda
λ	comprimento de onda
\mathbf{k}	vetor de onda
k	número de onda
c	velocidade de fase da onda
c_p	velocidade de fase em águas profundas
c_r	velocidade de fase em águas rasas
c_g	velocidade de grupo

ψ	função corrente
Q	vazão volumétrica
R	constante de energia
$\bar{\eta}$	profundidade média da água
(*)	indica que a variável é dimensional
D	nível de referência arbitrária
N	número de coeficientes de Fourier
B_j	coeficientes de Bernoulli
c_E	velocidade Euleriana média
c_s	velocidade de transporte de massa
F	fluxo de energia

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre ondas de gravidade. São descritas as equações que governam o movimento de ondas lineares, fracamente não-lineares e completamente não-lineares. Foi implementado um método espectral que resolve, empregando o método de Newton, as equações completamente não-lineares que descrevem o movimento das ondas estacionárias em água. Com isso, é possível simular o empinamento das ondas, ou seja, o comportamento destas quando a profundidade da água diminui. Calcula-se a altura das ondas em função da profundidade, o coeficiente de empinamento e o ângulo de quebra das ondas. Assim, pôde-se observar as relações destas propriedades com a quebra das ondas e associar os resultados numéricos com aqueles previstos pela teoria.

ABSTRACT

A study on the propagation of gravity waves is presented. The governing equations for linear, weakly nonlinear and fully nonlinear water waves are described. A spectral method has been implemented which solves, employing the Newton method, the fully nonlinear equations describing the motion of steady waves. It is then possible to simulate the shoaling of waves, that is, the behaviour of them when the water depth decreases. The wave height as a function of depth, the shoaling coefficient and the angle of wave breaking are calculated. It was possible to observe the relationship of these properties with the breaking of the waves and associate the numerical results with those predicted by the theory.

1 INTRODUÇÃO

Um dos fenômenos naturais com grande volume de pesquisa são aqueles envolvendo ondas em água. O conhecimento das propriedades das ondas aquáticas são de fundamental importância em diversas atividades sócio-econômicas.

Devido ao avanço na teoria de propagação de ondas, do grande desenvolvimento computacional e dos métodos numéricos, é possível fazer previsões do comportamento das ondas em água, viabilizando obras, como por exemplo, barragens, quebra-onas e estruturas em alto mar que podem evitar prejuízos recorrentes da força das ondas.

No capítulo 2 estudamos as equações governantes para o desenvolvimento das características das ondas em fluidos, no caso água. Para isso, partimos da equação de Navier-Stokes, fazemos algumas hipóteses adicionais e chegamos à equação de Laplace, que é a equação governante para o movimento da água. Para definirmos completamente o problema não-linear de ondas em água impomos também as condições de contorno, sendo estas as condições cinemáticas e dinâmica.

O capítulo 3 mostra a linearização das equações descritas no capítulo 2 e suas soluções. A partir destas soluções podemos descrever várias relações que definem o movimento das ondas em água como a equação que define a elevação da superfície livre da água, a relação de dispersão e as equações da velocidade de propagação das ondas, incluindo os casos limites de águas rasas e águas profundas. Depois de encontrar a velocidade com que a onda se propaga, analisamos como se propaga um grupo de ondas dispersivas, que é a velocidade com que a energia das ondas se propaga.

No capítulo 4 fazemos comentários sobre o problema fracamente não-linear e desenvolvemos o problema que modela as ondas de Stokes de segunda ordem.

No capítulo 5 tratamos ondas estacionárias. A partir das equações descritas no capítulo 2, descrevemos o problema tri-dimensional, não-linear e estacionário. Desenvolvemos também as equações que descrevem o problema bi-dimensional completamente não-linear. Para isso, usamos expansões da função corrente em séries de Fourier. Esta descreve o movimento estacionário da elevação da superfície livre da água.

O capítulo 6 inicia descrevendo a elaboração de um código em Fortran 90. Este código usa o método de Newton para encontrar uma aproximação para a solução das equações descritas no capítulo 5. A validação do código é feita de maneira comparativa com outros trabalhos. Depois de desenvolvido e validado o código, fazemos um estudo sobre empinamento de ondas. Como durante este tipo de fenômeno ocorre conservação do período e do fluxo de energia das ondas enquanto a profundidade da água diminui, primeiramente definimos as novas equações usadas e mostramos como ocorrem as mudanças de profundidades no procedimento numérico adotado. A partir daí, simulamos vários casos de empinamento de ondas e realizamos um estudo comparativo com trabalhos de diversos autores. Com isso, podemos verificar a validade de nossas simulações além de obter propriedades sobre o empinamento e quebra das ondas como a altura e o ângulo de quebra das ondas.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões sobre o trabalho e as perspectivas para os trabalhos futuros.

2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

Neste capítulo, faremos a descrição do problema não-linear de ondas de gravidade, ou seja, ondas em água onde a principal força restauradora é a aceleração da gravidade.

O principal exemplo de ondas de gravidade são ondas dispersivas, governadas pelo balanço entre a inércia do fluido e a tendência, sobre a ação da gravidade, para retornar ao estado de equilíbrio estável. Como a gravidade é uma força que atua na direção vertical e não faz distinção entre as direções horizontais, as ondas aqui consideradas são isotrópicas, ou seja, propagam-se da mesma forma em todas as direções.

Os efeitos de dispersão são de grande importância para o desenvolvimento das ondas de gravidade; eles incorporam um grupo de complicados fenômenos que aparecem na maioria das ondas aquáticas. Normalmente o fenômeno mais notado é aquele em que a velocidade de propagação da onda varia com o comprimento da onda.

Como neste trabalho consideramos apenas ondas gravitacionais, podemos desprezar a tensão superficial e as ondas capilares.

2.1 Equações Governantes

Nesta seção, veremos a descrição das equações que governam as ondas em água e formularemos um problema de valor de contorno geral, baseado na teoria descrita por Newman [12], Farina [6], Kinsman [9] e Whitham [18]. A partir daí, deduziremos características básicas e importantes sobre ondas aquáticas de superfície.

O estudo da propagação de ondas na superfície da água requer a consideração de algumas hipóteses das propriedades da água e do movimento realizado por ela. Para isso, consideramos um fluido:

- Homogêneo;
- Incompressível;
- Com movimento irrotacional.

Além disto,

- A viscosidade e a tensão superficial são desprezíveis;
- Não será considerada a forçante do vento;
- A principal força restauradora é a gravidade.

As coordenadas espaciais são denotadas aqui por (x, y, z) e as respectivas componentes do vetor de velocidade \mathbf{u} são (u, v, w) . A coordenada z está na direção vertical, ou seja, a aceleração da gravidade g está no sentido negativo de z .

Como foi assumido que o fluido é incompressível, então a densidade ρ é constante no tempo e no espaço. Assim, a equação da continuidade é

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.1)$$

A equação que indica a conservação do momento, dada pela equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

pode ser usada para descrever o movimento.

Na equação (2.2), P denota a pressão e ν a viscosidade do fluido. Como está sendo desprezado a viscosidade, o termo Laplaciano em (2.2) torna-se insignificante. Logo, a equação de Navier-Stokes se reduz a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right), \quad (2.3)$$

conhecida como equação de Euler.

Segundo Stoker [16], a lei da conservação de circulação afirma que para uma curva fechada C que se move com o fluido (isto é, C é constituída das mesmas partículas do fluido), em um fluido não-viscoso, a circulação Γ_C , definida pela integral de linha

$$\Gamma_C = \oint_C u dx + v dy + w dz,$$

é constante no tempo.

Neste trabalho vamos assumir que esta constante é zero, ou seja, $\Gamma_C \equiv 0$ para todas as curvas fechadas C . Fisicamente, isso indica que o fluido tenha estado em repouso ou teve velocidade constante em um determinado instante.

A condição $\Gamma_C \equiv 0$ mostra diretamente do teorema de Stokes, $\oint_S \mathbf{u} ds = \int_V (\nabla \times \mathbf{u}) dv$, onde S é fronteira da região V , que o rotacional de \mathbf{u} se anula globalmente, ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0. \quad (2.4)$$

Isso implica que o escoamento é irrotacional. A equação (2.4) é equivalente ao fato que existe um *potencial de velocidade* ϕ tal que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad \text{e} \\ \mathbf{u} &= \nabla \phi. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.1), temos que o potencial de velocidade satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.5)$$

2.2 Condições de Contorno

Uma vez determinado a equação de Laplace como sendo a equação governante, tem-se agora que estabelecer as equações que definem as condições de contorno cinemáticas e dinâmica. Estas condições devem ser informadas para todo o contorno do domínio.

Neste trabalho, consideramos um domínio ilimitado horizontalmente, como em um grande oceano. As fronteiras são a superfície livre e a batimetria do fundo.

2.2.1 Condições de Contorno Cinemáticas

A condição de contorno cinemática na superfície livre $z = \eta(x, y, t)$ é dada por

$$\frac{D}{Dt}(z - \eta(x, y, t)) = 0. \quad (2.6)$$

Fisicamente, isso significa que superfície livre se move com o fluido mas sempre contém as mesmas partículas dele.

Desenvolvendo as derivadas na equação (2.6), podemos expressar a *condição cinemática da superfície livre* como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t). \quad (2.7)$$

onde

$$(u, v, w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

é a velocidade na superfície livre.

Analogamente, podemos obter a condição para o contorno no fundo. Denotando este como $z = -h(x, y)$, temos que

$$\frac{D}{Dt}(z + h(x, y, t)) = 0 \quad \text{em } z = -h(x, y, t),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{em } z = -h(x, y, t). \quad (2.8)$$

que é a *condição de fronteira do fundo*.

Para fundos estacionários, ou seja, sem a dependência temporal, a equação (2.8) torna-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{em } z = -h(x, y).$$

Para fundo horizontal fixo, a condição de fronteira é

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -h(x, y).$$

Agora, para ondas em águas profundas, ou seja, onde a onda não interage com o fundo, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{quando } z = -h(x, y) \rightarrow -\infty. \quad (2.9)$$

2.2.2 Condição de Contorno Dinâmica

Nesta seção, expressaremos a condição de contorno dinâmica. Esta diz respeito às forças envolvidas na superfície de contorno do fluido.

Usamos a equação de Euler (2.3) que nos diz que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right). \quad (2.10)$$

Usando a identidade vetorial para fluidos irrotacionais

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2,$$

temos de (2.10),

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right).$$

Como $u = \nabla\phi$, a equação de Euler simplifica a

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \right) = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right). \quad (2.11)$$

Integrando (2.11) temos,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + gz = -\frac{P}{\rho} + A(t). \quad (2.12)$$

que é chamada de *equação de Bernoulli*. Observe que A depende unicamente de t e podemos supor $A(t) \equiv 0$, sem perda de generalidade.

Levando em conta que a pressão imediatamente abaixo da superfície deve ser igual à pressão atmosférica P_a na equação (2.12), obtemos a condição dinâmica da superfície livre

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + g\eta = -\frac{P_a}{\rho} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t). \quad (2.13)$$

como

$$|\nabla\phi|^2 = \nabla\phi \cdot \nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2$$

a equação dinâmica (2.13) fica

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = -\frac{P_a}{\rho} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t). \quad (2.14)$$

2.3 Esquematização do Problema

Nesta seção veremos geometricamente como aplica-se as condições de contorno no problema de ondas em água. Para isso, agruparemos a equação de Laplace juntamente com as condições de contorno no mesmo sistema de equações. Assim temos

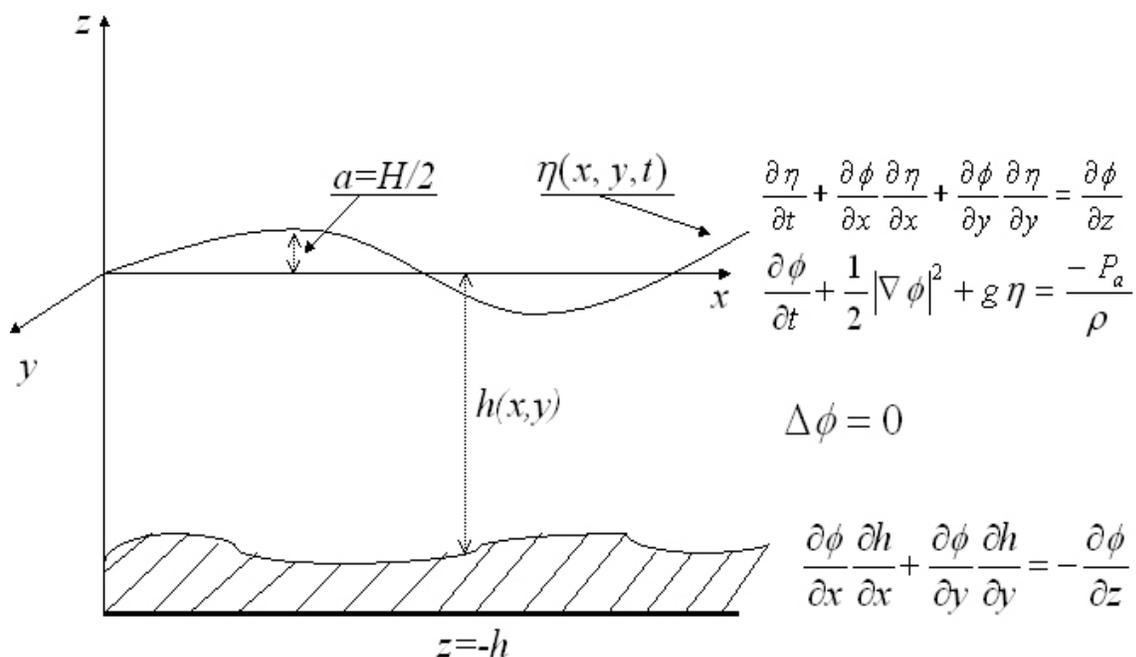


Figura 2.1: Geometria das ondas em águas: Observe onde aplica-se as condições de contorno cinemáticas e dinâmicas na superfície e no fundo da água.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 & \text{em } -\infty < z < 0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} & \text{em } z = \eta(x, y, t), \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = -\frac{P_a}{\rho} & \text{em } z = \eta(x, y, t), \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 & \text{em } z = -h(x, y). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

A figura 2.1 mostra a geometria de uma onda com a profundidade da água finita e também onde e como devemos impor as condições nas fronteiras da água. Observe que foi admitido uma onda em profundidade finita e estacionária $-h(x, y)$.

3 TEORIA LINEAR

Ondas superficiais reais são inerentemente não lineares. Porém, quando assumimos que as amplitudes das ondas são muito pequenas comparado com o comprimento de onda e com a profundidade da água, ou seja, a superfície da água é quase plana, podemos impor as condições de superfície livre em $z = 0$ e assim temos uma linearização do problema de ondas em água. Este é um procedimento bastante usado e apropriado em inúmeras situações. Neste capítulo, descrevemos resumidamente a teoria linear de ondas aquáticas.

3.1 Formulação do Problema Linear

Seguindo Whitham [18] e Farina [6], podemos expor a forma linearizada da condição de contorno cinemática (2.7) na superfície livre como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{em } z = 0, \quad (3.1)$$

enquanto que a forma linearizada da condição de contorno dinâmica (2.14), desprezando a pressão atmosférica é

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{em } z = 0. \quad (3.2)$$

Diferenciando a equação (3.2) com respeito a t e substituindo na equação (3.1), temos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0. \quad (3.3)$$

A equação de Laplace e a condição de contorno no fundo constante juntamente com a equação (3.3) formam um problema linearizado independente de η , que é expresso por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 & \text{em } -h < z < 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 & \text{em } z = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 & \text{em } z = -h. \end{cases} \quad (3.4)$$

Depois de ser encontrado o potencial de velocidade ϕ , a equação (3.2) fornece na superfície livre média $z = 0$ a seguinte relação que explicita η em termos da derivada temporal de ϕ .

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.5)$$

3.2 Soluções

Estudaremos soluções que descrevem o comportamento periódico das ondas, fazendo com que a condição de contorno exata seja automaticamente satisfeita no fundo. Para isso, supõe-se que a solução do problema linear (3.4) é dado da seguinte forma.

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \Gamma(z) \operatorname{Re}(e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t)}), \quad (3.6)$$

onde o vetor \mathbf{q} é um vetor de coordenadas $\mathbf{q} = (x, y)$.

A equação (3.6) modela uma onda de amplitude $a = \frac{H}{2}$, frequência angular $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ e comprimento de onda é $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Aqui H é a altura, τ é o período e $k = |\mathbf{k}|$ o número de onda com $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ sendo o vetor de onda.

Substituindo a equação (3.6) na equação de Laplace dada no problema (3.4), obtemos uma equação diferencial ordinária em Γ , dada por:

$$\Gamma'' - k^2 \Gamma = 0. \quad (3.7)$$

A solução geral desta EDO é dada por

$$\Gamma(z) = A \sinh kz + B \cosh kz. \quad (3.8)$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Para determiná-las impomos a condição de fundo do problema (3.4), que nos fornece $\Gamma'(z) = 0$ em $z = -h$. Daí temos que

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= Ak \cosh kz + Bk \sinh kz, \\ \Gamma'(-h) &= Ak \cosh(-kh) + Bk \sinh(-kh) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Ak \cosh(-kh) = -Bk \sinh(-kh).$$

Observe que \cosh é uma função par e \sinh é ímpar. Logo temos

$$A = B \tanh kh.$$

Assim

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= B(\tanh kh \sinh kz + \cosh kz), \\ \Gamma(z) &= B \left(\frac{\sinh kh}{\cosh kh} \sinh kz + \frac{\cosh kh}{\cosh kh} \cosh kz \right), \\ \Gamma(z) &= \frac{B}{\cosh kh} (\sinh kh \sinh kz + \cosh kh \cosh kz). \end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta,$$

temos

$$\Gamma(z) = B \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh}. \quad (3.9)$$

Diferenciando (3.6) com respeito a t e usando o fato que cosseno é uma função par, temos:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{ag}{\omega} \Gamma(z) \cos[-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t)], \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{ag}{\omega} \Gamma(z) \omega \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t), \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= ag \Gamma(z) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t). \end{aligned}$$

Agora, usando (3.5) em $z = 0$ obtemos,

$$\eta(x, y, t) = -a\Gamma(0) \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t).$$

Avaliando $\Gamma(0)$ na equação (3.9) temos

$$\Gamma(0) = B.$$

Com isso,

$$\eta = -aB \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t).$$

Pela hipótese que a é a amplitude da onda, então temos que $B = -1$. Logo,

$$\eta = a \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t). \quad (3.10)$$

A equação (3.10) descreve o comportamento periódico da onda na superfície livre em \mathbf{q} e t .

3.3 Relação de Dispersão e Velocidade de Fase

Nesta seção, usaremos as equações já descritas para desenvolver uma relação entre a frequência ω , a profundidade da água h e o número de onda k , que é chamada de *relação de dispersão*. Também encontraremos uma fórmula para a velocidade de propagação de uma onda, chamada de *velocidade de fase*.

Partindo da condição de contorno $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial z}$ em $z = 0$, descrita na seção 3.1, e usando a equação (3.6), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{ag}{\omega} \Gamma(z) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t) \right] &= -g \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{ag}{\omega} \Gamma(z) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t) \right], \\ -\omega^2 \Gamma(z) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t) &= -g \Gamma'(z) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - \omega t), \\ \omega^2 \Gamma(z) &= -g \Gamma'(z). \end{aligned}$$

De (3.9), temos

$$-\omega^2 B \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh} = -gkB \frac{\sinh[k(z+h)]}{\cosh kh},$$

e em $z = 0$, temos

$$\omega^2 \frac{\cosh kh}{\cosh kh} = gk \frac{\sinh kh}{\cosh kh},$$

ou seja,

$$\omega^2 = gk \tanh kh. \quad (3.11)$$

Esta equação é a chamada *relação de dispersão* para ondas lineares em profundidade finita. Ela expressa uma única relação entre ω , k e h . Se duas dessas variáveis são conhecidas, a terceira estará unicamente definida.

Vejamos agora a velocidade de propagação de uma onda, ou velocidade de fase da onda, que por definição é dada por

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\omega}{k}. \quad (3.12)$$

Se usarmos a relação de dispersão (3.11), temos

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh. \quad (3.13)$$

A equação (3.13) mostra uma dependência da velocidade da onda com a profundidade da água e o número de onda. Para dados valores de k ou ω , essa equação mostra que a onda se propaga mais rapidamente em águas de maior profundidade. Essa dependência da velocidade com o número de onda na equação (3.13) e também as dependências descritas na equação (3.11) caracterizam *ondas dispersivas*. No caso de ondas em água, como as ondas longas se propagam mais rapidamente que ondas curtas, para ondas se propagando longe da região onde foram geradas, as ondas mais longas vão precedendo progressivamente as mais curtas. Assim temos a dispersão gradativa do campo de ondas.

3.4 Classificação das Ondas em Relação à Profundidade

Devido à influência da profundidade da água nas equações apresentadas até o momento podemos classificar as ondas de gravidade como ondas em águas rasas, intermediárias e profundas. Esta classificação será útil no capítulo 6, quando

investigarmos empinamento de ondas. Usaremos aproximações assintóticas para as funções hiperbólicas contidas nas equações que definem o movimento e a velocidade das ondas.

Tabela 3.1: Comportamento assintótico das funções hiperbólicas

	$kh \rightarrow 0$	$kh \rightarrow -\infty$
$\sinh kh$	kh	$e^{kh}/2$
$\cosh kh$	1	$e^{kh}/2$
$\tanh kh$	kh	1

A tabela 3.1 mostra os comportamentos assintóticos das funções hiperbólicas. Assim, quando $kh \rightarrow 0$, temos as seguintes aproximações para a relação de dispersão e a velocidade de fase da onda. Partindo da equação (3.11), temos que a relação de dispersão em águas rasas torna-se,

$$\omega^2 = gk(kh). \quad (3.14)$$

Agora, usando a equação (3.13), a velocidade de propagação da onda é aproximada da seguinte maneira,

$$c^2 = \frac{g}{k}kh,$$

ou seja,

$$c = (gh)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

Esta equação é chamada de *velocidade de fase da onda em águas rasas*.

As aproximações quando $kh \rightarrow \infty$ representam ondas em águas profundas, ou seja, a batimetria do fundo não influencia no desenvolvimento da onda. Faremos novamente a substituição dos valores assintóticos das funções hiperbólicas na relação de dispersão. Assim temos

$$\omega^2 = gk, \quad (3.16)$$

que é a relação entre frequência e número de onda para ondas de gravidade em águas profundas, chamada de *relação de dispersão para águas profundas*. Esta relação pode

ser reescrita em termos da velocidade de fase da onda c . Para isso usamos a equação (3.13), e temos

$$c^2 = \frac{g}{k}$$

ou

$$c = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

Como $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, podemos escrever esta equação como

$$c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Esta dependência da velocidade da onda com a raiz quadrada do comprimento da onda implica em uma substancial variação da velocidade com o comprimento de onda. Isso reforça a propriedade que diz que ondas de maior comprimento se propagam mais rapidamente, em águas profundas.

Agora mostraremos alguns valores que são considerados limites para que a profundidade da água em relação ao comprimento de onda façam com que $kh \rightarrow 0$ e $kh \rightarrow -\infty$ na tabela 3.1.

Seguindo Lighthill [10], para valores de $kh > 1,75$, temos $0,97 < \tanh^{\frac{1}{2}}(kh) < 1$, ou seja, $\tanh^{\frac{1}{2}}(kh) \approx 1$. Assim, da equação (3.13) chegamos às equações (3.17) e (3.18). Isso significa que $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ou $\lambda(kh) = 2\pi h$ implica em $2\pi h > 1,75\lambda$ ou $h > 0,28\lambda$. Então, para $h > 0,28\lambda$ podemos considerar que a onde está em águas profundas, ou seja, que a batimetria do fundo não influencia no desenvolvimento das ondas.

Por outro lado, para valores de $kh < 0,44$, temos $0,97 < \frac{\tanh^{\frac{1}{2}}(kh)}{(kh)^{\frac{1}{2}}} < 1$, ou seja, $\tanh(kh) \approx kh$. Assim, da equação (3.13) chegamos à equação (3.15). Isso significa que $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ implica em $2\pi h < 0,44\lambda$ ou $h < 0,07\lambda$. Ou seja, para $h < 0,07\lambda$ podemos considerar ondas em águas rasas.

Assim, podemos dizer que em profundidades entre $0,07\lambda$ e $0,28\lambda$ (correspondendo a comprimentos de onda entre $3,5h$ e $14h$) a velocidade de fase se distancia significativamente de suas formas limites dadas nas equações (3.15) e (3.17),

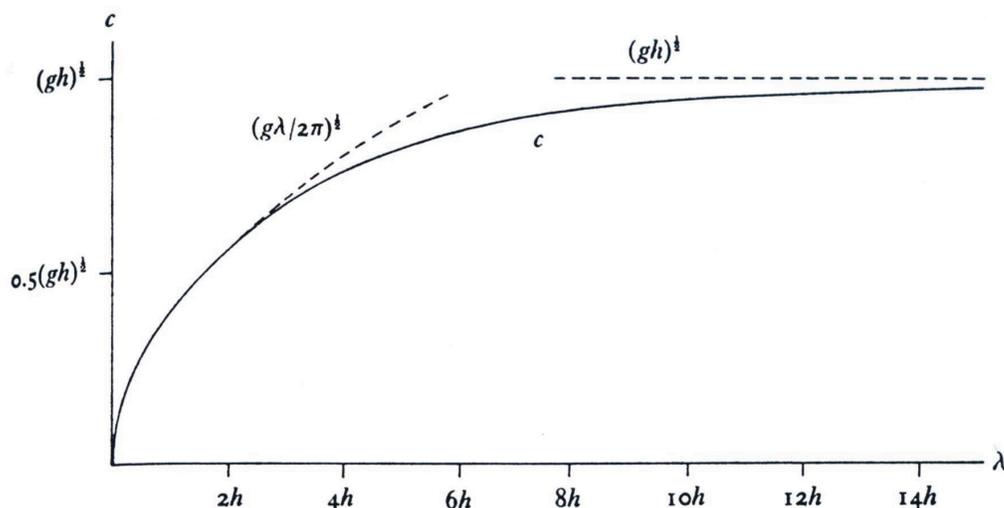


Figura 3.1: A velocidade de onda c para ondas de comprimento variável λ em águas com profundidade uniforme h . Note o comportamento assintótico da velocidade da onda $c = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ para águas profundas e $c = (gh)^{\frac{1}{2}}$ para ondas longas. De Lighthill [10].

para ondas em águas rasas e profundas, respectivamente. Neste caso, as ondas são consideradas em águas intermediárias. A figura (3.1) evidencia bem esse fato.

Nesta figura, note o comportamento assintótico da velocidade da onda em relação à profundidade da água, que está em função do comprimento de onda. Nesta condição, a profundidade da água é chamada de *profundidade relativa da água*, ou seja, a razão entre a profundidade da água pelo comprimento de onda.

A profundidade relativa da água nos informa se a onda encontra-se em águas rasas, intermediárias ou profundas. Segundo a teoria de Lighthill [10] vista acima, os valores limitantes da profundidade relativa são $h/\lambda > 0,28$ para águas profundas, $h/\lambda < 0,07$ para águas rasas e no intervalo $0,07 < h/\lambda < 0,28$ se caracteriza o regime de águas intermediárias.

Portanto, quando fazemos aproximações para as funções hiperbólicas contidas nas equações que governam o desenvolvimento das ondas em água, estamos cometendo erro. Para diminuir este erro, devemos ter o cuidado de usar um adequado

valor limite para a profundidade relativa, ou seja, devemos diminuir o valor limite da profundidade relativa em águas rasas e aumentar esse valor em águas profundas.

Tabela 3.2: Erros devido as aproximações feitas nas funções hiperbólicas contidas na fórmula da velocidade de fase da onda, segundo Kinsman [9]. Observe que c_p indica a velocidade de fase em águas profundas, enquanto que c_r e c em águas rasas e intermediárias, respectivamente.

Erro em c/c_p ou c/c_r devido as aproximações hiperbólicas em (%)	Profundidade Relativa (h/λ)	
	Águas profundas	Águas rasas
0,5	0,474	0,006
1,0	0,417	0,010
2,0	0,358	0,019
5,0	0,277	0,048
10,0	0,211	0,095

Na tabela 3.2, Kinsman [9] mostrou os erros devido às aproximações feitas nas funções hiperbólicas que estão nas equações da velocidade de fase da onda. Estes erros foram calculados pela razão entre as velocidade de fase da onda em águas intermediárias e profundas, assim como pela razão entre as velocidade de fase da onda em águas intermediárias e rasas.

Observe que se adotarmos os valores limites da profundidade relativa citados por Lighthill, $h/\lambda > 0,07$ e $h/\lambda < 0,28$, os erros são de aproximadamente 5%.

Verificando a tabela 3.2 vemos que outros valores para a profundidade relativa produzem erros menores nas aproximações assintóticas da velocidade de fase da onda. Por exemplo, os valores sugeridos no Manual de Engenharia Costeira (*Coastal Engineering Manual*) [2], que levam em conta os seguintes valores limites da profundidade relativa para considerar ondas em águas rasas, intermediárias e profundas.

- Ondas em águas rasas: $\frac{h}{\lambda} < 0,05$.
- Ondas em águas intermediárias: $0,05 < \frac{h}{\lambda} < 0,5$.

- Ondas em águas profundas: $\frac{h}{\lambda} > 0,5$.

Observe que o erro cometido quando fazemos aproximações nas equações que descrevem a velocidade de fase das ondas em águas profundas é menor que 0,5%, enquanto que o erro cometido ao assumir ondas em águas rasas é menor que 5%.

3.5 Velocidade de Grupo

O movimento de um grupo de ondas pode ser considerado como o movimento de um trem de ondas senoidais. Quando um grupo de ondas se propaga na água, cria-se uma linha imaginária que delimita o grupo. Essa linha encontra-se variando lentamente no espaço e no tempo e essa variação periódica forma vários pacotes de ondas. A velocidade com que essa linha imaginária envoltória se propaga chama-se *velocidade de grupo*.

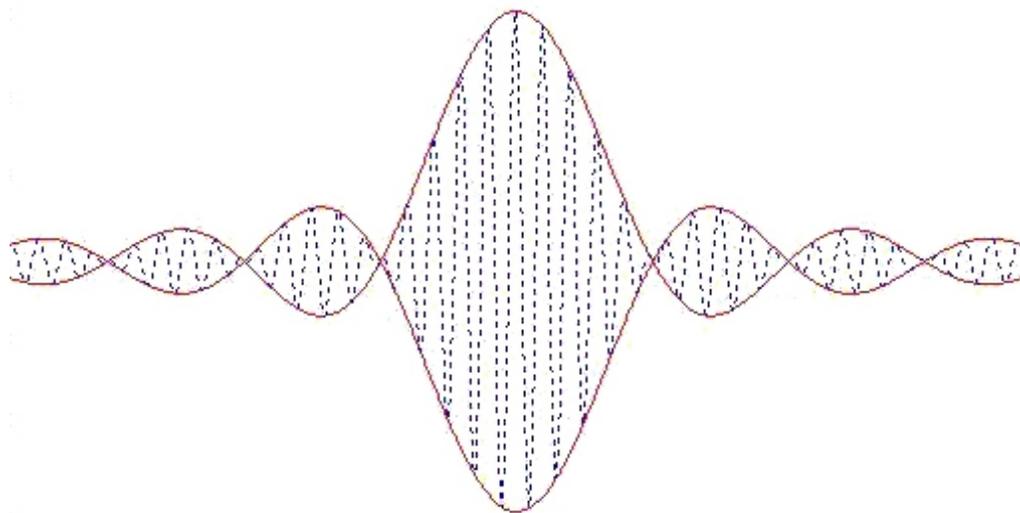


Figura 3.2: Velocidade de grupo: Observe que a linha contínua é uma linha imaginária que envolve um grupo de ondas dado pelos pontilhados. A velocidade com que essa envoltória se desloca é chamada de velocidade de grupo.

A figura 3.2 mostra como ocorre o deslocamento dos pacotes de ondas. Observe que a curva com linha contínua representa a linha imaginária que envolve

os pacotes de ondas, enquanto que as curvas pontilhadas representam as ondas separadamente.

Se observarmos em uma situação real o deslocamento de um grupo de ondas na água, veremos que a onda que está na frente do grupo vai diminuindo e some de repente! a frente é então ocupada pela onda que seguia logo atrás, a qual continuará também a diminuir de altura e desaparece. Em contrapartida, se seguirmos uma onda que progride atrás do grupo, verificamos que uma outra onda nasce atrás dela e vai progressivamente crescendo e depois também tende a desaparecer. Esse fenômeno continua se repetindo.

O fato das ondas desaparecerem à frente de um grupo de ondas e surgirem outras ondas atrás do mesmo grupo ocorre pela conservação de energia no sistema. Por isso, a velocidade de grupo é a velocidade de transporte de energia das ondas. Isso torna a velocidade de grupo mais importante que a velocidade de fase, de certa forma.

Neste trabalho vamos examinar como ocorre o deslocamento de um grupo de ondas, verificando principalmente as relações existentes entre a velocidade de fase e a velocidade de grupo.

Seguindo Lighthill [10], a velocidade de propagação de um grupo de ondas é definida como

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.19)$$

Usando a relação de dispersão (3.11), temos que a velocidade de grupo pode ser expressa como

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{d}{dk} (gk \tanh kh)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (gk \tanh kh)^{-\frac{1}{2}} \left[g \tanh kh + \frac{gkh}{\cosh^2(kh)} \right] \end{aligned}$$

e usando também a velocidade de fase da onda (3.13), temos que

$$c_g = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] c. \quad (3.20)$$

Esta é a relação entre velocidade de um grupo de ondas e velocidade de uma determinada onda desse grupo em águas de profundidade uniforme h . Observe que a velocidade com que o grupo de ondas se propaga depende da frequência da onda, da profundidade da água e é proporcional à velocidade de fase da onda.

No caso de águas profundas, a relação de dispersão é dada por (3.16). Assim a velocidade de grupo pode ser escrita como,

$$c_g = \frac{d}{dk}(gk)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como a velocidade de fase em águas profundas é $c = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$, temos

$$c_g = \frac{1}{2}c. \quad (3.21)$$

Ou seja, a velocidade de um grupo de ondas em águas profundas é igual a metade da velocidade de fase de uma das ondas pertencentes ao grupo.

Para águas rasas também podemos expressar a velocidade de grupo de uma maneira especial. Assim, usando a equação (3.14), temos

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = (gh)^{\frac{1}{2}}.$$

Observando a equação (3.15), chegamos a seguinte expressão para velocidade de grupo em águas rasas.

$$c_g = c. \quad (3.22)$$

Assim, em águas rasas, a velocidade de fase e a velocidade de grupo das ondas coincidem.

4 O PROBLEMA FRACAMENTE NÃO-LINEAR

Veremos agora um desenvolvimento do problema fracamente não-linear para ondas em águas profundas.

Seguindo Stoker [16] e Newman [12], faremos aproximações para o problema de ondas em água descrito na seção 2.3, que é dado por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{em } -\infty < z < 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad \text{em } z = \eta(x, y, t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{quando } h(x, y, -\infty) \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Observe que na equação (4.2) foi desprezada a pressão atmosférica.

Veremos que a teoria de ondas de pequena amplitude pode ser obtida como uma aproximação da teoria das ondas. Para isto, faremos algumas hipóteses adicionais como supor que a velocidade das partículas da água, a elevação da superfície livre $z = \eta(x, y, t)$, assim como todas as suas derivadas, são pequenas quantidades. Desta forma, podemos assumir que o potencial de velocidade $\phi(x, y, \eta, t)$ e a elevação da superfície da água $\eta(x, y, t)$ possuem a seguinte expansão em séries de potências com respeito ao parâmetro ε :

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} + \dots, \quad (4.5)$$

e

$$\eta = \eta^{(0)} + \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \dots. \quad (4.6)$$

4.1 Aproximação Para o Problema de Segunda Ordem

Para facilitar os cálculos desenvolveremos aqui as expansões de ϕ e η , segundo as respectivas equações (4.5) e (4.6), apenas até $O(\varepsilon^2)$ e depois substituiremos no sistema de equações (4.1-4.2-4.3) para obtermos as equações que formulam o problema segundo a teoria de Stokes ¹.

Como ϕ se refere a $z = \eta$ e $\eta = \eta(x, y, t)$, para calcular as derivadas da função ϕ em relação a x, y e t , devemos usar a regra da cadeia.

Para fazer as aproximações, expandiremos η em série de Taylor em torno de $z = 0$ na equação (4.2). Assim temos

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) \quad \text{em} \quad z = \eta(x, y, t)$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right]_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) \right]_{z=0} + \dots \quad \text{em } z = 0,$$

$$= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) - \frac{1}{g} \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + O(\varepsilon^3) \quad \text{em } z = 0$$

Assim,

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{g} \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + O(\varepsilon^3)$$

Substituindo os termos da equação anterior em séries de potência de acordo com as equações (4.5) e (4.6), temos

$$\eta^{(0)} + \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + O(\varepsilon^3) =$$

¹George Gabriel Stokes (1819-1903) foi um dos primeiros pesquisadores nesta área. Ele teve interesse particular em ondas de gravidade, periódicas e bi-dimensionais em água de profundidade infinita.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{g} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right) \right] - \\
&\quad \frac{1}{2g} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \right) \right]^2 - \\
&\quad \frac{1}{2g} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} \right) \right]^2 - \\
&\quad \frac{1}{2g} \left[\varepsilon \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \right]^2 - \frac{1}{g} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(0)} + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(1)} \right] + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

como estamos interessados em termos $O(\varepsilon^2)$, fazemos os cálculos e desprezamos os valores de maior ordem. Assim temos:

$$\begin{aligned}
&\eta^{(0)} + \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + O(\varepsilon^3) = \\
&= -\frac{\varepsilon}{g} \left[\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(0)} \right] - \\
&\quad \frac{\varepsilon^2}{g} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(1)} + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(0)} \right] + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, expandindo em série de potências os termos da equação (4.3)

temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + O(\varepsilon^3) &= \\ &= \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x} \right] \cdot \\ &\quad \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \right) \right] + \\ &\quad \left[\varepsilon \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} \right) \right] \cdot \\ &\quad \left[\frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial y} \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Desenvolvendo os cálculos e desprezando os termos de ordem maior que $O(\varepsilon^2)$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} + O(\varepsilon^3) &= \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \varepsilon \left[\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Desenvolvendo os cálculos e fazendo igualdade de polinômios em potências de ε , temos:

Para ε^0

$$\eta^{(0)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} = 0$$

Para ε^1

$$\eta^{(1)} = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(0)} \right]$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y}$$

Para ε^2

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} = & -\frac{1}{g} \left[\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(1)} + \\ & \left. \left(\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} \right) \eta^{(0)} \right] + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = & \left[\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x} + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y} \right) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Reescrevendo os sistemas de ordem $O(\varepsilon^1)$ e $O(\varepsilon^2)$, levando em conta que $\eta^{(0)} = 0$, $\frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial t} = 0$ e as novas funções $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$ são harmônicas, temos

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \Delta \phi^{(1)} = 0 & em \quad -\infty < z < 0 \\ \eta^{(1)} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \\ \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} \Delta \phi^{(2)} = 0 & em \quad -\infty < z < 0 \\ \eta^{(2)} = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \eta^{(1)} \right] \\ \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y} \end{cases} \quad (4.8)$$

4.2 Solução Para o Problema de Segunda Ordem

Apresentaremos nesta seção os passos para encontrar uma solução para o problema (4.8) de segunda ordem de não-linearidade em águas profundas. A partir desta solução mostramos também a relação entre altura, período e número de onda, que é a relação de dispersão para ondas fracamente não-lineares em água.

Para facilitar o desenvolvimento, seguindo Yuen & Lake [21], assumimos ondas planas na direção y . Assim, podemos considerar um caso particular como sendo o problema bi-dimensional.

Como estamos interessados em encontrar soluções que descrevem o comportamento periódico das ondas, fazendo com que a equação governante, Laplace e as condições de contorno cinemáticas e dinâmica sejam satisfeitas, assumiremos que a solução do problema fracamente não-linear é dado da seguinte forma:

$$\phi(x, z, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j \Gamma_j(z) \text{sen}[j(kx - \omega t)] \quad (4.9)$$

e

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^N \eta_j \cos[j(kx - \omega t)]. \quad (4.10)$$

Onde N é a ordem de não-linearidade do problema, ϕ_j e η_j são constantes.

Levando em conta que os $\phi^{(k)}$ são harmônicos e usando a condição de fundo, que é automaticamente satisfeita, encontraremos as expressões para as funções $\Gamma_j(z)$.

Desenvolvemos as derivadas de $\phi^{(k)}(x, z, t)$, $\eta^{(k)}(x, t)$ e substituindo nas equações do problema (4.7) e (4.8) chegamos que

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, z, t) &= \frac{\omega a}{k} e^{kz} \text{sen}(kx - \omega t), \\ \phi^{(2)}(x, z, t) &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}(x, t) &= a \cos(kx - \omega t), \\ \eta^{(2)}(x, t) &= \frac{1}{2}ka^2 \cos[2(kx - \omega t)].\end{aligned}$$

Assim a solução fracamente não-linear para o problema de segunda ordem em águas profundas é dado como sendo

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2}ka^2 \cos[2(kx - \omega t)] \quad (4.11)$$

e

$$\phi(x, z, t) = \frac{\omega a}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t). \quad (4.12)$$

onde a é a amplitude da onda.

Expandindo a função $\omega(k)$ pode ser mostrado que a relação de dispersão para a solução de segunda ordem nas equações (4.11) e (4.12) é dada por

$$\omega = (gk)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 a^2 \right). \quad (4.13)$$

Note que a equação (4.13) é uma correção para as soluções lineares apresentadas no capítulo 3 e que também há dependência na amplitude da onda.

5 ONDAS NÃO-LINEARES PERMANENTES

O problema de ondas estacionárias em água é um dos problemas mais clássicos da matemática aplicada. Existe um grande volume de literatura nessa área, tanto na área numérica, que permite resolver problemas altamente não lineares, como na analítica.

Como estamos interessados no problema não-linear estacionário, seguindo Groves [8] e Yeung [20], consideramos o problema descrito na seção 2.3 e fazemos algumas hipóteses adicionais, como

$$\begin{aligned}\eta(x, y, t) &= \eta(x - c_1 t, y - c_2 t), \\ \phi(x, y, z, t) &= \phi(x - c_1 t, y - c_2 t, z),\end{aligned}$$

que significa que a onda tem uma translação uniforme na direção horizontal xy , com velocidade $c = (c_1, c_2)$. Pelo fato de não trabalharmos com o tempo, a partir daqui denotamos x e y como abreviações para $x - c_1 t$ e $y - c_2 t$, respectivamente. Deste modo podemos escrever as equações não-lineares governantes para ondas tri-dimensionais estacionárias como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 & \text{em } -h < z < \eta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 & \text{em } z = \eta(x, y), \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = -\frac{P_a}{\rho} & \text{em } z = \eta(x, y), \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 & \text{em } z = -h, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Para o problema de ondas bi-dimensionais estacionárias, faremos uma formulação em termos da função corrente ψ . Para isso, assumimos a partir daqui

que a coordenada x indica a direção horizontal, y indica a direção vertical e a origem do sistema cartesiano encontra-se no fundo da água. Lembrando que (u, v) são as componentes do vetor velocidade \mathbf{u} , a função corrente ψ é definida de tal forma que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (5.2)$$

e

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.3)$$

Observe que $\psi(x, y)$ satisfaz a equação da continuidade (2.1) e a equação de Laplace (2.5), então

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } 0 < y < \eta(x). \quad (5.4)$$

As condições de contorno que devem ser satisfeitas pela função de corrente são

$$\psi(x, 0) = 0, \quad (5.5)$$

na origem (fundo) e

$$\psi(x, \eta(x)) = -Q, \quad (5.6)$$

na superfície livre $y = \eta(x)$. Na equação (5.6) Q é a vazão volumétrica por unidade de comprimento. Neste caso, assumimos que o fluxo movendo-se da direita para a esquerda estará no sentido negativo. Na superfície livre, a pressão é constante, assim, pela equação de Bernoulli temos

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] + g\eta = R, \quad (5.7)$$

onde R é a energia total do sistema.

5.1 Aproximação de Ondas Completamente Não-Lineares Permanentes

Faremos agora a apresentação do problema de ondas estacionárias completamente não-lineares, baseado no trabalho de Rienecker & Fenton [13]. Estes

autores usaram um método espectral para aproximar o sistema de equações não lineares e o resolveram numericamente usando o método de Newton.

Neste trabalho, a partir daqui, o símbolo (*) significa que a variável é dimensional. Todas as variáveis são adimensionalizadas com respeito à aceleração da gravidade, g^* e à profundidade média da água, $\bar{\eta}^*$. Para isso, assumimos que a profundidade média da água é finita. Assim, faremos as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{\bar{\eta}^*}, & y &= \frac{y^*}{\bar{\eta}^*}, \\ \eta &= \frac{\eta^*}{\bar{\eta}^*}, & \psi &= \frac{\psi^*}{\sqrt{g^* \bar{\eta}^{*3}}}, \\ Q &= \frac{Q^*}{\sqrt{g^* \bar{\eta}^{*3}}}, & R &= \frac{R^*}{g^* \bar{\eta}^*}. \end{aligned}$$

Outras variáveis adimensionalizadas a serem introduzidas no problema são:

- a velocidade de fase $c = \frac{c^*}{\sqrt{g^* \bar{\eta}^*}}$,
- o número de onda $k = k^* \bar{\eta}^* = \frac{2\pi}{\lambda^*} \bar{\eta}^*$, onde λ^* é o comprimento de onda,
- o período da onda $\tau = \tau^* \sqrt{\frac{g^*}{\bar{\eta}^*}}$,
- o nível de referência arbitrário $D = \frac{D^*}{\bar{\eta}^*}$.

Se a simetria da onda pela crista for explorada, $\psi(x, y)$ pode ser escrita como

$$\psi(x, y) = B_0 y + \sum_{j=1}^N B_j \frac{\sinh jky}{\cosh jkD} \cos jkx, \quad (5.8)$$

satisfazendo a equação de Laplace e as condições de contorno (5.5) e (5.6). Pela condição de contorno (5.5), os coeficientes B_0, B_1, \dots, B_N são constantes para uma onda particular. Como hipótese, para resolvermos computacionalmente o problema, deveremos fazer N finito, ou seja, vamos truncar a série e obtermos uma solução aproximada para a solução. Para melhorar a solução obtida, devemos truncar a

série depois de ocorrer convergência da mesma, assim diminuiremos os erros obtidos através do truncamento desta. Assim a equação (5.6) torna-se,

$$B_0\eta + \sum_{j=1}^N B_j \frac{\sinh jk\eta}{\cosh jkD} \cos jkx = -Q, \quad (5.9)$$

e a equação (5.7) assume a forma

$$\frac{1}{2} \left[B_0 + k \sum_{j=1}^N B_j \frac{\cosh jk\eta}{\cosh jkD} \cos jkx \right]^2 + \frac{1}{2} \left[k \sum_{j=1}^N B_j \frac{\sinh jk\eta}{\cosh jkD} \cos jkx \right]^2 + \eta = R, \quad (5.10)$$

para todo x .

Nestas aproximações, observamos que os argumentos de $\sinh jk\eta$, $\cosh jk\eta$ e $\cosh jkD$ crescem muito para grandes valores de j . Isso pode causar indesejáveis erros numéricos antes de efetuarmos o cálculo da divisão, na equação (5.10). Para evitar esse tipo de problema, podemos aproximar os coeficientes de Fourier como

$$\frac{\cosh jk\eta}{\cosh jkD} \sim \frac{\sinh jk\eta}{\cosh jkD} \sim \exp[jk(\eta - D)], \quad (5.11)$$

para grande valores de j .

O Parâmetro D é escolhido próximo a η . Segundo Rienecker & Fenton [13], uma boa escolha é $D = 1$, correspondendo à profundidade relativa que caracteriza o regime de águas intermediárias. Observe que as adimensionalizações de D^* e η^* são idênticas. Logo, quando tomamos o valor do nível de referência arbitrário $D = 1$, estamos tomando o valor dimensional como $D^* = \bar{\eta}^*$, ou seja, o valor de D^* é aproximadamente o valor médio de η^* . Vale lembrar que a origem está no fundo da água, então, a profundidade média $\bar{\eta}^*$ está próxima da elevação da superfície da água η^* .

Para resolver o problema numericamente, as equações (5.9) e (5.10) devem ser satisfeitas em $2N$ pontos. Esses serão distribuídos igualmente espaçados sobre um comprimento de onda. Por simetria, podemos trabalhar com apenas $N + 1$ pontos, da crista ao cavado da onda.

Seja $\eta_m = \eta(x_m)$ onde $x_m = \frac{m\lambda}{2N}$, $m = 0, 1, \dots, N$. Como $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, então, $kx_m = \frac{m\pi}{N}$. Assim que as equações (5.9) e (5.10) serão escritas como,

$$B_0\eta_m + \sum_{j=1}^N B_j \frac{\sinh jk\eta}{\cosh jkD} \cos\left(\frac{jm\pi}{N}\right) + Q = 0 \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, N, \quad (5.12)$$

e

$$\frac{1}{2}u_m^2 + \frac{1}{2}v_m^2 + \eta_m - R = 0, \quad (5.13)$$

para $m = 0, 1, \dots, N$, onde

$$u_m = B_0\eta_m + k \sum_{j=1}^N jB_j \frac{\cosh jk\eta}{\cosh jkD} \cos\left(\frac{jm\pi}{N}\right) = u(x_m, y_m) \quad \text{e,}$$

$$v_m = k \sum_{j=1}^N jB_j \frac{\sinh jk\eta}{\cosh jkD} \sin\left(\frac{jm\pi}{N}\right) = v(x_m, y_m).$$

Até aqui, já definimos $2N + 2$ equações não lineares. Porém, estas envolvem $2N + 5$ variáveis, que são, η_j , ($j = 0, 1, \dots, N$), B_j ($j = 0, 1, \dots, N$), k , Q e R . Assim, para obtermos uma solução, deveremos especificar mais três equações.

Usando o fato que as variáveis são adimensionalizadas com respeito à profundidade média da água $\bar{\eta}^*$, podemos definir uma equação que envolve a elevação da superfície livre η . Lembrando que a profundidade média adimensionalizada é unitária, temos

$$\int_S \eta dS = \frac{\lambda}{2}, \quad (5.14)$$

onde S é a distância horizontal contada da crista ao cavado da onda. Os limites inferior e superior são x_0 e x_N , referente às abscissas da crista e do cavado da onda, respectivamente.

Usando a regra trapezoidal de integração numérica para aproximar (5.14), temos

$$\frac{1}{2N} \left[\eta_0 + \eta_N + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \right] - 1 = 0. \quad (5.15)$$

Ainda faltam especificar duas equações. Contudo, se atribuirmos valores para Q e R , podemos resolver de maneira única esse sistema de equações, com $2N + 3$ equações e $2N + 3$ incógnitas.

Contudo, para problemas práticos, geralmente são dados os valores da altura e período da onda, H e τ , respectivamente. Assim, ao invés de fornecermos os valores de Q e R , podemos atribuir duas equações adicionais para definir H e τ . Desta forma, temos

$$\eta_0 - \eta_N - H = 0, \quad (5.16)$$

onde η_0 provém da elevação da superfície na crista e η_N do cavado da onda. Esta equação sai diretamente da definição da altura onda, ou seja, a altura da onda é a distância do cavado à sua crista. A equação que envolve o período da onda, por sua vez, é dada por,

$$kc\tau - 2\pi = 0. \quad (5.17)$$

Esta equação é retirada de $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, onde $\lambda = c\tau$. Observe que nesta equação foi usada mais uma variável, a velocidade da onda c . Logo, devemos definir mais uma equação ao nosso sistema.

Nessa próxima equação, indicaremos qual será a velocidade com que a onda viaja. Para isso, deveremos especificar a velocidade Euleriana c_E (*corrente*), por todo o fluido. Em águas estacionárias, a velocidade em cada nível do fluido é o valor negativo de B_0 . Quando consideramos o deslocamento relativo da onda, para algum lugar que esta se move, a velocidade da onda c está implícita, tal que, para ondas estacionárias podemos dizer que a velocidade Euleriana média é $c_E = c + B_0$. Assim, se a corrente c_E é especificada, c satisfaz a equação

$$c - c_E + B_0 = 0. \quad (5.18)$$

Alternativamente, é apropriado especificar a velocidade média de partícula (que é a velocidade de transporte de massa, aqui denotada por c_s). Em águas estacionárias com a profundidade média unitária, a vazão volumétrica Q é igual a velocidade média com que a partícula de fluido se move abaixo da onda. Portanto,

a velocidade de transporte de massa pode ser dado para esse tipo de ondas como $c_s = c - Q$, tal que, se a velocidade de transporte de massa c_s for especificado, c satisfaz a equação

$$c - c_s - Q = 0. \quad (5.19)$$

Como já mencionamos, para resolver esse problema, não necessariamente os valores de H e τ devem ser especificados. Outras duas variáveis, no caso Q e R , poderão ser dadas em seus lugares. Caso τ seja especificado, então pela equação (5.17), obrigatoriamente um dos valores c_E ou c_s devem ser dados para serem usados nas equações (5.18) ou (5.19).

Por fim, as $2N + 6$ equações (5.12)-(5.19) formam um sistema fechado de variáveis $(\eta_j, B_j(j = 0, 1, \dots, N), c, k, Q, R)$.

6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para resolver o sistema de equações não-lineares (5.12)-(5.19) descrito na seção 5.1, implementamos um código em Fortran, baseando-se no método iterativo de Newton.

A escolha deste método se dá pelo fato deste poder fornecer uma boa aproximação, necessitando de poucas iterações e conseqüentemente de um pequeno esforço computacional. Uma descrição mais detalhada deste método encontra-se no apêndice, onde seguindo Burden & Faires [1], fazemos um detalhado desenvolvimento para resolver sistemas de equações não-lineares no \mathbb{R}^n .

6.1 Solução das Equações Pelo Método de Newton

O sistema de equações não-lineares (5.12)-(5.19) pode ser escrito como

$$f_i(\eta_j, B_j, c, k, Q, R) = 0, \quad i, j = 1, \dots, 2N + 6, \quad (6.1)$$

onde, para

- $i = 1, \dots, N + 1$, f_i é representado pela equação (5.12);
- $i = N + 2, \dots, 2N + 2$, f_i é representado pela equação (5.13);
- f_{2N+3} é representado pela equação (5.15);
- f_{2N+4} é representado pela equação (5.16);
- f_{2N+5} é representado pela equação (5.17);
- f_{2N+6} é representado pela equação (5.18) ou (5.19).

Esse sistema de equações pode ser resolvido pelo método iterativo de Newton (ou Newton-Rapson).

Para simplificar denotaremos

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{2N+6}) = f_i(\eta_j, B_j, c, k, Q, R)$$

onde F é uma função diferenciável, como mostrado no apêndice.

Pelo método de Newton-Rapson, a solução no passo $p + 1$ é dada por

$$\{x^{(p+1)}\} = \{x^{(p)}\} - [J]^{-1}\{f^{(p)}\}$$

onde,

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2N + 6).$$

Todas as derivadas da matriz jacobiana $[J]$ podem ser obtidas de uma forma fechada, baseada nas equações dadas por f . Para obtermos maior estabilidade numérica, seguindo Fenton [7], que resolveu um problema similar a este, faremos os cálculos dessa matriz numericamente.

A aproximação inicial para a solução é assumida como sendo uma onda linear senoidal, dada por

$$\begin{aligned} \eta_m &= 1 + \frac{1}{2}H \cos\left(\frac{m\pi}{N}\right) \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, N, \\ B_0 &= -c, \\ B_1 &= -\frac{1}{4} \frac{H}{ck} \\ B_j &= 0 \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, N, \\ Q &= c, \\ R &= 1 + \frac{1}{2}c^2, \end{aligned}$$

onde c e k são encontrados iterativamente a partir de

$$k = \frac{2\pi}{\tau c}, \quad c = \left\{ \frac{\tanh k}{k} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

com a suposição inicial de $c = 1$, correspondendo à aproximação de ondas longas.

6.2 Verificação do Código Fortran

Para verificar a validade do código que resolve um sistema de equações transcendentais não lineares através do método de Newton, utilizando como linguagem o Fortran 90, comparamos os resultados obtidos através das equações desenvolvidas na seção 5.1 com os resultados apresentados por Rienecker & Fenton [13], que por sua vez, foi comparado com os resultados de Cokelet [3].

Como já vimos na seção 6.1, uma boa condição inicial para resolver o problema é dada pela teoria linear. Outros parâmetros requeridos aqui são a altura da onda H^* , a profundidade média da água $\bar{\eta}^*$ e o número de pontos N , dados no domínio de metade do comprimento da onda λ^* .

Agora, em vez de especificarmos o período da onda τ , especificamos o valor de d onde $d = kQ/c$. Uma vez que a onda é estacionária e a frequência da onda está definida implicitamente na relação de dispersão, podemos reescrever a equação (5.17) como

$$kQ - cd = 0.$$

A equação (5.18) que define a velocidade foi usada com o valor da velocidade Euleriana $c_E = 0$. Isso significa que para alguma profundidade dada, a velocidade Euleriana média sobre um período é igual a zero, ou seja, não há correnteza na água.

Para reproduzirmos a tabela mostrada em Rienecker & Fenton [13], foi usado um valor constante para d , onde $e^{-d} = 0,5$.

O valor inicial para a relação de dispersão foi obtido de $k = cd/Q$, onde o valor inicial de Q é $Q = c$. Daí temos que $k = d$. Esse valor corresponde a um comprimento de onda asimensional $\lambda \approx 9$, que é uma onda levemente longa, ou seja, ela está em águas com uma profundidade relativa $\frac{1}{20} < \frac{\bar{\eta}}{\lambda} < \frac{1}{2}$, que corresponde a águas intermediárias.

Tabela 6.1: Comparação dos resultados para o quadrado da velocidade da onda quando $e^{-kQ/c} = 0,5$. Na coluna "Calc" mostramos os resultados obtidos pelo nosso código, enquanto que na coluna "ref[13]" são expostos os resultados apresentados no trabalho de Rienecker & Fenton [13].

k^*c^{*2}/g^*							
	$H^*/\bar{\eta}^*$	$N = 16$		$N = 32$		$N = 64$	
		Calc.	ref[13]	Calc.	ref[13]	Calc.	ref[13]
(a)	0,1729974	0,615059	0,615059	0,615059	0,615059	0,615059	0,615059
(b)	0,2526308	0,631112	0,631112	0,631112	0,631112	0,631112	0,631112
(c)	0,3802643	0,666501	0,666501	0,666501	0,666501	0,666501	0,666501
(d)	0,4944549	0,706443	0,706443	0,706443	0,706443	0,706443	0,706443
(e)	0,6024470	0,748230	0,748231	0,748230	0,748230	0,748230	0,748230
(f)	0,6512510	0,764457	0,764455	0,764401	0,764402	0,764403	0,764403
(g)	0,6721430	0,767721	0,767725	0,767646	0,767676	0,767721	0,767748
(h)	0,6832000	-	-	0,757845	0,765720	0,766514	0,767070
(i)	0,6908000	-	-	-	-	0,764091	0,766000

Depois de obtido o valor inicial de k , vamos utilizar a teoria linear descrita na seção 6.1 para obter o valor inicial da velocidade c , dada por $c = \left\{ \frac{\tanh k}{k} \right\}^{\frac{1}{2}}$, juntamente com os valores iniciais que faltam para resolver o problema.

Para resolver o problema falta fornecermos o valor de D que é fundamental para obtermos convergência da solução numérica. Como visto anteriormente, devemos usar $D = 1$ para a profundidade média. Porém quando reproduzimos os dados que encontram-se na tabela 6.1, verificamos que, no momento em que aumentamos a altura da onda, passamos a ter maior instabilidade no sistema, ou seja, a convergência torna-se mais difícil e lenta. Para superarmos isso, a partir da linha (f), foram usados $D = 1,5$, $D = 2,0$ e $D = 2,5$. Nessa tabela, os espaços que não possuem valores são os casos em que não houve convergência da solução através do método usado.

Analisando a tabela 6.1, podemos notar que nossos resultados foram bem próximos dos resultados fornecidos por Rienecker & Fenton [13] e Cokelet [3]. Isso implica que o nosso código é eficaz para o cálculo de ondas em água.

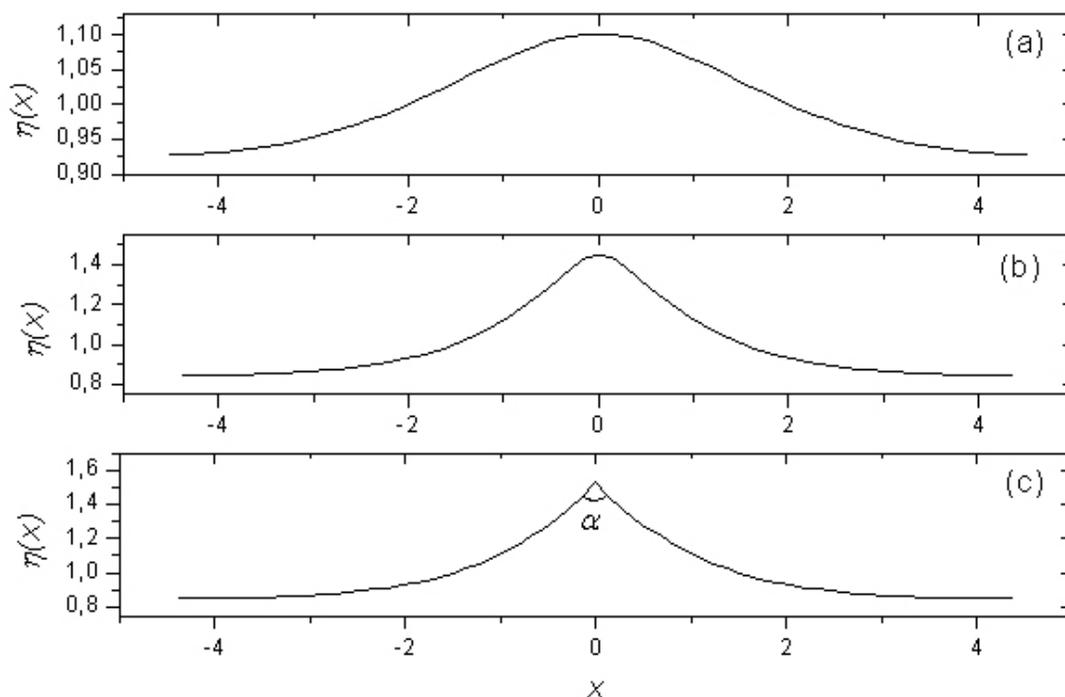


Figura 6.1: Perfil das ondas: Na figura (a), foi graficado a linha (a) da tabela 6.1 para o caso $N = 32$, enquanto que na figura (b) e (c) foram graficados as linhas (e) e (h) da tabela 6.1, respectivamente.

Na figura 6.1, foi graficado o perfil de algumas das ondas citadas na tabela 6.1, com $N = 32$. Na figura 6.1(a), o gráfico corresponde à linha (a) da tabela 6.1. O eixo das abscissas mostra a coordenada x em sua forma adimensional. Note que o comprimento de onda adimensionalizado pela profundidade da água, $\lambda = \frac{\lambda^*}{\bar{\eta}} \approx 9$. O eixo das ordenadas indica a elevação da superfície livre $\eta = \frac{\eta^*}{\bar{\eta}}$, também adimensionalizada pela profundidade da água. Observe que a origem foi assumida no fundo da água.

As figuras 6.1(b) e 6.1(c), representam as linha (e) e (h) da tabela 6.1, respectivamente. O procedimento adotado para ambas foi o mesmo da figura 6.1(a).

Note que, quando aumentamos a altura da onda, sua crista fica mais íngreme e seu cavado mais reto, que é característica de ondas não-lineares. Esta onda, por sua vez, está tendendo para uma possível quebra. Quando isso ocorre não vamos obter solução através do método de Newton pois este é formado por funções.

Ao quebrar, a onda empina-se para frente tornando-se multivaluada e logo não pode ser modelado por essa teoria.

Podemos calcular também o a altura limite de uma onda que se propaga mantendo a sua forma. Em nosso caso, a onda está prestes a quebrar na linha (h) da tabela 6.1, uma vez que com os valores da linha (i) desta tabela, não houve convergência. Se pegarmos os três pontos posteriores a crista da onda na figura 6.1(c) e traçarmos uma reta de regressão entre eles, obtemos a seguinte equação da reta:

$$y = 1,53009 - 0,57956 x.$$

Assim, o ângulo de inclinação desta reta é $\theta = \arctan(-0,57956)$, o que implica que o ângulo interno formado na crista da onda, que é $\alpha = 120^\circ$, que corresponde ao ângulo obtido por Stokes. Uma abordagem mais profunda a respeito desse ângulo de quebra das ondas será dada mais adiante.

6.3 Empinamento de Ondas

Como já mencionamos anteriormente, ondas em águas são caracterizadas especialmente pela sua altura, comprimento e período. Outra característica é o fato delas serem eficientes no transporte de energia e não no transporte de matéria. Ou seja, se colocarmos um objeto flutuante na água, sob o efeito de ondas, ele sofrerá um movimento oscilatório com um pequeno deslocamento residual, pois as partículas de água se movem de forma quasi-circular ou elíptica, dependendo da profundidade da água. Agora, se observamos um grupo de ondas, veremos que algumas destas ondas somem e outras aparecem logo atrás, isso é característica do transporte de energia através delas.

O empinamento de ondas ocorre quando elas propagam-se em águas intermediárias numa zona de profundidade variável e diminuindo gradativamente. Neste trabalho, vamos assumir que as mudanças de profundidade se dão de forma suave. Desta maneira, podemos admitir que a onda não reflete e consegue se "adap-

tar" a nova profundidade. Assim, como não há perda nem ganho de energia no sistema, o fluxo de energia se conserva.

Usando a teoria da refração de ondas, pode-se mostrar que o período da onda também é constante durante o processo de empinamento e isso decorre da conservação de cristas para ondas permanentes.

A figura 6.2 mostra uma ilustração para o empinamento de ondas, observe que ocorre um aumento da altura da onda e seu cavado torna-se mais reto até que ela torna-se instável e sua tendência é propagar-se para frente e quebrar.

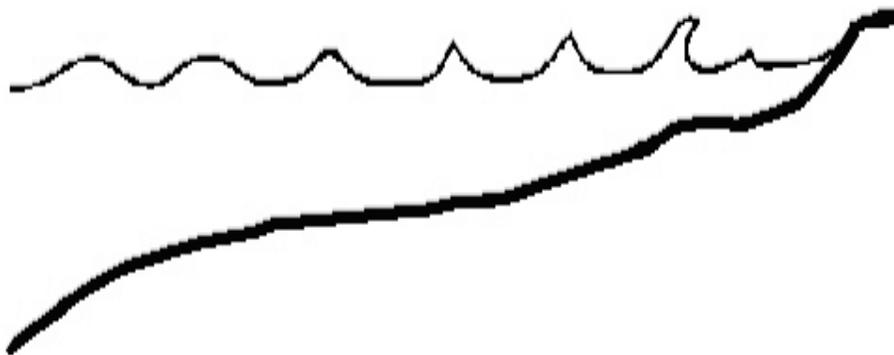


Figura 6.2: Empinamento de uma onda quando a profundidade da água começa a diminuir

O fenômeno de ondas incidentes empinando-se numa praia foi bem aproximado por Rienecker & Fenton [13], assumindo que se a inclinação do fundo menor que $4,5^\circ$ a onda age como se fosse permanente e com uma profundidade local constante. Dada essa hipótese, uma aproximação simples despreza a dissipação por fricção com o fundo e assume que o período da onda e o fluxo de energia permanecem constantes na troca de uma profundidade para outra. Isto é, assumimos que ocorre conservação de cristas e não há reflexão de energia com a diminuição da profundidade.

6.3.1 Modelagem

Para resolvermos o problema de empinamento de ondas, devido à redução da profundidade, o sistema de equações visto na seção 5.1 deve ser modificado

para incluir as variáveis adicionais; altura da onda H e o fluxo de energia médio F , cujo valor adimensional pode ser escrito, seguindo Rienecker & Fenton [13], como:

$$F = \frac{1}{2}c^3 - \frac{3}{2}c^2Q + c \left(2R - 1 - \frac{1}{2}QB_0 - \overline{\eta^2} \right) - Q(R - 1), \quad (6.2)$$

onde

$$\overline{\eta^2} = \frac{1}{2N} \left[\eta_0^2 + \eta_N^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j^2 \right].$$

Geralmente, neste tipo de problema, a profundidade inicial da água $\overline{\eta}_0^*$, a altura inicial H_0^* e o período inicial τ_0^* são dados. A solução do sistema a partir da profundidade inicial fornece o fluxo de energia concordando com a equação (6.2). Para sucessivas profundidades, o período e o fluxo de energia serão conservados, enquanto que a altura da onda H será a variável do problema. Assim, devemos incluir no sistema equações adicionais para especificar a altura da onda para a profundidade inicial e fluxo de energia para as subseqüentes profundidades.

As equações adicionais para o método iterativo de Newton são,

$$f_{2N+7} = \frac{1}{2}c^3 - \frac{3}{2}c^2Q + c \left(2R - 1 - \frac{1}{2}QB_0 - \overline{\eta^2} \right) - Q(R - 1) - F = 0$$

e

$$\begin{aligned} f_{2N+8} &= H - \frac{H_0^*}{\overline{\eta}_0^*} = 0 \quad \text{para a profundidade inicial, e} \\ f_{2N+8} &= F - F_0 = 0 \quad \text{para as subseqüentes profundidades.} \end{aligned}$$

onde F_0 é o fluxo de energia adimensionalizado pela profundidade média.

Uma estimativa inicial para o fluxo de energia é dado de acordo com outras variáveis. Da aproximação de Stokes, temos

$$F = \frac{\pi}{8} \frac{c^2 H^2}{\tau} \frac{\sinh k \cosh k + k}{\sinh^2 k}.$$

Esta estimativa é necessária apenas para a primeira profundidade. Subseqüentemente, para pequenas mudanças na profundidade, a solução seguinte pode ser usada como uma boa aproximação inicial para o problema contanto que a mudança na profundidade seja calculada na adimensionalização.

6.3.1.1 Mudanças das Profundidades na Zona de Empinamento das Ondas

Mostraremos agora como modelamos a diminuição da profundidade da água nas simulações numéricas. Como as variáveis usadas no problema foram adimensionalizadas com respeito à profundidade média da água, devemos fazer uma nova adimensionalização dessas variáveis, uma vez que há agora mudança na profundidade da água.

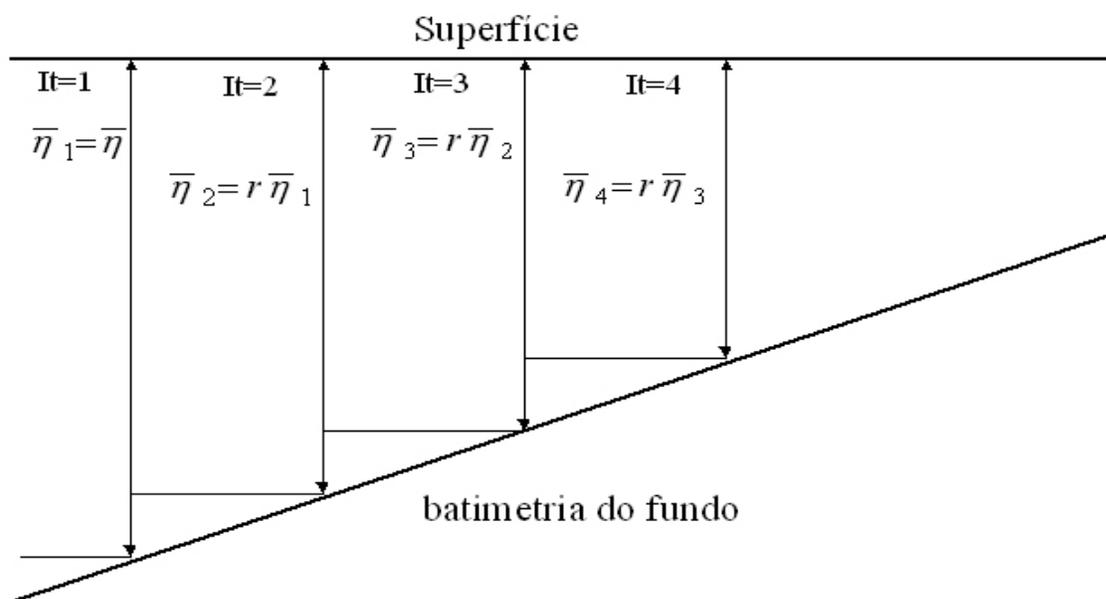


Figura 6.3: Procedimento numérico: Esta figura indica como modelamos a diminuição e a troca das profundidades na zona de empinamento de ondas.

A figura 6.3 mostra como ocorrem as mudanças da profundidade da água no procedimento numérico. Observe que a variação da profundidade é uma sucessão de profundidades constantes e decrescentes. Assim, denotamos $\bar{\eta}_{i+1} = r\bar{\eta}_i$ como a profundidade subsequente à $\bar{\eta}_i$. Pelo fato da profundidade ser decrescente, a constante r é sempre menor que 1.

Para fazer as adimensionalizações após a primeira profundidade, foi feito o seguinte esquema: o sub-escrito 1 refere-se à convergência da solução anterior e o sub-escrito 2 refere-se à aproximação inicial da próxima profundidade.

Para providenciar uma estimativa inicial satisfatória das variáveis a serem usadas na nova profundidade levamos em conta que a troca das profundidades se dá de maneira suave, assim desprezamos reflexão das ondas e podemos usar a última solução obtida como uma boa aproximação inicial para usar na próxima profundidade, desde que esta seja readimensionalizada de acordo com a nova profundidade.

Conforme a figura 6.3, definimos $r = \bar{\eta}_2^*/\bar{\eta}_1^*$ como sendo a razão entre as sucessivas profundidades. Assim as readimensionalizações são

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{H_2^*}{\bar{\eta}_2^*} = \frac{H_1^*}{\bar{\eta}_2^*} = \frac{H_1 \bar{\eta}_1^*}{\bar{\eta}_2^*} &\Rightarrow & H_2 = \frac{H_1}{r}, \\ c_2 &= \frac{c_2^*}{(g\bar{\eta}_2^*)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c_1^*}{(g\bar{\eta}_2^*)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c_1 (g\bar{\eta}_1^*)^{\frac{1}{2}}}{(g\bar{\eta}_2^*)^{\frac{1}{2}}} &\Rightarrow & c_2 = \frac{c_1}{r^{\frac{1}{2}}}, \\ k_2 &= k_2^* \bar{\eta}_2^* = k_1^* \bar{\eta}_2^* = \frac{k_1 \bar{\eta}_1^*}{\bar{\eta}_2^*} &\Rightarrow & k_2 = k_1 r, \\ Q_2 &= \frac{Q_2^*}{[g(\bar{\eta}_2^*)^3]^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q_1^*}{[g(\bar{\eta}_2^*)^3]^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q_1 [g(\bar{\eta}_1^*)^3]^{\frac{1}{2}}}{[g(\bar{\eta}_2^*)^3]^{\frac{1}{2}}} &\Rightarrow & Q_2 = \frac{Q_1}{r^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Para a readimensionalização da variável R , levamos em conta a aproximação inicial dada na seção 6.1. Assim temos

$$R_2 = 1 + \frac{R_2^*}{g\bar{\eta}_2^*} = 1 + \frac{R_1^*}{g\bar{\eta}_2^*} = 1 + \frac{(R_1 - 1)g\bar{\eta}_1^*}{g\bar{\eta}_2^*} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1 - 1}{r}.$$

Para as próximas adimensionalizações, dependemos da discretização espacial, indicando essa discretização por j , para $j = 1, 2, \dots, N$ temos

$$(B_j)_2 = \frac{(B_j^*)_2}{g\bar{\eta}_2^*} = \frac{(B_j^*)_1}{g\bar{\eta}_2^*} = \frac{(B_j^*)_1 g\bar{\eta}_1^*}{g\bar{\eta}_2^*} \Rightarrow (B_j)_2 = \frac{(B_j)_1}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Como a origem do sistema está no fundo da água, a readimensionalização da elevação da superfície livre fica

$$(\eta_j)_2 = 1 + \frac{(\eta_j^*)_2}{\bar{\eta}_2^*} = 1 + \frac{(\eta_j^*)_1}{\bar{\eta}_2^*} = 1 + \frac{[(\eta_j)_1 - 1]\bar{\eta}_1^*}{\bar{\eta}_2^*} \Rightarrow (\eta_j)_2 = 1 + \frac{(\eta_j)_1 - 1}{r}.$$

Ainda devemos fazer a readimensionalização do fluxo de energia e do período da onda, apesar destes permanecerem constantes:

$$F_2 = \frac{F_2^*}{\rho [g^3 (\bar{\eta}_2^*)^5]^{\frac{1}{2}}} = \frac{F_1^*}{\rho [g^3 (\bar{\eta}_2^*)^5]^{\frac{1}{2}}} = \frac{F_1 \rho [g^3 (\bar{\eta}_1^*)^5]^{\frac{1}{2}}}{\rho [g^3 (\bar{\eta}_2^*)^5]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow F_2 = \frac{F_1}{r^{\frac{5}{2}}},$$

$$\tau_2 = \tau_2^* \left(\frac{g}{\bar{\eta}_2^*} \right)^{\frac{1}{2}} = \tau_1^* \left(\frac{g}{\bar{\eta}_2^*} \right)^{\frac{1}{2}} = \tau_1 \left(\frac{g \bar{\eta}_1^*}{g \bar{\eta}_2^*} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \tau_2 = \frac{\tau_1}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

Como o fluxo de energia e o período se conservam, F_0 deve ser substituído por $\frac{F_0}{r^{\frac{5}{2}}}$ e τ_0 substituído por $\frac{\tau_0}{r^{\frac{1}{2}}}$.

6.4 Resultados

Iniciamos esta sessão reproduzindo os resultados apresentados nos trabalhos de Rienecker & Fenton [13], Stiassnie & Peregrine [15] e Eagleson [5]. Também serão mostrados dados experimentais com intuito de verificarmos a validade do nosso código.

Devido à dificuldade de encontrarmos os dados experimentais na literatura foram ampliadas as figuras apresentadas nos trabalhos acima citados e feita a medida dos pontos experimentais. Estes dados experimentais foram obtidos a partir de um tanque de ondas com inclinação uniforme de 1/35 no trabalho de Stiassnie & Peregrine e de 1/15 no trabalho de Rienecker & Fenton. Posteriormente podemos ver que foram coletados dados até a posterior quebra da onda, ou seja, até onde as simulações numéricas não possam prever os resultados.

Para a realização das simulações utilizando o nosso código, seguimos o trabalho de Rienecker & Fenton. Faremos também a dimensionalização dos parâmetros para podermos comparar com os resultados de Stiassnie & Peregrine. Para isto, nestas primeiras simulações, usaremos uma profundidade inicial média da água de $\bar{\eta}_0^* = 300$ mm, a aceleração da gravidade $g^* = 9810$ mm/s², o nível de referência

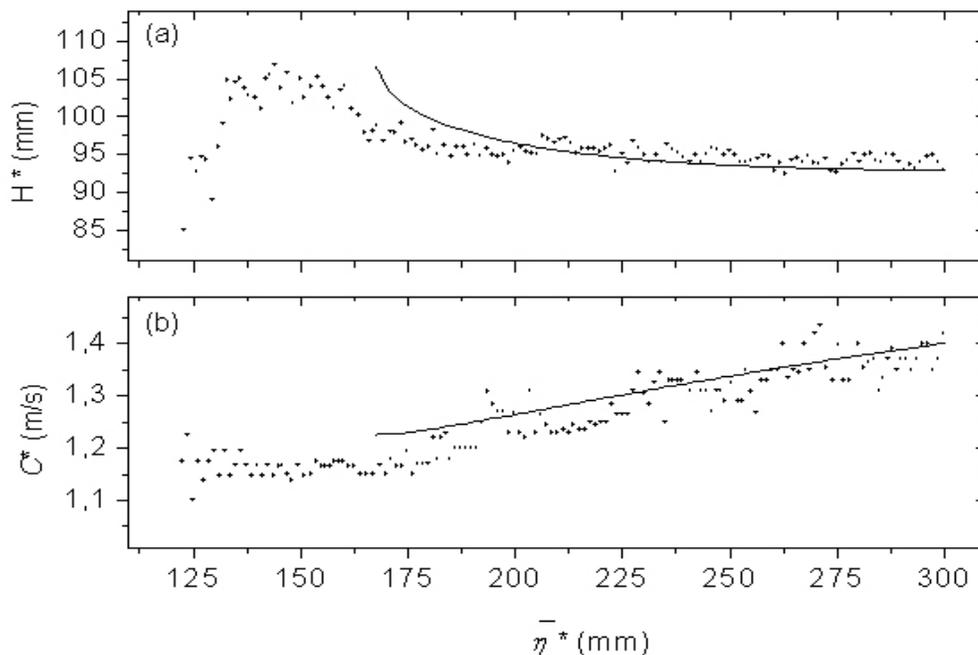


Figura 6.4: Comparação dos resultados: Na figura (a), mostramos a altura da onda em função da profundidade da água. Enquanto que na figura (b), mostramos a velocidade da onda em função desta profundidade. A altura inicial da onda foi de $H_0^* = 93$ mm e seu período inicial foi $\tau_0^* = 1,0$ s. A linha sólida indica os dados obtidos a partir das simulações numéricas e os pontos indicam os dados obtidos experimentalmente.

arbitrário D^* igual à profundidade da água, ou seja, o valor adimensional $D = 1$ e o número de aproximações para o coeficiente de Fourier $N = 16$. A inclinação do fundo foi usada como definida na sessão 6.3.1.1, com $r \approx 0,999$, ou seja, a profundidade subsequente é aproximadamente 0,999 de uma certa profundidade. Para chegarmos a esse valor foram feitos vários testes e verificou-se que se mudamos esse valor da inclinação dentro de um limite para que não ocorra reflexão da onda, não haverá mudanças nos resultados.

A figura 6.4(a) mostra a altura da onda em função da profundidade da água. Enquanto que a figura 6.4(b) mostra a velocidade da onda em função da profundidade da água. Para obter estes resultados, seguimos Rienecker & Fenton, onde os valores adimensionais da altura inicial e período inicial da onda são respec-

tivamente $H_0 = 0,31$ e $\tau_0 = 5,72$. Seus valores dimensionais são encontrados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H &= \frac{H^*}{\bar{\eta}^*}, & \tau &= \tau^* \left(\frac{g^*}{\bar{\eta}^*} \right)^{\frac{1}{2}} \\ H^* &= H \bar{\eta}^*, & \tau^* &= \tau \left(\frac{\bar{\eta}^*}{g^*} \right)^{\frac{1}{2}} \\ H^* &= 0,31 \cdot 300 \text{ mm}, & \tau^* &= 5,72 \left(\frac{300 \text{ mm}}{9810 \text{ mm/s}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ H^* &= 93 \text{ mm}, & \tau^* &= 1 \text{ s}. \end{aligned}$$

Seguindo o trabalho de Stiassnie & Peregrine vemos que o valor inicial da altura da onda para este caso é $H_0^* = 96$ mm. Por outro lado, através da fórmula de adimensionalização com o valor proposto por Rienecker & Fenton e também através de várias simulações numéricas e comparações com os dados experimentais, podemos verificar que o valor adequado para a altura inicial é $H_0^* = 93$ mm ou seu valor adimensionalizado, que é $H_0 = 0,31$. Na figura 6.4(a), foi mostrado como se comporta a altura da onda em função da profundidade do fluido no processo de empinamento da onda, ou seja, quando a onda tende à quebrar. A linha sólida indica os valores obtidos através das simulações, enquanto que os pontos significam os valores experimentais de Stiassnie & Peregrine, onde cada ponto significa um valor medido. Este esquema de representação será usado em todas as figuras apresentadas nesta sessão. Foi observado que quando a profundidade diminui, a onda começa a empinar-se e tender para o processo de quebra. Na figura 6.4(b) foi graficado a velocidade de fase da onda na unidade de m/s em função da profundidade da água. Neste caso, como prevê a teoria, podemos perceber que a onda viaja mais rapidamente quando a profundidade é maior, ou seja, ocorre uma diminuição da velocidade da onda com a diminuição da profundidade da água o que também influencia no empinamento da onda, fazendo com que esta venha a quebrar.

Na figura 6.5, assim como na figura 6.4(a), foi mostrado o comportamento da altura da onda em função da profundidade da água. Para reproduzirmos estes dados, inicialmente não obtivemos sucesso, pois o período inicial relatado em Rienecker & Fenton ($\tau_0 = 0,95$) é excessivamente pequeno. Para isso, seguimos o

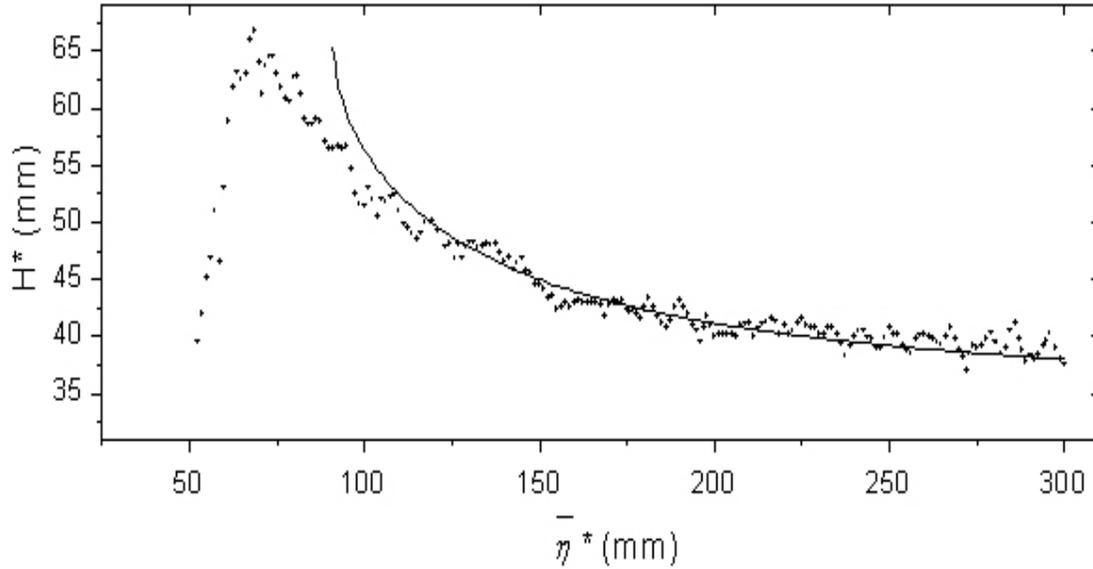


Figura 6.5: Comparação dos resultados: Altura da onda em função da profundidade da água com $H_0^* = 39$ mm e $\tau_0^* = 1,67$ s.

trabalho de Stiassnie & Peregrine para comparar os dados. Assim, pela adimensionalização temos

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{H^*}{\eta^*}, & \tau &= \tau^* \left(\frac{g^*}{\eta^*} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 0,13 &= \frac{H^*}{300 \text{ mm}}, & \tau &= (1,67 \text{ s}) \left(\frac{9810 \text{ mm/s}^2}{300 \text{ mm}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 H^* &\approx 39 \text{ mm}, & \tau &\approx 9,55.
 \end{aligned}$$

A partir disto, podemos deduzir que o valor do período inicial da onda ($\tau_0 = 0,95$) dado em Rienecker & Fenton tenha sido provavelmente apenas um erro de impressão.

Para os cálculos da figura 6.6 foram seguidos os valores adimensionais da altura e período iniciais da onda relatados por Rienecker & Fenton que são $H_0 = 0,14$ e $\tau_0 = 19,04$. Agora, se tornamos estes valores dimensionais, chegaremos a um valor da altura inicial da onda um pouco diferente do valor indicado por Stiassnie & Peregrine, que é $H_0^* = 37,5$ mm. Isto é mostrado a seguir.

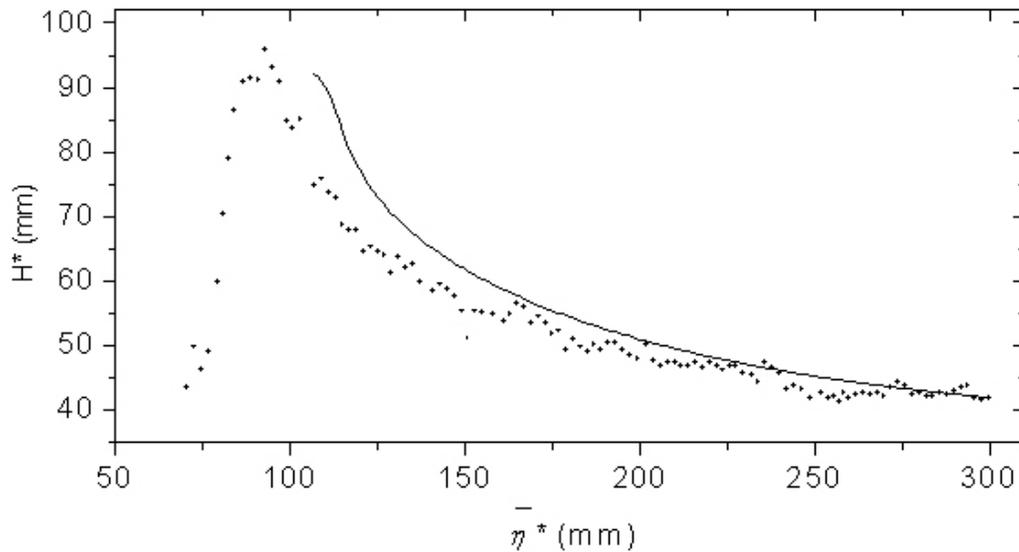


Figura 6.6: Comparação dos resultados: Altura da onda em função da profundidade da água com $H_0^* = 42$ mm e $\tau_0^* = 3,33$ s.

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{H^*}{\eta^*}, & \tau &= \tau^* \left(\frac{g^*}{\eta^*} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 0,14 &= \frac{H^*}{300 \text{ mm}}, & 19,04 &= \tau^* \left(\frac{9810 \text{ mm/s}^2}{300 \text{ mm}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 H^* &= 42 \text{ mm}, & \tau^* &\approx 3,33 \text{ s}.
 \end{aligned}$$

Conforme mostrado também na figura 6.6, podemos concluir que nossa simulação com $H_0^* = 42$ mm e $\tau_0^* = 3,33$ s se aproxima bem dos valores experimentais. Logo, deduzimos que os valores contidos em Rienecker & Fenton estão corretos.

Nas figuras 6.5 e 6.6, assim como na figura 6.4, podemos fazer a comparação entre o resultado obtido através da teoria e os dados experimentais onde, principalmente, comparamos a variação da altura da onda em função da profundidade da água quando esta começa a diminuir na zona de empinamento da onda. Os resultados obtidos através das simulações são bons pois podemos ver que ocorre um aumento na altura da onda conforme diminui a profundidade da água até a possível quebra da onda. Nossos cálculos se aproximam muito bem dos valores experimen-

tais. Se verificarmos os trabalhos de Stiassnie & Peregrine [15], juntamente com os de Rienecker & Fenton [13], veremos que nossos resultados são concordantes.

Para as próximas simulações seguimos os trabalhos de Rienecker & Fenton [13] juntamente com o trabalho de Eagleson [5]. Eagleson, assim como Stiassnie & Peregrine nas simulações anteriores, forneceu em seu trabalho os valores dimensionais dos dados iniciais necessários para resolver o problema. Isso nos permite uma melhor observação, entendimento e comparação dos resultados.

Apresentamos os resultados de sete simulações, que são mostrados na figura 6.7. Assim como no trabalho de Rienecker & Fenton [13], comparamos os resultados com os dados experimentais. Estes são obtidos de experimento com um tanque de ondas com uma inclinação uniforme de 1/15, segundo Eagleson.

Para a realização das simulações que são indicadas nas linhas sólidas da figura 6.7, foram usados os valores iniciais da profundidade da água, da altura e do período da onda indicados na tabela 6.2. Nesta tabela, também são mostrados os valores da declividade inicial das ondas, que é dada por $\varepsilon = \frac{H^*}{\lambda^*}$, segundo o trabalho de Eagleson e também através dos resultados obtidos a partir do nosso código. O nível de referência é $D = 1,0$ em todos os casos exceto ao caso (f), onde $D = 0,9$, isso deve-se ao fato da altura da onda ser um pouco menor neste caso.

O número de aproximações para os coeficientes de Fourier utilizado em todas as simulações a partir daqui é $N = 32$.

Para adimensionalizar a altura e o período da onda, foi usado a aceleração da gravidade g^* aproximada com $g^* = 32,2$ pés/ s^2 e a profundidade média da água $\bar{\eta}_0^*$ descrita na tabela 6.2. Nesta tabela, a coluna " H_0^*/λ_0^* Ref[5]" fornece os valores da inclinação inicial da onda segundo Eagleson, enquanto que a coluna " H_0^*/λ_0^* " fornece os valores calculados através de nosso código. Podemos ver que estes valores são bem próximos, o que indica que a relação de dispersão inicial está sendo calculada corretamente.

Tabela 6.2: Valores iniciais da profundidade da água, da altura, período e da inclinação da onda. Estes dados serão usados para a construção da figura 6.7.

Onda	$\bar{\eta}_0^*$ (pés)	H_0^* (pés)	τ_0^* (s)	H_0^*/λ_0^* Ref[5]	H_0^*/λ_0^*
(a)	1,75	0,230	0,938	0,0528	0,051739
(b)	1,75	0,234	1,101	0,0396	0,039545
(c)	1,75	0,357	1,105	0,0598	0,059963
(d)	1,75	0,440	1,235	0,0611	0,061695
(e)	1,75	0,354	1,389	0,0420	0,041634
(f)	1,75	0,186	1,428	0,0209	0,021037
(g)	1,75	0,265	1,684	0,0237	0,023999

Na figura 6.7, mostramos o coeficiente de empinamento da onda, ou coeficiente de empolamento de onda, que é dado por $\frac{H}{H_0}$, em função da respectiva profundidade relativa da água. O coeficiente de empinamento das ondas traduz unicamente a relação da altura da onda com diminuição da profundidade da água, enquanto que a profundidade relativa, como já mencionado na seção 3.4, indica se a onda está em águas rasas, intermediárias ou profundas. Se $\frac{\bar{\eta}^*}{\lambda^*} < 0,05$, a onda é considerada em águas rasas. Se $0,05 > \frac{\bar{\eta}^*}{\lambda^*} < 0,5$, a onda é considerada em águas intermediárias e $\frac{\bar{\eta}^*}{\lambda^*} > 0,5$ representa o regime de águas profundas, ou seja, a batimetria do fundo não tem influência sobre a onda.

Observe que todas as curvas construídas na figura 6.7 referem-se a águas intermediárias tendendo para águas rasas. Nesta situação se caracteriza o empinamento de ondas, ou seja, elas ficam mais íngremes tendendo para a quebra.

Comparando nossos resultados com os dados experimentais retirados de Rieneker e Fenton [13], podemos ver que houve acordo.

A seguir mostraremos outros resultados para enriquecer nosso estudo sobre o empinamento e quebra das ondas. A altura de quebra das ondas e também o ângulo formado na crista da onda no momento em que ela tende a quebrar serão abordados.

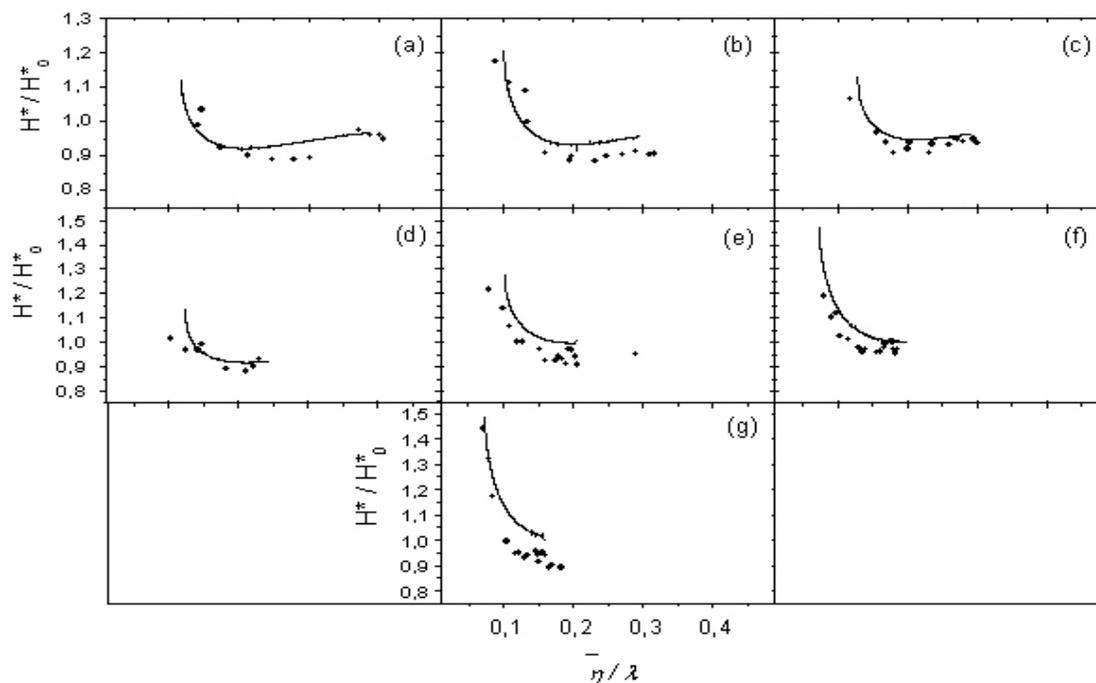


Figura 6.7: Coeficiente de empinamento da onda em função da profundidade relativa da água. São mostradas sete figuras, referentes aos valores experimentais dados por Eagleson [5]. Os valores iniciais para as simulações, encontram-se na tabela 6.2.

6.4.1 Resultados Adicionais

Esta sessão apresenta uma discussão acerca das simulações anteriores, verificando algumas propriedades sobre o empinamento e quebra das ondas.

As ondas que movem-se na zona de empinamento de onda, em águas intermediárias, tornam-se instáveis e quebram quando a velocidade da partícula da água na crista da onda torna-se igual ou até maior que a velocidade de fase da onda.

Na quebra de ondas, a altura da onda é limitada pela profundidade e comprimento de onda. Para uma dada profundidade da água e período da onda, há um limite máximo para a altura da onda. Quando a altura se aproxima desse limite, a onda torna-se instável e quebra. Este limite é chamado de *altura de quebra da onda*.

Em águas profundas, esta altura é função apenas do comprimento de onda, enquanto que em águas rasas e intermediárias ela é função do comprimento de onda e também da profundidade da água e também da declividade do fundo. Segundo a Organização Mundial de Meteorologia, (*World Meteorological Organization*, WMO) [14], a inclinação máxima da onda em águas profundas, onde $\frac{\bar{\eta}}{\lambda} > 0,5$ é $\frac{H}{\lambda} = 0,141$. Para águas intermediárias, com $\frac{\bar{\eta}}{\lambda} < 0,5$, temos uma altura máxima de quebra de $\frac{H}{\eta} = 0,83$. Já em laboratórios, essa altura de quebra não passa de $\left(\frac{H}{\eta}\right)_{max} = 0,78$, que é a relação para a máxima altura de uma onda solitária.

Nas simulações numéricas o método de Newton não fornece solução quando a onda tende a quebrar, pois sua crista empina-se para frente tornando-se multivaluada e impossível de simular. Neste caso o método diverge. Na última profundidade para a qual ocorreu convergência do sistema de equações através do método de Newton o parâmetro $H^*/\bar{\eta}^*$ define a altura de quebra da onda no método computacional. Nestas condições, chamaremos este parâmetro de *altura de quebra de onda computacional* e denotaremos como $\left(\frac{H^*}{\bar{\eta}^*}\right)_b$.

A figura 6.8 mostra a evolução do parâmetro $H^*/\bar{\eta}^*$ e a altura de quebra de onda computacional para os casos referente aos resultados das figuras 6.4, 6.5 e 6.6, respectivamente.

Na figura 6.8(a) com altura e período inicial da onda sendo $H_0^* = 93$ mm e $\tau_0^* = 1,0$ s, respectivamente, a profundidade relativa inicial é $\frac{\bar{\eta}_0}{\lambda_0} = 0,214$ e a profundidade relativa na quebra da onda é $\frac{\bar{\eta}}{\lambda} = 0,13256$. Isso indica que todo o processo de empinamento até a quebra da onda ocorreu em águas intermediárias. Na figura 6.8(b), com $H_0^* = 39$ mm e $\tau_0^* = 1,67$ s, a profundidade relativa inicial é $\frac{\bar{\eta}_0}{\lambda_0} = 0,1128$ e a profundidade relativa na quebra da onda é $\frac{\bar{\eta}}{\lambda} = 0,0516$. Essa onda também teve o processo de empinamento e quebra em águas intermediárias, mas podemos notar que a profundidade relativa da água é menor que a da figura 6.8(a) e a onda quebra praticamente em águas rasas. Enquanto que, na figura 6.8(c), com $H_0^* = 42$ mm e $\tau_0^* = 3,33$ s, a profundidade relativa inicial é $\frac{\bar{\eta}_0}{\lambda_0} = 0,0525$ e a

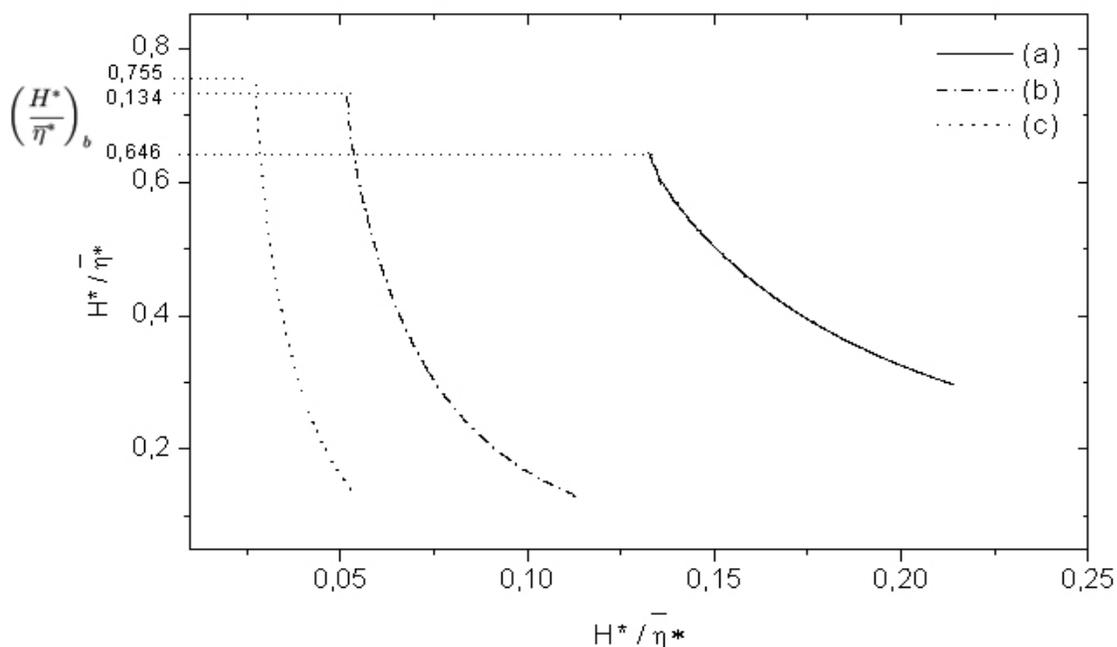


Figura 6.8: A evolução do parâmetro $H^*/\bar{\eta}^*$ e a altura de quebra de onda computacional, $\left(\frac{H^*}{\bar{\eta}^*}\right)_b$ em função da profundidade relativa da água. Na figura (a), mostramos os resultados referentes à figura 6.4, na figura (b), referentes à figura 6.5 e na figura (c), referentes à figura 6.6

profundidade relativa na quebra da onda é $\bar{\eta} \approx 0,027$, ou seja, praticamente todo o processo de empinamento até a quebra da onda, ocorreu em águas rasas.

Na figura 6.9 também é mostrado a evolução do parâmetro $H^*/\bar{\eta}^*$ e a altura de quebra de onda computacional, $\left(\frac{H^*}{\bar{\eta}^*}\right)_b$ referente aos casos descritos na tabela 6.2 e figura 6.7. Podemos verificar que todo o processo de empinamento de onda, até a quebra, ocorre em águas intermediárias.

Com as figuras 6.8 e 6.9, podemos ver que todas as ondas tiveram uma altura de quebra de $\frac{H}{\eta} \approx 0,7$. Essa altura de quebra representa um valor um pouco abaixo do valor indicado na literatura. Talvez isso ocorra devido às limitações naturais das simulações numéricas, como por exemplo o fato de truncarmos a série de Fourier nas equações que modelam o problema e também erros cometidos por arredondamentos.

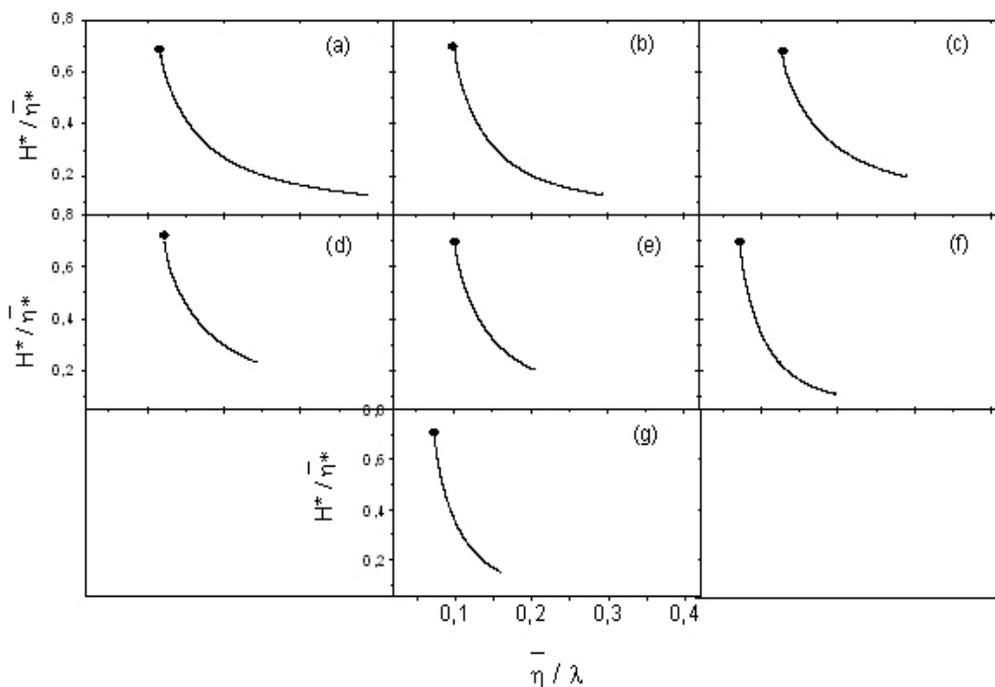


Figura 6.9: A evolução do parâmetro $H^*/\bar{\eta}^*$ e a altura de quebra de onda computacional, $\left(\frac{H^*}{\bar{\eta}^*}\right)_b$ em função da profundidade relativa da água referente aos dados iniciais contidos na tabela 6.2 e mostrados também na figura 6.7.

6.4.1.1 Perfil das Ondas e seus Ângulos de Quebra

Mostraremos nesta seção o perfil das ondas e o respectivo ângulo formado na crista da onda no momento que ela tende a quebrar. Este ângulo é chamado de *ângulo de quebra*.

Segundo Longuet-Higgins [11] e WMO [14], temos que o limite máximo do ângulo de quebra é $\alpha = 120^\circ$. Kinsman [9, pg. 273] mostrou uma dedução para este ângulo de quebra a partir da teoria de Stokes.

Assim como todas as comparações feitas até o momento, graficaremos o perfil e calcularemos o ângulo de quebra de todas as ondas mencionadas até aqui. Após isso, faremos uma breve análise dos resultados obtidos.

Para realização das figuras que mostram o perfil das ondas, usaremos a propriedade de simetria das ondas, como mencionado na seção 5.1. Com isso,

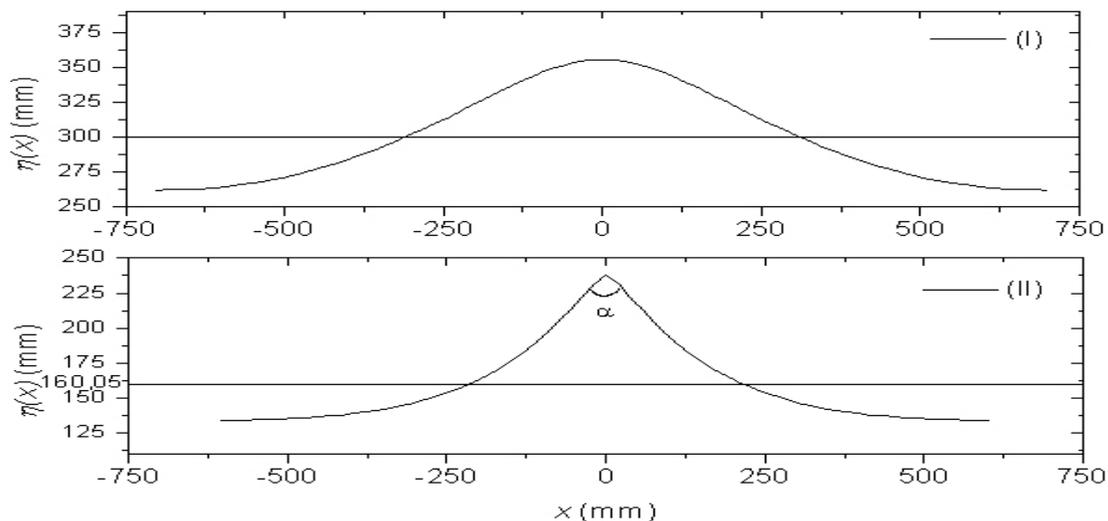


Figura 6.10: Perfil das ondas: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial, com $\bar{\eta}_0^* = 300$ mm, $H_0^* = 93$ mm e $\tau_0^* = 1,0$ s. A figura (II) mostra o perfil da onda no momento em que ela está prestes a quebrar, neste caso, a profundidade da água, indicada pela linha reta é $\bar{\eta}^* = 168,421$ mm.

exibiremos o perfil de um comprimento de onda. Para facilitar, colocaremos a crista da onda na origem do sistema cartesiano.

O perfil das ondas no momento inicial será denotado por (I) e no momento de quebra este será denotado por (II). Para facilitar a visualização usaremos uma escala comum para o eixo das abscissas e outra escala comum para o eixo das ordenadas, em todas as figuras.

Colocaremos, nas figuras, uma reta para indicar a profundidade média da água em cada caso. Esta reta e o uso de escalas comuns para os eixos das abscissas e das ordenadas melhoram a visualização gráfica. Com isso, podemos observar as variações entre o perfil inicial e na última iteração que ocorreu convergência das ondas. Os parâmetros mais observáveis são as alturas e os comprimentos das ondas.

O ângulo interno formado na crista da onda é mostrado nas figuras (II), ou seja, no momento em que a onda está prestes a quebrar. Nesta condição, este ângulo será chamado de *ângulo de quebra computacional*. Os valores destes ângulos são difíceis de serem observados graficamente, pois os eixos das abscissas e ordenadas têm escalas diferentes.

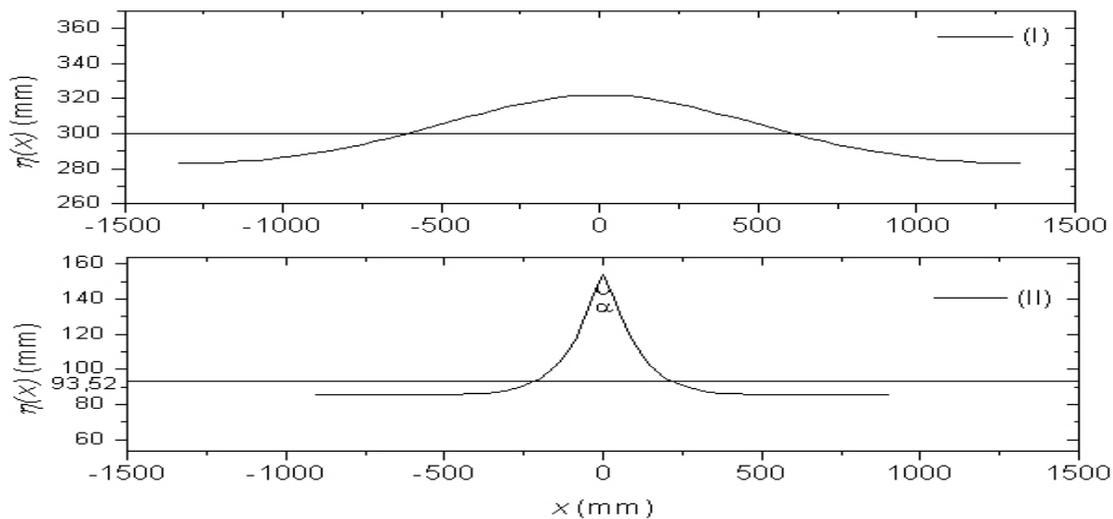


Figura 6.11: Perfil das ondas: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial, com $\bar{\eta}_0^* = 300$ mm, $H_0^* = 39$ mm e $\tau_0^* = 1,67$ s. A figura (II) mostra o perfil da onda no momento em que ela está prestes a quebrar, nesse momento, a profundidade da água, indicada pela linha reta é $\bar{\eta}^* = 93,75$ mm.

A figura 6.10(I) mostra o perfil inicial da onda referente à figura 6.4, com profundidade inicial da água, altura e período inicial da onda sendo $\bar{\eta}^* = 300$ mm, $H^* = 93$ mm e $\tau^* = 1,0$ s, respectivamente. A figura 6.10(II) mostra o perfil da onda no momento em que está prestes a quebrar. Nesta situação, a profundidade da água foi de $\bar{\eta}^* = 168,421$ mm e o ângulo de quebra computacional, aqui chamado de α , foi $134,12^\circ$.

Para calcular o valor de α , fizemos uma reta de regressão usando os três primeiros pontos após a crista da onda. A equação dessa reta é dada por

$$y = 246,44367 - 0,42324 \cdot x.$$

Com o coeficiente angular da reta, podemos calcular sua inclinação, que é $-22,94^\circ$, com isso podemos chegar ao valor do ângulo α , que é dado por

$$\alpha = 2(90^\circ - 22,94^\circ),$$

$$\alpha = 134,12^\circ.$$

Essa maneira de calcular o ângulo α será usado em todos os casos simulados neste trabalho.

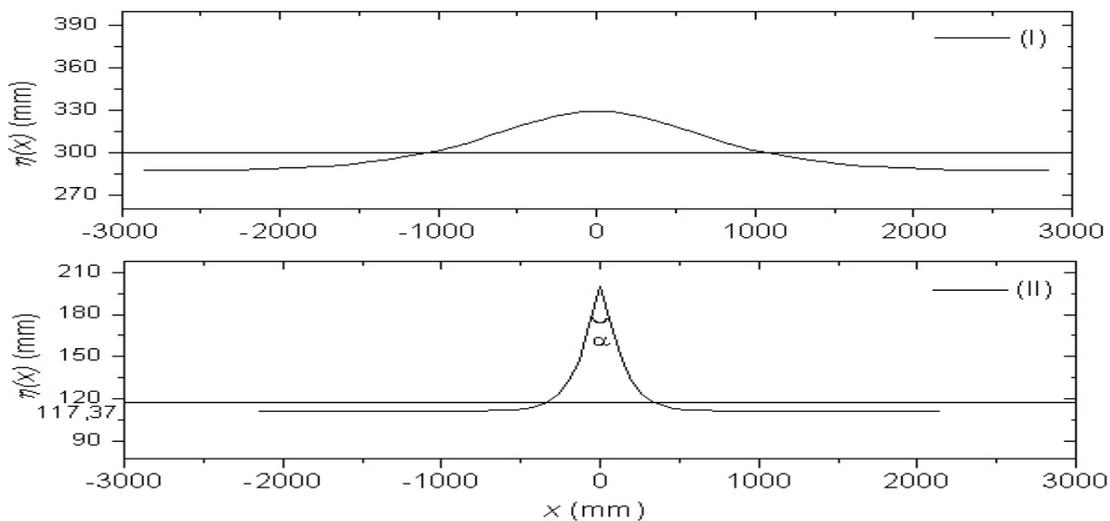


Figura 6.12: Perfil das ondas: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial, com $\bar{\eta}_0^* = 300$ mm, $H_0^* = 42$ mm e $\tau_0^* = 3,33$ s. A figura (II) mostra o perfil da onda no momento em que ela está prestes a quebrar. Nesse momento, a profundidade da água, indicada pela linha reta é $\bar{\eta}^* = 106,25$ mm.

A figura 6.11(I) mostra o perfil inicial da onda, usando a mesma onda descrita na figura 6.5, com profundidade inicial da água, altura e período inicial da onda sendo $\bar{\eta}^* = 300$ mm, $H^* = 39$ mm e $\tau^* = 1,67$ s, respectivamente. Na figura 6.11(II) é mostrado o perfil da onda no momento em que está prestes a quebrar. A profundidade da água nesse caso foi de $\bar{\eta}^* = 93,75$ mm. O ângulo de quebra calculado foi de $\alpha = 142,64^\circ$.

A figura 6.12(I) mostra o perfil inicial da onda, usando os dados da onda descritos na figura 6.6, com profundidade inicial da água, altura e período inicial da onda, $\bar{\eta}^* = 300$ mm, $H^* = 42$ mm e $\tau^* = 3,33$ s, respectivamente. A figura 6.12(II) mostra o perfil da onda no momento em que está prestes a quebrar, com profundidade da água de $\bar{\eta}^* = 106,25$ mm. O ângulo de quebra neste caso foi calculado usando apenas dois pontos após a crista da onda, isso devido ao fato dela empinar-se de maneira mais íngreme que nas figuras 6.10 e 6.11. O valor desse ângulo de quebra é $126,20^\circ$.

Com as figuras 6.10, 6.11 e 6.12, podemos verificar que o modo com que a onda empina-se depende diretamente do comprimento de onda. Para ondas

de maior comprimento, temos que o cavado da onda torna-se maior e mais reto, com isso a crista da onda tem uma elevação mais acentuada em relação ao comprimento de onda, uma vez que o ângulo formado na crista no momento da quebra da onda praticamente não se alterou. Isso pode ser verificado através da relação entre profundidade da água e comprimento da onda, ou seja, a profundidade relativa, como mostrado na figura 6.8. Nesta figura, podemos ver que as ondas mostradas nas figuras 6.10 e 6.11 são consideradas em águas intermediárias, enquanto que a onda mostrada na figura 6.12 é considerada em águas rasas. Observamos também que ocorreu variação somente no comprimento de onda, uma vez que a profundidade inicial da água foi considerada a mesma em ambos os casos.

Os próximos casos são referentes à tabela 6.2 e à figura 6.7. A tabela 6.3 mostra as alturas e os períodos das ondas no momento inicial, além das profundidades da água e os ângulos formados nas cristas das ondas no momento em que elas quebram. Observe que não expressamos a profundidade inicial da água, pois esta possui valor único de $\bar{\eta}_0^* = 1,75$ pés, para todos os casos.

Tabela 6.3: Dados referentes ao perfil das ondas: Nesta tabela mostramos os valores das alturas e períodos iniciais das ondas assim como as profundidades da água e os ângulos formados nas cristas das ondas no momento em que elas quebram.

Onda	H_0^* (pés)	τ_0^* (s)	$\bar{\eta}_f^*$ (pés)	α (em graus)
(a)	0,230	0,938	0,3817	124,14
(b)	0,234	1,101	0,4110	123,60
(c)	0,357	1,105	0,6066	122,48
(d)	0,440	1,235	0,7140	119,30
(e)	0,354	1,389	0,6591	124,48
(f)	0,186	1,428	0,3989	130,49
(g)	0,265	1,684	0,5644	128,58

Para calcular os ângulos de quebra em todos os casos dados na tabela 6.3, foram usados três pontos posteriores à crista da onda. Podemos notar que todos os ângulos de quebra foram praticamente idênticos e um pouco maior que o valor limite para o ângulo de quebra dado na literatura.

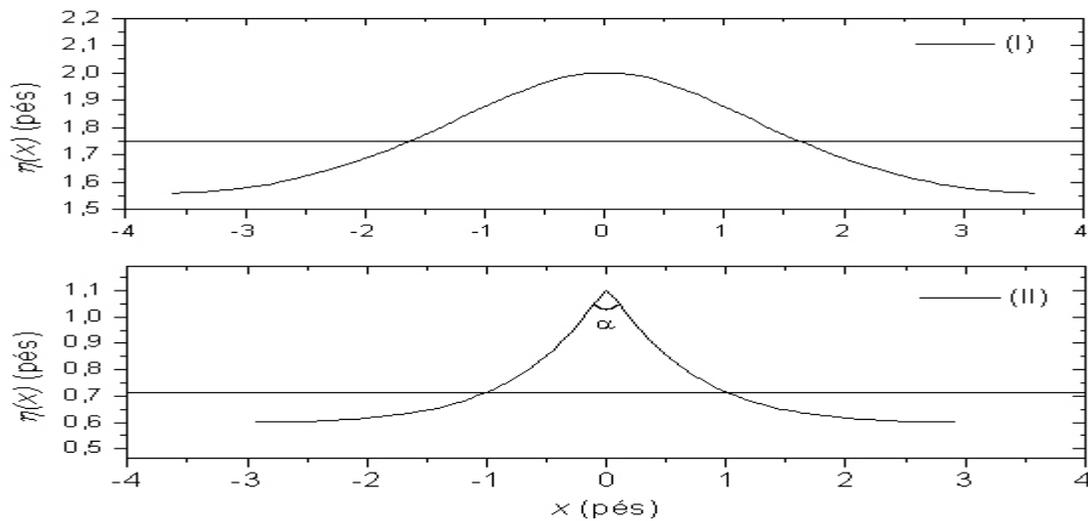


Figura 6.13: Perfil das ondas referentes ao caso (d) da tabela 6.3: A figura (I) mostra o perfil da onda no momento inicial e a figura (II) mostra o perfil da onda no momento de sua quebra.

A figura 6.13 mostra o perfil das ondas referentes ao caso (d) da tabela 6.3. Os outros casos descritos nesta tabela não serão graficados aqui, pois os perfis são praticamente idênticos a este.

Assim como nas figuras 6.10, 6.11 e 6.12, a figura 6.13 mostra uma diminuição no comprimento de onda e um aumento de sua altura. Está é uma das principais características do empinamento de ondas. Como o cavado da onda torna-se mais reto e maior, a onda tem uma elevação mais íngreme perto de sua crista. Isso faz com que ela torne-se instável e possivelmente quebre.

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, foram deduzidas as equações que governam o movimento das ondas em água. Linearizando as equações, obtemos soluções periódicas que puderam ser utilizadas para mostrar expressões que modelam a relação de dispersão e as velocidades de fase e de grupo para ondas em águas rasas, intermediárias e profundas.

O problema fracamente não-linear foi deduzido fazendo aproximações em séries de potência a partir do problema não-linear. Foram mostrados explicitamente os problemas de até ordem 2.

A fim de executar simulações, desenvolvemos um código em Fortran baseado em um método espectral para resolver as equações que modelam o problema completamente não-linear de ondas estacionárias. A eficácia do código foi comprovada através de comparações com resultados fornecidos por outros autores.

O empinamento de ondas foi a principal aplicação de nosso trabalho. Com a hipótese que o fluxo de energia e o período das ondas permanecem constantes enquanto a profundidade da água diminui, foi possível fazer várias simulações, reproduzir resultados de outros autores, além de fazer comparações com dados experimentais. As simulações numéricas permitiram também observar o comportamento das ondas na zona de empinamento. Com isso, foi possível graficar o perfil das ondas, assim como calcular sua altura e ângulo de quebra. Observou-se que conforme a onda progredia na zona de empinamento, sua altura aumentava enquanto seu comprimento diminuía. Desta maneira ela tornava-se mais alta e íngreme, ou seja, o ângulo formado em sua crista diminuía até a possível quebra da onda.

Os valores limites da altura e do ângulo para quebra de ondas foram atingidos aproximadamente nas simulações. De fato, a altura e o ângulo de quebra das ondas foram respectivamente menores e maiores que os valores fornecidos na

literatura. Os valores exatos previstos pela teoria não foram alcançados devido às limitações intrínsecas de um método numérico.

Como perspectivas de trabalho, estudaremos o método espectral de alta ordem para solução de problemas transientes. Este método é conhecido como HOS (*high-order spectral method*) e está descrito nos trabalhos de Dommermuth & Yue [4], Tsai & Yue [17] e Guangyu [19]. O método empregado em nosso trabalho pode ser visto como um caso particular deste método espectral de alta ordem.

Apêndice A MÉTODO DE NEWTON

O método de Newton (ou método de Newton-Rapson), também conhecido como método das tangentes, tem o objetivo de encontrar uma aproximação para as raízes (ou zeros) de uma função diferenciável f .

Para encontrar a solução, toma-se um ponto qualquer da função, preferencialmente o mais próximo possível da solução desejada, calcula-se a equação da tangente (derivada) da função neste ponto e depois calcula-se o ponto de interseção da tangente ao eixo das abscissas e o valor da função f neste ponto de interseção. Repete-se esse processo até chegar à aproximação desejada das raízes da função. Caso ocorra convergência, isto ocorrerá rapidamente, pois o método possui convergência quadrática.

Um dos defeitos do método é que precisa-se avaliar, em cada iteração, a função f e a sua derivada f' . Além disso, o método converge apenas se a aproximação inicial estiver próxima da solução. Por isso, é preciso uma boa escolha para a aproximação inicial.

Para facilitar os argumentos, assumimos que o valor da derivada f' no ponto requerido é sempre diferente de zero.

O método consiste em executar as iterações

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (\text{A.1})$$

a partir de uma condição inicial bem escolhida x_0 , e assim obter aproximações sucessivas para a raiz z da função f . Isso pode ser visualizado melhor na figura A.1.

Mostramos agora como a fórmula descrita na equação (A.1) se relaciona com a idéia geométrica da figura A.1. Para isso, notamos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_k, f(x_k))$ é dada pela derivada $f'(x_k)$. A única reta com inclinação $f'(x_k)$ que passa por $(x_k, f(x_k))$ é dada pela equação

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

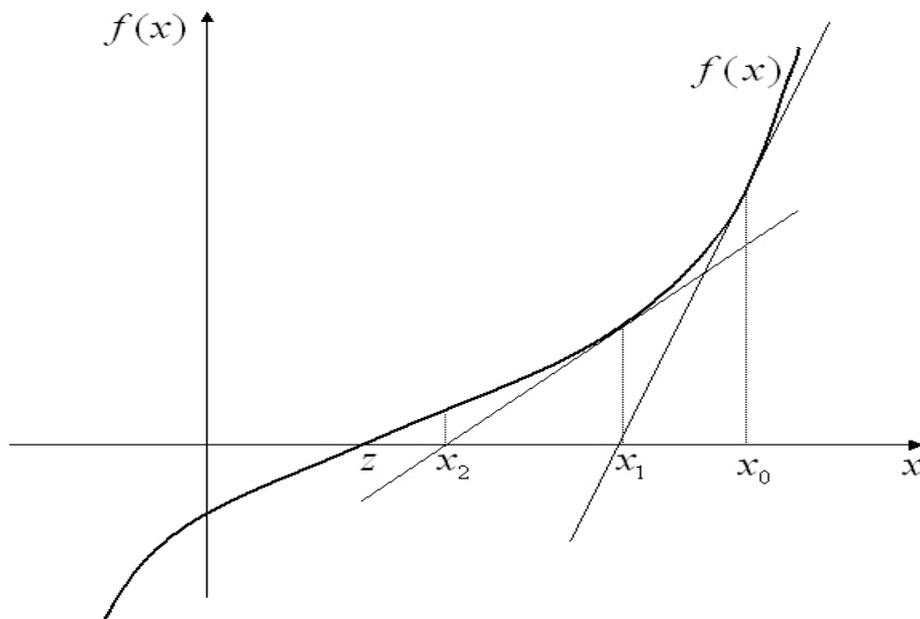


Figura A.1: Método iterativo de Newton para problemas bi-dimensionais. Observe a rápida convergência da sequência $\{x_0, x_1, \dots\}$, para a raiz z .

O ponto x_{k+1} é definido como o valor de x para o qual $y = 0$. Isto é,

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Ou seja,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

A.1 Método de Newton em Dimensões Mais Altas

Suponha que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função diferenciável e estejamos procurando x^* tal que $F(x^*) = 0$. Observe que F leva (x_1, x_2, \dots, x_n) em um elemento de \mathbb{R}^n , que pode ser explicitado por cada uma de suas componentes, isto é,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Então, achar um zero de F é achar uma solução das equações

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

que não são necessariamente lineares.

Para generalizar, examinamos o método descrito para dimensão 1. Assim, aproximando f pela sua expansão em Taylor de ordem 1, temos

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + R_1(x), \quad (\text{A.2})$$

ignorando R_1 , o ponto $x^{(k+1)}$ é definido pelo encontro dessa reta com o eixo das abscissas, ou seja

$$0 = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}),$$

que é a fórmula de Newton dada na equação (A.1).

A expansão em Taylor é igualmente válida em dimensão mais alta. Para primeira ordem, por exemplo, podemos escrever a equação (A.2) como

$$F(x) = F(x^{(k)}) + DF(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + R_1(x),$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, R_1 e F são funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n . $DF(x)$ é a matriz jacobiana no ponto x , isto é,

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Fica implícito que cada uma das derivadas parciais é calculada no ponto x . Portanto, o termo $DF(x^{(k)})(x - x^{(k)})$ é a multiplicação de uma matriz por um vetor (coluna), que resulta em outro vetor.

O resto R_1 tem a propriedade que

$$\lim_{x \rightarrow x^{(k)}} \frac{R_1(x)}{\|x - x^{(k)}\|} = 0.$$

Para definir $x^{(k+1)}$, ignoramos R_1 e igualamos a aproximação de primeira ordem a zero:

$$0 = F(x^{(k)}) + DF(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}).$$

Temos

$$DF(x^{(k)})x^{(k+1)} = DF(x^{(k)})x^{(k)} - F(x^{(k)}).$$

Logo,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [DF(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}). \quad (\text{A.3})$$

Observe que essa equação é um sistema linear, onde $x^{(k+1)}$ é a incógnita.

O método descrito pela equação (A.3) é conhecido como método iterativo de Newton. Este método é usado para resolver sistemas de equações lineares e não-lineares.

Bibliografia

- [1] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. *Análise Numerica*. Pioneira Thomson Learning: São Paulo, 2003. Traduzido por: Ricardo Lenzi Tombi.
- [2] COASTAL AND HYDRAULICS LABORATORY - ENGINEER RESEARCH AND DEVELOPMENT CENTER. *Coastal Engineering Manual*. Vicksburg - Mississippi, 2001.
- [3] COKELET, E. D. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. *Phil. Trans. R. Soc. A. 286* (1977), 183–230.
- [4] DOMMERMUTH, D. G., AND YUE, D. K. P. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics 184* (1987), 267–288.
- [5] EAGLESON, P. S. Properties of shoaling waves by theory and experiment. *Transactions, American Geophysical Union 37* (1956), 565–572.
- [6] FARINA, L. *Ondas Oceânicas de Superfície*. SBMAC, Brasil, 2006.
- [7] FENTON, J. D. The numerical solution of stedy water wave problems. *Computers and Geosciences 14*, 3 (1988), 357–368.
- [8] GROVES, M. D. Steady water waves. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics 11*, 4 (2004), 435–460.
- [9] KINSMAN, B. *Wind Waves - their generation and propagation on the ocean surface*. Prentice-Hall, Inc.: New Jersey, 1965.
- [10] LIGHTHILL, J. *Waves in fluids*. Cambrigge University: Cambrigge, 1979.
- [11] LONGUET-HIGGINS, M. S., F.R.S., AND COKELET, E. D. The deformation of steep surface waves on water I. a numerical method of computation. *Proceedings of the Royal Society of London 350*, 1660 (1976), 1–26.

- [12] NEWMAN, J. N. *Marine Hydrodynamics*. MIT Press: Cambridge, 1977.
- [13] RIENECKER, M. M., AND FENTON, J. D. A fourier approximation method for steady water waves. *Journal of Fluid Mechanics* 104 (1981), 119–137.
- [14] SECRETARIAT OF THE WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION. *Guide to Wave Analysis and Forecasting*, second ed. Geneva - Switzerland, 1998. WMO-No. 702.
- [15] STIASSNIE, M., AND PEREGRINE, D. H. Shoaling of finite-amplitude surface waves on water of slowly-varying depth. *Journal of Fluid Mechanics* 97 (1980), 783–805.
- [16] STOKER, J. J. *Water Waves*. Institute of Mathematical Sciences New York University: New York, 1957.
- [17] TSAI, W., AND YUE, D. K. P. Computation of nonlinear free-surface flows. *Annual Reviews Fluids Mechanics* 28 (1996), 249–278.
- [18] WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons: New York, 1974.
- [19] WU, G. *Direct Simulation and Deterministic Prediction of Larger-scale Nonlinear Ocean Wave-field*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- [20] YEUNG, R. W. Numerical methods in free-surface flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* 14 (1982), 395–442.
- [21] YUEN, H. C., AND LAKE, B. M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. *Advances in Applied Mechanics* 22 (1982), 67–229.